فصل ۳

فضاهای برداری

۳-۱ فضاهای برداری

اغلب خوانندگان با فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ و اعمال جمع و ضرب اسکالر و خواص این اعمال آشنایی دارند. بسیاری از ساختارهای جبری دیگری نیز وجود دارند که روی آنها جمع و ضرب اسکالر تعریف شده و دارای همان خواص بردارها در $\mathbb{R}^n$ می‌باشند. در این بخش نخست تعریفی برای این گونه ساختارهای جبری می‌آوریم و سپس بعضی از آنها را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳-۱-۱ . یک فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ عبارت است از یک مجموعه V از اشیاء که بردار نامیده می‌شوند، همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر که به ترتیب به هر دو عضو x و y از V عضو منحصر به فرد $x + y$ از V و به ازای هر عضو $a \in \mathbb{F}$ و $x \in V$ عضو منحصر به فرد

$ax \in V$ را نسبت می‌دهند، به طوری که شرایط زیر برقرار باشند.

۱) برای هر $x, y \in V$، $x + y = y + x$ (خاصیت جابجایی)

۲) برای هر $x, y, z \in V$، $(x + y) + z = x + (y + z)$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۳) بردار منحصر به فرد $0 \in V$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in V$، $x + 0 = x$ (وجود بردار صفر)

۴) به ازای هر بردار $x \in V$ بردار منحصر به فرد $-x \in V$ وجود داشته باشد به طوری که $x + (-x) = 0$ (وجود بردار قرینه)

۵) به ازای هر بردار $x \in V$، $1x = x$.

۶) به ازای هر دو اسکالر $a, b \in \mathbb{F}$ و هر بردار $x \in V$ داشته باشیم $(ab)x = a(bx)$.

۷) به ازای هر اسکالر $a \in \mathbb{F}$ و هر زوج بردار $x, y \in V$ داشته باشیم $a(x + y) = ax + ay$.

۸) به ازای هر زوج از اسکالرهای $a, b \in \mathbb{F}$ و هر عضو $x \in V$ داشته باشیم $(a+b)x = ax+bx$.

اعضای میدان $\mathbb{F}$، اسکالر و اعضای فضای برداری V، بردار نامیده می‌شوند. همچنین بردار $x + y$ و ax به ترتیب جمع x و y و ضرب اسکالر a و x نامیده می‌شوند.

توجه داشته باشید همان طور که تعریف بیان می‌کند یک فضای برداری ترکیبی از یک مجموعه از بردارها، یک میدان و دو عمل جمع و ضرب اسکالر است. اما در مواردی که ابهامی پیش نیاید و اعمال جمع و ضرب اسکالر و میدان $\mathbb{F}$ مشخص باشند V را فضای برداری عنوان می‌کنیم ولی به هر حال هر فضای برداری روی یک میدان $\mathbb{F}$ همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر در نظر گرفته می‌شود. در اینجا چند مثال در مورد فضاهای برداری که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه می‌کنیم.

مثال ۳-۱-۲ (فضای nـتایی $\mathbb{F}^n$). فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و $\mathbb{F}^n$ مجموعه تمام nتایی‌های $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ از اسکالرهای $a_i \in \mathbb{F}$ باشد، اگر به ازای $u = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ و $c \in \mathbb{F}$ جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف شوند:

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

$$cu = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$$

آنگاه $\mathbb{F}^n$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است.

توجه داشته باشید که اعضای $\mathbb{F}^n$ ممکن است به صورت ستونی $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ نیز نشان داده شوند.

مثال ۳-۱-۳ (فضای ماتریس‌های $m \times n$). فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان، m و n اعداد صحیح و مثبت و همچنین $M_{m\times n}$ نشان دهنده مجموعه تمام ماتریس‌های $m \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. اگر جمع و ضرب اسکالر همان جمع معمولی دو ماتریس و ضرب یک اسکالر در یک ماتریس باشند که در فصل قبل تعریف شد، آنگاه $M_{m\times n}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است. توجه کنید که $M_{1\times n} = \mathbb{F}^n$.

مثال ۳-۱-۴ (فضای توابع پیوسته روی $[a,b]$). فرض کنید $C[a,b]$ مجموعه تمام توابع پیوسته از $[a,b]$ به میدان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد. اگر به ازای $f,g \in C[a,b]$ و اسکالر c، جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(cf)(x) = cf(x)$$

آنگاه $C[a,b]$ یک فضای برداری است. توجه داشته باشید که بردار صفر تابع $f(x) = 0$ و بردار قرینه f، $(-f)$ است که به صورت $(-f)(x) = -f(x)$ تعریف می‌شود.

مثال ۳-۱-۵ (فضای چند جمله‌ای‌های روی میدان $\mathbb{F}$). فضای چند جمله‌ای‌ها، یکی از فضاهای برداری است که مورد استفاده زیاد دارد. یک چند جمله‌ای $f(x)$ روی میدان $\mathbb{F}$ عبارتی است به صورت

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

که در آن n یک عدد صحیح و مثبت و $a_i \in \mathbb{F}$ که ضریب x^i نامیده می‌شود. مجموعه تمام چند جمله‌ای‌های روی میدان $\mathbb{F}$ با $P(\mathbb{F})$ یا به طور اختصار با P نشان داده می‌شود. چند جمله‌ای که تمام ضرایب آن صفر باشند را چند جمله‌ای صفر نامند. بزرگ‌ترین توان x که در تعریف $f(x)$ ظاهر

می‌شود و ضریب آن مخالف صفر است درجه آن چند جمله‌ای نامیده می‌شود. همچنین دو چند جمله‌ای

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

را مساوی گویند هرگاه $m = n$ و $b_i = a_i$ به ازای هر i.

فرض کنید $f, g \in P$،

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

و $m \leq n$. تعریف می‌کنیم $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$. لذا $g(x)$ را می‌توان به صورت

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

نوشت. حال تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

و

$$cf(x) = ca_n x^n + ca_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ca_1 x + a_0$$

با این اعمال P یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ می‌باشد که فضای تمام چند جمله‌ای‌های روی $\mathbb{F}$ نامیده می‌شود. در فصل ۶ بیشتر در مورد چند جمله‌ای‌های روی میدان $\mathbb{F}$ بحث خواهد شد.

مثال ۳-۱-۶ . فرض کنید P_n مجموعه تمام چند جمله‌ای‌های روی میدان $\mathbb{F}$ با درجه کوچکتر یا مساوی n باشند، آنگاه P_n با همان اعمال جمع و ضرب اسکالر مثال قبل یک فضای برداری است.

مثال ۳-۱-۷ . فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و V مجموعه تمام دنباله‌های $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد که $a_n \in \mathbb{F}$. اگر تعریف کنیم:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$$
$$c\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$$

آنگاه V یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است.

مثال ۳-۱-۸ . فرض کنید $S = \{(a_۱, a_۲) | a_۱, a_۲ \in \mathbb{R}\}$ و برای $(a_۱, a_۲), (b_۱, b_۲) \in S$ و $c \in \mathbb{R}$ تعریف کنیم:

$$(a_۱, a_۲) \oplus (b_۱, b_۲) = (a_۱ + b_۱ + ۱, a_۲ + b_۲)$$
$$c(a_۱, a_۲) = (ca_۱ + c - ۱, ca_۲)$$

آنگاه S با این اعمال یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

قضیه زیر با استفاده از تعریف به راحتی نتیجه می‌شود.

قضیه ۳-۱-۹ . اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. آنگاه گزاره‌های زیر درست است.

۱) برای هر $x, y, z \in V$، اگر $x + z = y + z$ آنگاه $x = y$.

۲) برای هر $x \in V$، $۰x = ۰$.

۳) برای هر $c \in \mathbb{F}$، $c۰ = ۰$.

۴) برای هر $x \in V$ و $c \in \mathbb{F}$ داریم $(-c)x = -(cx) = c(-x)$.

تعریف ۳-۱-۱۰ . زیرمجموعه W از فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ یک زیرفضای V نامیده می‌شود هرگاه W با اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی V، یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.

در هر فضای برداری V، $\{۰\}$ یک زیرفضای V است که به آن زیرفضای صفر گویند.
خوشبختانه برای اینکه ثابت کنیم یک زیرمجموعه W از V یک زیرفضای V است لازم نیست تمام شرایط را بررسی کنیم زیرا بعضی از شرایط به طور طبیعی از V به W به ارث می‌رسد. در این رابطه قضیهٔ زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳-۱-۱۱ . فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و W یک زیرمجموعه ناتهی از V باشد، آنگاه W یک زیرفضای V است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد.

۱) برای هر $x, y \in W$، $x + y \in W$.

۲) برای هر $x \in W$ و $c \in \mathbb{F}$، $cx \in W$.

یا به عبارتی، W تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

برهان. اگر W یک زیرفضای V باشد، آنگاه بنا به تعریف، W یک فضای برداری است و در نتیجه شرایط (۱) و (۲) برقرار است.
برعکس، فرض کنید شرایط (۱) و (۲) برقرار باشند، چون W ناتهی است در نتیجه عضوی چون $x \in W$ وجود دارد. بنابراین $-x = (-1)x \in W$ و همچنین $(-1)x + x = 0 \in W$. لذا W دارای بردار صفر و بردار قرینه است. بقیه خواص نیز از خواص جمع و ضرب اسکالر روی V نتیجه می‌شوند و همیشه برقرارند. بنابراین W یک زیرفضای V است. ■

مثال ۳-۱-۱۲ .

۱) مجموعه تمام nتایی‌های $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در $\mathbb{F}^n$ که $x_1 = 0$ باشد یک زیرفضای $\mathbb{F}^n$ است.

۲) مجموعه تمام ماتریس‌های متقارن $n \times n$ یک زیرفضای تمام ماتریس‌های $n \times n$ است.

۳) اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $x \in V$ آنگاه مجموعهٔ

$$W = \{cx | c \in \mathbb{F}\}$$

یک زیرفضای V است.

مثال ۳-۱-۱۳ . اگر A یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد آنگاه مجموعهٔ

$$W = \{AX | X \in \mathbb{R}^n\}$$

یک زیرفضای $\mathbb{R}^m$ است.

حل. نخست توجه کنید که چون A یک ماتریس $m \times n$ و X یک ماتریس $n \times 1$ است بنابراین AX یک ماتریس $m \times 1$ است و بنابراین W زیرمجموعه $\mathbb{R}^m$ است. از طرفی چون اعضای W

به فرم AX هستند و داریم:

$$AX_۱ + AX_۲ = A(X_۱ + X_۲), \quad c(AX) = A(cX)$$

بنابراین W شامل $c(AX)$ و $AX_۱ + AX_۲$ به ازای هر $X_۱, X_۲ \in \mathbb{R}^n$ و $c \in \mathbb{R}$ است. در نتیجه یک زیرفضای $\mathbb{R}^m$ است.

مثال ۳-۱-۱۴ . فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$W = \{X \in \mathbb{R}^n | AX = ۰\}$$

در این صورت W یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است. توجه کنید که W مجموعه جواب دستگاه همگن $AX = ۰$ است.

حل. اگر $X_۱, X_۲ \in W$، آنگاه $AX_۱ = AX_۲ = ۰$ و در نتیجه

$$A(X_۱ + X_۲) = AX_۱ + AX_۲ = ۰$$

و همچنین

$$A(cX_۱) = cAX_۱ = ۰$$

لذا W شامل $X_۱ + X_۲$ و $cX_۱$ به ازای هر $X_۱, X_۲ \in W$، $c \in \mathbb{R}$ است. در نتیجه یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است.

مثال ۳-۱-۱۵ . فرض کنید P مجموعه تمام چند جمله‌ای‌های حقیقی و $a \in \mathbb{R}$ باشد. اگر

$$W = \{p \in P | p(a) = ۰\}$$

آنگاه W یک زیرفضای P است.

حل. اگر $p, q \in W$ و $c \in \mathbb{R}$ آنگاه $p(a) = q(a) = ۰$ و

$$(p+q)(a) = p(a) + q(a) = ۰$$
$$(cp)(a) = cp(a) = ۰.$$

لذا W شامل $p + q$ و cp بوده و در نتیجه یک زیرفضای P است.

مثال ۳-۱-۱۶ . اگر P_n مجموعه تمام چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر n باشد یا به عبارتی دیگر

$$P_n = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

آنگاه P_n یک زیرفضای P است. (چند جمله‌ای صفر را معمولاً با درجه ۱- در نظر می‌گیرند.)

حل. بنا به مثال (۵.۱.۳) جمع دو چند جمله‌ای از درجه m، یک چند جمله‌ای با درجه حداکثر m و حاصل ضرب اسکالر ناصفر c در چند جمله‌ای درجه m، یک چند جمله‌ای از درجه m خواهد بود، لذا P_n یک زیرفضا است.

مثال ۳-۱-۱۷ . فرض کنید P_n فضای برداری تمام چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر n باشد. اگر

$$W = \{p \in P_n \mid p(1) = p(0)\}$$

آنگاه W یک زیرفضای P_n است.

حل. فرض کنیم $p, q \in W$ و $c \in \mathbb{F}$، آنگاه

$$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = p(0) + q(0) = (p+q)(0)$$
$$(cp)(1) = cp(1) = cp(0) = (cp)(0)$$

بنابراین W شامل $p+q$ و cp بوده و در نتیجه یک زیرفضای P_n است.

قضیه ۳-۱-۱۸ . فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد آنگاه اشتراک هر خانواده از زیرفضاهای V یک زیرفضای V است.

برهان. فرض کنیم $\{W_\alpha\}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای V باشد. اگر $x, y \in \bigcap_\alpha W_\alpha$ و $c \in \mathbb{F}$ آنگاه $x, y \in W_\alpha$ برای هر α و چون W_α یک زیرفضاست لذا $x + y \in W_\alpha$ و $cx \in W_\alpha$ برای هر α، در نتیجه $x + y \in \bigcap_\alpha W_\alpha$ و $cx \in \bigcap_\alpha W_\alpha$ بنابراین $\bigcap_\alpha W_\alpha$ یک زیرفضای V است.■

تعریف ۳-۱-۱۹ . اگر W_1، W_2، ... و W_k زیرمجموعه‌هایی از فضای برداری V باشند. مجموع زیرمجموعه‌های W_1، W_2، ... و W_k به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \mid x_i \in W_i,\ 1 \le i \le k\}$$

قضیه ۳-۱-۲۰ .

۱) اگر $W_۱$، $W_۲$، ... و W_k زیرفضاهایی از V باشند. آنگاه $W_۱ + W_۲ + \cdots + W_k$ یک زیرفضای V است که شامل هر کدام از W_iها است.

۲) هر زیرفضای V که شامل $W_۱$، $W_۲$، ... و W_k باشد، شامل $W_۱ + W_۲ + \cdots + W_k$ نیز است.

مثال ۳-۱-۲۱ . فضای برداری $M_{۲\times۲}$ شامل تمام ماتریس‌های ۲×۲ روی میدان اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. فرض‌کنید $W_۱$ تمام ماتریس‌های به فرم $\begin{bmatrix} x & y \\ z & ۰ \end{bmatrix}$ و $W_۲$ شامل تمام ماتریس‌های به فرم $\begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & y \end{bmatrix}$ باشد. به راحتی دیده می‌شود که $W_۱$ و $W_۲$ دو زیرفضای V هستند و $V = W_۱ + W_۲$. زیرا

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & d \end{bmatrix}$$

همچنین $W_۱ \cap W_۲$ شامل تمام ماتریس‌های به فرم $\begin{bmatrix} x & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ است.

تعریف ۳-۱-۲۲ . فضای برداری V را جمع مستقیم زیرفضاهای $W_۱$ و $W_۲$ گوییم و به صورت $V = W_۱ \oplus W_۲$ نمایش می‌دهیم هرگاه $W_۱$ و $W_۲$ زیرفضاهایی از V باشند به طوری که:

$$W_۱ + W_۲ = V, \qquad W_۱ \cap W_۲ = \{۰\}.$$

مثال ۳-۱-۲۳ . زیرفضاهای

$$W_۱ = \{(a_۱, a_۲, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n | a_n = ۰\}$$
$$W_۲ = \{(a_۱, a_۲, \ldots, a_n) | a_۱ = a_۲ = \cdots = a_{n-۱} = ۰\}$$

از $\mathbb{F}^n$ را در نظر بگیرید. آنگاه $\mathbb{F}^n = W_۱ \oplus W_۲$.

تمرین ۱.۳

۱) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(آ) در هر فضای برداری V، اگر $x \in V$ و $a, b \in \mathbb{F}$، آنگاه $ax = bx$ نتیجه می‌دهد $a = b$.

(ب) در هر فضای برداری اگر $x, y \in V$ و $a \in \mathbb{F}$، آنگاه $ax = ay$ نتیجه می‌دهد $x = y$.

(پ) اگر f و g دو چند جمله‌ای از درجه n باشند آنگاه $f + g$ نیز یک چند جمله‌ای از درجه n است.

(ت) اگر f یک چند جمله‌ای از درجه n و $c \neq ۰$ آنگاه cf یک چند جمله‌ای از درجه n است.

(ث) مجموعه تهی، زیرفضای هر فضای برداری است.

(ج) اگر V یک فضای برداری غیرصفر باشد، آنگاه V شامل یک زیرفضای W است که $W \neq V$.

(چ) اگر V یک فضای برداری و W یک زیرمجموعه از V باشد که خود فضای برداری است آنگاه W یک زیرفضای V است.

۲) اعمال جمع و ضرب اسکالر روی $\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \oplus y = x - y$$

$$c \otimes x = -cx$$

که اعمال سمت راست همان اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی روی $\mathbb{R}^n$ هستند. کدامیک از شرایط تعریف فضای برداری برای $\mathbb{R}^n$ با این اعمال جمع و ضرب اسکالر برقرار است؟

۳) فرض کنید V مجموعه تمام توابع مشتق‌پذیر روی فاصله $[a, b]$ باشد. نشان دهید V با همان اعمال تعریف شده در مثال (۴.۱.۳) یک فضای برداری است.

۴) فرض کنید V مجموعه تمام زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی باشد اگر برای هر $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ در V و هر عدد حقیقی c اعمال جمع و ضرب اسکالر را به صورت‌های زیر تعریف کنیم در هر مورد مشخص کنید که آیا V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ هست یا نه؟

(آ) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$ و $c(x_1, y_1) = (cx_1, y_1)$.

(ب) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$ و $c(x_1, y_1) = (cx_1, y_1)$

(پ) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + 2x_2, y_1 + 3y_2)$ و $c(x_1, y_1) = (cx_1, cy_1)$.

۵) کدامیک از مجموعه‌های زیر فضای $\mathbb{R}^3$ هستند.

(آ) $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 | a_1 = 3a_2,\ a_3 = -a_2\}$

(ب) $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 | a_1 = a_3 + 2,\}$

(پ) $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 | 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0\}$

(ت) $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 | a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 1\}$

۶) فرض‌کنید W_1 و W_2 زیرفضاهای V هستند. ثابت‌کنید $W_1 \cup W_2$ یک زیرفضای V است اگر و فقط اگر $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$.

۷) ثابت کنید اگر W یک زیرفضای V باشد و w_1، w_2، ... و w_n متعلق به W باشند، آنگاه $a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n$ نیز در W است.

۸) کدام یک از مجموعه‌های زیر یک زیرفضای فضای برداری $M_{n\times n}$، شامل تمام ماتریس‌های $n \times n$ هستند.

(آ) تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$.

(ب) تمام ماتریس‌های معکوس‌ناپذیر $n \times n$.

(پ) تمام ماتریس‌های A به طوری که $AB = BA$ برای یک ماتریس مشخص B.

(ت) تمام ماتریس‌های A به طوری که $A^2 = A$.

۹) فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از V باشند. ثابت کنید $V = W_1 \oplus W_2$ اگر و فقط اگر به ازای هر بردار $0 \neq x \in V$ ، بردارهای منحصر به فرد $x_1 \in W_1$ و $x_2 \in W_2$ وجود داشته باشند به طوری که $x = x_1 + x_2$.

۱۰) قضیه (۲۰.۱.۳) را ثابت کنید.

