فصل ۲

دترمینان

۲-۱ دترمینان

یکی از مفاهیم بسیار مهم که نقش اساسی در نظریه جبر خطی دارد، مفهوم دترمینان است. در حقیقت دترمینان یک تابع با مقدار اسکالر روی مجموعه ماتریس‌های مربع است که به هر ماتریس مربع یک عدد را که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود، نسبت می‌دهد. کاربردهایی از دترمینان در بعضی از مسائل مانند پیدا نمودن معکوس یک ماتریس، حل دستگاه معادلات خطی، پیدا نمودن مقادیر ویژه و ... را در فصل‌های بعد خواهید دید.

نظریه دترمینان در قرن‌های هیجدهم و نوزدهم به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفت و امروزه اگر چه این مفهوم از اهمیت کمتری برخوردار است ولی همچنان نقش اساسی در نظریه و کاربرد ماتریس‌ها

ایفا می‌کند. معمولاً تابع دترمینان را با استفاده از مفهوم جایگشت‌ها تعریف می‌کنند. ولی چون در اینجا نمی‌خواهیم زیاد به جنبه وجودی و تئوری این تابع بپردازیم بنابراین تعریف آن را با استفاده از بسط لاپلاس بیان می‌کنیم. بدین ترتیب که نخست دترمینان یک ماتریس ۱×۱ به طور بدیهی تعریف می‌گردد و سپس دترمینان هر ماتریس $n \times n$ با استفاده از بسط لاپلاس به صورت مجموعی از دترمینان ماتریس‌های $(n-۱) \times (n-۱)$ تعریف می‌شود. برای این کار نخست نیاز به معرفی یک نماد داریم.

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، برای $n \geq ۲$، ماتریس $\widetilde{A_{ij}}$، ماتریسی است $(n-۱) \times (n-۱)$ که با حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A به دست می‌آید.

مثال ۲-۱-۱ . اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$\tilde{A}_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{۱۳} = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{۳۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}.$$

تعریف ۲-۱-۲ . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر $n = ۱$ و $A = [a]$ آنگاه دترمینان A که با نماد $det\ A$ یا $|A|$ نشان داده می شود به صورت $det\ A = a$ تعریف می‌شود و برای $n \geq ۲$ دترمینان A به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$det\ A = \sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{۱+j} a_{۱j}\ det\ \tilde{A}_{۱j},$$

که این فرمول بسط لاپلاس بر حسب سطر اول نامیده می‌شود.

معمولاً $c_{ij} = (-۱)^{i+j} \det\ \tilde{A}_{ij}$ را همسازه سطر iام و ستون jام ماتریس A می‌نامند که با استفاده از این نماد دترمینان A می‌تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$\det\ A = a_{۱۱}c_{۱۱} + a_{۱۲}c_{۱۲} + \cdots + a_{۱n}c_{۱n} = \sum_{j=۱}^{n} a_{۱j}c_{۱j},$$

بدین جهت این فرمول، بسط همسازه بر حسب سطر اول نیز نامیده می‌شود.

دترمینان یک ماتریس می‌تواند به صورت بسط لاپلاس بر حسب هر سطر یا هر ستون محاسبه گردد که این مطلب را در قضیه زیر و بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۱-۳ (بسط لاپلاس). دترمینان هر ماتریس مربع را می‌توان به صورت بسط لاپلاس برحسب هر سطر یا هر ستون آن ماتریس محاسبه کرد. یا به عبارتی، اگر A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح i و j که $1 \leq i, j \leq n$، داریم:

$$det\ A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, det\ (\tilde{A}_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{ik},$$

و

$$det\ A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{kj}\, det\ (\tilde{A}_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} c_{kj},$$

مثال ۲-۱-۴ . اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه، $\det\ A = ad - bc$. که این مطلب را می‌توان چنین بیان کرد که دترمینان ماتریس 2×2 برابراست با حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی منهای حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی.

مثال ۲-۱-۵ . اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ آنگاه،

$$\det\ A = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

که پس از ساده کردن به صورت زیر در می‌آید.

$$\det\ A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}),$$

مطلب بالا را می‌توان به صورت زیر که به نام قاعده ساروس معروف است بیان کرد.

بدین ترتیب که اگر ستون اول و دوم A را به ترتیب در سمت راست ماتریس A نوشته و سپس سه قطر اصلی و سه قطر فرعی روی آن مشخص کنیم، آنگاه دترمینان A برابر است با مجموع حاصلضرب درایه‌های هر قطر اصلی منهای مجموع حاصلضرب درایه‌های هر قطر فرعی به صورت زیر:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{array}\right.$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \det A &= (a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳} + a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} + a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲}) \\ &\quad - (a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱} + a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲} + a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}). \end{aligned}$$

مثال ۲-۱-۶ . مطلوب است محاسبه دترمینان A هرگاه،

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۷ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}.$$

حل. با استفاده از قاعده ساروس می‌نویسیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۳ & ۴ & ۵ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۷ & ۲ & ۱ & ۷ \\ ۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \end{array}\right.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \det A &= [(۳ \times ۷ \times (-۱)) + (۴ \times ۲ \times ۱) + (۵ \times ۱ \times \times ۰)] \\ &\quad - [(۵ \times ۷ \times ۱) + (۳ \times ۲ \times ۰) + (۴ \times ۱ \times (-۱))] \\ &= -۲۱ + ۸ - ۳۵ + ۴ = -۴۴. \end{aligned}$$

مثال ۲-۱-۷ . مطلوب است محاسبه $\det A$ هرگاه:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۶ & ۰ & -۱ \\ -۶ & ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

حل. برای پیدا کردن دترمینان یک ماتریس بهتر است از بسط آن بر حسب سطر یا ستونی استفاده کنیم که بیشترین درایه صفر را دارد، زیرا این کار محاسبات ما را می‌نیمم می‌کند. در این مثال سطر اول بهترین انتخاب است، بنابراین دترمینان A را با استفاده از بسط بر حسب سطر اول محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$\det A = (-۱)^{۱+۱} \times ۳ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۶ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} + ۰ + ۰ + ۰,$$

با بسط این دترمینان بر حسب ستون سوم مجدداً نتیجه می‌شود:

$$\det A = ۳ \times (-۱)^{۲+۳} (-۱) \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} = -۱۵.$$

پیدا کردن دترمینان یک ماتریس از طریق بسط لاپلاس مستلزم محاسبات زیاد و خسته کننده است، زیرا مثلاً اگر A یک ماتریس ۵×۵ باشد، آنگاه بسط آن برای پیدا کردن دترمینان ماتریس، شامل ۵ دترمینان ماتریس ۴×۴ می‌باشد که بسط هرکدام از آنها نیز شامل ۴ ماتریس ۳×۳ خواهد بود. که در نتیجه باید دترمینان ۲۰ ماتریس ۳×۳ محاسبه گرد. بنابراین روش بسط لاپلاس بیشتر در مسائل نظری مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای ارائه روش ساده‌تر، توجه داریم هرچه تعداد صفرهای یک سطر یا یک ستون ماتریس زیادتر باشد محاسبه دترمینان آن راحت‌تر است. از این رو باید روشی را پیدا کرد که تعداد صفرها را در سطر یا ستون ماتریس بدون تغییر اساسی در دترمینان آن افزایش دهد. واضح است که یکی از راه‌های تولید صفر در یک ماتریس استفاده از اعمال سطری مقدماتی است. حال این سوال مطرح می‌شود که انجام اعمال سطری مقدماتی چه تأثیری روی دترمینان ماتریس دارد.

خوشبختانه تأثیر این گونه اعمال به راحتی قابل محاسبه است و با استفاده از آنها می‌توان ماتریس را به فرم یک ماتریس بالا مثلثی درآورده و سپس دترمینان آن را به راحتی محاسبه کرد.

قضیه ۲-۱-۸ . اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه،

۱) اگر A دارای یک سطر یا یک ستون صفر باشد آنگاه $det\ A = 0$.

۲) اگر دو سطر مجزا یا دو ستون مجزای A را با هم جابه‌جا کنیم آنگاه دترمینان ماتریس حاصل برابر است با $-det\ A$.

۳) اگر یک سطر یا یک ستون A در یک ثابت c ضرب شود آنگاه دترمینان ماتریس حاصل برابر است با $c\ det\ A$.

۴) اگر ماتریسی دارای دو سطر یا دو ستون مساوی باشند آنگاه $det\ A = 0$.

۵) اگر مضربی از یک سطر ماتریس A به سطر دیگر و یا مضربی از یک ستون ماتریس A به ستون دیگر آن اضافه شود، دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند.

۶) اگر A یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) باشد، آنگاه دترمینان A برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

برهان. اثبات را برای سطرهای ماتریس بیان می‌کنیم، برای ستون‌ها به طور مشابه اثبات خواهد شد.

۱) کافی است بسط لاپلاس را بر حسب همان سطر یا ستونی که صفر است بنویسیم نتیجه می‌شود $\det A = 0$.

۲) این قسمت را با استفاده از استقرأ ثابت می‌کنیم. برای $n = 2$ نتیجه بدیهی است. حال فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ با $n > 2$ باشد. اگر B ماتریسی باشد که از جابجایی دو سطر A به دست آمده باشد، بسط لاپلاس دترمینان A و B را بر حسب یک سطر غیر از سطرهای جابجا شده می‌نویسیم. درایه‌های این سطر که فرض می‌کنیم سطر i ام باشد در هر دو ماتریس

A و B با هم مساوی است، بنابراین،

$$\det\ A = \sum_{k=۱}^{n} (-۱)^{i+k}\, a_{ik} \det\ \tilde{A}_{ik}$$

$$\det\ B = \sum_{k=۱}^{n} (-۱)^{i+k}\, a_{ik} \det\ \tilde{B}_{ik} \qquad (۱\text{-}۲)$$

اما $\tilde{B}_{ik}$ یک ماتریس $(n-۱)\times(n-۱)$ است که از جابجایی دو سطر $\tilde{A}_{ik}$ حاصل شده است. لذا با استفاده از فرض استقرا $\det\ \tilde{B}_{ik} = -\det\ \tilde{A}_{ik}$. بنابراین با توجه به روابط (۲ـ۱) نتیجه می‌شود:

$$\det\ B = -\det\ A$$

۳) فرض کنید B ماتریس حاصل از ضرب کردن سطر iام A در اسکالر c باشد. اگر بسط دترمینان B بر حسب سطر iام را بنویسیم، چون بقیه سطرهای A و B یکی هستند، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\det\ B &= \sum_{k=۱}^{n} (-۱)^{i+k}\, b_{ik} \det\ (\tilde{B}_{ik})\\ &= \sum_{k=۱}^{n} (-۱)^{i+k}\, c a_{ik} \det\ (\tilde{B}_{ik})\\ &= c\sum_{k=۱}^{n} (-۱)^{i+k}\, a_{ik} \det\ (\tilde{A}_{ik})\\ &= c\det\ A\end{aligned}$$

۴) اگر دو سطر ماتریس A با هم مساوی باشند و B ماتریسی باشد که از جابجایی این دو سطر حاصل شده است آنگاه $A = B$ است. اما با استفاده از قسمت (ب) $\det\ A = -\det\ B$ و در نتیجه $\det\ A = ۰$.

۵) فرض کنید B ماتریسی باشد که با افزودن t برابر سطر iام A به سطر jام آن حاصل شده باشد. در نتیجه سطر jام B به صورت،

$$\begin{bmatrix} a_{j۱} + t a_{i۱} & a_{j۲} + t a_{i۲} & \ldots & a_{jn} + t a_{in}\end{bmatrix}$$

است. همسازه درایه‌های این سطر در B با همسازه درایه‌های سطر jام A با هم برابرند. اکنون بسط دترمینان B بر حسب این سطر عبارت است از:

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{k=1}^{n}(a_{jk}+ta_{ik})\, c_{jk}(B)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}c_{jk}(A) \,+\, t\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{jk}(A)\\ &= \det A + t\det C\end{aligned}$$

که $c_{jk}(A)$ و $c_{jk}(B)$ به ترتیب همسازه سطر jام و ستون kام A و B هستند و C ماتریسی است که از جایگزینی سطر iام A به جای سطر jام A به دست آمده است. در نتیجه سطر iام و jام C با هم مساوی هستند. لذا $\det C = 0$ و در نتیجه $\det B = \det A$.

۶) با استفاده از استقرا روی n، مطلب را ثابت می‌کنیم. برای $n = 1$ نتیجه بدیهی است. حال فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ بالا مثلثی و $n > 1$ باشد. اگر بسط دترمینان A را بر حسب ستون اول آن بنویسیم، چون تنها درایه غیر صفر این ستون a_{11} است، بنابراین:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det \tilde{A}_{11} = a_{11} \det \tilde{A}_{11},$$

اما $\tilde{A}_{11}$ یک ماتریس بالا مثلثی و $(n-1)\times(n-1)$ است که درایه‌های قطر اصلی آن a_{22}، a_{32}، ... و a_{nn} هستند. بنابراین بنا به فرض استقرا،

$$\det \tilde{A}_{11} = a_{22}a_{32}\ldots a_{nn},$$

بنابراین،

$$\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

■

حال با توجه به قضیه قبل برای پیدا کردن دترمینان ماتریس A، می‌توان آن را با استفاده از روند حذفی گوس به فرم یک ماتریس بالا مثلثی درآورده و به سادگی دترمینان آن را حساب کرد.

مثال ۲-۱-۹ . مطلوب است محاسبه $\det A$ هرگاه،

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۵ \\ ۳ & -۶ & ۹ \\ ۲ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل. با استفاده از قضیه قبل، A را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌کنیم، داریم،

$$\det A = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۵ \\ ۳ & -۶ & ۹ \\ ۲ & ۶ & ۱ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ۳ & -۶ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۲ & ۶ & ۱ \end{vmatrix}$$

سطر اول و دوم ماتریس را جابجا کردیم.

$$= -۳ \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۲ & ۶ & ۱ \end{vmatrix}$$

سطر اول را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب کردیم یا به طور معادل در سطر اول از ۳ فاکتور گرفتیم.

$$= -۳ \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱۰ & -۵ \end{vmatrix}$$

۲- برابر سطر اول به سطر سوم اضافه شده است.

$$= -۳ \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & -۵۵ \end{vmatrix}$$

۱۰- برابر سطر دوم به سطر سوم اضافه شده است و به ماتریس بالامثلثی تبدیل شده است.

$$= (-۳) \times ۱ \times ۱ \times (-۵۵) = ۱۶۵$$

مثال ۲-۱-۱۰ . اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه $\det A$.

حل. در سطر دوم این ماتریس یک درایه صفر داریم. بنابراین در اینجا ساده‌تر است که با یک عمل ستونی یک درایه دیگر از سطر دوم را صفر کنیم و سپس از بسط دترمینان بر حسب این سطر استفاده

کنیم. برای این کار ستون اول را با ستون سوم جمع می‌کنیم،

$$\det\ A = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{vmatrix} = -۱ \begin{vmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & ۸ \end{vmatrix} = ۱۲$$

مثال ۲-۱-۱۱ . اگر $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = ۶$ مطلوب است محاسبه دترمینان

$$A = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ ۳x & ۳y & ۳z \\ -p & -q & -r \end{bmatrix}.$$

حل.