۱۱) فرض کنید V فضای برداری تمام توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی روی توابع باشد و V_e و V_o به ترتیب مجموعه تمام توابع زوج و مجموعه تمام توابع فرد باشند. ثابت کنید $V = V_e + V_o$.

۱۲) فرض کنید $M_{n\times n}$ فضای تمام ماتریس‌های $n \times n$، W_1 مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ متقارن و W_2 مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ پادمتقارن باشند ثابت کنید:

$$M_{n\times n} = W_1 \oplus W_2.$$

۳-۲ زیرفضاهای تولید شده و استقلال خطی

فرض کنید V یک فضای برداری و S زیرمجموعه‌ای از این فضا باشد. این سؤال مطرح است که آیا کوچکترین زیرفضایی از V وجود دارد که شامل S باشد و در صورت وجود، چگونه این زیرفضا را می‌توان مشخص نمود. در این بخش به بحثی پیرامون این مطلب می‌پردازیم.

تعریف ۳-۲-۱ . فرض کنیم V یک فضای برداری و S زیرمجموعه ناتهی از V باشد. بردار $v \in V$ را یک ترکیب خطی از اعضای S گوییم اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند $u_۱$، $u_۲$، ... و u_n و اسکالرهای $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n وجود داشته باشند به طوری که:

$$v = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \cdots + a_nu_n$$

در این حالت همچنین می‌گوییم که v ترکیب خطی از بردارهای $u_۱$، $u_۲$، ... و u_n است. $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n ضرایب این ترکیب خطی نامیده می‌شوند.

مثال ۳-۲-۲ . بررسی کنید که آیا بردارهای $(۱, ۱, ۴)$ و $(۱, ۵, ۱)$ ترکیب خطی از بردارهای $v_۱ = (۱, ۲, -۱)$ و $v_۲ = (۳, ۵, ۲)$ هستند؟

حل. برای اینکه $(۱, ۱, ۴)$ ترکیب خطی از $v_۱$ و $v_۲$ باشد باید اسکالرهای s و t را طوری بیابیم که:

$$(۱, ۱, ۴) = s(۱, ۲, -۱) + t(۳, ۵, ۲)$$

با مساوی قرار دادن طرفین این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} s + ۳t = ۱ \\ ۲s + ۵t = ۱ \\ -s + ۲t = ۴ \end{cases}$$

که از حل این دستگاه نتیجه می‌شود $t = ۱$ و $s = -۲$. در نتیجه $(۱, ۱, ۴)$ ترکیب خطی از $v_۱$ و $v_۲$ است.

در حالت مشابه اگر $(۱,۵,۱)$ بخواهد ترکیب خطی از $v_۱$ و $v_۲$ باید اسکالرهای s و t وجود داشته باشند به طوری که:

$$(۱,۵,۱) = s(۱,۲,-۱) + t(۳,۵,۲)$$

یا به عبارتی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} s + ۳t = ۱ \\ ۲s + ۵t = ۵ \\ -s + ۲t = ۱ \end{cases}$$

اما این دستگاه جواب ندارد، بنابراین $(۱,۵,۱)$ یک ترکیب خطی از بردارهای $v_۱$ و $v_۲$ نیست.

قضیه ۳-۲-۳ . فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، آنگاه مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S، یک زیرفضای V است.

برهان. فرض کنیم W مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S باشد. اگر $x, y \in W$ آنگاه x و y ترکیب خطی از اعضای S هستند، بنابراین بردارهای $u_۱$، $u_۲$، ... و u_m و $v_۱$، $v_۲$، ... و v_n در S، اسکالرهای $a_۱$، $a_۲$، ... و a_m و $b_۱$، $b_۲$، ... و b_n در $\mathbb{F}$ وجود دارند به طوری که:

$$x = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \cdots + a_mu_m$$
$$y = b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \cdots + b_nv_n.$$

به وضوح دیده می‌شود که:

$$x + y = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \cdots + a_mu_m + b_۱v_۱ + b_۲v_۲ + \cdots + b_nv_n$$

و به ازای هر $c \in \mathbb{F}$،

$$cx = (ca_۱)u_۱ + (ca_۲)u_۲ + \cdots + (ca_m)u_m$$

ترکیبات خطی از اعضای S هستند. در نتیجه $x + y \in W$ و $cx \in W$. بنابراین W یک زیرفضای V می‌باشد. ■

با توجه به قضیه بالا می‌توان تعریف زیر را آورد.

تعریف ۳-۲-۴ . فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای تولید شده توسط S نامیده شده و با $span\ S$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر:

$$span\ S = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \mid n \in \mathbb{Z}^+, x_i \in S, a_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq n\}.$$

همچنین تعریف می‌کنیم $span\ \emptyset = \{0\}$.

مثال ۳-۲-۵ . زیرفضای تولید شده توسط زیرمجموعه $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ از $\mathbb{R}^3$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\text{span } S &= \{a(1,0,0) + b(0,1,0)\ |a,b \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(a,b,0)\ |a,b \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

مثال ۳-۲-۶ . زیرفضای تولید شده توسط زیرمجموعه $S = \{1,x,x^2\}$ از فضای برداری P برابر است با:

$$\text{span } S = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{F}\} = P_2.$$

مثال ۳-۲-۷ . زیرفضای تولید شده توسط زیرمجموعه $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ از فضای $M_{2\times 2}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\text{span } S &= \left\{a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

قضیه ۳-۲-۸ . زیرفضای تولید شده توسط زیرمجموعه S از فضای برداری V، کوچکترین زیرفضای V است که S را در بر دارد.

برهان. فرض کنید W یک زیرفضای V باشد که S را در بر دارد. اگر $v \in \text{span } S$ آنگاه بردارهای $v_۱$، $v_۲$، ... و v_k در S و اسکالرهای $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k در $\mathbb{F}$ وجود دارند به طوری که:

$$v = a_۱v_۱ + a_۲v_۲ + \cdots + a_kv_k.$$

از آنجاکه $S \subseteq W$، در نتیجه $v_i \in W$ برای $۱ \leq i \leq k$ و چون W یک زیرفضای V است، بنابراین:

$$a_۱v_۱ + a_۲v_۲ + \cdots + a_kv_k \in W.$$

بنابراین $v \in W$ و در نتیجه $\text{span } S \subseteq W$. ■

تعریف ۳-۲-۹ . فرض کنید V یک فضای برداری و $S \subseteq V$، گوییم S فضای V را تولید می‌کند هرگاه $span\ S = V$. همچنین در این صورت گفته می‌شود که اعضای S فضای V را تولید می‌کنند.

مثال ۳-۲-۱۰ . نشان دهید بردارهای $(۱,۱,۰)$، $(۱,۰,۱)$ و $(۰,۱,۱)$ فضای $\mathbb{R}^۳$ را تولید می‌کنند.

حل. فرض کنید $v = (a_۱, a_۲, a_۳)$ یک بردار دلخواه در $\mathbb{R}^۳$ باشد. نشان می‌دهیم که این بردار را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای $(۱,۱,۰)$، $(۱,۰,۱)$ و $(۰,۱,۱)$ نوشت. برای این کار اسکالرهای r، s و t را طوری می‌یابیم که:

$$(a_۱, a_۲, a_۳) = r(۱,۱,۰) + s(۱,۰,۱) + t(۰,۱,۱).$$

با مساوی قرار دادن دو طرف نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a_۱ = r + s \\ a_۲ = r + t \\ a_۳ = s + t \end{cases}$$

با حل این دستگاه نتیجه می‌شود $r = \frac{۱}{۲}(a_۱ + a_۲ - a_۳)$، $s = \frac{۱}{۲}(a_۱ - a_۲ + a_۳)$ و $t = \frac{۱}{۲}(-a_۱ + a_۲ + a_۳)$.

مثال ۳-۲-۱۱ . نشان دهید چند جمله‌ای‌های $x^۲ + ۳x - ۲$، $۲x^۲ + ۵x - ۳$ و $-x^۲ - ۴x + ۴$ فضای $P_۲$ را تولید می‌کنند.

حل. فرض کنیم $p \in P_۲$ یک چند جمله‌ای دلخواه باشد. در این صورت $a, b, c \in \mathbb{F}$ وجود دارند به طوری که $p(x) = ax^۲ + bx + c$. نشان می‌دهیم که p را می‌توان به صورت ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های بالا نوشت. یا به عبارتی وجود دارد $r, s, t \in \mathbb{R}$ به طوری که:

$$r(x^۲ + ۳x - ۲) + s(۲x^۲ + ۵x - ۳) + t(-x^۲ - ۴x + ۴) = ax^۲ + bx + c$$

و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$(r + ۲s - t)x^۲ + (۳r + ۵s - ۴t)x + (-۲r - ۳s + ۴t) = ax^۲ + bx + c.$$

با مساوی قرار دادن ضرایب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} r + ۲s - t = a \\ ۳r + ۵s - ۴t = b \\ -۲r - ۳s + ۴t = c \end{cases}$$

با حل این دستگاه نتیجه می‌شود $r = -۸a + ۵b + ۳c$، $s = ۴a - ۲b - c$ و $t = -a + b + c$. لذا این چند جمله‌ای‌ها $P_۲$ را تولید می‌کنند.

مثال ۳-۲-۱۲ . نشان دهید ماتریس‌های $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ فضای $M_{۲\times۲}$ را تولید می‌کنند.

حل. فرض کنید $\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ یک ماتریس دلخواه در $M_{۲\times۲}$ باشد. نشان می‌دهیم که این ماتریس را می‌توان به صورت ترکیب خطی از ماتریس‌های بالا نوشت. یا به عبارتی اسکالرهای r، s، t و u را طوری می‌یابیم که:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

با مساوی قرار دادن طرفین و حل دستگاه نتیجه می‌شود:

$$r = \frac{۱}{۳}(a_{۱۱} + a_{۱۲} + a_{۲۱} - ۲a_{۲۲})$$
$$s = \frac{۱}{۳}(a_{۱۱} + a_{۱۲} - ۲a_{۲۱} + ۲a_{۲۲})$$
$$t = \frac{۱}{۳}(a_{۱۱} - ۲a_{۱۲} + a_{۲۱} + a_{۲۲})$$
$$u = \frac{۱}{۳}(-۲a_{۱۱} + a_{۱۲} + a_{۲۱} + a_{۲۲})$$

قضیه زیر به سادگی از تعریف نتیجه می‌شود.

قضیه ۳-۲-۱۳ . اگر V یک فضای برداری و $S_۱$ زیرمجموعه‌ای از V باشد که V را تولید کند، آنگاه هر زیرمجموعه $S_۲$ از V که شامل $S_۱$ باشد نیز V را تولید می‌کند.

مثال ۳-۲-۱۴ . مجموعه‌های

$$S_۱ = \{(۱, ۱, ۰), (۱, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱), (۱, ۰, ۰)\},$$
$$S_۲ = \{(۱, ۱, ۰), (۱, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱), (۰, ۰, ۱)\}$$

$\mathbb{R}^۳$ را تولید می‌کنند.

حل. در مثال (۱۰.۲.۳) نشان دادیم که مجموعه $S = \{(۱, ۱, ۰), (۱, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱)\}$، $\mathbb{R}^۳$ را تولید می‌کند، و چون $S_۱$ و $S_۲$ هر دو شامل S هستند، بنابراین $S_۱$ و $S_۲$ هم $\mathbb{R}^۳$ را تولید می‌کنند.

با توجه به قضیه قبل می‌بینیم که مجموعه‌های مختلفی می‌توانند یک فضای برداری را تولید کنند. حال این سؤال مطرح است که کمترین تعداد بردارهایی که می‌توانند یک فضا را تولید کنند چقدر است؟ یا مجموعه با کمترین تعداد عضو که بتواند فضا را تولید کند کدام است؟ در ادامه بحث یک مفهوم دیگر را که برای بررسی این مطلب مورد نیاز است معرفی می‌کنیم و سپس در بخش بعد به طور دقیق به این سؤال پاسخ خواهیم داد.

تعریف ۳-۲-۱۵ . زیرمجموعه S از فضای برداری V را وابسته خطی گوییم هرگاه تعداد متناهی از بردارهای $u_۱$، $u_۲$، ... و u_n در S و اسکالرهای $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n که همگی صفر نیستند وجود

داشته باشند، به طوری که:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$$

همچنین در این صورت گوییم که اعضای S وابسته خطی‌اند.

یک مجموعهٔ S را که وابسته خطی نباشد، مستقل خطی گویند. همچنین در این حالت گفته می‌شود که اعضای S مستقل خطی‌اند.

در حقیقت مجموعه S وابسته خطی است اگر و فقط اگر یکی از بردارهای S را بتوان به صورت ترکیب خطی از دیگر بردارهای S نوشت. زیرا اگر S وابسته خطی باشد، آنگاه بردارهای u_1، u_2، ... و u_n در S و اسکالرهای a_1، a_2، ... و a_n که همگی صفر نیستند وجود دارند به طوری که:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$$

فرض کنید $a_k \neq 0$، در نتیجه داریم:

$$u_k = -\frac{a_1}{a_k}u_1 - \frac{a_2}{a_k}u_2 - \cdots - \frac{a_{k-1}}{a_k}u_{k-1} - \frac{a_{k+1}}{a_k}u_{k+1} - \cdots - \frac{a_n}{a_k}u_n$$

از این رو u_k به صورت ترکیب خطی از دیگر بردارها نوشته می‌شود. برعکس، اگر بردار $u \in S$ به صورت ترکیب خطی از دیگر بردارها باشد، یعنی بردارهای u_1، u_2، ... و u_m در S و اسکالرهای a_1، a_2، ... و a_m وجود داشته باشند به طوری که:

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m,$$

آنگاه:

$$u - a_1u_1 - a_2u_2 - \cdots - a_mu_m = 0,$$

که ضریب u مخالف صفر است و در نتیجه مجموعه S وابسته خطی است.

همچنین بنا به تعریف مجموعه S مستقل خطی است اگر و فقط اگر تنها یک ترکیب خطی از اعضای آن برابر صفر شود که تمام ضرایب صفر باشند یا به عبارت دیگر اگر u_1، u_2، ... و u_m بردارهایی از S باشند به طوری که:

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m$$

آنگاه:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

مثال ۳-۲-۱۶ . بررسی کنید که آیا مجموعهٔ

$$\{(1,3,-4,2),(2,2,-4,0),(1,-3,2,-4),(-1,0,1,0)\}$$

در $\mathbb{R}^4$ مستقل خطی است یا وابسته خطی.

حل. فرض کنید:

$$c_1(1,3,-4,2)+c_2(2,2,-4,0)+c_3(1,-3,2,-4)+c_4(-1,0,1,0)=0.$$

با مساوی قرار دادن طرفین نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} c_1+2c_2+c_3-c_4=0 \\ 3c_1+2c_2-3c_3=0 \\ -4c_1-4c_2+2c_3+c_4=0 \\ 2c_1-4c_3=0 \end{cases}$$

که با حل این دستگاه نتیجه می‌شود:

$$c_1=4, \quad c_2=-3, \quad c_3=2, \quad c_4=0$$

بنابراین این مجموعه وابسته خطی است.

مثال ۳-۲-۱۷ . نشان دهید مجموعه $S=\{(1,0,-1),(2,1,2),(3,-2,0)\}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی است.

حل. فرض کنید:

$$c_1(1,0,-1)+c_2(2,1,2)+c_3(3,-2,0)=0.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

که تنها جواب این دستگاه

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

است. در نتیجه مجموعه S مستقل خطی است.

مثال ۳-۲-۱۸ . نشان دهید $S = \{\sin x, \cos x\}$ در فضای $C[0, 2\pi]$، شامل تمام توابع پیوسته روی فاصله $[0, 2\pi]$، مستقل خطی است.

حل. فرض کنید:

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$$

از آنجا که این معادله باید به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد، به ازای $x = 0$ نتیجه می‌شود $c_2 = 0$ و به ازای $x = \frac{\pi}{2}$ نتیجه می‌شود $c_1 = 0$. در نتیجه این دو تابع مستقل خطی‌اند.

مثال ۳-۲-۱۹ . به ازای $k = 0, 1, \ldots, n$ تعریف می‌کنیم:

$$p_k(x) = x^k + x^{k+1} + \cdots + x^n.$$

نشان دهید مجموعهٔ

$$S = \{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$$

در فضای P_n مستقل خطی است.

حل. فرض کنیم:

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x) = 0$$

آنگاه:

$$c_0 + (c_0 + c_1)x + (c_0 + c_1 + c_2)x^2 + \cdots + (c_0 + c_1 + \cdots + c_n)x^n = 0$$

با مساوی قرار دادن ضرایب در دو طرف معادله نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_0 + c_1 = 0 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 + \cdots + c_n = 0 \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$$

تنها جواب دستگاه است. بنابراین S مستقل خطی است.

قضیه زیر به سادگی از تعریف نتیجه می‌شود. اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۳-۲-۲۰ . فرض کنید V یک فضای برداری و $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$.

۱) اگر S_1 وابسته خطی باشد آنگاه S_2 نیز وابسته خطی است.

۲) اگر S_2 مستقل خطی باشد آنگاه S_1 نیز مستقل خطی است.

۳) اگر $0 \in S_1$ آنگاه S_1 وابسته خطی است.

تمرین ۲.۳

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) اگر S یک مجموعه وابسته خطی باشد آنگاه هر عضو S یک ترکیب خطی از دیگر اعضای S است.

(ب) هر مجموعه شامل صفر وابسته خطی است.

(پ) مجموعه تهی وابسته خطی است.

(ت) زیرمجموعه یک مجموعه وابسته خطی، وابسته خطی است.

(ث) زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی، مستقل خطی است.

(ج) بردار صفر یک ترکیب خطی از هر تعداد بردار دلخواه است.

(چ) فضای تولید شده توسط یک مجموعه تهی، تهی است.

(ح) هر زیرمجموعه مستقل خطی از V این فضا را تولید می‌کند.

(خ) هر زیرمجموعه که فضا را تولید کند مستقل خطی است.

(د) اگر $\operatorname{span} X = \operatorname{span} Y$ آنگاه $X = Y$.

(ذ) اگر $u \in \operatorname{span}\{u_۱, u_۲, \ldots, u_n\}$ آنگاه u به طور منحصر به فردی به صورت ترکیب خطی از $u_۱$، $u_۲$، ... و u_n نوشته می‌شود.

(ر) فرض کنید V یک فضای برداری و $S_۱ \subseteq S_۲ \subseteq V$. اگر $S_۱$، V را تولید کند آنگاه $S_۲$ نیز V را تولید می‌کند.

(ز) اگر $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد آنگاه $\{u, v, u+v\}$ نیز مستقل خطی است.

۲) نشان دهید اگر e_j برداری در $\mathbb{F}^n$ باشد که مختصات jام آن ۱ و بقیه مختصات آن ۰ باشد، آنگاه مجموعه $\{e_۱, e_۲, \ldots, e_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است و $\mathbb{F}^n$ را تولید می‌کند.

۳) نشان دهید مجموعه $\{۱, x, \ldots, x^n\}$ یک مجموعه مستقل خطی در P_n است و P_n را تولید می‌کند.

۴) نشان دهید مجموعه $\left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \right\}$ یک مجموعه مستقل خطی در $M_{۲\times۲}$ است و این فضا را نیز تولید می‌کند.

۵) آیا بردارهای $\alpha_۱ = (۱, ۱, ۲, ۴)$، $\alpha_۲ = (۲, -۱, -۵, ۲)$، $\alpha_۳ = (۱, -۱, -۴, ۰)$، و $\alpha_۴ = (۲, ۱, ۱, ۶)$ در $\mathbb{R}^۴$ مستقل خطی هستند؟ آیا این بردارها $\mathbb{R}^۴$ را پدید می‌آورند؟

۶) هرکدام از بردارهای زیر را به صورت ترکیب خطی از بردارهای $x + ۱$، $x^۲ + x$ و $x^۲ + ۲$ بنویسید.