در سطر دوم از ۳ و در سطر سوم از ۱- فاکتورگرفته شده است.

$$\det\ A = ۳(-۱)\det \begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

منفی سطر دوم به سطر اول اضافه شده است.

$$= -۳\det \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

سطرهای دوم و سوم جابجا شدند.

$$= ۳\det \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = ۱۸$$

دترمینان ماتریس‌های بلوکی به دفعات در مسائل ظاهر می‌شوند. اگر این ماتریس‌ها به فرم مثلثی باشند به این مفهوم که بلوک‌های روی قطر اصلی مربع باشند و بلوک‌هایی که زیر قطر اصلی قرار دارند صفر باشند آنگاه دترمینان آنها بر حسب دترمینان بلوک‌های روی قطر اصلی به دست می‌آید.

قضیه ۲-۱-۱۲ . ماتریس‌های بلوکی $\begin{bmatrix} A & \circ \\ Y & B \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} A & X \\ \circ & B \end{bmatrix}$ را که در آن A و B ماتریس‌های مربع هستند در نظر بگیرید. در این صورت:

$$det \begin{bmatrix} A & \circ \\ Y & B \end{bmatrix} = det\, A\, det\, B, \qquad det \begin{bmatrix} A & X \\ \circ & B \end{bmatrix} = det\, A\, det\, B.$$

برهان. فرض کنید $T = \begin{bmatrix} A & X \\ \circ & B \end{bmatrix}$ که در آن A یک ماتریس $k \times k$ است، قضیه را با استفاده از استقرا روی k ثابت می‌کنیم. برای حالت $k = ۱$، قضیه واضح است. فرض کنید $k > ۱$، اگر بسط دترمینان T را بر حسب ستون اول بنویسیم داریم:

$$\det T = \sum_{i=۱}^{k} (-۱)^{i+۱}\, a_{i۱}\, \det \tilde{T}_{i۱} \qquad (۲\text{-}۲)$$

که $a_{۱۱}$، $a_{۲۱}$، ... و $a_{k۱}$ درایه‌های ستون اول A هستند. اما از سوی دیگر،

$$\tilde{T}_{i۱} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i۱} & X_i \\ \circ & B \end{bmatrix}$$

که $\tilde{A}_{i۱}$ یک ماتریس $(k-۱) \times (k-۱)$ است که از حذف سطر iام و ستون اول A حاصل شده است و بنا به فرض استقرا،

$$\det \tilde{T}_{i۱} = \det \tilde{A}_{i۱}\, \det B \qquad (۳\text{-}۲)$$

حال با قرار دادن رابطه (۲ـ۳) در رابطه (۲ـ۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \det T &= \sum_{i=۱}^{k} (-۱)^{i+۱} a_{i۱} \det \tilde{A}_{i۱}\, \det B \\ &= \det B \sum_{i=۱}^{k} (-۱)^{i+۱}\, a_{i۱}\, \det \tilde{A}_{i۱} \\ &= \det B\, \det A. \end{aligned}$$

■

مثال ۲-۱-۱۳ .

$$\det \left[\begin{array}{cc|ccc} ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \hline ۰ & ۱ & ۳ & -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۵ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right] = \det \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۱ \times ۵ = ۵$$

تمرین ۱.۲

۱) دترمینان هرکدام از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

(آ) $\begin{bmatrix} ۱ & b & c \\ b & c & ۱ \\ c & ۱ & b \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۵ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۸ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) اگر $k = \det \begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان‌های زیر را حساب کنید.

(آ) $\begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 3b_1+5c_1 & 3b_2+5c_2 & 3b_3+5c_3 \\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} 2a_1+b_1 & 2a_2+b_2 & 2a_3+b_3 \\ 2b_1+c_1 & 2b_2+c_2 & 4b_3+c_3 \\ 2c_1+a_1 & 2c_2+a_2 & 2c_2+a_3 \end{bmatrix}$

۳) دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را بیابید.

(آ)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(پ) $\begin{bmatrix} A & X & Y \\ 0 & B & 0 \\ 0 & Z & C \end{bmatrix}$ (A، B و C ماتریس‌های مربع هستند)

(ت) $\begin{bmatrix} A & X & 0 \\ 0 & B & 0 \\ Y & Z & C \end{bmatrix}$ (A، B و C ماتریس‌های مربع هستند)

۴) تمام مقادیر x و y را بیابید که در معادله $\det A = 0$ صدق می‌کنند هرگاه:

(آ)
$$A=\begin{bmatrix} ۰ & x & y \\ y & ۰ & x \\ x & y & ۰ \end{bmatrix}$$

(ب)
$$A=\begin{bmatrix} x & y & ۰ & ۰ \\ ۰ & x & y & ۰ \\ ۰ & ۰ & x & y \\ y & ۰ & ۰ & x \end{bmatrix}$$

(پ)
$$A=\begin{bmatrix} ۱ & x & x^{۲} & x^{۳} \\ x & x^{۲} & x^{۳} & ۱ \\ x^{۲} & x^{۳} & ۱ & x \\ x^{۳} & ۱ & x & x^{۲} \end{bmatrix}$$

۵) نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & a & a^{۲} \\ ۱ & b & b^{۲} \\ ۱ & c & c^{۲} \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

۶) نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & x & x^{۲} & x^{۳} \\ a & ۱ & x & x^{۲} \\ p & b & ۱ & x \\ q & r & c & ۱ \end{bmatrix} = (۱-ax)(۱-bx)(۱-cx)$$

۷) نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} x & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & x & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & x & -۱ \\ a & b & c & x+d \end{bmatrix} = a+bx+cx^{۲}+dx^{۳}+x^{۴}$$

۸) نشان دهید:

$$\det\begin{bmatrix} a+x & b+x & c+x \\ b+x & c+x & a+x \\ c+x & a+x & b+x \end{bmatrix} = (a+b+c+3x)[(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)]$$

۹) نشان دهید اگر ماتریس زیر $n \times n$ باشد، آنگاه:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1+(-1)^{n+1}$$

۱۰) اگر c_0، c_1، ... و c_n، $n+1$ اسکالر دلخواه باشند، آنگاه ماتریس به فرم،

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \dots & c_0^n \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{bmatrix}$$

یک ماتریس واندارموند نامیده می‌شود. نشان دهید:

$$\det\ M_n = \Pi_{0\le i\le j\le n}(c_j - c_i)$$

(راهنمایی: با استفاده از استقرا نشان دهید،

$$\det\ M_n = (c_n - c_{n-1})(c_n - c_{n-2})\dots(c_n - c_0)\det\ M_{n-1})$$

۱۱) اگر ماتریس A به صورت زیر باشد، $\det\ (A-tI)$ را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

۲-۲ دترمینان و معکوس یک ماتریس

در این بخش بعضی از خواص دترمینان را ثابت کرده، با استفاده از آنها نشان می‌دهیم که ماتریس A معکوس‌پذیر است، اگر و فقط اگر $\det\ A \neq 0$. سپس فرمولی برای محاسبه A^{-1} با استفاده از دترمینان ارائه خواهیم نمود. اما در ابتدای قضیه زیر را به عنوان نتیجه‌ای از قضیه (۸.۱.۲) بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۲-۱ . اگر E یک ماتریس مقدماتی $n \times n$ و A یک ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه:

$$det\ EA = det\ E det\ A.$$

برهان. اثبات قضیه را در حالت‌های مختلفی که E می‌تواند داشته باشد بررسی می‌کنیم.
الف) اگر E حاصل از جابجایی دو سطر (دو ستون) I باشد آنگاه $\det\ E = -1$ و از طرفی EA ماتریسی است که از جابجایی دو سطر (دو ستون) A حاصل می‌شود در نتیجه،

$$\det\ EA = -\det\ A = \det\ E \det\ A$$

ب) اگر E حاصل از ضرب یک سطر (ستون) I در اسکالر ناصفر c باشد آنگاه $\det\ E = c$ از طرفی EA ماتریسی است که از ضرب یک سطر (ستون) A در c حاصل می‌شود و در نتیجه،

$$\det\ EA = c \det\ A = \det\ E \det\ A$$

پ) اگر E حاصل از اضافه نمودن مضربی از یک سطر (ستون) I به سطر (ستون) دیگر باشد، آنگاه $\det\ E = 1$. از طرفی EA ماتریسی است که از اضافه نمودن مضربی از یک سطر (ستون) A به سطر (ستون) دیگر حاصل می‌شود و در نتیجه،

$$\det\ EA = \det\ A = \det\ E \det\ A$$

و این اثبات را کامل می‌کند. ■

با استفاده از استقرا نتیجه زیر به راحتی به دست می‌آید.

نتیجه ۲-۲-۲ . اگر $E_۱$، $E_۲$، ... و E_k ماتریس‌های مقدماتی $n \times n$ و A یک ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه،

$$\det\,(E_k \ldots E_۲ E_۱ A) = \det\,E_k \ldots \det\,E_۲ \det\,E_۱ \det\,A$$

نتیجه ۲-۲-۳ . اگر A معکوس‌پذیر نباشد آنگاه $\det\,A = ۰$.

برهان. چون A معکوس‌پذیر نیست بنابراین A را نمی‌توان با اعمال سطری مقدماتی به I تبدیل کرد. بنابراین اگر R فرم سطری پلکانی تحویل یافته A باشد آنگاه $R \neq I$. در نتیجه R باید دارای یک سطر صفر باشد لذا بنا به قضیه (۸.۱.۲)، $\det\,R = ۰$. از طرفی ماتریس‌های مقدماتی $E_۱$، $E_۲$، ... و E_k وجود دارند به طوری که:

$$R = E_k \ldots E_۲ E_۱ A$$

در نتیجه بنا به قضیه قبل،

$$۰ = \det\,R = \det\,E_k \ldots \det\,E_۲ \det\,E_۱ \det\,A$$

و از آنجا که $\det\,E_i \neq ۰$ برای هر i، بنابراین $\det\,A = ۰$. ■

حال خاصیت ضربی بودن دترمینان را برای هر دو ماتریس دلخواه و مربع A و B بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۲-۴ . اگر A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند، آنگاه $det\,AB = det\,A\,det\,B$.

برهان. نخست فرض می‌کنیم که A معکوس‌پذیر نباشد بنا به نتیجه قبل داریم $\det\,A = ۰$. اما از طرفی AB نیز معکوس‌پذیر نیست، زیرا در غیر اینصورت $B(AB)^{-۱}$ یک معکوس A خواهد بود، بنابراین $\det\,AB = ۰$. در نتیجه:

$$\det\,AB = ۰ = \det\,A \det\,B$$

حال فرض کنید A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد، آنگاه بنا به قضیه (۷.۴.۱) هم‌ارز سطری با I_n خواهد بود. بنابراین ماتریس‌های مقدماتی $E_۱$، $E_۲$، ... و E_k وجود دارند به طوری که:

$$A = E_k \ldots E_۲ E_۱ I$$

و بر اساس قضیه قبل داریم:

$$\det\ A = \det\ E_k \dots \det\ E_2 \det\ E_1$$

و با استفاده از نتیجه قبل داریم:

$$\begin{aligned} \det\ AB &= \det\ (E_k \dots E_2 E_1 B) \\ &= \det\ E_k \dots \det\ E_2 \det\ E_1 \det\ B \\ &= \det\ A \det\ B. \end{aligned}$$

■

مثال ۲-۲-۵ . اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ آنگاه:

$$AB = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bd \\ -(ad + bd) & ac - bd \end{bmatrix}$$

و بنابراین تساوی $\det\ AB = \det\ A \det\ B$ نتیجه می‌دهد که:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

تساوی فوق تساوی جالبی برای اعداد مختلط است.

قضیه قبل را با استفاده از استقرا می‌توان برای تعداد متناهی ماتریس نیز بیان کرد. یعنی اگر A_1، A_2، ... و A_k ماتریس‌های $n \times n$ باشند، آنگاه:

$$\det\ (A_1 A_2 \dots A_k) = \det\ A_1 \det\ A_2 \dots \det\ A_k$$

و در حالت خاص اگر $A_i = A$ برای هر i نتیجه می‌شود:

$$\det\ A^k = (\det\ A)^k$$

حال با استفاده از قضایای قبل می‌توان شرط لازم و کافی برای معکوس‌پذیری یک ماتریس را با استفاده از دترمینان بیان کرد.

قضیه ۲-۲-۶ . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد، A معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر $det\ A \neq ۰$ و در این حالت $det\ A^{-۱} = \dfrac{۱}{det\ A}$.

برهان. اگر A معکوس‌پذیر باشد آنگاه $AA^{-۱} = I$ و بنا به قضیه (۴.۲.۲)،

$$۱ = \det\ I = \det\ (AA^{-۱}) = \det\ A \det\ A^{-۱}$$

بنابراین $\det\ A \neq ۰$ و $\det\ A^{-۱} = \dfrac{۱}{\det\ A}$.
برعکس، فرض کنید $\det\ A \neq ۰$ باشد، نشان می‌دهیم که A هم‌ارز سطری با I_n است و در نتیجه بنا به قضیه (۷.۴.۱)، A معکوس‌پذیر خواهد بود. فرض کنید R فرم سطری-پلکانی تحویل یافته A باشد، آنگاه ماتریس‌های مقدماتی $E_۱$، $E_۲$، ... و E_k وجود دارند به طوری که:

$$R = E_k \dots E_۲ E_۱ A$$

بنابراین،

$$\det\ R = \det\ E_k \dots \det\ E_۲ \det\ E_۱ \det\ A$$

از آنجا که $\det\ A \neq ۰$ و $\det\ E_i \neq ۰$ برای هر i، در نتیجه $\det\ R \neq ۰$ R دارای هیچ سطر صفر نیست. بنابراین $R = I$ و این اثبات را کامل می‌کند. ■

مثال ۲-۲-۷ . به ازای چه مقادیری از c ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -c \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲c & -۴ \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر است؟

حل. دترمینان A را با اضافه نمودن c برابر ستون اول به ستون سوم و سپس بسط آن بر حسب سطر اول محاسبه می‌کنیم:

$$\det\ A = \det\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -c \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲c & -۴ \end{bmatrix} = \det\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۱-c \\ ۰ & ۲c & -۴ \end{bmatrix} = ۲(c+۲)(c-۳)$$

بنابراین $\det\ A = ۰$ اگر و فقط اگر $c = ۳$ یا $c = -۲$ باشد در نتیجه A معکوس‌پذیر است هرگاه $c \neq -۲, ۳$ باشد.

قضیه ۲-۲-۸ . اگر E یک ماتریس سطری مقدماتی باشد، آنگاه $det\ E = det\ E^t$ است.