(آ) $x^{۲}+۳x+۲$ (ب) $۲x^{۲}-۳x+۱$

(پ) $x^{۲}+۱$ (ت) x

۷) هر کدام از بردارهای زیر را به صورت ترکیب خطی از بردارهای $(۱,-۱,۱)$، $(۱,۰,۱)$ و $(۱,۱,۰)$ بنویسید.

(آ) $(۲,۱,-۱)$ (ب) $(۱,-۷,۵)$

(پ) $(\frac{۱}{۲},۲,\frac{۱}{۳})$ (ت) $(۰,۰,۰)$

۸) نشان دهید $\mathbb{R}^{۳}$ توسط مجموعهٔ

$$\{(۱,۱,۰),(۰,۰,۱),(۱,۰,۰),(۱,۰,۱)\}$$

تولید می‌شود.

۹) فرض کنید V یک فضای برداری و α، β و γ سه بردار مستقل خطی در V باشند. نشان دهید $\alpha+\beta$، $\beta+\gamma$ و $\gamma+\alpha$ نیز مستقل خطی‌اند.

۱۰) فرض کنید W زیرفضای تولید شده توسط بردارهای

$$\alpha_{۱}=(۱,۰,۲,۱,-۱)$$
$$\alpha_{۲}=(-۱,۲,-۴,۲,۰)$$
$$\alpha_{۳}=(۲,-۱,۵,۲,۱)$$
$$\alpha_{۴}=(۲,۱,۳,۵,۲)$$

باشد. چه بردارهای $(b_{۱},b_{۲},b_{۳},b_{۴},b_{۵})$ از $\mathbb{R}^{۵}$ در W قرار دارند.

۱۱) فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ ناصفر باشند به طوری که A متقارن و B پادمتقارن باشد. نشان دهید $\{A,B\}$ مستقل خطی است.

۱۲) ثابت کنید اگر S یک زیرمجموعه فضای برداری V باشد، آنگاه $\operatorname{span} S$ برابر است با اشتراک تمام زیرفضاهای V که شامل S هستند.

۱۳) نشان دهید زیرمجموعه W از فضای برداری V یک زیرفضای V است اگر و فقط اگر $\operatorname{span} W=W$.

۱۴) فرض کنید S_1 و S_2 زیرمجموعه‌هایی از فضای برداری V باشند. نشان دهید:

(آ) $\text{span}(S_1 \cup S_2) = \text{span } S_1 + \text{span } S_2$

(ب) $\text{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \text{span } S_1 \cap \text{span } S_2$

(پ) آیا همواره رابطه $\text{span } S_1 \cap \text{span } S_2 \subseteq \text{span}(S_1 \cap S_2)$ نیز برقرار است؟

۱۵) فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ زیرمجموعه‌هایی از فضای برداری V باشند. قرار می‌دهیم:

$$X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

(آ) نشان دهید $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اگر و فقط اگر ماتریس $A_{n\times n}$ وجود داشته باشد به طوری که $AX = Y$.

(ب) نشان دهید اگر ماتریس معکوس‌پذیر A وجود داشته باشد به طوری که $AX = Y$ باشد، آنگاه:

$$\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

۱۶) نشان دهید P، فضای تمام چند جمله‌ای‌ها، نمی‌تواند توسط تعداد متناهی چند جمله‌ای تولید شود.

۱۷) فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای V و A یک ماتریس $n \times n$ باشد. قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

نشان دهید $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مستقل خطی است اگر و فقط اگر A معکوس‌پذیر باشد.

۱۸) فرض کنید A_1، A_2، ... و A_m ماتریس‌هایی در فضای $M_{n\times n}$ باشند. اگر یک بردار ناصفر Y در $\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$A_1Y = A_2Y = \cdots = A_mY = 0$$

آنگاه مجموعه $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ نمی‌تواند $M_{n\times n}$ را تولید کند.

۱۹) فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$، B_1، B_2، ... و B_n ماتریس‌های ستونی و X_1، X_2، ... و X_n جواب‌های دستگاه $AX_i = B_i$ باشند. نشان دهید اگر $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ مستقل خطی باشند آنگاه $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ نیز مستقل خطی است.

۳-۳ پایه و بعد یک فضا

فرض کنید V یک فضای برداری و مجموعهٔ $S = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ فضای V را پدید آورد. در این صورت هر بردار $v \in V$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای $v_۱$، $v_۲$، ... و v_n نوشت. آیا این ترکیب خطی منحصر به فرد است؟ آیا می‌توان با حذف بعضی از v_i از مجموعهٔ S، مجموعه‌ای به‌دست آورد که باز هم V را تولید کند؟ کمترین تعداد بردارهایی که می‌توانند یک فضا را پدید آورند چقدر است؟ در این بخش به مطالعهٔ سؤالات مطرح شده می‌پردازیم.

قضیه ۳-۳-۱ . فرض کنید $S = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارها در فضای برداری V باشد. اگر بردار v دارای دو نمایش

$$v = c_۱ v_۱ + c_۲ v_۲ + \cdots + c_n v_n$$

$$v = d_۱ v_۱ + d_۱ v_۲ + \cdots + d_n v_n$$

از ترکیبات خطی S باشد، آنگاه $c_i = d_i$ به ازای هر i. یا به عبارتی دیگر، نمایش v به صورت ترکیب خطی از اعضای S منحصر به فرد است.

برهان. داریم:

$$c_۱ v_۱ + c_۲ v_۲ + \cdots + c_n v_n = d_۱ v_۱ + d_۱ v_۲ + \cdots + d_n v_n.$$

در نتیجه:

$$(c_۱ - d_۱)v_۱ + (c_۲ - d_۲)v_۲ + \cdots + (c_n - d_n)v_n = ۰.$$

چون S مستقل خطی است، بنابراین باید داشته باشیم $c_i - d_i = ۰$ برای هر i و در نتیجه $c_i = d_i$ برای هر i. ■

قضیه ۳-۳-۲ . فرض کنید یک فضای برداری V توسط n بردار تولید شود آنگاه هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی از V حداکثر n عضو دارد.

برهان. فرض کنید $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$، نشان می‌دهیم که هر مجموعه $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ از بردارهای V که $m > n$ باشد وابسته خطی است. برای این منظور ثابت می‌کنیم که اسکالرهای x_1، x_2، ... و x_m وجود دارند که همگی صفر نیستند و

$$\sum_{j=1}^{m} x_j u_j = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_m u_m = 0.$$

از آنجا که V توسط بردارهای v_1، v_2، ... و v_n تولید می‌شود، بنابراین هر بردار u_j را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای v_i نوشت. فرض کنید:

$$u_j = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + a_{nj} v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

در نتیجه:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j u_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) v_i \qquad (۳\text{-}۱)$$

حال اگر دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیریم،

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1m} x_m = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2m} x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nm} x_m = 0 \end{cases}$$

این دستگاه دارای n معادله و m مجهول است و چون $n < m$ بنا به قضیه (۲.۳.۱) دارای جواب غیربدیهی است. بنابراین اسکالرهای x_1، x_2، ... و x_m که همگی صفر نیستند وجود دارند به طوری که در دستگاه بالا صدق می‌کنند. در نتیجه به ازای این اسکالرها و به ازای هر i،

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 0$$

و از رابطه (۳ـ۱) نتیجه می‌شود به ازای این اسکالرها،

$$\sum_{j=1}^{m} x_j u_j = 0$$

در نتیجه $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ مستقل خطی نیست و این اثبات را کامل می‌کند. ■

تعریف ۳-۳-۳ . فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. مجموعه S را یک پایه برای V گوییم هرگاه S یک زیرمجموعه مستقل خطی از V باشد که V را تولید می‌کند. فضای V را با بعد متناهی گویند هرگاه دارای یک پایه متناهی باشد.

مثال ۳-۳-۴ . فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و $e_i \in \mathbb{F}^n$ برداری باشد که مختصات i ام آن ۱ و بقیه مختصات آن صفر باشد، آنگاه بنا به تمرین ۲ بخش قبل مجموعه $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ یک پایه برای $\mathbb{F}^n$ است. معمولاً این پایه، پایه استاندارد برای $\mathbb{F}^n$ نامیده می‌شود.

مثال ۳-۳-۵ . فرض کنید E_{ij} ماتریسی در فضای $M_{m\times n}$ باشد که درایه (i,j)ام آن ۱ و بقیه درایه‌های آن صفر باشند، آنگاه مشابه تمرین ۴ بخش قبل می‌توان نشان داد که:

$$S = \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, \ \ 1 \leq j \leq n\}$$

یک پایه استاندارد برای $M_{m\times n}$ می‌باشد. این پایه، پایه استاندارد برای $M_{m\times n}$ نامیده می‌شود.

مثال ۳-۳-۶ . بنا به تمرین ۳ بخش قبل مجموعه $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ یک پایه برای P_n است. این پایه، پایه استاندارد برای P_n نامیده می‌شود.

مثال ۳-۳-۷ . مجموعه $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.

حل. نخست ثابت می‌کنیم که این مجموعه مستقل خطی است. بنابراین فرض کنید:

$$c_1(1,0,0) + c_2(1,1,0) + c_3(1,1,1) = 0$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

که از این دستگاه نتیجه می‌شود $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. بنابراین S مستقل خطی است. برای اینکه نشان دهیم S، فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کند باید به ازای هر بردار $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ اسکالرهای r، s و t را بیابیم به طوری که:

$$(x,y,z) = r(1,0,0) + s(1,1,0) + t(1,1,1)$$

یا به طور معادل:

$$\begin{cases} r+s+t = x \\ s+t = y \\ t = z \end{cases}$$

که از این دستگاه نتیجه می‌شود $t = z$، $s = y - z$ و $r = x - y$. بنابراین S یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.

با توجه به مثال قبل می‌بینیم که $\mathbb{R}^3$ علاوه بر پایه استاندارد $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ دارای پایه دیگری مانند $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ نیز بود. بنابراین هر فضا می‌تواند پایه‌های مختلفی داشته باشد. اما ثابت می‌کنیم که به هر حال تعداد بردارهای تمام پایه‌ها باید با هم مساوی باشند.

قضیه ۳-۳-۸ . اگر $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ و $B_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ دو پایه برای فضای برداری V باشند، آنگاه $m = n$.

برهان. بنا به قضیه (۲.۳.۳) چون $V = \operatorname{span} B_1$ و B_2 مستقل خطی است در نتیجه $m \leq n$ و به طور مشابه نتیجه می‌شود $n \leq m$. لذا $m = n$. ■

قضیه بالا بیان می‌کند که تمام پایه‌های یک فضای با متناهی دارای تعداد مساوی عضو هستند. بنابراین می‌توان تعریف زیر را بیان کرد.

تعریف ۳-۳-۹ . فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. تعداد بردارهای یک پایه V را بعد فضای V نامیده و با $dim\ V$ نشان می‌دهند.

مثال ۳-۳-۱۰ . بنا به مثال‌های قبل داریم:

$$\dim M_{m\times n} = mn, \quad \dim P_n = n+1, \quad \dim \mathbb{F}^n = n.$$

مثال ۳-۳-۱۱ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $W = \{X \in M_{2\times 2} | AX = XA\}$. یک پایه برای W یافته و بعد فضای W را مشخص کنید.

حل. فرض کنید $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in W$ $X =$. از آنجا که $AX = XA$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که با مساوی قرار دادن طرفین این رابطه داریم:

$$\begin{cases} x + z = x \\ y + w = x \\ z = 0 \end{cases}$$

بنابراین X به صورت زیر است:

$$X = \begin{bmatrix} y+w & y \\ 0 & w \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$X = y \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر قرار دهیم $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$، آنگاه $W = \operatorname{span} B$ و از آنجا که B مستقل خطی نیز هست پس یک پایه برای W است و $\dim W = 2$.

مثال ۳-۳-۱۲ . فرض کنید:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0,\ x_2 = x_4\}$$

یک زیرفضای $\mathbb{R}^5$ باشد. یک پایه برای W پیدا کرده و بعد آن را مشخص کنید.

حل. فرض کنیم $x \in W$، در نتیجه $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ که در آن $x_1 = -x_3 - x_5$ و $x_2 = x_4$. بنابراین:

$$x = (-x_3 - x_5, x_2, x_3, x_2, x_5)$$

در نتیجه x را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = x_2(0, 1, 0, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0, 0) + x_5(-1, 0, 0, 0, 1).$$

اگر قرار دهیم:

$$B = \{(0, 1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\}$$

آنگاه $W = \text{span } B$. از طرفی به راحتی دیده می‌شود که B یک زیرمجموعه مستقل خطی W نیز هست، بنابراین B یک پایه برای W است و $\dim W = 3$.

مثال ۳-۳-۱۳ . فرض کنید:

$$W = \{f \in P_2 \mid f(0) = f(1)\}.$$

یک پایه برای W یافته و بعد آن را مشخص کنید.

حل. فرض کنید $f \in W$. در نتیجه $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ و $f(0) = f(1)$. اما $f(0) = a_0$ و $f(1) = a_0 + a_1 + a_2$. بنابراین داریم:

$$f(1) = f(0) \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_2$$

در نتیجه:

$$f(x) = a_0 - a_2 x + a_2 x^2 = a_0 + a_2(-x + x^2)$$

بنابراین اگر قرار دهیم $B=\{1,-x+x^2\}$ آنگاه $W=\text{span } B$ و از آنجا که B یک زیرمجموعه مستقل خطی W نیز هست در نتیجه B یک پایه برای W است و $\dim W=2$.

در مثال قبل می‌توانستیم بنویسیم $W=\text{span } B'$ که در آن $B'=\{1,-x,x^2\}$ و همچنین B' یک مجموعه مستقل خطی نیز هست. در نتیجه یک پایه برای W بوده و $\dim W=3$ می‌باشد. این مطلب با قضیه (۸.۳.۳) تناقض دارد. اشکال این استدلال در کجاست؟

مثال ۳-۳-۱۴ . فرض کنید W مجموعه تمام ماتریس‌های متقارن در فضای $M_{2\times 2}$ باشد. یک پایه برای W یافته و بعد آن را مشخص کنید.

حل. فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in W$ در نتیجه داریم $b=c$. لذا،

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین اگر قرار دهیم $B=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ آنگاه $W=\text{span } B$ و از آنجا که B یک زیرمجموعه مستقل خطی W نیز می‌باشد بنابراین یک پایه برای W است و $\dim W=3$.

از قضیه (۲.۳.۳) نتیجه می‌شود اگر V یک فضای برداری با بعد n باشد، آنگاه هر زیرمجموعه مستقل خطی آن حداکثر n عضو دارد و همچنین هر مجموعه‌ای که این فضا را پدید آورد حداقل n عضو دارد که با توجه به اهمیت این مطلب آن را به صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۳-۳-۱۵ . فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n باشد. آنگاه:

۱) هر زیرمجموعه V با بیش از n عضو وابسته خطی است.

۲) هیچ زیرمجموعه V با کمتر از n عضو، نمی‌تواند V را پدید آورد.

مثال ۳-۳-۱۶ . فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه n^2+1 اسکالر a_0، a_1، ... و a_{n^2} که همگی صفر نیستند وجود دارند به طوری که:

$$a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{n^2}A^{n^2}=0$$

حل. فضای $M_{n\times n}$ دارای بعد n^{2} است. بنابراین بنا به قضیه قبل، $n^{2}+1$ ماتریس I، A، A^{2}، ... و $A^{n^{2}}$ نمی‌توانند مستقل خطی باشند. در نتیجه اسکالرهای a_0، a_1، ... و $a_{n^{2}}$ که همگی صفر نیستند وجود دارند به طوری که:

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^{2} + \cdots + a_{n^{2}} A^{n^{2}} = 0$$

تا اینجا تعریف پایه برای یک فضای برداری را آوردیم. ولی حال این سؤال مطرح است که آیا هر فضای برداری لزوماً دارای یک پایه است؟ آیا همیشه می‌توان در مورد بعد فضا صحبت کرد؟ در ادامه بحث ثابت می‌کنیم که هر فضای برداری که توسط تعداد متناهی بردار تولید شود حتماً دارای یک پایه است. اما نخست یک قضیه را بیان می‌کنیم که ارتباط بین مستقل خطی بودن و تولید کردن فضا را بیان می‌کند.

قضیه ۳-۳-۱۷ . فرض کنید S یک زیرمجموعه مستقل خطی از فضای برداری V باشد و $v \notin span\ S$، در این صورت مجموعه $S\cup\{v\}$ مستقل خطی است.

برهان. فرض کنید v_1، v_2، ... و v_m بردارهای مجزایی در S باشند و

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m + cv = 0.$$

اگر $c \neq 0$ باشد، آنگاه:

$$v = -\frac{c_1}{c}v_1 - \frac{c_2}{c}v_2 - \cdots - \frac{c_m}{c}v_m$$

و $v \in \operatorname{span} S$ که خلاف فرض است. بنابراین $c = 0$ و در نتیجه:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m = 0.$$

حال از آنجا که S مستقل خطی است خواهیم داشت:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

بنابراین $S\cup\{v\}$ مستقل خطی است. ■

قضیه ۳-۳-۱۸ . فرض کنید V یک فضای برداری غیرصفر باشد که توسط n بردار تولید می‌شود. آنگاه:

۱) هر مجموعه مستقل خطی از بردارهای V زیرمجموعه‌ای از یک پایه برای V است.

۲) هر مجموعه متناهی تولید کننده V شامل یک پایه از V می‌باشد.

۳) V دارای یک پایه است و $dim\ V \leq n$.

برهان.

۱) فرض کنید $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از V باشد. اگر $V = \text{span } S$، آنگاه S یک پایه برای V است. در غیر این صورت، $V \neq \text{span } S$. لذا بردار $v_{k+1} \in V \setminus \text{span } S$ را انتخاب می‌کنیم. بنا به قضیه قبل مجموعه

$$S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$$

مستقل خطی است، اگر $V = \text{span } S_1$ که نتیجه می‌شود S_1 یک پایه برای V، شامل S است. در غیر این صورت مشابه مرحله قبل اگر $v_{k+1} \in V \setminus \text{span } S_1$ باشد، آنگاه

$$S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}\}$$

مستقل خطی است. اما این روند حداکثر تا $n-k$ مرتبه می‌تواند تکرار شود، زیرا V توسط n بردار تولید شده است. لذا مجموعه مستقل خطی $S_m = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m\}$ که $m \leq n$ پیدا می‌شود به طوری که $V = \text{span } S_m$. در نتیجه S_m یک پایه برای V بوده و شامل S نیز می‌شود.

۲) فرض کنید $V = \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. همچنین فرض می‌کنیم که هر $v_i \neq 0$، زیرا در غیر این صورت می‌توان بردارهای صفر را از این مجموعه حذف کرد و چون $V \neq \{0\}$، حتماً بردار غیرصفری در این مجموعه باقی می‌ماند. اگر $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ مستقل خطی باشد که یک پایه برای V تشکیل می‌دهد؛ در غیر این صورت یکی از این بردارها را می‌توان به صورت ترکیب خطی از دیگر بردارها نوشت. با تغییر اندیس در صورت لزوم، فرض می‌کنیم v_1 متعلق به $\text{span}\{v_2, \ldots, v_m\}$ باشد. در نتیجه:

$$V = \text{span}\{v_2, \ldots, v_m\}.$$

حال اگر $\{v_۲, \dots, v_m\}$ مستقل خطی باشد که تشکیل یک پایه برای V می‌دهد و اثبات کامل است. در غیر این صورت، همان روند قبل را ادامه می‌دهیم. اگر در یک مرحله به یک مجموعهٔ مستقل رسیدیم که اثبات تمام است در غیر این صورت پس از $m - ۱$ مرحله نتیجه می‌شود $V = \text{span}\{v_m\}$ و چون $v_m \neq ۰$، بنابراین $\{v_m\}$ یک پایه برای V است.

۳) چون V غیرصفر است، بنابراین شامل عضو غیرصفری مانند v هست. در نتیجه $\{v\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی در V می‌باشد. بنا به قسمت (۱)، $\{v\}$ را می‌توان به یک پایه برای V گسترش داد که حداکثر n عضو دارد. بنابراین V دارای پایه‌ای با حداکثر n عضو است و این اثبات را کامل می‌کند.