برهان. اگر E حاصل از جابجایی دو سطر I و یا ضرب نمودن یک سطر I در ثابت c باشد، آنگاه $E^t = E$ و در نتیجه $\det\ E = \det\ E^t$. اگر E حاصل از اضافه نمودن مضربی از یک سطر I به سطر دیگر باشد، آنگاه $\det\ E = ۱$ و چون E^t نیز حاصل از اضافه نمودن مضربی از یک ستون I به ستون دیگر است، در نتیجه $\det\ E^t = ۱$.

بنابراین $\det\ E = \det\ E^t$ و این اثبات را کامل می‌کند. ■

حال قضیه بالا را برای هر ماتریس دلخواه $n \times n$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۲-۹ . اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه $det\ A^t = det\ A$.

برهان. اگر A معکوس‌پذیر نباشد آنگاه A^t نیز معکوس‌پذیر نیست، بنابراین بنا به نتیجه (۳.۲.۲)،

$$\det\ A = ۰ = \det\ A^t,$$

حال فرض کنید A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد، آنگاه ماتریس‌های مقدماتی $E_۱$، $E_۲$، ... و E_k وجود دارند به طوری که:

$$A = E_k \dots E_۲ E_۱ I,$$

و در نتیجه:

$$A^t = E_۱^t E_۲^t \dots E_k^t,$$

بنا به قضیه قبل داریم:

$$\begin{aligned} \det\ A^t &= \det\ E_۱^t \det\ E_۲^t \dots \det\ E_k^t \\ &= \det\ E_۱ \det\ E_۲ \dots \det\ E_k \\ &= \det\ A. \end{aligned}$$

■

مثال ۲-۲-۱۰ . اگر $\det\ A = ۲$، $\det\ B = ۵$، مقدار $\det\ (A^۳ B^{-۱} A^t B^۲)$ را به‌دست آورید.

حل.

$$\begin{aligned}\det\,(A^{۳}B^{-۱}A^{t}B^{۲}) &= \det\,A^{۳}\det\,B^{-۱}\det\,A^{t}\det\,B^{۲}\\ &= (\det\,A)^{۳}\cdot\frac{۱}{\det\,B}\det\,A\cdot(\det\,B)^{۲}\\ &= ۲^{۳}\cdot\frac{۱}{۵}\cdot ۲\cdot ۵^{۲} = ۸۰\end{aligned}$$

مثال ۲-۲-۱۱ . نشان دهید ماتریس‌های مشابه دارای دترمینان مساوی هستند.

حل. فرض کنید A و B دو ماتریس مشابه باشند. آنگاه ماتریس معکوس‌پذیر P وجود دارد به طوری که $B = P^{-۱}AP$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}\det\,B = \det\,P^{-۱}\,A\,P &= \det\,P^{-۱}\det\,A\det\,P\\ &= \frac{۱}{\det\,P}\det\,A\det\,P = \det\,A.\end{aligned}$$

در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از دترمینان معکوس یک ماتریس را پیدا کرد. اما نخست نیاز به یک تعریف داریم.

تعریف ۲-۲-۱۲ . اگر A یک ماتریس مربع باشد، ماتریس همسازه A، که معمولاً با $C = [c_{ij}]$ نشان داده می‌شود، ماتریسی است که درایه (i,j) ام آن همسازه (i,j) ام ماتریس A است. ماتریس الحاقی A، که با $adj\ A$ نشان داده می‌شود، ترانهاده ماتریس همسازه است. یا به عبارت دیگر،

$$adj\ A = C^{t} = [c_{ij}]^{t},$$

با استفاده از این نماد داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} a_{ij}\,c_{ij} = det\ A,$$

و اگر $j \neq k$ آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{n} a_{ik}\,c_{ij} = ۰.$$

زیرا اگر B ماتریسی باشد که با جایگزینی ستون kام A به جای ستون j ام A حاصل شده باشد، آنگاه B دارای دو ستون مساوی بوده و $det\ B = 0$ است. از طرفی $\tilde{B}_{ij} = \tilde{A}_{ij}$ و در نتیجه،

$$\begin{aligned} 0 &= det\ B \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, b_{ij}\, det\ \tilde{B}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ik}\, det\ \tilde{A}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, c_{ij}. \end{aligned}$$

از این خاصیت همسازه‌ها نتیجه می‌گیریم که:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, c_{ij} = \delta_{jk} det\ A$$

اما،

$$c_{ij} = (adj\ A)_{ji}$$

بنابراین از رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} (adj\ A)_{ji}\, a_{ik} = \delta_{jk} det\ A$$

در نتیجه بنا به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$((adj\ A)A)_{jk} = \delta_{jk} det\ A$$

یا به طور معادل

$$(adj\ A)A = (det\ A)I$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$A(adj\ A) = (det\ A)I$$

بنابراین اگر A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $det\ A \neq ۰$ و در نتیجه،

$$A^{-۱} = \frac{۱}{det\ A} adj\ A$$

و این رابطه فرمولی را جهت محاسبه معکوس یک ماتریس ارائه می‌کند. آنچه در بالا گفته شد قضیه زیر را اثبات می‌کند.

قضیه ۲-۲-۱۳ . اگر A یک ماتریس $n \times n$، معکوس‌پذیر باشد، آنگاه:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{det\ A} adj\ A$$

مثال ۲-۲-۱۴ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، شرط معکوس‌پذیری A و معکوس A را پیدا کنید.

حل. چون $\det\ A = ad - bc$، لذا A معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر $ad - bc \neq ۰$.
برای پیدا کردن معکوس A نخست داریم:

$$\text{adj}\ A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

یا به عبارتی، برای پیدا کردن معکوس یک ماتریس ۲×۲، درایه‌های روی قطر اصلی را جابجا کرده و درایه‌های قطر فرعی را در یک منفی ضرب کرده و سپس ماتریس حاصل را در عکس دترمینان ضرب می‌کنیم.

مثال ۲-۲-۱۵ . ماتریس الحاقی A و معکوس A را بیابید، هرگاه:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ -۲ & -۶ & ۷ \end{bmatrix}$$

حل. نخست ماتریس همسازه A را پیدا می‌کنیم،

$$C=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳}\\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳}\\ c_{۳۱} & c_{۳۲} & c_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۱ & ۵\\ -۶ & ۷\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۰ & ۵\\ -۲ & ۷\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۰ & ۱\\ -۲ & -۶\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} ۳ & -۲\\ -۶ & ۷\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & -۲\\ -۲ & ۷\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۱ & ۳\\ -۲ & -۶\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} ۳ & -۲\\ ۱ & ۵\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۱ & -۲\\ ۰ & ۵\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۳\\ ۰ & ۱\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۳۷ & -۱۰ & ۲\\ -۹ & ۳ & ۰\\ ۱۷ & -۵ & ۱\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\text{adj } A=\begin{bmatrix} ۳۷ & -۹ & ۱۷\\ -۱۰ & ۳ & -۵\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

با ضرب سطر اول A در ستون اول $\text{adj } A$ نتیجه می‌شود $\det A = ۳$ و در نتیجه،

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳۷ & -۹ & ۱۷\\ -۱۰ & ۳ & -۵\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

مثال ۲-۲-۱۶ . اگر A یک ماتریس $n\times n$ و $n \geq ۲$، نشان دهید:

$$\det\,(\text{adj } A)=(\det A)^{n-۱}$$

حل. در صورتی که $A=۰$، آنگاه $\text{adj } A = ۰$ و نتیجه حاصل است. بنابراین فرض می‌کنیم $A\neq ۰$. در نتیجه:

$$A(\text{adj } A)=(\det A)I$$

اگر دترمینان طرفین را حساب کنیم نتیجه می‌شود:

$$\det A \det(\operatorname{adj} A) = \det[(\det A)I] = (\det A)^n \det I$$

حال اگر $\det A \neq 0$ آنگاه:

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$$

و اگر $\det A = 0$ آنگاه:

$$A \operatorname{adj} A = 0$$

و در نتیجه $\operatorname{adj} A$ معکوس‌پذیر نیست و بنا به نتیجه (۳.۲.۲)، $\det(\operatorname{adj} A) = 0$. بنابراین تساوی خواسته شده برقرار است.

تمرین ۲.۲

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) دترمینان یک ماتریس خطی روی ماتریس‌هاست.

(ب) اگر A یک ماتریس پوچتوان باشد آنگاه A معکوس‌پذیر نیست.

(پ) اگر n عددی فرد باشد آنگاه هر ماتریس $n \times n$ و پاد متقارن معکوس‌پذیر نیست.

(ت) هر ماتریس بالا مثلثی معکوس‌پذیر است.

(ث) اگر E یک ماتریس مقدماتی باشد آنگاه $\det E = \pm 1$.

(ج) اگر A و B دو ماتریس مشابه باشند آنگاه $\det A = \det B$.

(چ) اگر A و B هم‌ارز سطری باشند آنگاه $\det A = \det B$.

(ح) اگر A یک ماتریس بالا مثلثی باشد آنگاه $\operatorname{adj} A$ نیز بالا مثلثی است.

(خ) اگر A یک ماتریس معکوس‌پذیر متقارن باشد آنگاه A^{-1} نیز متقارن است.

(د) اگر A معکوس‌پذیر باشد آنگاه، $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

۲) ماتریس الحاقی هر یک از ماتریس‌های زیر را بیابید.

(آ) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

(پ) $\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$

۳) به ازای چه مقادیری از c ماتریس‌های زیر معکوس‌پذیرند؟

(آ) $\begin{bmatrix} ۰ & c & -c \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ c & -c & c \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۴ & c & ۳ \\ c & ۲ & c \\ ۵ & c & ۴ \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} ۱ & c & -۱ \\ c & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & c \end{bmatrix}$

۴) فرض کنید، $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}$ و $\det A = ۳$. مطلوب است:

(آ) $\det(۳B^{-۱})$ هرگاه $B = \begin{bmatrix} ۴u & ۲a & -p \\ ۴v & ۲b & -q \\ ۴w & ۲c & -r \end{bmatrix}$

(ب) $\det(۲C^{-۱})$ هرگاه $C = \begin{bmatrix} ۲p & -a+u & ۳u \\ ۲q & -b+v & ۳v \\ ۲r & -c+w & ۳w \end{bmatrix}$

۵) در مورد $\det A$ چه می‌توان گفت، هرگاه،

(آ) $A^2 = A$

(ب) $A^2 = I$

(پ) $A^3 = A$

(ت) $A = -A^t$

(ث) $PA = P$ و P معکوس‌پذیر است.

(ج) $A^2 + I = 0$

۶) نشان دهید اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند در حالی که n عددی فرد است و $AB = -BA$ آنگاه یکی از ماتریس‌های A و B معکوس پذیر نیست.

۷) نشان دهید اگر A و B و C ماتریس‌های $n \times n$ باشند به طوری که ABC معکوس‌پذیر باشد آنگاه B معکوس‌پذیر است.

۸) فرض کنید A و B ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ باشند، نشان دهید:

(آ) $\text{adj}\ (\text{adj}\ A) = (\det\ A)^{n-2} A$.

(ب) $\text{adj}\ A^{-1} = (\text{adj}\ A)^{-1}$.

(پ) $\text{adj}\ A^t = (\text{adj}\ A)^t$.

(ت) $\text{adj}\ (AB) = \text{adj}\ A\ \text{adj}\ B$.

(ث) $\text{adj}\ (cA) = c^{n-1} \text{adj}\ A$.

۹) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. نشان دهید حداکثر n مقدار اسکالر مجزای c وجود دارد به طوری که $\det\ (cI - A) = 0$.

۱۰) فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند. نشان دهید اگر A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه حداکثر n مقدار اسکالر t وجود دارد به طوری که $tA + B$ معکوس‌پذیر نباشد.

۲-۳ قاعده کرامر

در این بخش کاربردی از دترمینان در حل دستگاه n معادله و n متغیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این کار دستگاه معادلات با n معادله و n متغیر زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + x_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

اگر فرض کنید A ماتریس ضرایب، X ماتریس متغیرها و B ماتریس ثابت به شرح زیر باشد،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

آنگاه دستگاه به صورت $AX = B$ نوشته می‌شود. حال اگر $\det A \neq 0$، آنگاه A معکوس‌پذیر خواهد بود و با ضرب طرفین این معادله در A^{-1} جواب معادله به صورت $X = A^{-1}B$ به دست خواهد آمد. اگر در این تساوی به جای A^{-1} مقدار آن را با استفاده از ماتریس الحاقی قرار دهیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)B$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

بنابراین متغیرهای x_1، x_2، ... و x_n به صورت زیر به‌دست خواهند آمد.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A}\ [b_1c_{11} + b_2c_{21} + \cdots + b_nc_{n1}] \\ x_2 &= \frac{1}{\det A}\ [b_1c_{12} + b_2c_{22} + \cdots + b_nc_{n2}] \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{\det A}\ [b_1c_{1n} + b_2c_{2n} + \cdots + b_nc_{nn}] \end{aligned}$$

اما مقدار $b_1c_{11} + b_2c_{21} + \cdots + b_nc_{n1}$ که در فرمول محاسبه x_1 ظاهر شده شبیه بسط لاپلاس است. چون c_{11}، c_{21}، ... و c_{n1} همسازه‌های متناظر با ستون اول A هستند، بنابراین اگر A_1 ماتریسی باشد که از عوض کردن ستون اول A با ماتریس ستونی B حاصل شود و همسازه‌های متناظر با این ماتریس را با c'_{ij} نمایش دهیم آنگاه، $c_{i1} = c'_{i1}$ برای $1 \leq i \leq n$. بنابراین بسط دترمینان A_1 بر حسب ستون اول به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \det A_1 &= b_1c'_{11} + b_2c'_{21} + \cdots + b_nc'_{n1} \\ &= b_1c_{11} + b_2c_{21} + \cdots + b_nc_{n1} \\ &= (\det A)x_1 \end{aligned}$$

بنابراین $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A}$. همین نتیجه را برای متغیرهای دیگر نیز می‌توان گرفت. با این تفاوت که برای بدست آوردن متغیر x_i کافی است به جای ستون iام A ماتریس ستونی B را قرار دهیم. این مطالب را می‌توان به صورت قضیه زیر بیان کرد.

قضیه ۲-۳-۱ (قاعده کرامر). اگر A یک ماتریس $n \times n$ و معکوس‌پذیر باشد، جواب دستگاه،

$$AX = B$$

از n معادله و n متغیر $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n به صورت زیر است:

$$x_۱ = \frac{det\ A_۱}{det\ A},\ \ x_۲ = \frac{det\ A_۲}{det\ A},\ \ldots,\ x_n = \frac{det\ A_n}{det\ A}$$

که در آن هر ماتریس A_i از عوض کردن ستون iام A با ماتریس ستونی B به دست می‌آید.