■

نتیجه ۳-۳-۱۹ . اگر W یک زیرفضای محض فضای برداری V با بعد متناهی باشد آنگاه W نیز با بعد متناهی است و $\dim W < \dim V$.

برهان. می‌توان فرض کرد که W شامل یک بردار $v \neq ۰$ است. بنا به قضیه قبل یک پایه B برای W وجود دارد که شامل $\{v\}$ است. از آنجا که B در V مستقل خطی است، بنابراین تعداد اعضای B حداکثر برابر با $\dim V$ است و در نتیجه $\dim W \leq \dim V$. از طرفی چون $W \neq V$ است بنابراین $V \setminus W$ ناتهی است و $u \in V \setminus W$ وجود دارد. بنابراین $B \cup \{u\}$ یک مجموعه مستقل خطی در V است. در نتیجه $\dim W < \dim V$. ■

نتیجه ۳-۳-۲۰ . اگر W یک زیرفضای فضای برداری با بعد متناهی V باشد و $\dim W = \dim V$، آنگاه $W = V$.

نتیجه ۳-۳-۲۱ . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد که بردارهای سطری آن در $\mathbb{F}^n$ مستقل خطی‌اند، در این صورت A معکوس‌پذیر است.

برهان. فرض کنید $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ... و α_n بردارهای سطری A باشند و W زیرفضایی از $\mathbb{F}^n$ باشد که توسط این بردارها تولید شده است. چون $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ... و α_n مستقل خطی‌اند بنابراین $\dim W = n$ و بنا به نتیجه قبل $W = \mathbb{F}^n$. لذا $\mathbb{F}^n = \text{span}\{\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n\}$، بنابراین اگر $\{e_۱, e_۲, \dots, e_n\}$

پایه استاندارد برای $\mathbb{F}^n$ باشند آنگاه اسکالرهای b_{ij} در $\mathbb{F}$ وجود دارند به طوری که:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\alpha_j \qquad 1 \leq i \leq n.$$

قرار می‌دهیم $B = (b_{ij})$ در نتیجه $BA = I$. ■

قضیه ۳-۳-۲۲ . فرض کنید V یک فضای برداری با بعد $n > 0$ باشد. آنگاه:

۱) هر مجموعه مستقل خطی شامل n بردار یک پایه برای V است.

۲) هر مجموعه شامل n بردار که V را تولید کند یک پایه برای V است.

برهان.

۱) فرض کنید S یک مجموعه مستقل خطی شامل n بردار باشد که $\text{span } S \neq V$. بنا به قسمت (۱) قضیه قبل، S قسمتی از یک پایه برای V است که این پایه بیش از n عضو دارد. در نتیجه بعد V بزرگ‌تر از n می‌باشد و این یک تناقض است. بنابراین S، V را تولید می‌کند و یک پایه برای V است.

۲) فرض کنید مجموعهٔ n عضوی S، V را تولید کند. اگر S مستقل خطی نباشد بنا به قسمت (۲) قضیه قبل S شامل پایه‌ای با کمتر از n عضو است و در نتیجه بعد V کوچک‌تر از n می‌باشد که این نیز یک تناقض است. پس S مستقل خطی و در نتیجه یک پایه برای V است.

■

مثال ۳-۳-۲۳ . فرض کنید a یک اسکالر و W زیرفضایی از P_n باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W = \{p \in P_n | p(a) = 0\}$$

نشان دهید $B = \{(x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$ یک پایه برای W است.

حل. نخست توجه کنید که $(x-a)$، $(x-a)^2$، ... و $(x-a)^n$ اعضای W هستند و به راحتی نتیجه می‌شود مستقل خطی نیز هستند. تعریف می‌کنیم:

$$U = \text{span}\{(x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$$

درنتیجه $U \subseteq W \subseteq P_n$ اما $\dim U = n$ و $\dim P_n = n+1$. بنابراین $n \leq \dim W \leq n+1$، در نتیجه $W = P_n$ یا $U = W$. از آنجا که $W \neq P_n$ است پس $W = U$. از این‌رو B یک پایه برای W است.

تمرین ۳.۳

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) فضای برداری صفر دارای هیچ پایه‌ای نیست.

(ب) هر فضای برداری که توسط تعداد متناهی بردار تولید شود دارای یک پایه است.

(پ) هر فضای برداری دارای یک پایه متناهی است.

(ت) اگر $S_۱$ و $S_۲$ هر دو پایه‌ای برای فضای V باشد، آنگاه $S_۱ = S_۲$.

(ث) اگر یک فضای برداری دارای یک پایه متناهی باشد، آنگاه تعداد بردارها در هر پایه با هم مساویند.

(ج) P_n یک فضای n بعدی است.

(چ) $M_{m\times n}$ یک فضای $m+n$ بعدی است.

(ح) اگر V یک فضای برداری باشد که توسط $S_۱$ تولید می‌شود و $S_۲$ یک مجموعه مستقل خطی از V باشد آنگاه $S_۲ \subseteq S_۱$.

(خ) اگر B یک پایه برای فضای برداری با بعد متناهی V باشد و S یک مجموعه مستقل خطی در V باشد آنگاه $S \subset B$.

(د) اگر فضای برداری V توسط $S_۱$ و $S_۲$ تولید شود، آنگاه $S_۱ \cap S_۲$ نیز این فضا را تولید می‌کند.

(ذ) اگر V یک فضای برداری با بعد n باشد. آنگاه به ازای هر $۰ \leq k \leq n$، V دارای یک و تنها یک زیرفضای k بعدی است.

(ر) اگر $S_۱$ و $S_۲$ دو زیرمجموعه مستقل خطی در فضای برداری V باشند و $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$ آنگاه $S_۱ \cup S_۲$ نیز یک مجموعه مستقل خطی در V است.

(ز) $P_۳$ دارای پایه‌ای شامل چند جمله‌ای‌های $f(x)$ است به طوری که $f(۰) = ۰$.

(ژ) P_3 دارای پایه‌ای شامل چند جمله‌ای‌های $f(x)$ است به طوری که $f(0) = 1$.

(س) هر پایه $M_{2\times 2}$ شامل یک ماتریس معکوس‌ناپذیر است.

(ش) هیچ زیرمجموعهٔ مستقل خطی از $M_{2\times 2}$ شامل ماتریس A به طوری‌که $A^2 = 0$ نیست.

۲) کدامیک از مجموعه‌های زیر یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ هستند.

(آ) $\{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$

(ب) $\{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\}$

(پ) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}$

(ت) $\{(1, -3, -2), (-3, 1, 3), (-2, -10, -2)\}$

۳) کدامیک از مجموعه‌های زیر یک پایه برای P_2 هستند؟

(آ) $\{-1 - x + 2x^2, 2 + x - 2x^2, 1 - 2x + 4x^2\}$

(ب) $\{1 + 2x + x^2, 3 + x^2, x + x^2\}$

(پ) $\{1 + 2x - x^2, 4 - 2x + x^2, -1 + 18x - 9x^2\}$

۴) بردارهای $u_1 = (2, -3, 1)$، $u_2 = (1, 4, -2)$، $u_3 = (-8, 12, -4)$، $u_4 = (1, 37, -7)$ و $u_5 = (-3, -5, 8)$ فضای $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کنند. زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ را بیابید که یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ باشد.

۵) یک پایه برای زیرفضای W از فضای $\mathbb{R}^5$ بیابید هرگاه:

(آ) $W = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) | a_1 - a_3 - a_4 = 0\}$

(ب) $W = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) | a_2 = a_3 = a_4,\ a_1 + a_5 = 0\}$

۶) یک پایه برای فضای جواب دستگاه $AX = 0$ پیدا کنید هرگاه:

(آ) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(ب) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(پ) $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

۷) یک پایه برای زیرفضای W از فضای ماتریس‌های $n \times n$ یافته و بعد فضا را مشخص کنید، هرگاه:

(آ) $W = \{A \in M_{n\times n} | \text{tr } A = 0\}$

(ب) $W = \{A \in M_{n\times n}$ | یک ماتریس بالامثلثی است $A\}$

(پ) $W = \{A \in M_{n\times n} | A^t = A\}$

(ت) $W = \{A \in M_{n\times n} | A^t = -A\}$

۸) در هر یک از موارد زیر یک پایه برای زیرفضای W از فضای P_3 یافته و بعد فضا را مشخص کنید.

(آ) $W = \{f \in P_3 | f(0) = 0\}$

(ب) $W = \{f \in P_3 | f(0) = f(1)\}$

(پ) $W = \{f \in P_3 | f(x) = f'(x)\}$

(ت) $W = \{f \in P_3 | f(x) = f(-x)\}$

(ث) $W = \{f \in P_3 | f(x) = -f(-x)\}$

۹) نشان دهید اگر B یک ماتریس معکوس‌پذیر و $\{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{mn}\}$ یک پایه برای فضای ماتریس‌های $M_{m\times n}$ باشد آنگاه $\{A_{11}B, A_{12}B, \dots, A_{mn}B\}$ نیز یک پایه برای این فضا است. آیا اگر B معکوس‌پذیر نباشد باز هم این مسأله درست است؟

۱۰) نشان دهید $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است اگر و فقط اگر $\{a_1+b_1x, a_2+b_2x\}$ یک پایه برای P_1 باشد.

۱۱) فرض کنید V فضای تمام توابع از مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ به $\mathbb{R}$ باشد. اگر تعریف کنیم $s_i(j) = \delta_{ij}$، نشان دهید $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ یک پایه برای این فضا است.

۱۲) فرض کنید $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی ماکسیمال در فضای برداری V باشد. نشان دهید S یک پایه برای V است.

۱۳) فرض کنید $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه تولید کننده می‌نیمال V باشد بدین مفهوم که هیچ زیرمجموعه محض آن V را تولید نکند. نشان دهید که S یک پایه برای V است.

۱۴) نشان دهید اگر $B = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ زیرمجموعه‌ای از P_n باشد و اسکالرهای a_0، a_1، ... و a_n وجود داشته باشند به طوری که $p_i(a_i) = 1$ و $p_i(a_j) = 0$ برای $i \neq j$ و $i, j = 1, 2, \ldots, n$. آنگاه B یک پایه برای P_n است.

۱۵) نشان دهید اگر $\{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشند، آنگاه:

$$\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, v_3\}$$

نیز یک پایه برای V است.

۱۶) فرض کنید $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n در فضای P_n باشد. ثابت کنید مجموعه $\{f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\}$ فضای P_n را تولید می‌کند. آیا این مجموعه یک پایه برای P_n هست؟

۱۷) نشان دهید:

(آ) اگر $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ و $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ زیرمجموعه‌هایی از فضای برداری V باشند، آنگاه:

$$\operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} + \operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

(ب) اگر W_1 و W_2 زیرفضاهای با بعد متناهی از فضای برداری V باشند، آنگاه W_1+W_2 نیز با بعد متناهی است و $\dim(W_1+W_2) \leq \dim\, W_1 + \dim\, W_2$.

(پ) اگر W_1 و W_2 زیرفضاهایی با بعد متناهی باشند و $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ آنگاه:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim\, W_1 + \dim\, W_2.$$

(ت) اگر W_1 و W_2 زیرفضاهایی با بعد متناهی از فضای V باشند آنگاه:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim\, W_1 + \dim\, W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

(راهنمایی: پایه‌ای برای $W_1 \cap W_2$ در نظر بگیرید و آن را به پایه‌هایی برای W_1 و W_2 گسترش دهید.)

۱۸) فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از فضای با بعد متناهی V باشند. شرط لازم و کافی روی W_1 و W_2 را بیابید به طوری که $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1$.

۱۹) فرض کنید:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{F} \right\}$$

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{F} \right\}$$

بعد فضاهای W_1، W_2، $W_1 \cap W_2$ و W_1+W_2 را بیابید.

۲۰) فرض کنید W_1 و W_2 زیرفضاهایی از فضای با بعد متناهی V باشند به طوری که:

$$V = W_1 \oplus W_2$$

نشان دهید اگر B_1 و B_2 به ترتیب پایه‌هایی برای W_1 و W_2 باشند، آنگاه $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ و $B_1 \cup B_2$ یک پایه برای V است.

۲۱) نشان دهید اگر B_1 و B_2 به ترتیب پایه‌های مجزای زیرفضاهای W_1 و W_2 از فضای برداری V باشند، به طوری که $B_1 \cup B_2$ یک پایه برای V است. آنگاه:

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

۲۲) ثابت کنید اگر W_1 یک زیرفضای، فضای برداری با بعد متناهی V باشد، آنگاه زیرفضای W_2 از V وجود دارد به طوری که $V = W_1 \oplus W_2$.

۲۳) فرض کنید W یک زیرفضای فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. به ازای هر $v \in V$ مجموعهٔ $v + W = \{v + w | w \in W\}$ را هم‌مجموعه W می‌نامند. ثابت کنید:

(آ) $v + W$ یک زیرفضای V است اگر و فقط اگر $v \in W$.

(ب) $v_1 + W = v_2 + W$ اگر و فقط اگر $v_1 - v_2 \in W$.

۲۴) فرض کنید:

$$S = \{v + W | v \in V\}$$

خانوادهٔ تمام هم‌مجموعه‌های W باشد. اگر دو عمل جمع و ضرب اسکالر روی S را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\forall v_1, v_2 \in V \qquad (v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$$

$$\forall c \in \mathbb{F},\ v \in V \qquad c(v + W) = cv + W$$

(آ) ثابت کنید این اعمال خوش تعریف هستند.

(ب) ثابت کنید S با این اعمال یک فضای برداری است. (این فضای برداری «فضای خارج قسمت V به سنج W» نامیده شده و بانماد V / W نشان داده می‌شود.)

۲۵) فرض کنید W یک زیرفضای فضای برداری با بعد متناهی V باشد و $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ یک پایه برای W باشد. اگر این پایه را به یک پایه $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ برای V گسترش دهیم:

(آ) ثابت کنید $\{u_{k+1} + W, u_{k+2} + W, \ldots, u_n + W\}$ یک پایه برای V / W است.

(ب) چه رابطه‌ای بین $\dim V$، $\dim W$ و $\dim V / W$ برقرار است؟

۳-۴ مختصات یک بردار

در این بخش به تعمیم مفهوم «مختصات یک بردار» از فضای $\mathbb{F}^n$ به فضاهای برداری دیگر می‌پردازیم. اگر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک بردار در $\mathbb{F}^n$ باشد، x_i مختصات iام بردار x نامیده می‌شد. از طرفی اگر $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ پایه استاندارد برای $\mathbb{F}^n$ باشد و x به صورت ترکیب خطی از اعضای این پایه نوشته شود آنگاه:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

بنابراین x_i یا مختصات iام بردار x، دقیقاً ضریب بردار e_i در ترکیب خطی بالا است. حال این سؤال مطرح است که آیا می‌توان این مطلب را برای فضاهای برداری دلخواه و هر پایه B تعمیم داد؟

اولین نکته‌ای که در اینجا باید به آن توجه کرد ترتیب بردارها در پایه B است. یعنی همواره e_i به عنوان iامین بردار در این مجموعه است. در صورتی که در تعریف پایه برای فضاهای برداری ترتیب بردارها در مجموعه مهم نبود و هرگونه جابجایی بردارها و تغییر ترتیب آنها مجدداً همان پایه را به ما می‌داد. بنابراین اولین قدم این است که تعریفی بیاوریم که ترتیب بردارها در یک پایه را مورد اهمیت قرار دهد. در این صورت می‌توان مشابه $\mathbb{F}^n$، مختصات یک بردار را نسبت به یک پایه تعریف کرد.

تعریف ۳-۴-۱ . فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، یک پایه مرتب برای V، پایه‌ای است که با ترتیب مشخصی در نظر گرفته شود. یا به عبارت دیگر، یک پایه مرتب یک دنباله متناهی از بردارهای مستقل خطی است که V را تولید کنند.

توجه داشته باشیم که تفاوت اساسی بین یک پایه و پایه مرتب این است که اگر B را یک پایه برای V در نظر بگیریم آنگاه هرگونه جابجایی اعضای B تغییری در آن حاصل نمی‌کند و همان پایه B را به ما می‌دهد. اما اگر همین پایه را به عنوان پایه مرتب در نظر بگیریم دیگر مجاز به تغییر ترتیب اعضای B نیستیم و هرگونه جابجایی در این ترتیب، پایه دیگری را به ما می‌دهد که با B یکی نیست.

مثال ۳-۴-۲ . اگر $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ و $B' = \{e_2, e_1, e_3\}$ دو پایه مرتب برای $\mathbb{F}^3$ در نظر گرفته شوند آنگاه $B \neq B'$.

پایه $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ را پایه مرتب استاندارد برای $\mathbb{F}^n$ و پایه $\{1, x, \ldots, x^n\}$ را پایه مرتب استاندارد برای P_n می‌نامند.

حال با توجه به تعریف بالا مفهوم مختصات یک بردار را به صورت زیر به فضاهای برداری تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۳-۴-۳ . فرض کنید $B=\{v_۱,v_۲,\dots,v_n\}$ یک پایه مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V باشد. به ازای $x\in V$، فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n اسکالرهای منحصر به فردی باشند که:

$$x=x_۱v_۱+x_۲v_۲+\cdots+x_nv_n.$$

مختصات بردار x نسبت به پایه B با نماد $[x]_B$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[x]_B=\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

مثال ۳-۴-۴ . اگر $B=\{۱,x,x^۲\}$ پایه مرتب استاندارد برای $P_۲$ باشد و $f(x)=۴+۶x-۷x^۲$ آنگاه:

$$[f]_B=\begin{bmatrix}۴\\۶\\-۷\end{bmatrix}.$$

مثال ۳-۴-۵ . اگر

$$B=\left\{\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۰\\۱&۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\right\}$$

پایه مرتب استاندارد برای $M_{۲\times۲}$ باشد و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه:

$$[A]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} .$$

مثال ۳-۴-۶ . فرض کنید $B = \{۱, (۱-x), (۱-x)^۲\}$ یک پایه مرتب برای $P_۲$ باشد. اگر $[f]_B = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ بردار f کدام است؟

حل. با توجه به تعریف مختصات یک بردار داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= ۵ \times ۱ - ۳(۱-x) + ۲(۱-x)^۲ \\ &= ۴ - x + ۲x^۲ \end{aligned}$$

در حالت کلی فرض کنید $B = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V باشد و $x \in V$ به طوری که:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

آنگاه:

$$x = c_۱v_۱ + c_۲v_۲ + \cdots + c_nv_n .$$

قضیه زیر از تعریف به راحتی نتیجه می‌شود.

قضیه ۳-۴-۷ . اگر B یک پایه مرتب برای فضای برداری با بعد متناهی V، $x, y \in V$ و $c \in \mathbb{F}$ باشند آنگاه:

۱) $[x+y]_B = [x]_B + [y]_B$

۲) $[cx]_B = c[x]_B$

می‌دانیم که در $\mathbb{R}^۲$، بعضی مواقع نیاز به انتقال دستگاه مختصات یا دوران دستگاه مختصات بود و پس از انتقال دستگاه مختصات، مختصات هر نقطه در دستگاه جدید را می‌توانستیم با استفاده از مختصات آن نقطه در دستگاه قبلی محاسبه کنیم. حال در اینجا این سؤال مطرح است که اگر B و B' دو پایه مرتب برای یک فضای برداری با بعد متناهی باشد چه رابطه‌ای بین مختصات یک بردار نسبت به پایه‌های B و B' وجود دارد و چگونه می‌توان با داشتن مختصات بردار نسبت به یکی از این پایه‌ها، مختصات آن را نسبت به پایه دیگر به‌دست آورد؟ قضیهٔ زیر به این سؤال پاسخ می‌دهد.

قضیه ۳-۴-۸ . فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی میدان $\mathbb{F}$، B و B' دو پایه مرتب برای V باشند. در این صورت ماتریس $n \times n$ منحصر به فرد و لزوماً معکوس‌پذیر P وجود دارد به طوری که برای هر $x \in V$،

$$[x]_B = P[x]_{B'}$$
$$[x]_{B'} = P^{-۱}[x]_B.$$

علاوه بر این ستون‌های P با رابطه زیر داده می‌شوند:

$$P_j = [v'_j]_B.$$

که v'_j اعضای پایه B' هستند. این ماتریس، ماتریس تغییر مختصات از پایه B' به پایه B یا به طور خلاصه ماتریس تغییر مختصات نامیده می‌شود.

برهان. فرض کنید $B = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ و $B' = \{v'_۱, v'_۲, \dots, v'_n\}$ پایه‌های مرتب برای V

باشند و برای $x \in V$ داشته باشیم:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad [x]_{B'} = \begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

همچنین فرض کنید:

$$[v'_j]_B = \begin{bmatrix} P_{۱j} \\ P_{۲j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{bmatrix} \qquad ۱ \leq j \leq n$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} x &= x'_۱ v'_۱ + x'_۲ v'_۲ + \cdots + x'_n v'_n = \sum_{j=۱}^{n} x'_j v'_j \\ &= \sum_{j=۱}^{n} x'_j \left(\sum_{j=۱}^{n} P_{ij} v_i \right) = \sum_{j=۱}^{n} \sum_{i=۱}^{n} (P_{ij} x'_j) v_i \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \left(\sum_{j=۱}^{n} P_{ij} x'_j \right) v_i. \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} \sum_{j=۱}^{n} P_{۱j} x'_j \\ \sum_{j=۱}^{n} P_{۲j} x'_j \\ \vdots \\ \sum_{j=۱}^{n} P_{nj} x'_j \end{bmatrix}.$$

اما مختصات x نسبت به پایه B منحصر به فرد است. بنابراین باید داشته باشیم:

$$x_i = \sum_{j=۱}^{n} P_{ij} x'_j \qquad ۱ \leq i \leq n.$$

که این عبارت را می‌توان به صورت ضرب ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

یا به عبارت دیگر، اگر قرار دهیم $P = [p_{ij}]$ آنگاه:

$$[x]_B = P[x]_{B'}.$$

برای اثبات معکوس‌پذیری P، توجه کنید که $[x]_B = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$، اگر و فقط اگر $[x]_{B'} = 0$. بنابراین دستگاه $PX = 0$ تنها جواب بدیهی دارد. در نتیجه P معکوس‌پذیر است و این اثبات را کامل می‌کند. ■

مطلب جالب این است که هر ماتریس $n \times n$ و معکوس‌پذیر را نیز می‌توان به عنوان یک ماتریس تغییر مختصات در نظر گرفت. به این مفهوم که اگر P یک ماتریس معکوس‌پذیر $n \times n$ و V یک فضای برداری n بعدی با پایه مرتب B باشد، آنگاه پایه مرتب B' برای B وجود دارد به طوری که P ماتریس تغییر مختصات از B به B' خواهد بود. این مطلب را به صورت قضیه زیر می‌آوریم.

قضیه ۳-۴-۹ . اگر P یک ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر روی میدان $\mathbb{F}$ و V یک فضای برداری با بعد n روی میدان F و با پایه مرتب B باشد، آنگاه پایه مرتب و منحصر به فرد B' برای V وجود دارد به طوری که برای هر $x \in V$،

$$[x]_B = P[x]_{B'}$$
$$[x]_{B'} = P^{-1}[x]_B.$$

برهان. فرض کنید $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ یک پایه مرتب برای V باشد و $P = [p_{ij}]$ یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد. قرار می‌دهیم:

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i \qquad 1 \leq j \leq n.$$

کافی است نشان دهیم که $B' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ یک پایه مرتب برای V است. برای این کار نشان می‌دهیم که هر بردار $v_k \in B$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از اعضای B' نوشت. فرض کنید $P^{-1} = (q_{ij})$، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\sum_j q_{jk} v'_j &= \sum_j q_{jk}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i\right)\\ &= \sum_j \sum_i (q_{jk} p_{ij}) v_i\\ &= \sum_i \left(\sum_j p_{ij} q_{jk}\right) v_i\\ &= \sum_i \delta_{ik} v_i = v_k.\end{aligned}$$

بنابراین $B \subset \operatorname{span} B'$ و در نتیجه $V = \operatorname{span} B'$. ■

مثال ۳-۴-۱۰ . فرض کنید B پایه استاندارد و $B' = \{(-1,0,0),(4,2,0),(5,-3,8)\}$ پایه‌های مرتبی برای $\mathbb{F}^3$ باشند. ماتریس تغییر مختصات از B' به B را یافته و مختصات بردار (x_1, x_2, x_3) در پایه B' را به‌دست آورید.

حل. داریم:

$$[(-1,0,0)]_B = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad [(4,2,0)]_B = \begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}, \quad [(5,-3,8)]_B = \begin{bmatrix}5\\-3\\8\end{bmatrix}$$

بنابراین اگر قرار دهیم:

$$P = \begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\0 & 2 & -3\\0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

آنگاه:

$$[x]_B = P[x]_{B'}$$

و در نتیجه:

$$[x]_{B'} = P^{-1}[x]_B,$$

اما داریم:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

بنابراین:

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 + \frac{11}{8}x_3 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{16}x_3 \\ \frac{1}{8}x_3 \end{bmatrix}.$$

در حالت خاص اگر $x = (3, 2, -8)$ آنگاه:

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} -10 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

یا به عبارت دیگر:

$$(3, 2, -8) = -10(-1, 0, 0) - \frac{1}{2}(4, 2, 0) - 1(5, -3, 8).$$

مثال ۳-۴-۱۱ . فرض کنید $B = \{1, x, x^2\}$ و $B' = \{1, (1-x), (1-x)^2\}$ پایه‌های مرتبی برای P_2 باشند. ماتریس تغییر مختصات از B به B' را یافته و سپس چند جمله‌ای

$$f(x) = a + bx + x^2,$$

را برحسب توان‌های $(x-1)$ بنویسید.

حل. داریم:

$$[1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [(1-x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [(1-x)^2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اگر قرار دهیم:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه $[f]_B = P[f]_{B'}$، یا به طور معادل $[f]_{B'} = P^{-1}[f]_B$. اما داریم $P^{-1} = P$، لذا اگر $f(x) = a + bx + cx^2$ آنگاه:

$$[f]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c \\ -b-2c \\ c \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$a + bx + cx^2 = (a+b+c) + (-b-2c)(1-x) + c(1-x)^2$$

تمرین ۴.۳

۱) فرض کنید $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایه مرتب برای $\mathbb{R}^3$ باشد که در آن، $v_1 = (1, 0, -1)$، $v_2 = (1, 1, 1)$ و $v_3 = (1, 0, 0)$. مختصات بردار (a, b, c) را نسبت به این پایه پیدا کنید.

۲) نشان دهید $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ که در آن:

$$v_1 = (1, 1, 0, 0)$$
$$v_2 = (0, 0, 1, 1)$$
$$v_3 = (1, 0, 0, 4)$$
$$v_4 = (0, 0, 0, 2)$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^۴$ است و مختصات بردارهای پایه استاندارد را نسبت به این پایه به‌دست آورید.

۳) در هر مورد ماتریس تغییر مختصات P از B' به B را یافته و به ازای بردار داده شده v تساوی $[v]_B = P[v]_{B'}$ را تحقیق کنید.

(آ) $V = \mathbb{R}^۲$، $B = \{(۰, -۱), (۲, ۱)\}$، $B' = \{(۰, ۱), (۱, ۱)\}$ و $v = (۳, -۵)$.

(ب) $V = P_۲$، $B = \{۱, ۱+x, x^۲\}$، $B' = \{۲, x+۳, x^۲-۱\}$ و $v = ۱+x+x^۲$.

(پ) $V = M_{۲\times ۲}$، $B = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \right\}$،
$B' = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \right\}$ و $v = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$.

(ت) $V = \mathbb{R}^۳$، $B = \{(۱, ۰, ۰), (۱, ۱, ۰), (۱, ۱, ۱)\}$،
$B' = \{(۱, ۰, ۱), (۱, ۰, -۱), (۰, ۱, ۰)\}$ و $v = (a, b, c)$.

(ث) $V = P_۳$، $B = \{۱, x, x^۲, x^۳\}$ ، $B' = \{۱, (۱-x), (۱-x)^۲, (۱-x)^۳\}$ و $v = a + bx + cx^۲ + dx^۳$.

۴) فرض کنید $B = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\}$ و $B' = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\}$ پایه‌های مرتبی برای فضای برداری V باشند. ماتریس تغییر مختصات از B' به B را بیابید.

۵) فرض کنید $B = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ یک پایه مرتب برای $\mathbb{F}^n$ باشد که هر بردار آن به صورتی ستونی نوشته شده است. اگر قرار دهیم $Q = [v_۱, v_۲, \dots, v_n]$ نشان دهید:

$$v = Q[v]_B.$$

۶) فرض کنید B پایه استاندارد برای فضای $P_۲$ باشد و

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

پایه B' برای $P_۲$ را طوری بیابید که P، ماتریس تغییر مختصات از B' به B باشد.

۷) فرض کنید V فضای تمام توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{C}$ روی میدان اعداد مختلط باشد. قرار می‌دهیم $f_۱(x) = ۱$، $f_۲(x) = e^{ix}$ و $f_۳(x) = e^{-ix}$.

(آ) ثابت کنید این توابع مستقل خطی‌اند.

(ب) اگر $g_۱(x) = ۱$، $g_۲(x) = \cos x$ و $g_۳(x) = \sin x$، ماتریس ۳×۳ معکوس‌پذیر P را طوری بیابید که $g_j = \sum_{i=۱}^{۳} p_{ij} f_i$.

۳-۵ فضاهای سطری و ستونی یک ماتریس

در این بخش بعضی از فضاهای متناظر با ماتریس‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و با استفاده از مفاهیم استقلال خطی و مجموعه تولید کننده، معکوس‌پذیری و رتبهٔ یک ماتریس را بررسی می‌کنیم.
اما نخست یک نماد را که در ادامهٔ بحث از آن استفاده خواهیم کرد یادآوری می‌کنیم.
فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ با سطرهای $R_۱$، $R_۲$، ... و R_m و ستون‌های $C_۱$، $C_۲$، ... و C_n باشد. بعضی از مواقع راحت‌تر است که ماتریس A را به صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} C_۱ & C_۲ & \dots & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_۱ \\ R_۲ \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

نمایش دهیم. در این حالت حاصل‌ضرب A در یک ماتریس ستونی یا سطری به صورت زیر در خواهد آمد.

$$A \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_۱ & C_۲ & \dots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_۱C_۱ + x_۲C_۲ + \cdots + x_nC_n$$

$$\begin{bmatrix} y_۱ & y_۲ & \dots & y_m \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} y_۱ & y_۲ & \dots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_۱ \\ R_۲ \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

$$= y_۱R_۱ + y_۲R_۲ + \cdots + y_mR_m.$$

مثال ۳-۵-۱ . اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۵ & ۷ & -۲ \end{bmatrix}$ آنگاه ستون‌های A، $C_۱ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$، $C_۲ = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۷ \end{bmatrix}$

و $C_۳ = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$ هستند. در نتیجه:

$$A \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x_۱ - x_۲ + ۳x_۳ \\ ۵x_۱ + ۷x_۲ - ۲x_۳ \end{bmatrix} = x_۱ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} + x_۲ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۷ \end{bmatrix} + x_۳ \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$
$$= x_۱C_۱ + x_۲C_۲ + x_۳C_۳.$$

قضیهٔ زیر بعضی از شرایط معادل برای معکوس‌پذیری ماتریس A را بیان می‌کند.

قضیه ۳-۵-۲ . اگر A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد شرایط زیر با هم معادلند.

۱) سطرهای A در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی‌اند.

۲) سطرهای A، $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کنند.

۳) ستون‌های A در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی‌اند.

۴) ستون‌های A، $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کنند.

۵) A معکوس‌پذیر است.

برهان. نشان می‌دهیم که (۱)، (۲) و (۵) با هم معادلند. اثبات معادل بودن (۳)، (۴) و (۵) به طور مشابه خواهد بود.
فرض کنید سطرهای A مستقل خطی باشند، آنگاه بنا به قضیهٔ (۲۲.۳.۳) چون $\dim \mathbb{R}^n = n$ و تعداد سطرهای A نیز n هستند، از این‌رو سطرهای A، $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کنند. بنابراین (۱)، (۲) را نتیجه می‌دهد.
برای استنتاج (۵) از (۲) کافی است ماتریس B را طوری پیدا کنیم که $BA = I$. فرض کنید $R_۱$، $R_۲$، ... و R_n سطرهای A باشند. با توجه به (۲) هر بردار e_i را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $R_۱$، $R_۲$، ... و R_n نوشت. لذا اسکالرهای b_{ij} وجود دارند به طوری که:

$$e_i = b_{i۱}R_۱ + b_{i۲}R_۲ + \cdots + b_{in}R_n \qquad ۱ \leq i \leq n$$

حال اگر قرار دهیم $B=[b_{ij}]$ آنگاه $BA=I$ و این (۵) را نتیجه می‌دهد.

(۵) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنید $c_1R_1+c_2R_2+\cdots+c_nR_n=0$ که R_i سطر iام A است. اگر قرار دهیم $C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \ldots & c_n\end{bmatrix}$ آنگاه:

$$CA=c_1R_1+c_2R_2+\cdots+c_nR_n=0$$

اگر رابطه بالا را از سمت راست در A^{-1} ضرب کنیم نتیجه می‌شود $C=0$ و در نتیجه $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ و این اثبات را کامل می‌کند. ■

مثال ۳-۵-۳ . نشان دهید بردارهای $(1,2,-1)$، $(3,1,-4)$ و $(1,1,7)$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.

حل. قرار می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 7\end{bmatrix}$$

داریم $\det A=-41$ و در نتیجه A معکوس‌پذیر است. بنابراین بردارهای سطری آن مستقل خطی‌اند و در نتیجه تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ می‌دهند.

مثال ۳-۵-۴ . از آنجا که بردارهای $(3,-1,0)$، $(1,0,4)$ و $(0,1,3)$ مستقل خطی‌اند، در نتیجه ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر است.

قضیهٔ قبل نشان داد که چه رابطه‌ای بین معکوس‌پذیری ماتریس و مستقل خطی‌بودن سطرهای آن وجود دارد. اما نمی‌توان در مورد معکوس‌پذیری ماتریس‌های غیرمربع صحبت کرد، آیا باز هم ارتباطی بین مستقل خطی بودن بردارهای سطری، زیرفضای تولید شده توسط آنها و خواص ماتریس وجود دارد؟ خوشبختانه باز هم می‌توان ارتباطی بین آنها پیدا کرد و برای این کار نخست تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۳-۵-۵ . اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد، آنگاه سطرهای A بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ هستند که زیرفضای تولید شده توسط این سطرها را فضای سطری A نامیده و با $row\ A$ نشان داده می‌شود.

به طور مشابه ستون‌های A بردارهایی در $\mathbb{R}^m$ هستند که زیرفضای تولید شده توسط این ستون‌ها را فضای ستونی A نامیده و با $col\ A$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۳-۵-۶ . فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B ماتریسی باشد که با انجام یک عمل سطری مقدماتی روی A به‌دست می‌آید. در این صورت $row\ A = row\ B$.

برهان. حالت اول: اگر عمل سطری مقدماتی، جابجا کردن دو سطر ماتریس باشد، در این صورت A و B دارای بردارهای سطری یکسان هستند و در نتیجه دارای فضای سطری یکسان هستند.

حالت دوم: اگر مضربی از یک سطر A به سطر دیگر اضافه شده باشد، آنگاه بردارهای سطری B ترکیب خطی از بردارهای سطری A هستند و از آنجا که فضای برداری تحت عمل جمع و ضرب اسکالر بسته است بنابراین، این بردارها در فضای سطری A قرار دارند و در نتیجه فضای سطری B زیرمجموعه‌ای از فضای سطری A است. از طرفی A را نیز می‌توان با انجام یک عمل سطری مشابه روی B به‌دست آورد. بنابراین فضای سطری A نیز زیرمجموعه فضای سطری B است و بنابراین $\text{row}\ A = \text{row}\ B$.

حالتی که یک سطر A در یک اسکالر ضرب شده باشد مشابه حالت قبل نتیجه می‌شود. ■

از قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود اگر ماتریس A را به فرم سطری-پلکانی نیز درآوریم، فضای سطری آن تغییر نمی‌کند. اما بردارهای سطری غیرصفر یک ماتریس به فرم سطری-پلکانی مستقل خطی‌اند (تمرین ۱۱) بنابراین سطرهای غیرصفر آن یک پایه برای فضای سطری A هستند. این مطلب را به صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۳-۵-۷ . سطرهای غیرصفر فرم سطری-پلکانی یک ماتریس A، یک پایه برای فضای سطری A هستند.

مثال ۳-۵-۸ . یک پایه برای فضای تولید شده توسط بردارهای زیر به‌دست آورید.

$$v_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \qquad v_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$$

$$v_3 = (0, 5, 15, 10, 0) \qquad v_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

حل. فضای تولید شده توسط این بردارها، برابر است با فضای سطری ماتریس A که:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۲ & -۵ & -۳ & -۲ & ۶ \\ ۰ & ۵ & ۱۵ & ۱۰ & ۰ \\ ۲ & ۶ & ۱۸ & ۸ & ۶ \end{bmatrix}$$

اما فرم سطری-پلکانی این ماتریس به صورت زیر است:

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

لذا سطرهای غیرصفر ماتریس R عبارتند از:

$$u_۱ = (۱, -۲, ۰, ۰, ۳), \quad u_۲ = (۰, ۱, ۳, ۲, ۰), \quad u_۳ = (۰, ۰, ۱, ۱, ۰)$$

که تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهند و در نتیجه یک پایه برای فضای تولید شده توسط بردارهای $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ و $v_۴$ هستند.

توجه کنید که فضای ستونی یک ماتریس با فضای سطری ماتریس ترانهاده آن یکی است. بنابراین برای پیدا کردن پایه برای فضای ستونی یک ماتریس کافی است فضای سطری ترانهاده ماتریس را پیدا کرده، سپس این بردارها را به صورت ستونی بنویسیم.

مثال ۳-۵-۹ . یک پایه برای فضای فضای ستونی ماتریس A پیدا کنید هرگاه:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۴ & ۴ & -۴ \end{bmatrix}$$

حل. داریم:

$$A^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه فرم سطری-پلکانی آن به صورت زیر است:

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین بردارهای $(۱,۳,۰)$ و $(۰,۱,۲)$ یک پایه برای فضای سطری A^t و در نتیجه $w_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $w_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ یک پایه برای فضای ستونی A تشکیل می‌دهند.

قضیه ۳-۵-۱۰ . اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه فضاهای سطری و ستونی A دارای بعد مساوی هستند.

برهان. فرض کنید فضای سطری ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$، k بعدی و $S = \{b_۱, b_۲, \dots, b_k\}$ یک پایه برای این فضا باشد که $b_i = (b_{i۱}, b_{i۲}, \dots, b_{in})$. اگر سطرهای ماتریس A را با $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m نشان دهیم آنگاه اسکالرهای c_{ij} وجود دارند به طوری که:

$$A_i = c_{i۱}b_۱ + c_{i۲}b_۲ + \cdots + c_{ik}b_k \qquad ۱ \leq i \leq m.$$

اگر مختصات jام دو طرف معادلات بالا را با هم مساوی قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \cdots + c_{1k}b_{kj} \\
a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \cdots + c_{2k}b_{kj} \\
&\vdots \\
a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \cdots + c_{mk}b_{kj}
\end{aligned}
$$

یا به طور معادل:

$$
\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{kj} \begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{bmatrix}
$$

ماتریس سمت چپ این عبارت ستون jام A است و در نتیجه هر ستون A در فضای تولید شده توسط k بردار سمت راست است. بنابراین:

$$\dim \operatorname{col} A \le k = \dim \operatorname{row} A.$$

حال اگر در رابطه بالا به جای A ماتریس A^t را قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$\dim \operatorname{col} A^t \le \dim \operatorname{row} A^t$$

یا به طور معادل:

$$\dim \operatorname{row} A \le \dim \operatorname{col} A$$

بنابراین:

$$\dim \operatorname{col} A = \dim \operatorname{row} A.$$

■

حال با توجه به قضیه بالا می‌توان تعریف زیر را بیان کرد.