مثال ۲-۳-۲ . مقدار $x_۱$ در دستگاه معادلات زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} ۵x_۱ + x_۲ - x_۳ = ۴ \\ ۹x_۱ + x_۲ - x_۳ = ۱ \\ x_۱ - x_۲ + ۵x_۳ = ۲ \end{cases}$$

حل. دترمینان ماتریس ضرایب A و ماتریس $A_۱$ که حاصل از عوض کردن ستون اول A با ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است را محاسبه می‌کنیم.

$$\det\ A = \det \begin{bmatrix} ۵ & ۱ & -۱ \\ ۹ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{bmatrix} = -۱۶$$

$$\det\ A_۱ = \det \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix} = ۱۲$$

بنابراین،

$$x_۱ = \frac{\det\ A_۱}{\det\ A} = -\frac{۳}{۴}$$

توجه کنید که اگر چه قاعده کرامر این امکان را به ما می‌دهد که یک متغیر را بدون محاسبه دیگر متغیرها به دست آوریم اما به هر حال در دستگاه‌های معادلات بزرگ، محاسبات لازم برای پیدا کردن

یکی از دترمینان‌ها در قاعده کرامر کمتر محاسبات در روش حذفی گوس نیست. علاوه بر این روش حذفی گوس برای دستگاه‌هایی که ماتریس ضرایب آنها معکوس‌پذیر و یا حتی مربع هم نباشند به کار می‌رود. بنابراین قاعده کرامر مشابه پیدا کردن معکوس یک ماتریس با استفاده از ماتریس الحاقی آن، یک روش کاربردی نخواهد بود و بیشتر در مسائل نظری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تمرین ۳.۲

۱) هر کدام از دستگاه معادلات زیر را با استفاده از قاعده کرامر حل کنید.

(آ)
$$\begin{cases} -۲x + y + ۳z = ۰ \\ -y + z = ۲ \\ x + ۲y = -۱ \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} x_۱ - x_۳ + x_۴ = ۳ \\ x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ = ۱ \\ -x_۱ + x_۲ + x_۳ = -۲ \\ x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ - ۲x_۴ = ۰ \end{cases}$$

(پ)
$$\begin{cases} ۴x - y + ۳z = ۱ \\ ۶x + ۲y - z = ۰ \\ ۳x + ۳y + ۲z = -۱ \end{cases}$$

(ت)
$$\begin{cases} ۳x - ۲y = ۷ \\ ۳y - ۲z = ۶ \\ ۳z - ۲x = -۱ \end{cases}$$

(ث)
$$\begin{cases} ۴x + y + z + w = ۱ \\ x - y + ۲z - ۳z = ۰ \\ ۲x + y + ۳z + ۵w = ۰ \\ x + y - z - w = ۰ \end{cases}$$

(ج)
$$\begin{cases} x + ۲y - ۳z + ۵w = ۰ \\ ۲x + y - ۴z - w = ۱ \\ x + y + z + w = ۰ \\ -x - y - z + w = ۴ \end{cases}$$

۲) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ & \dots & A_n \end{bmatrix}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد و $\det\, A \neq ۰$. اگر e_j ستون jام ماتریس همانی باشد و قرار دهیم:

$$b_{ij} = \frac{\det\, B_{ij}}{\det\, A}$$

که در آن B_{ij} ماتریسی است که با قرار دادن e_j به جای ستون iام ماتریس A حاصل شود. نشان دهید $B = (b_{ij})$ معکوس ماتریس A است.

مسائل تکمیلی

۱) آیا ماتریس حقیقی زیر وارون پذیر است؟ اگر وارون‌پذیر است وارون آنرا بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix},$$

اگر ماتریس بالا را به عنوان ماتریسی با درایه‌هایی در $Z_۳$ یا $Z_۵$ در نظر بگیریم چطور؟

۲) فرض کنید A ماتریس مربعی ۳×۳ باشد و

$$p = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$

هم‌چنین می‌دانیم که ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۲ & -۳ & -۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$

هم‌ارز سطری ماتریس $[A \mid p]$ است. $A^{-۱}$ را حساب کنید.

۳) مطلوبست محاسبه

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & x_۱^۲ & \dots & x_۱^{n-۲} & x_۲ & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_n & x_n^۲ & \dots & x_n^{n-۲} & x_۱ & \dots & x_{n-۱} \end{bmatrix}.$$

۴) مطلوب است محاسبه

$$\det \left(\begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & \dots & x_۱^{n-۲} & (x_۲ + x_۳ + \dots + x_n)^{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_n & \dots & x_n^{n-۲} & (x_۱ + \dots + x_{n-۱})^{n-۱} \end{bmatrix} \right).$$

۵) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان مختلط باشد به طوری که به ازای هر $\lambda \in C$، $A \neq \lambda I$. ثابت کنید A مشابه ماتریسی است که حداکثر یک درایه ناصفر روی قطر اصلی دارد.

۶) فرض کنید J ماتریس $n \times n$ای است که همه درایه‌های آن برابر ۱ است. برای هر اسکالر a، دترمینان ماتریس $J - aI$ را بیابید. آیا مهم است که این ماتریس یا درایه‌های آن در چه میدانی در نظر گرفته شده است؟ اگر مهم است این مسئله را زمانی که $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ بررسی کنید.

۷) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر حقیقی و I ماتریس همانی $n \times n$ با مقادیر حقیقی باشد. هم‌چنین فرض کنید به ازای هر $t \in \mathbb{R}$،

$$f(t) = \det\,(I + tA).$$

مطلوب است محاسبه $f'(\circ)$.

۸) فرض کنید A یک ماتریس $۲k \times ۲k$ باشد که همه درایه‌های روی قطر آن صفر و بقیه درایه‌های آن ± ۱اند. نشان دهید A به عنوان یک ماتریس حقیقی یا مختلط وارون‌پذیر است. آیا این موضوع برای میدان‌های دیگر نیز برقرار است؟

۹) فرض کنید M ماتریسی $۲n \times ۲n$ و معکوس‌پذیر باشد که به صورت بلوکی زیر باشد.

$$M^{-۱} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

نشان دهید $\det\, M \cdot \det\, H = \det\, A$.

۱۰) فرض کنید $A = (a_{ik})$ که $i, k = \circ, ..., n$ و

$$a_{ik} = h_i^{n-k}(۱ + h_i^{۲})^k$$

مطلوب است محاسبه $\det\, A$.

۱۱) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ پاد متقارن روی میدان $\mathbb{F}$ است و مشخصه $\mathbb{F}$ مخالف ۲ است. نشان دهید اگر n فرد باشد آن گاه $\det\ A = 0$ و برای nهای زوج مثال نقض بزنید. مثال نقضی نیز برای زمانی که مشخصه میدان ۲ است بزنید.

۱۲) ثابت کنید دترمینان ماتریس پادمتقارن از مرتبه فرد صفر است و اگر یک عدد ثابت به هر درایه یک ماتریس پادمتقارن با مرتبه زوج اضافه کنیم دترمینان تغییر نمی‌کند.

۱۳) فرض کنید A یک ماتریس پادمتقارن $2n \times 2n$ باشد که عناصر بالای قطر اصلی آن ۱ است مطلوب است $\det\ A$.

۱۴) فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $(m+1) \times (m+1)$ باشد که در آن $a_{ij} = \binom{n+i}{j}$. نشان دهید $\det\ A = 1$.

۱۵) فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد که برای هر $i = 1, \ldots, n-1$، $a_{i,i+1} = C_i$ بقیه درایه‌های ماتریس صفر است. ثابت کنید دترمینان ماتریس

$$I + A + \ldots + A^{n-1}$$

برابر $(1-C)^{n-1}$ است که $C = C_1 \ldots C_n$.

۱۶) نشان دهید که در صورتی که عبارت‌های زیر معنی داشته باشند درست‌اند.