تعریف ۳-۵-۱۱ . اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد بعد فضای سطری یا فضای ستونی A را رتبه ماتریس A نامیده و با $rank\ A$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳-۵-۱۲ . ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۱۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱) یک پایه برای فضای سطری A پیدا کنید.

۲) رتبه A را مشخص کنید.

۳) چه بردارهای $(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵)$ در فضای سطری A قرار دارند؟

حل.

۱) با انجام اعمال سطری مقدماتی روی A ماتریس سطری پلکانی تحویل یافتهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین بردارهای $v_۱ = (۱, ۲, ۰, ۳, ۰)$، $v_۲ = (۰, ۰, ۱, ۴, ۰)$ و $v_۳ = (۰, ۰, ۰, ۰, ۱)$ یک پایه برای فضای سطری A هستند.

۲) با توجه به قسمت (۱)، $\mathrm{rank}\ A = ۳$.

۳) بردار $(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵)$ در فضای سطری A قرار دارد اگر و فقط اگر به صورت ترکیب خطی از $v_۱$، $v_۲$ و $v_۳$ باشد، بنابراین باید اسکالرهای $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ وجود داشته باشد به طوری‌که:

$$(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵) = c_۱v_۱ + c_۲v_۲ + c_۳v_۳ = (c_۱, ۲c_۱, c_۲, ۳c_۱ + ۴c_۲, c_۳).$$

که در نتیجه باید داشته باشیم:

$$y_2 = 2y_1, \quad y_4 = 3y_1 + 4y_3$$

لذا،

$$\begin{aligned} \text{row } A &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) | y_2 = 2y_1,\ y_4 = 3y_1 + 4y_3\} \\ &= \{(y_1, 2y_1, y_3, 3y_1 + 4y_3, y_5) | y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد که توسط بردارهای α_1، α_2، ... و α_m تولید شده باشد و با روش ارائه شده در مثال‌های قبل پایه‌ای برای W پیدا کنیم، لزوماً اعضای پایه در بین α_1، α_2، ... و α_m نمی‌باشند. اما ممکن است برای ما جالب باشد که پایه‌ای برای W از بین همین بردارهای α_i پیدا کنیم. مطلب زیر در این جهت به ما کمک می‌کند.

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ با ستون‌های A_1، A_2، ... و A_n و R فرم سطری-پلکانی تحویل یافته ماتریس A با ستون‌های R_1، R_2، ... و R_n باشد. اگر رتبه A، r باشد آنگاه بنا به قضیه (۷.۵.۳)، R دارای r سطر غیرصفر بوده و در نتیجه تعداد r، ۱ پیشرو در R ظاهر می‌شوند. اما توجه داریم در هر ستون که ۱ پیشرو ظاهر شود درایه‌های بالا و پایین آن ۱ صفر می‌باشند. بنابراین، اگر این ۱های پیشرو به ترتیب در ستون‌های j_1، j_2، ... و j_r ظاهر شده باشند آنگاه، $R_{j_i} = e_i$ برای $1 \leq i \leq r$ که e_i برداری است که مختصات iام آن ۱ و بقیه مختصات آن صفر است.

حال اگر ستون‌های A_{j_1}، A_{j_2}، ... و A_{j_r} را در نظر بگیریم و فرض کنیم که:

$$c_1 A_{j_1} + c_2 A_{j_2} + \cdots + c_r A_{j_r} = 0$$

چون R فرم سطری-پلکانی تحویل یافته A است، بنابراین ماتریس معکوس‌پذیر M وجود دارد به طوری که $MA = R$ و در نتیجه $MA_i = R_i$ برای $1 \leq i \leq n$. اگر طرفین معادله بالا را از سمت چپ در M ضرب کنیم نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 MA_{j_1} + c_2 MA_{j_2} + \cdots + c_r MA_{j_r} \\ &= c_1 R_{j_1} + c_2 R_{j_2} + \cdots + c_r R_{j_r} \\ &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_r e_r \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$c_۱ = c_۲ = \cdots = c_r = ۰$$

بنابراین ستون‌های $A_{j_۱}$، $A_{j_۲}$، ... و A_{j_r} از ماتریس A مستقل خطی‌اند و چون بعد فضای ستونی A نیز r است، این ستون‌ها حداکثر تعداد ستون‌های مستقل خطی A هستند. این مطلب را در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۳-۵-۱۳ . فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و R فرم سطری-پلکانی تحویل یافته ماتریس A باشد. اگر $R_{j_۱}$، $R_{j_۲}$، ... و R_{j_r} ستون‌هایی از R باشند که ۱ پیشرو در آنها ظاهر شده است آنگاه ستون‌های $A_{j_۱}$، $A_{j_۲}$، ... و A_{j_r} از A مستقل خطی بوده و یک پایه برای فضای ستونی A تشکیل می‌دهند.

مثال ۳-۵-۱۴ . زیرمجموعه‌ای از مجموعه $S = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵\}$ را بیابید که یک پایه برای $\mathrm{span}\ S$ باشد، هرگاه $v_۱ = (۱, -۲, ۰, ۳)$، $v_۲ = (۲, -۵, -۳, ۶)$، $v_۳ = (۰, ۱, ۳, ۰)$، $v_۴ = (۲, -۱, ۴, ۷)$ و $v_۵ = (۵, -۸, ۱, ۲)$.

حل. ماتریس A را طوری تعریف می‌کنیم که بردارهای v_i ستون‌های آن باشند. یا به عبارتی قرار می‌هیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۲ & ۵ \\ -۲ & -۵ & ۱ & -۱ & -۸ \\ ۰ & -۳ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۰ & ۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

و A را به فرم سطری-پلکانی تحویل یافته در می‌آوریم. داریم:

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

از این رو بنا به قضیه قبل، ستون‌های اول، دوم، چهارم و پنجم A یک پایه برای فضای ستونی A تشکیل می‌دهند. در نتیجه مجموعه $S = \{v_۱, v_۲, v_۴, v_۵\}$ یک پایه برای $\mathrm{span}\ S$ است.

مثال ۳-۵-۱۵ . آیا زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ

$$S = \{(2, -3, 5), (8, -12, 20), (1, 0, -2), (0, 2, -1), (7, 2, 0)\}$$

وجود دارد که یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ باشد؟

حل. قرار می‌هیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & -12 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 20 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A را به فرم سطری-پلکانی تحویل یافته R، تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

بنا به قضیه قبل، ستون‌های اول، سوم و چهارم A مستقل خطی‌اند و چون بعد فضای $\mathbb{R}^3$ نیز ۳ است، بنابراین این بردارها یعنی $B = \{(2, -3, 5), (1, 0, -2), (0, 2, -1)\}$ یک زیرمجموعه از S و یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است.

مثال ۳-۵-۱۶ . فرض کنید

$$\begin{aligned} S = \{&2+x + 2x^2 + 3x^3, 4 + 2x + 4x^2 + 6x^3, \\ &6 + 3x + 8x^2 + 7x^3, 2 + x + 5x^3, 4 + x + 9x^3\}. \end{aligned}$$

یک پایه برای $\operatorname{span} S$ به عنوان زیرفضایی از P_3 بیابید.

حل. مجموعهٔ S' شامل مختصات اعضای S نسبت به پایه مرتب استاندارد برای P_3 به صورت زیر است:

$$S' = \{(2, 1, 2, 3), (4, 2, 4, 6), (6, 3, 8, 7), (2, 1, 0, 5), (4, 1, 0, 9)\}$$

تعریف می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۸ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۶ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}.$$

فرم سطری-پلکانی تحویل یافته ماتریس A به صورت زیر است:

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود ستون‌های اول، سوم و پنجم A مستقل خطی هستند و یک پایه برای فضای تولید شده توسط S' تشکیل می‌دهند. بنابراین،

$$\{۲ + x + ۲x^۲ + ۳x^۳, ۶ + ۳x + ۸x^۲ + ۷x^۳, ۴ + x + ۹x^۳\}$$

یک پایه برای زیرفضای $P_۳$ تولید شده توسط S است.

می‌دانیم که بنا به قضیه (۱۸.۳.۳) هر زیرمجموعه مستقل خطی از فضای برداری با بعد متناهی V را می‌توان به یک پایه برای V گسترش داد ولی تاکنون روش عملی برای نحوه گسترش این مجموعه به یک پایه برای V ارائه نگردیده است. با استفاده از قضیه قبل می‌توان روشی برای این کار نیز ارائه داد. بدین صورت که فرض کنیم S یک زیرمجموعه مستقل خطی در V باشد و B یک پایه دلخواه برای V باشد. مجموعه مرتب S' را بدین صورت در نظر می‌گیریم که نخست بردارهای S در آن قرار گرفته و سپس اعضای B به دنبال آنها آمده باشند. در این صورت S' فضای V را تولید می‌کند. با استفاده از روش قبل زیرمجموعه مستقل خطی از S' پیدا می‌کنیم که V را تولید کند. این زیرمجموعه شامل S خواهد بود.

مثال ۳-۵-۱۷ . فرض کنید:

$$V = \{(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) \in \mathbb{R}^۵ | x_۱ + ۷x_۲ + ۵x_۳ - ۴x_۴ + ۲x_۵ = ۰\}$$

۱) نشان دهید مجموعهٔ

$$S=\{(-2,0,0,-1,-1),(1,1,-2,-1,-1),(-5,1,0,1,1)\}$$

یک زیرمجموعه مستقل خطی از V است.

۲) پایه‌ای برای V شامل S بیابید.

حل. اثبات قسمت (۱) را به خواننده تمرین به عنوان واگذار می‌کنیم.
برای پیدا کردن پایه‌ای برای V که شامل S باشد، نخست یک پایه دلخواه برای V پیدا می‌کنیم. برای این کار با استفاده از تعریف V داریم:

$$x_1=-7x_2-5x_3+4x_4-2x_5.$$

حال اگر قرار دهیم $x_2=t_1$، $x_3=t_2$، $x_4=t_3$ و $x_5=t_4$ آنگاه بردارهای V به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=(-7t_1-5t_2+4t_3-2t_4,t_1,t_2,t_3,t_4)\\&=t_1(-7,1,0,0,0)+t_2(-5,0,1,0,0)\\&+t_3(4,0,0,1,0)+t_4(-2,0,0,0,1).\end{aligned}$$

بنابراین،

$$B=\{(-7,1,0,0,0),(-5,0,1,0,0),(4,0,0,1,0),(-2,0,0,0,1)\}$$

یک پایه برای V است.
حال ماتریسی که ستون‌های آن نخست بردارهای S و سپس بردارهای B باشند را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&-5&-7&-5&4&-2\\0&1&1&1&0&0&0\\0&-2&0&0&1&0&0\\-1&-1&1&0&0&1&0\\-1&-1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

فرم سطری‌ـپلکانی تحویل یافته این ماتریس عبارت است از:

$$R=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین، ستون‌های اول، دوم، سوم و ششم A یک پایه برای V می‌باشد یا به عبارتی

$$\{(-۲,۰,۰,-۱,-۱),(۱,۱,-۲,-۱,-۱),(-۵,۱,۰,۱,۱),(۴,۰,۰,۱,۰)\}$$

پایه‌ای برای V است که S را در بر دارد.

فرض کنیم A یک ماتریس $m\times n$ و $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n ستون‌های ماتریس A باشند. در این صورت ماتریس ستونی Y در فضای ستونی A قرار دارد، اگر و فقط اگر اسکالرهای $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n وجود داشته باشند به طوری که:

$$x_۱A_۱+x_۲A_۲+\dots x_nA_n=Y$$

یا به طور معادل، بردار $X=\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ وجود داشته باشد به طوری که $AX=Y$.

این مطلب را به دلیل اهمیت آن به صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۳-۵-۱۸ . اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد، دستگاه معادلات $AX=Y$ سازگار است اگر و فقط اگر Y در فضای ستونی A قرار داشته باشد.

این قضیه به ما کمک می‌کند تا بردارهای Y را که در فضای تولید شده توسط بردارهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ... و α_m قرار دارند به طور دقیق مشخص کنیم.

مثال ۳-۵-۱۹ . فرض کنید W زیرفضایی از $\mathbb{R}^۴$ باشد که توسط بردارهای زیر تولید شده است:

$$v_۱ = (۱, ۲, ۲, ۱), \quad v_۲ = (۰, ۲, ۰, ۱), \quad v_۳ = (-۲, ۰, -۴, ۳)$$

به طور دقیق مشخص کنید که چه بردارهای $Y = (y_۱, y_۲, y_۳, y_۴) \in \mathbb{R}^۴$ در W قرار دارند.

حل. فرض کنید A ماتریسی باشد که ستون‌های آن $v_۱$، $v_۲$ و $v_۳$ باشند. بنا به قضیه قبل $Y \in W$ است اگر و فقط اگر دستگاه $AX = Y$ سازگار باشد. اگر ماتریس افزوده این دستگاه را بنویسیم، داریم:

$$[A : Y] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ & y_۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ & y_۲ \\ ۲ & ۰ & -۴ & y_۳ \\ ۱ & ۱ & ۳ & y_۴ \end{bmatrix}$$

که پس از انجام اعمال سطری مقدماتی روی آن به صورت:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & y_۱ - \frac{۱}{۳}y_۲ + \frac{۲}{۳}y_۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -y_۱ + \frac{۵}{۶}y_۲ - \frac{۲}{۳}y_۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۶}(۲y_۴ - y_۲) \\ ۰ & ۰ & ۰ & y_۳ - ۲y_۱ \end{bmatrix}$$

در می‌آید. بنابراین دستگاه سازگار است اگر و فقط اگر $y_۳ - ۲y_۱ = ۰$ یا $y_۳ = ۲y_۱$. در نتیجه:

$$W = \{(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵) | y_۳ = ۲y_۱\}.$$

در خاتمه یادآوری می‌کنیم که تا اینجا با ادغام قضایای (۷.۴.۱) و (۲.۵.۳) شرایط معادل زیر برای معکوس‌پذیری یک ماتریس به‌دست می‌آید.

قضیه ۳-۵-۲۰ . اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند:

۱) A معکوس‌پذیر است.

۲) دستگاه $AX = \circ$ تنها جواب بدیهی دارد.

۳) دستگاه $AX = Y$، به ازای هر ماتریس ستونی Y سازگار است.

۴) A هم‌ارز سطری I_n است.

۵) $det\ A \neq \circ$.

۶) A دارای رتبه n است.

۷) بردارهای سطری A مستقل خطی‌اند.

۸) بردارهای سطری A، $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کنند.

۹) بردارهای ستونی A مستقل خطی اند.

۱۰) بردارهای ستونی A، $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کنند.

تمرین ۵.۳

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) رتبه یک ماتریس برابر است با تعداد ستون‌های غیر صفر آن ماتریس.

(ب) تنها ماتریس $m \times n$ با رتبه صفر، ماتریس صفر است.

(پ) انجام اعمال سطری مقدماتی تأثیری روی رتبه ماتریس ندارد.

(ت) انجام اعمال ستونی مقدماتی لزوماً رتبه ماتریس را ثابت نگه نمی‌دارد.

(ث) رتبه یک ماتریس برابر است با تعداد سطرهای مستقل خطی آن ماتریس.

(ج) یک ماتریس $m \times n$ حداکثر دارای رتبه m است.

(چ) هر ماتریس با رتبه n معکوس‌پذیر است.

(ح) یک ماتریس ۴×۳ نمی‌تواند سطرهای مستقل خطی داشته باشد.

(خ) یک ماتریس ۴×۳ نمی‌تواند ستون‌های مستقل خطی داشته باشد.

(د) اگر A یک ماتریس $m \times n$ و $\text{rank}\ A = m$ آنگاه $m \leq n$.

(ذ) اگر A یک ماتریس مربع نباشد آنگاه سطرها یا ستون‌های آن وابسته خطی‌اند.

(ر) اگر دستگاه $AX = Y$ که A یک ماتریس $m \times n$ است، به ازای هر Y سازگار باشد آنگاه $m \leq n$.

(ز) اگر سطرهای یک ماتریس مستقل خطی باشند آنگاه ستون‌های آن نیز مستقل خطی‌اند.

(ژ) اگر سطرهای یک ماتریس $m \times n$، $\mathbb{R}^n$ را تولید کنند، آنگاه ستون‌های آن نیز $\mathbb{R}^m$ را تولید می‌کنند.

۲) در هر یک از موارد زیر پایه‌ای برای فضاهای سطری و ستونی A یافته و رتبه A را مشخص کنید.

(آ) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۰ & ۰ & -۸ \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

(پ) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۲ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۶ & ۰ & -۲ \\ ۲ & -۳ & -۲ & ۴ & ۴ \\ ۳ & -۳ & ۶ & ۶ & ۳ \\ ۵ & -۳ & ۱۰ & ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}$ (ت) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۶ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۲ & -۸ & ۱ & -۳ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) یک پایه برای زیرفضای تولید شده توسط بردارهای زیر بیابید.

(آ) $(۱, ۱, -۴, -۳), (۲, ۰, ۲, -۲), (۲, -۱, ۳, ۲)$

(ب) $(۱, ۱, ۰, ۰), (۰, ۰, ۱, ۱), (-۲, ۰, ۲, ۲), (۰, -۳, ۰, ۳)$

(پ) $(۱, -۱, ۲, ۵, ۱), (۳, ۱, ۴, ۲, ۷), (۱, ۱, ۰, ۰, ۰), (۵, ۱, ۶, ۷, ۸)$

۴) در تمرین قبل یک پایه از بین بردارهای داده شده برای زیرفضای تولید شده توسط این بردارها پیدا کنید.

۵) چه بردارهایی در زیرفضای تولید شده توسط بردارهای زیر قرار دارند.

$$\alpha_۱ = (۱, ۰, ۲, ۱, -۱), \quad \alpha_۲ = (-۱, ۲, -۴, ۲, ۰),$$
$$\alpha_۳ = (۲, -۱, ۵, ۲, ۱), \quad \alpha_۴ = (۲, ۱, ۳, ۵, ۲)$$

۶) فرض کنید W زیرفضایی از $\mathbb{R}^5$ باشد که جمع مختصات هر بردار آن صفر شود. از بین بردارهای زیر که W را پدید می‌آورند یک پایه برای W پیدا کنید.

$$u_1 = (2, -3, 4, -5, 2) \qquad u_2 = (-6, 9, -12, 15, -6)$$
$$u_3 = (3, -2, 7, -9, 1) \qquad u_4 = (2, -8, 2, -2, 6)$$
$$u_5 = (-1, 1, 2, 1, -3) \qquad u_6 = (0, -3, -18, 9, 12)$$
$$u_7 = (1, 0, -2, 3, -2) \qquad u_8 = (2, -1, 1, -9, 7)$$

۷) فرض کنید:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0\}$$

نشان دهید $S = \{(0, 1, 1, 1, 0), (2, 0, 0, 0, -1)\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از W است و آن را به یک پایه برای W گسترش دهید.

۸) فرض کنید W فضای تمام ماتریس‌های متقارن 2×2 باشد. نشان دهید مجموعهٔ

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

W را تولید می‌کند و زیرمجموعه‌ای از S را بیابید که یک پایه برای W باشد.

۹) فرض کنید W فضای جواب دستگاه همگن زیر باشد:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 4x_6 = 0 \end{cases}$$

(آ) نشان دهید $S = \{(0, -1, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 1, 0)\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی در W است.

(ب) S را به یک پایه برای W گسترش دهید.

(پ) نشان دهید $S' = \{(1, 0, 1, 1, 1, 0), (0, 2, 1, 1, 0, 0)\}$ نیز یک زیرمجموعه مستقل خطی در W است.

(ت) S' را به یک پایه برای W گسترش دهید.

۱۰) نشان دهید $\text{rank } AB \leq \text{rank } B$ و $\text{rank } AB \leq \text{rank } A$. در چه حالتی تساوی اتفاق می‌افتد.

۱۱) نشان دهید سطرهای غیرصفر یک ماتریس سطری_پلکانی مستقل خطی است.

۱۲) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. نشان دهید $\text{rank } A = m$ اگر و فقط اگر یک ماتریس $n \times m$ مانند B وجود داشته باشد به طوری که $AB = I_m$.

۱۳) اگر A و B ماتریس‌های $m \times n$ باشند، نشان دهید:

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$$

۱۴) نشان دهید:

(آ) اگر سطرهای A و B مستقل خطی باشند آنگاه سطرهای AB نیز مستقل خطی است.

(ب) اگر ستون‌های A و B مستقل خطی باشند آنگاه ستون‌های AB نیز مستقل خطی است.

۱۵) نشان دهید اگر x، y و z اسکالرهایی باشند که $x \neq y$، آنگاه ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۳ & x+y+z \\ x+y+z & x^۲+y^۲+z^۲ \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر است. (راهنمایی: ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \end{bmatrix}$ و AA^t را در نظر بگیرید.)

مسائل تکمیلی

۱) فرض کنید $V=\mathbb{R}^n$ فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد نشان دهید در هر حالت W زیر فضایی از V نیست.

(آ) $W=\{(a_1,...,a_n) \mid a_1\geq 0\}$

(ب) $W=\{(a_1,...,a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i^2=1\}$

(پ) $W=\{(a_1,...,a_n) \mid a_j\in Q\}$ (Q اعداد گویا است)

۲) فرض کنید V فضای برداری تولید شده توسط سطرهای ماتریس زیر باشد

$$\begin{bmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

(آ) پایه‌ای برای V بیابید

(ب) کدام یک از بردارهای (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) داخل V هستند.

(پ) اگر بدانیم که بردار $(a_1,...,a_5)$ در V قرار دارد نمایش آن در پایه‌ای از V که در قسمت (۱) بدست آوردید چیست؟

۳) نشان دهید اگر A ماتریس بالا مثلثی باشد آنگاه ستون‌های آن مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر درایه‌های روی قطر اصلی آن ناصفر باشند.

۴) فرض کنید x,y دو بردار از فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و U یک زیر فضای آن باشد. به علاوه فرض کنید W زیر فضای تولید شده توسط U و x باشد و Y زیر فضای تولید شده توسط U و y باشد. ثابت کنید اگر $y\in W-V$ آنگاه $x\in Y$.

۵) اگر V فضای برداری با بعد متناهی n روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و V_1و V_2 زیر فضاهای V باشند به طوری که $\dim(V_1)>\frac{n}{2}$ و $\dim(V_2)>\frac{n}{2}$. در این صورت

$$V_1\cap V_2\neq\{0\}$$

۶) اگر V, W زیر فضاهای یک فضای برداری باشند و $V \subseteq W$ و $\dim V \leq l \leq \dim W$.
نشان دهید زیر فضایی مثل U هست که $V \subseteq U \subseteq W$ و $\dim V = l$.

۷) نشان دهید اگر $W_۱, W_۲, W_۳$ سه زیر فضای V باشند. آنگاه

$$\begin{aligned}\dim (W_۱ + W_۲ + W_۳) &= \dim W_۱ + \dim W_۲ + \dim W_۳ \\ &- \dim W_۱ \cap W_۲ - \dim W_۱ \cap W_۳ - \dim W_۲ \cap W_۳ \\ &+ \dim W_۱ \cap W_۲ \cap W_۳\end{aligned}$$

برای تعداد فضاهای بیشتر نیز رابطه‌ای مشابه بدست آورید.

۸) فرض کنید $v_۱, \ldots, v_{n+۲}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند نشان دهید اعداد حقیقی $a_۱, \ldots, a_n$ وجود دارند (که بعضی از آنها ناصفرند) به طوریکه

$$a_۱v_۱ + \ldots + a_{n+۲}v_{n+۲} = ۰, \qquad a_۱ + \cdots + a_{n+۲} = ۰.$$

۹) فرض کنید $p_۱, \ldots, p_n$ اعداد اول متمایز باشند ثابت کنید

$$\{\log(p_i) : ۱ \leq i \leq n\},$$

روی میدان اعداد گویا مستقل خطی است. نتیجه بگیرید که میدان اعداد حقیقی روی میدان اعداد گویا از بعد متناهی نیست.

۱۰) منظور از پوشش محدب $u_۱, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ مجموعه زیر است:

$$\{t_۱u_۱ + \cdots + t_ku_k : \ ۰ \leq t_۱, \ldots, t_k \text{ و } t_۱ + t_۲ + \cdots + t_k = ۱\},$$

نشان دهید هر مجموعه $n+۲$ عضوی $u_۱, \ldots, u_{n+۲} \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان به دو مجموعه مجزا تقسیم کرد که پوشش محدب آنها با هم اشتراک داشته باشند.

۱۱) فرض کنید $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ یک پایه برای فضای V است. بردار $v = a_۱v_۱ + a_۲v_۲ + \cdots + a_nv_n$ چه شرطی باید داشته باشد که برای هر i، مجموعه

$$\{v_۱, \ldots, v_{i-۱}, v, v_{i+۱}, \ldots, v_n\}$$

پایه‌ای برای V باشد.

۱۲) فرض کنید F یک میدان متناهی و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. تعداد اعضای V را بیابید.

۱۳) فرض کنید $\{v_۱, ..., v_n\}$ یک پایه برای زیر فضای V است شرط لازم و کافی برای $v \in V$ را بیابید که مجموعه

$$\{v_۱ - v, ..., v_n - v\}$$

نیز یک پایه برای V باشد. بیان هندسی این شرط چیست؟

۱۴) نشان دهید رابطه

$$\text{span } \{W_۱ \cap W_۲\} = \text{span } W_۱ \cap \text{span } W_۲$$

همواره درست نیست.

۱۵) فرض کنید $W_۲, W_۱$ در زیر فضای $\mathbb{R}^n$ باشند در چه مواردی $W_۱ \cup W_۲$ نیز زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است؟ $W_۱^c$ چطور؟

۱۶) فرض کنید $V = W_۱ \oplus W_۲$ و W زیر فضایی از V است که شامل یکی از دو زیر فضای $W_۱$ یا $W_۲$ است. نشان دهید

$$W = (W \cap W_۱) \oplus (W \cap W_۲)$$

اگر W شامل یکی از دو زیر فضای $W_۱$ یا $W_۲$ نباشد چطور؟

۱۷) اگر V یک فضای با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط باشد ثابت کنید:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = ۲\dim_{\mathbb{C}}(V)$$

۱۸) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آیا فضای برداری تولید شده توسط

$$\{I, A, A^۲, ...\},$$

می‌تواند تمام ماتریس‌های $n \times n$ شود؟ (راهنمایی: نشان دهید هر دو عضو از این فضا با هم جابه‌جا می‌شوند).

۱۹) تمام ماتریس‌هایی که مرتبه آنها برابر با یک است را بیابید.

۲۰) به روش زیر ثابت کنید ماتریس‌های A, B وجود ندارند که $AB - BA = I$.

(آ) فرض کنید $AB - BA = I$. نشان دهید برای هر n،

$$A^n B - BA^n = nA^{n-1}.$$

(ب) با فرض بالا نشان دهید که مجموعه $\{I, A, A^2, ...\}$ باید مستقل خطی باشد.

(پ) با توجه به مسأله ۱۸ نتیجه بگیرید که فرض اول $AB - BA = I$ نمی‌تواند برقرار باشد.

۲۱) اگر F یک میدان نامتناهی و V یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت V به صورت اجتماع تعداد متناهی زیر فضای واقعی خود نیست.

۲۲) اگر $BA^t = 0$ یا $B^tA = 0$ آن‌گاه

$$\text{rank}(A + B) = \text{rank } A + \text{rank } B.$$

۲۳) اگر A دارای n ستون باشد و $AB = 0$ آن‌گاه

$$\text{rank } A + \text{rank } B \leq n.$$

۲۴) فرض کنید V مجموعه همه دنباله‌های اعداد حقیقی‌اند و جمع و ضرب اسکالر آن‌ها به صورت مولفه‌ای تعریف شده است قرار دهید:

$$W = \{(a_1, a_2, ...) \in V : \lim_{i \to \infty} a_i = 0\},$$

$$U = \{(a_1, a_2, ...) \in V : \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\}.$$

(آ) نشان دهید V یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است.

(ب) نشان دهید W زیر فضای V است.

(پ) نشان دهید U نیز زیر فضایی از V است که در W هم قرار دارد.

۲۵) فرض کنید U, W_{2}, W_{1} زیر فضاهای V باشند و

$$W_{1} + U = W_{2} + V$$

آیا همیشه رابطه $W_{1} = W_{2}$ برقرار است؟ اگر بدانیم $W_{1} \oplus U = W_{2} \oplus V$ جواب این سؤال چه خواهد بود.

۲۶) فرض کنید V_iها تعدادی زیر فضای K بعدی‌اند که اشتراک هر دوتای آن‌ها یک زیر فضای $k - 1$ بعدی است. نشان دهید یا تمام V_iها در یک فضای $k + 1$ بعدی قرار دارند یا اشتراک آن‌ها یک فضای $k - 1$ بعدی است.

۲۷) نشان دهید که در یک میدان متناهی عدد طبیعی nای وجود دارد که مجموع n تا یک برابر صفر شود نشان دهید این n باید اول باشد و این میدان یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_n$ است و نتیجه بگیرید که یک میدان p^k عضو دارد که p عددی اول است.

۲۸) فرض کنید J ماتریس $n \times n$ای است که همه درایه‌های آن برابر یک هستند. برای هر a رتبه ماتریس $J - aI$ را بدست آورید. آیا رتبه این ماتریس‌ها برای میدان‌های مختلف متفاوت است؟

۲۹) اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد و $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیر فضاهای سره V باشند. به طوری که برای هر n، $V_n \not\subseteq \cup_{j=1, j\neq n}^{\infty} V_j$. نشان دهید $\cup_{j=1}^{\infty} V_j$ زیر فضا نیست.

۳۰) فرض کنید W, V دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نشان دهید مجموعه $Z = V \times W$ با اعمال زیر یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است.

$$(v_{1}, u_{1}) + (v_{2}, u_{2}) = (v_{1} + v_{2}, u_{1} + u_{2}),$$
$$r(v_{1}, u_{1}) = (rv_{1}, ru_{1}).$$

که در آن $r \in \mathbb{F}$ و $(v_{1}, u_{1}), (v_{2}, u_{2}) \in Z$. نشان دهید مجموعه‌های $\tilde{V} = V \times \{0\}$ و $\tilde{W} = \{0\} \times W$ زیر فضاهای Zاند و داریم:

$$V = \tilde{W} + \tilde{V}$$

۳۱) آیا Q می‌تواند یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد؟ (اعداد گویا کوچکتر از اعداد حقیقی‌اند).

۳۲) آیا هر گروه آبلی p^n عضوی می‌تواند یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$ باشد؟

۳۳) فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی $\mathbb{Z}_p$ است.

(آ) نشان دهید V دارای p^n عضو است.

(ب) نشان دهید که تعداد زیر فضاهای $k+۱$ بعدی شامل یک زیر فضای k بعدی V برابر است با

$$\frac{p^{n-k}-۱}{p-۱}$$

(پ) تعداد زیر فضاهای k بعدی در V را بدست آورید.

۳۴) فرض کنید $a_۱,...,a_m$ و $b_۱,...,b_n$ اعدادی دلخواه در $\mathbb{F}$ باشند. مرتبه ماتریس $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ را که برای آن داریم $A_{ij}=(a_ib_j)$ به دست آورید. اگر $m=n$ آیا جمع kتای از این ماتریس‌ها می‌تواند وارون‌پذیر باشد؟ نشان دهید اگر $n \leq ۳$ آن‌گاه ماتریس $(\sin(a_i+b_j))_{n\times n}$ نمی‌تواند وارون‌پذیر باشد.

۳۵) فرض کنید L مجموعه تمام nتایی‌های مرتب از $\mathbb{R}^n$ مانند $(x_۱,...,x_n)$ باشد به طوری که مؤلفه‌های مرتبه فرد آن با هم برابرند یعنی

$$x_۱=x_۳=x_۵=...$$

(آ) ثابت کنید L زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است.

(ب) یک پایه برای L ارائه دهید و بعد L را مشخص کنید.

۳۶) نشان دهید اگر p یک چند جمله‌ای از درجه n باشد آن‌گاه خودش و مشتقاتش تا مرتبه nام پایه‌ای برای فضای چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر یا مساوی n تشکیل می‌دهند.

۳۷) نشان دهید مجموعه همه توابع حقیقی روی مجموعه S با جمع و ضرب طبیعی روی آن‌ها یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

۳۸) فرض کنید $D \subseteq S$. آیا فضای توابع حقیقی روی D زیر فضای توابع حقیقی روی S است؟ آیا فضای توابع حقیقی روی S زیر فضای توابع حقیقی روی D است؟

۳۹) تابع f_a را با ضابطه $f_a(x) = e^{ax}$ تابعی حقیقی روی $\mathbb{R}$ است و می‌توان آن را به عنوان تابع روی هر بازه دلخواه (s,t) نیز در نظر گرفت. نشان دهید مجموعه $\{f_a : a \in \mathbb{R}\}$ یک مجموعه مستقل خطی در فضای توابع حقیقی روی بازه (s,t) است. مجموعه‌های $\{\sin ax : a \in R^+\}$ و $\{\cos(ax) : a \in R^+\}$ و $\{\tan(ax) : a \in R^+\}$ نیز مجموعه‌هایی مستقل خطی در این فضا هستند. همچنین نشان دهید مجموعه‌های زیر در فضاهای برداری مشخص شده مستقل خطی‌اند.

۴۰) فرض کنید $v \in V$ بردار ناصفری باشد.

(آ) نشان دهید $rv = ۰$ اگر و تنها اگر $r = ۰$.

(ب) هر فضای برداری ناصفر روی یک میدان نامتناهی، نامتناهی عضو دارد.

۴۱) آیا $\{x^۳ + ۲x^۲ + ۱, ۲x - ۲, ۴x^۲ - x - ۱\}$ یک پایه برای فضای چند جمله‌ایها با درجه کمتر یا مساوی سه است؟

۴۲) یک پایه برای ماتریس‌های بالا مثلثی بیابید.

۴۳) فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $\{u, v, w\}$ یک پایه برای آن باشد. آیا همیشه $\{v+u, u+w, w+v\}$ نیز پایه‌ای برای V است؟ این موضوع را برای پایه استاندارد $\mathbb{F}^۳$ زمانی که $F = \mathbb{Z}_۲$ است بررسی کنید.

۴۴) اگر $\operatorname{rank}(A) = ۱$. نشان دهید $\dim(I + A) = ۱ + \operatorname{tr}(A)$.

۴۵) فرض کنید V ک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ و $V_۱$ و $V_۲$ زیر فضاهایی از V باشند که $\dim V_۱ = \dim V_۲$. ثابت کنید زیر فضایی از V مانند U وجود دارد به طوری که

$$U \oplus V_۱ = U \oplus V_۲$$

۴۶) فرض کنید $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد و $\{(x,y), (z,t), (x',y'), (z',t')\} \subseteq \mathbb{C}^۲$. ثابت کنید اسکالرهای α, β که هر دو با هم صفر نیستند در $\mathbb{C}$ وجود دارد به طوریکه دو بردار $\theta = \alpha(x,y) + \beta(z,t)$ و $\theta' = \alpha(x',y') + \beta(z',t')$ وابستگی خطی دارند.

۴۷) اگر $\operatorname{rank} A = ۱$ آن‌گاه $A^۲ = (\operatorname{tr}(A))A$. بنابراین اگر

$$\operatorname{rank}\,(BA - AB) = ۱,$$

آن‌گاه $(AB-BA)^{۲}=۰$.

۴۸) کدام یک از مجموعه‌های زیر با جمع برداری و ضرب اسکالر تعریف شده یک فضای برداری است.

(آ) $$V=\mathbb{R}^{۲}, F=\mathbb{R}, \begin{cases}(a_{۱},b_{۱})+(a_{۲},b_{۲})=(a_{۱}+a_{۲},b_{۱}+b_{۲})\\ r\cdot(a,b)=(ra,b)\end{cases}$$

(ب) $$V=\mathbb{R}^{۲}, F=\mathbb{R}, \begin{cases}(a_{۱},b_{۱})+(a_{۲},b_{۲})=(a_{۱}+b_{۲},b_{۱}+b_{۲})\\ r.(a,b)=(ra,۰)\end{cases}$$

(پ) $$V=\mathbb{R}^{۲},\quad F=\mathbb{R},\quad \begin{cases}(a_{۱},b_{۱})+(a_{۲},b_{۲})=(a_{۱}+a_{۲},b_{۱}+b_{۲})\\ r.(a,b)=\begin{cases}(۰,۰) & r=۰\\ (ra,\frac{b}{r}) & r\neq ۰\end{cases}\end{cases}$$

(ت) $$V=\mathbb{R}^{۲}, F=\mathbb{R}, \begin{cases}(a_{۱},b_{۱})+(a_{۲},b_{۲})=(a_{۱}+a_{۲},۰)\\ r.(a,b)=(ra,۰)\end{cases}$$

(ث) $$V=\mathbb{R}^{۲}, F=\mathbb{R}, \begin{cases}(a_{۱},b_{۱})+(a_{۲},b_{۲})=(a_{۱}+a_{۲},b_{۱}b_{۲})\\ r.(a,b)=(ra,b)\end{cases}$$

(ج) $$V=\mathbb{R}^{۲}, F=\mathbb{R}, \begin{cases}(a_{۱},b_{۱})+(a_{۲},b_{۲})=(a_{۱}-a_{۲},b_{۱}-b_{۲})\\ r.(a,b)=(ra,rb)\end{cases}$$

(چ) $$V=\mathbb{R}^{+}, F=R, \begin{cases}a+b=ab\\ r.a=a^{r}\end{cases}$$

(ح) $F=R, V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f'+۲f=۰\}$ با جمع و ضرب معمولی

(خ) $F=\mathbb{R}, V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f'+۲f=۱\}$ با جمع و ضرب معمولی

(د) $F=\mathbb{R}, V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(۱)=۰\}$ با جمع و ضرب معمولی

(ذ) $F=\mathbb{R}, V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x^{۲})=(f(x))^{۲}\}$ با جمع و ضرب معمولی

(ر) مجموع توابع مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب معمولی

(ز) $F = \mathbb{R}, V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^۳ : x + y + z = ۱\}$

$$\begin{cases} (x_۱ + y_۱ + z_۱) + (x_۲ + y_۲ + z_۲) = (x_۱ + x_۲ - ۱, y_۱ + y_۲, z_۱ + z_۲) \\ r.(x, y, z) = (rx - r + ۱, ry, rz) \end{cases}$$

۴۹) مجموعه برداری $(۱ \leq i \leq n)$ $a_i = (a_{i۱}, ..., a_{in})$ از فضای حقیقی را در نظر بگیرید ثابت کنید اگر

$$| a_{ij} | > \sum_{i=۱, i \neq j}^{n} | a_{ij} |$$

آن‌گاه مجموعه بردارهای فوق مستقل خطی‌اند.

مسائل حل شده

۱) فرض کنید x,y دو بردار از فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ باشند و U یک زیر فضای آن باشد به علاوه فرض کنید W زیر فضای تولید شده توسط x,V باشد و Y زیر فضای تولید شده توسط y,V باشند. ثابت کنید اگر $y \in W - U$ آن‌گاه $x \in Y$.

حل. طبق فرض $y \in W - U$. پس $W - U \neq \phi$. اگر $x \in U$ با توجه به اینکه W فضای تولید شده توسط x و U است پس $W = U$. در نتیجه $W - U = \phi$ و تناقض است. در نتیجه $x \notin U$. چون $y \in W$ و $x \in U$ وجود دارد که

$$y = \alpha x + u \qquad (\alpha \in \mathbb{F})$$

حال اگر $\alpha = 0$ پس $y = u \in U$. ولی طبق فرض

$$y \in W - U.$$

یعنی در نتیجه وبا توجه به رابطه (۱)، $\alpha x = y - u$ بنابراین

$$x = \alpha^{-1} y - \alpha^{-1} u \in Y.$$

۲) اگر V فضای برداری با بعد متناهی n روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و V_1, V_2 زیر فضاهای V باشند به طوری که

$$\dim (V_1) > \frac{n}{2}, \qquad \dim V_2 > \frac{n}{2}.$$

در این صورت

$$V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$$

حل. فرض کنید $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. پس $\dim (V_1 \cap V_2) = 0$ از طرفی

$$\begin{aligned}\dim (V_1 + V_2) &= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2)\\ &> \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 0 = n\end{aligned}$$

ولی $\dim V \geq \dim (V_1 + V_2)$ پس $\dim (V_1 + V_2) \leq n$ واین تناقض است لذا $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$

۳) اگر V و W زیر فضاهای یک فضای برداری باشند و $V \subset W$ و $\dim V \leq l < \dim W$.
نشان دهید زیر فضایی مثل V است که

$$\dim U = l, \qquad V \subseteq U \subseteq W$$

حل. فرض کنید $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ مبنایی برای V باشد آن را به مبنای $\{\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\}$ برای W توسیع می‌دهیم. طبق فرض داریم:

$$r = \dim V \leq l \leq \dim W = n$$

حال فضای تولید شده توسط بردارهای $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ باشد واضح است که $V \subseteq U \subseteq W$ و $\dim V = l$.

۴) فرض کنید $p_1, ..., p_n$ اعداد اول متمایز باشند ثابت کنید:

$$\{\log(p_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

روی میدان اعداد گویا مستقل خطی است. نتیجه بگیرید که میدان اعداد حقیقی روی میدان اعداد گویا از بعد متناهی نیست.

حل. فرض‌کنید $\lambda_1 \log(p_1) + ... + \lambda_n \log(p_n) = 0$ که درآن $\lambda_i \in Q$ برای $1 \leq i \leq n$.
در این صورت داریم $\log(p_1^{\lambda_1}) + ... + \log(p_2^{\lambda_n}) = 0$. در نتیجه:

$$\log(p_1^{\lambda_1} ... p_n^{\lambda_n}) = 0 = \log(1)$$

$$\Longrightarrow p_1^{\lambda_1} .... p_n^{\lambda_n} = 1$$

واضح است که $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = 0$ پس $\{\log(p_1), ..., \log(p_n)\}$ مستقل خطی است.
حال چون تعداد اول نامتناهی است پس مجموعه $\{\log(p) \mid$ عددی اول است $p\}$ نامتناهی و مستقل خطی است و در نتیجه میدان اعداد حقیقی روی میدان اعداد گویا از بعد نامتناهی است.

۵) فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان متناهی و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تعداد اعضای V را بیابید.

حل. فرض کنید $|\mathbb{F}| = q$ و $\dim V = n$ و $\{v_1, ..., v_n\}$ یک پایه برای V باشد. تابع $\varphi : \underbrace{\mathbb{F} \times \ldots \times \mathbb{F}}_{n \text{ بار}} \to V$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید

$$\varphi(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

این تابع پوشا است. زیرا اگر $v \in V$ آنگاه اسکالرهای $b_1, ... b_n$ وجود دارند که

$$v = b_1 v_1 + ... + b_n v_n.$$

بنابراین

$$\varphi(b_1, ..., b_n) = v$$

این تابع یک به یک است زیرا اگر

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \varphi(\lambda'_1, ..., \lambda'_n) &\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \lambda'_1 v_1 + ... + \lambda'_n v_n \\ &\Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda'_1) v_1 + ... + (\lambda_n - \lambda'_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

وچون $\{v_1, ..., v_n\}$ مستقل خطی می‌باشند پس

$$\lambda_1 = \lambda'_1, ..., \lambda_n = \lambda'_n$$

در نتیجه:

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n) = (\lambda'_1, ..., \lambda'_n)$$

بنابراین تعداد اعضای V و $\underbrace{\mathbb{F} \times \ldots \times \mathbb{F}}_{n \text{ بار}}$ با هم برابر است لذا

$$|V| = \underbrace{|\mathbb{F}| \cdot |\mathbb{F}| \ldots |\mathbb{F}|}_{n \text{ بار}} = q^n$$

۶) اگر V یک فضای با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط باشد ثابت کنید:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2\dim_{\mathbb{C}}(V)$$

حل. فرض کنید بعد V روی میدان اعداد مختلط برابر n باشد و $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ مبنایی برای V روی میدان اعداد مختلط باشد و $\{\beta_1, \beta_2\}$ مبنایی برای میدان اعداد مختلط روی میدان اعداد حقیقی باشد. نشان می‌دهیم:

$$\{\beta_1\alpha_1, ..., \beta_1\alpha_n, \beta_2\alpha_1, ..., \beta_2\alpha_n\}$$

مبنایی برای V روی $\mathbb{R}$ است. ابتدا ثابت می‌کنیم مجموعه فوق V را تولید می کند. فرض کنید $v \in V$ پس

$$v = \lambda_1\alpha_1 + ... + \lambda_n\alpha_n \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n)$$

و چون $\lambda_i \in \mathbb{C}$ برای هر $i = 1, ..., n$ پس داریم:

$$\lambda_i = l_i\beta_1 + l'_i\beta_2 \quad (l_i, l'_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n)$$

درنتیجه:

$$v = (l_1\beta_1 + l'_1\beta_2)\alpha_1 + ... + (l_n\beta_1 + l'_n\beta_2)\alpha_n$$

$$\Longrightarrow v = \mathcal{L}_1\beta_1\alpha_1 + \mathcal{L}'_1\beta_2\alpha_1 + ... + \mathcal{L}_n\beta_1\alpha_n + \mathcal{L}'_n\beta_n\alpha_n$$

حال ثابت می‌کنیم $\{\beta_1\alpha_1, ..., \beta_1\alpha_n, \beta_2\alpha_1, ..., \beta_2\alpha_n\}$ روی میدان اعداد حقیقی مستقل خطی است. فرض کنید:

$$\lambda_1\beta_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1\alpha_2 + ... + \lambda_n\beta_1\alpha_n + \lambda'_1\beta_2\alpha_1 + \lambda'_2\beta_2\alpha_2 + ... + \lambda'_n\beta_2\alpha_n = 0$$

که در آن $(\lambda_i, \lambda'_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n)$ در نتیجه:

$$(\lambda_1\beta_1 + \lambda'_1\beta_2)\alpha_1 + (\lambda_2\beta_1 + \lambda'_2\beta_2)\alpha_2 + ... + (\lambda_n\beta_1 + \lambda'_n\beta_2)\alpha_n = 0$$

حال چون $\{\alpha_۱, ..., \alpha_n\}$ روی میدان اعداد مختلط مستقل خطی است پس

$$\lambda_۱\beta_۱ + \lambda'_۱\beta_۲ = \lambda_۲\beta_۱ + \lambda'_۲\beta_۲ = ... = \lambda_n\beta_۱ + \lambda'_n\beta_۲ = ۰$$

وچون $\{\beta_۱, \beta_۲\}$ روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی می‌باشند و برای $۱ \leq i \leq n$ داریم $\lambda_i\beta_۱ + \lambda'_i\beta_۲ = ۰$ در نتیجه:

$$\lambda_i = \lambda'_i = ۰, \quad i = ۱, ۲, ..., n.$$

پس مجموعه $\{\beta_۱\alpha_۱ ... \beta_۱\alpha_n, \beta_۲\alpha_۱, ..., \beta_۲\alpha_n\}$ یک مبنای V روی $\mathbb{R}$ است. بنابراین

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = ۲n = ۲\dim_{\mathbb{C}}(V)$$

۷) اگر $\mathbb{F}$ یک میدان نامتناهی و V یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت V به صورت اجتماع تعداد متناهی زیر فضای واقعی خود نیست.

حل. با استقرا روی n (تعداد زیر فضاها) نشان می‌دهیم V را نمی‌توان به صورت اجتماع n زیر فضا نوشت. در حالت $n = ۱$ واضح است زیرا V برابر یک زیر فضای واقعی خود نیست. حال فرض کنید $n > ۱$ و حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد. یعنی V را نتوان به صورت اجتماع $n - ۱$ زیر فضای واقعی خود نوشت نشان می‌دهیم V را نمی‌توان به صورت اجتماع n زیر فضای واقعی خود نوشت. فرض خلف، فرض می‌کنیم زیر فضاهای $V_۱, V_۲, ..., V_n$ موجود باشند که $V = \bigcup_{k=۱}^{n} V_k$

طبق فرض استقرا $V \neq \bigcup_{k=۱}^{n-۱} V_k$. پس y عضو V هست که $y \notin \bigcup_{k=۱}^{n-۱} V_k$ ولی چون $V = \cup_{k=۱}^{n} v_k$ پس الزاماً $y \in V_n$. از طرفی $\bigcup_{k=۱}^{n-۱} V_k \not\subseteq V_n$ چون اگر

$$\bigcup_{k=۱}^{n-۱} V_k \subseteq V_n$$

پس

$$V = \bigcup_{k=۱}^{n-۱} V_k \cup V_n \subseteq V_n \not\subseteq V$$

که تناقض است لذا $x \in \bigcup_{k=۱}^{n-۱} V_k$ وجود دارد که $x \notin V_n$. مجموعه $A = \{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{F}\}$ یک مجموعه نامتناهی است زیرا اولاً $\mathbb{F}$ یک میدان نامتناهی است و ثانیاً اگر $\lambda_۱, \lambda_۲$

دو عضو $\mathbb{F}$ باشند که $x+\lambda_1 y = x+\lambda_2 y$ در نتیجه $\lambda_1 y = \lambda_2 y$ پس $(\lambda_1-\lambda_2)y = 0$ و چون y ناصفر است لذا $\lambda_1 = \lambda_2$. حال داریم $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$ چون تعداد زیر فضاهای V_k که Vرا تشکیل داده‌اند متناهی است و تعداد اعضای مجموعه A نامتناهی است پس حداقل یک زیر فضا مثل V_i وجود دارد که شامل حداقل دو عضو از اعضای مجموعه A است. فرض کنید این دو عضو $x+\lambda_1 y$ و $x+\lambda_2 y$ باشند. اگر $t=n$ آنگاه $x = x+\lambda_1 y - \lambda_1 y \in V_n$ که تناقض است حال اگر $1 \le t \le n-1$ باشد آنگاه

$$(x+\lambda_1 y) - (x+\lambda_2 y) \in V_t \Longrightarrow (\lambda_1-\lambda_2)y \in V_t$$

وچون $\lambda_2 \neq \lambda_1$ پس $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ در نتیجه:

$$y = (\lambda_1-\lambda_2)^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)y \in V_t$$

که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و V را نمی‌توان به صورت اجتماع n زیر فضای واقعی خود نوشت.

۸) اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد و $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیر فضاهای سره V باشند به طوری که برای هر n، $V_n \not\subseteq \bigcup_{j=1, j\neq n}^{\infty} V_j$. نشان دهید $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ زیر فضا نیست.

حل. با توجه به اینکه $V_1 \not\subseteq \bigcup_{j=2}^{\infty} V_j$ پس $y \in V_1$ وجود دارد که $y \neq \bigcup_{j=2}^{\infty} V_j$. از طرفی $\bigcup_{j=2}^{\infty} V_j \neq V_1$ زیر در غیر این صورت داریم:

$$V_2 \subseteq \bigcup_{j=2}^{\infty} V_j \subseteq V_1 \Longrightarrow V_2 \subseteq V_2 \Longrightarrow V_2 \subseteq \bigcup_{j=1, j\neq 2}^{\infty} V_j$$

که تناقض است پس $x \in \cup_{j=2}^{\infty} V_j$ وجود دارد که $x \notin V_1$ حال مجموعه $A = \{x+\lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه ناشمار است زیرا اولاً $\mathbb{R}$ ناشماراست و ثانیاً اگر λ_1, λ_2 دو عضو $\mathbb{R}$ باشند که $x+\lambda_1 y = x+\lambda_2 y$ پس $\lambda_1 y = \lambda_2 y$ لذا $(\lambda_1-\lambda_2)y = 0$ وچون y ناصفر است در نتیجه $\lambda_1 = \lambda_2$. حال فرض کنید $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ زیر فضا باشد در نتیجه $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$. حال چون $V_1, V_2, \ldots$ تعداد شمارا زیر فضا هستند پس عدد طبیعی k وجود دارد که V_k حداقل شامل دو عضو از مجموعه A است زیرا در غیر اینصورت برای هر عدد طبیعی k، V_k شامل حداکثر یک عضو از اعضای A می‌باشد و چون

تعداد این فضاها شماراست پس A نیز مجموعه‌ای شماراست و این تناقض است. پس فرض کنید $x+\lambda_{1}y, x+\lambda_{2}y \in V_k$ اگر $k=1$ پس

$$x = x+\lambda_{1}y-\lambda_{1}y \in v_{1}$$

که تناقض است و اگر $k > 2$ داریم:

$$\begin{aligned} x+\lambda_{1}y-(x+\lambda_{2}y) \in V_k &\Longrightarrow \lambda_{1}y-\lambda_{2}y \in V_k \\ &\Longrightarrow (\lambda_{1}-\lambda_{2})y \in V_k \end{aligned}$$

و چون $\lambda_{2} \neq \lambda_{1}$ پس $\lambda_{1}-\lambda_{2} \neq 0$ در نتیجه:

$$y = (\lambda_{1}-\lambda_{2})^{-1}(\lambda_{1}-\lambda_{2})y \in V_k$$

که این حالت نیز تناقض است پس $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ زیر فضا نیست.

۹) فرض کنید $\mathcal{L}$ مجموعه تمام nتایی‌های مرتب از $\mathbb{R}^n$ مانند $(x_{1},...,x_n)$ باشد به طوری که مؤلفه‌های مرتبه فرد آن با هم برابرند. یعنی $x_{1}=x_{3}=...$.

(آ) ثابت کنید $\mathcal{L}$ زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است.

(ب) یک پایه برای$\mathcal{L}$ ارائه دهید وبعد $\mathcal{L}$ را مشخص کنید.

حل.

(آ) فرض کنید $x=(x_{1},...,x_n)$ و $y=(y_{1},...,y_n)$ عناصر $\mathcal{L}$ باشند پس مؤلفه‌های فرد x با هم برابرند ومؤلفه‌های فرد y نیز با هم برابرند حال اگر $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x+\lambda y &= (x_{1},...,x_n)+\lambda(y_{1},...,y_n) \\ &= (x_{1}+\lambda y_{1},...,x_n+\lambda y_n) \end{aligned}$$

حال اگر $x_j+\lambda y_j$ و $x_i+\lambda y_i$ دو مؤلفه فرد $x+\lambda y$ باشند با توجه به اینکه $x_i=x_j$ و $y_i=y_j$ پس

$$x_i+\lambda y_i = x_i+\lambda y_j \Longrightarrow x+\lambda y \in \mathcal{L}$$

لذا $\mathcal{L}$ زیرفضا است.

(ب) اگر n فرد باشد مجموعه زیر یک پایه برای $\mathcal{L}$ است.

$$\{(۱, ۰, ۱, ۰, ..., ۱), e_۲, e_۴, ..., e_{n-۱}\}$$

که در آن e_k برداری است که مؤلفه kام آن ۱ و بقیه صفراند در نتیجه

$$\dim\,(\mathcal{L}) = \frac{n+۱}{۲}$$

اگر n زوج باشد مجموعه زیر یک پایه برای $\mathcal{L}$ است:

$$\{(۱, ۰, ..., ۱), e_۲, e_۴, ..., e_n\}$$

در نتیجه $\dim\,(\mathcal{L}) = \frac{n}{۲} + ۱$.

۱۰) فرض کنید $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد و $\{(x,y),(z,t),(x',y'),(z',t')\} \subseteq \mathbb{C}^۲$ ثابت کنید اسکالرهای α, β که هر دو با هم صفر نیستند در $\mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که دو بردار $\theta = \alpha(x,y) + \beta(z,t)$ و $\theta' = \alpha(x',y') + \beta(z',t')$ وابستگی خطی دارند.

حل. ترکیب خطی $\lambda\theta + \lambda'\theta' = ۰$ از θ, θ'را در نظر می‌گیریم بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود. فرض می‌کنیم $\lambda' = ۱$.

$$\lambda\theta + \theta' = ۰ \Longrightarrow \lambda(\alpha(x,y) + \beta(z,t)) + (\alpha(x',y') + \beta(z',t')) = ۰$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda z + z' \\ \lambda y + y' & \lambda t + t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

قرار می‌دهیم $A = \begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda z + z' \\ \lambda y + y' & \lambda t + t' \end{pmatrix}$ در این صورت

$$\det\,(A) = \lambda^۲(xt - yz) + \lambda(xt' + x't - yz' - y'z) + x't' - y'z' = ۰$$

حال نشان می‌دهیم معادله فوق بر حسب λ روی میدان اعداد مختلط دارای جواب است. اگر $x't' - y'z = ۰$ آنگاه معادله همیشه دارای جواب است و مسأله حل است. حال فرض

کنید $x't'-y'z'\neq ۰$ پس کافی است نشان دهیم ضریب λ یا $\lambda^۲$ در معادله فوق ناصفر است. فرض کنید ضریب $\lambda^۲$ صفر باشد یعنی $xt-yz=۰$ در این صورت (x,y) و (z,t) وابستگی خطی دارند یعنی γ وجود دارد که

$$(z,t)=\gamma(x,y)$$

در این صورت

$$\begin{aligned}\theta=\alpha(x,y)+\beta(z,t)&=\alpha(x,y)+\beta\gamma(x,y)\\&=(\alpha+\beta\gamma)(x,y)\end{aligned}$$

و چون $x't'-y'z'\neq ۰$ لذا (x',y')و (z',t') مستقل خطی‌اند. بنابراین $\alpha_۱$و $\beta_۱$ موجود است که

$$(x,y)=\alpha_۱(x',y')+\beta(z',y')$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\theta=(\alpha+\beta\gamma)(x,y)&=(\alpha+\beta\gamma)(\alpha_۱(x',y')+\beta_۱(z',t'))\\&=(\alpha+\beta\gamma)\theta'\end{aligned}$$

بنابراین اگر ضریب $\lambda^۲$ صفر باشد به ازای αو βای θو θ'وابسته خطی هستند و اگر ضریب $\lambda^۲$ ناصفر باشد معادله دارای جواب است لذا در این حالت نیز مسئله حل می‌گردد.

۱۱) مجموعه برداری $(۱\leq i\leq n)\quad a_i=(a_{i۱},...,a_{in})$ از فضای حقیقی را در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر

$$\mid a_{ij}\mid > \sum_{i=۱,i\neq j}^{n}\mid a_{ij}\mid$$

آنگاه مجموعه بردارهای فوق مستقل خطی‌اند.

حل. فرض کنید مجموعه $\{a_۱,...,a_n\}$ وابسته خطی باشند لذا اسکالرهای $\lambda_۱,...,\lambda_n$ که همگی صفر نیستند موجود است که

$$\lambda_۱a_۱+\lambda_۲a_۲+...+\lambda_na_n=۰$$

از طرفی $a_i = (a_{i۱}, ..., a_{in})$ برای $۱ \leq i \leq n$ پس داریم

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \ a_{ji} = ۰ \qquad j = ۱, ۲, ..., n \tag{۲-۳}$$

حال فرض کنید $| \lambda_k | = \max\{| \lambda_i | : ۱ \leq i \leq n\}$ چون λ_i ها $۱ \leq i \leq n$ همگی صفر نیستند پس $| \lambda_k | > ۰$. طبق (۳ـ۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \ a_{jk} = ۰ &\Longrightarrow \lambda_k a_{kk} = - \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} \lambda_j \ a_{jk} \\
&\Longrightarrow | \lambda_k a_{kk} | = | \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} \lambda_j a_{jk} | \leq \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} | \lambda_j a_{jk} | \\
&\Longrightarrow | \lambda_k || a_{kk} | \leq \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} | \lambda_j || a_{jk} | \\
&\Longrightarrow | a_{kk} | \leq \sum_{j=۱, j\neq k}^{n} | \frac{\lambda_j}{\lambda_k} || a_{jk} | \leq \sum_{j=۱, j\neq k} | a_{jk} |
\end{aligned}$$

که این با فرض مسأله در تناقض است لذا بردارهای فوق مستقل خطی‌اند.