(آ) $$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det\ A \cdot \det\ D$$

(ب) $$\det \begin{bmatrix} EA & EB \\ C & D \end{bmatrix} = \det\ E \cdot \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

(پ) $$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C + EA & D + EB \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

۱۷) فرض کنید $A_۱, ..., A_k$، k ماتریس مربعی باشند نشان دهید

$$\det \begin{bmatrix} A_۱ & * & \dots & * \\ . & A_۲ & \dots & * \\ . & . & \ddots & * \\ . & . & \dots & A_k \end{bmatrix} = \det A_۱ \cdot \det A_۲ \cdots \det A_k.$$

۱۸) نشان دهید برای هر ماتریس $n \times n$ روی $\mathbb{R}$، $\det (A^۲ + I) \geq ۰$.

۱۹) مطلوبست $\det C$ که $C_{n\times n} = (c_{ij})$، $C_{ij} = a_i b_j$ برای هر $i \neq j$ و $c_{ii} = x_i$.

۲۰) فرض کنید $A_{n\times n} = (a_{ij})$ که در آن

$$a_{ij} = \begin{cases} (-۱)^{|i-j|} & i \neq j \\ ۲ & i = j \end{cases}$$

مطلوبست $\det A$.

۲۱) فرض کنید A, B دو ماتریس $n \times n$ باشند به قسمی که $b_{ij} = (-۱)^{i+j} a_{ij}$. نشان دهید $\det A = \det B$.

۲۲) نشان دهید اگر A ماتریس وارون‌پذیر بالا مثلثی باشد آن‌گاه وارون آن نیز بالا مثلثی است.

۲۳) فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ روی میدان اعداد گویا باشد به طوری که

$$a_{ij} = gcd(i, j),$$

که در آن $gcd(i, j)$ بزرگترین مقسوم علیه j, i است. آیا A دارای وارون است؟ چرا؟

۲۴) دترمینان ماتریس $n \times n$ که اعضای قطر اصلی آن همه مساوی r و اعضای غیر قطر آن برابر λ است را محاسبه کنید.

۲۵) فرض کنید A, B دو ماتریس $n \times n$ باشند ثابت کنید هرگاه $A + \lambda B$ برای $(n + ۱)$ مقدار متمایز λ پوچ توان باشد آن‌گاه A, B پوچ توان هستند.

۲۶) فرض کنید برای $j=\circ,\text{۱},...,n$، $a_j = a_\circ + jd$ که در آن $a_\circ$ و d اعداد حقیقی ثابت‌اند. قرار دهید

$$A=\begin{bmatrix} a_\circ & a_\text{۱} & a_\text{۲} & \dots & a_n \\ a_\text{۱} & a_\circ & a_\text{۱} & \dots & a_{n-\text{۱}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-\text{۱}} & a_{n-\text{۲}} & \dots & a_\circ \end{bmatrix},$$

مطلوبست $\det A$.

۲۷) فرض کنید $\circ \neq x \in \mathbb{F}$، A یک ماتریس $m \times n$ روی $\mathbb{F}$ و B یک ماتریس $n \times m$ روی $\mathbb{F}$ باشد. نشان دهید $AB - xI$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $BA - xI$ وارون‌پذیر باشد.
(راهنمایی: $(BA-xI)^{-\text{۱}} = B(AB-xI)^{-\text{۱}}A - xI$)

۲۸) نشان دهید برای هر ماتریس $n \times n$ روی میدان اعداد مختلط $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

۲۹) دترمینان ماتریس پاد متقارنی را به دست آورید که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن برابر است.

۳۰) فرض کنید $A=(a_{ij})$ که در آن $a_{ij} = a^{|i-j|}$. مطلوبست $\det A$.

۳۱) فرض کنید $\Delta_\text{۳} = \det \begin{bmatrix} \text{۱} & -\text{۱} & \circ & \circ \\ x & h & -\text{۱} & \circ \\ x^\text{۲} & hx & h & \circ \\ x^\text{۳} & hx^\text{۲} & hx & -\text{۱} \end{bmatrix}$ و Δ_n را به طور مشابه تعریف کنید. ثابت کنید $\Delta_n = (x+h)^n$.

۳۲) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که در آن $a,b,c,d \geq \circ$ و $a+c=b+d=\text{۱}$. هرگاه $A \neq I$ و $p = \begin{bmatrix} b & \text{۱} \\ c & -\text{۱} \end{bmatrix}$. نشان دهید:

(آ) p وارون‌پذیر است و $p^{-\text{۱}}Ap = \begin{bmatrix} \text{۱} & \circ \\ \circ & a+d-\text{۱} \end{bmatrix}$.

(ب) اگر $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \neq A$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \frac{۱}{b+c}\begin{bmatrix} b & b \\ c & c \end{bmatrix}$$

۳۳) نشان دهید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \cdots & \frac{۱}{n} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \cdots & \frac{۱}{n+۱} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{۱}{n} & \frac{۱}{n+۱} & \cdots & \frac{۱}{۲n-۱} \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر بوده و معکوس آن دارای درایه‌های صحیح می‌باشد.

۳۴) (دترمینان کوشی) فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد که $a_{ij} = (x_i + y_j)^{-۱}$ که $x_i, y_j \in \mathbb{F}$ و $x_i + y_j \neq ۰$. مطلوبست $\det A$.

۳۵) فرض کنید $A = (a_{ij})$ که در آن $a_{ij} = (۱ - x_i y_j)^{-۱}$. مطلوبست $\det A$

۳۶) هر ماتریس مربعی مختلط برابر مجموعه دو ماتریس وارون‌پذیر است.

۳۷) فرض کنید A ماتریس پاد متقارن از مرتبه n است نشان دهید اگر n زوج باشد آن‌گاه $\mathrm{adj}(A)$ پاد متقارن و هرگاه n فرد باشد، $\mathrm{adj}(A)$ متقارن است.

۳۸) ثابت کنید اگر A ماتریس پوچ توان باشد آنگاه $A + I$ وارون پذیر است.

۳۹) فرض کنید A, B ماتریس‌هایی $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نشان دهید هرگاه A وارون پذیر باشد آنگاه AB و BA متشابه‌اند.

۴۰) فرض کنید $c_۱, \cdots, c_n$، n عدد حقیقی باشند ماتریس $(c_i c_j)$ را در نظر بگیرید مطلوبست محاسبه

$$\det(I + (c_i c_j)).$$

۴۱) فرض کنید در ماتریس زیر داشته باشیم $AC = CA$.

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

نشان دهید $\det(M) = \det(AD - CB)$.

۴۲) فرض کنید A و B دو ماتریس مشابه $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نشان دهید

(آ) A^t و B^t متشابه‌اند.

(ب) به ازای هر عدد طبیعی n، A^nو B^n متشابه‌اند.

۴۳) فرض کنید A ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. تعریف کنید

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

نشان دهید $\det\left(e^A\right) = e^{tr(A)}$.

۴۴) ثابت کنید:

(آ) $\det\left(\operatorname{adj}(A)\right) = \left(\det(A)\right)^{n-1}$

(ب) $\det\left(\operatorname{adj}\left(\operatorname{adj}(A)\right)\right) = \left(\det(A)\right)^{(n-1)^2}$

مسائل حل شده

۱) مطلوب است محاسبه

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & \dots & x_۱^{n-۲} & x_۲x_۳\dots x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_n & \dots & x_n^{n-۲} & x_۱x_۲\dots x_{n-۱} \end{bmatrix}$$

حل. سطر اول را در $x_۱$ و ... و سطر nام را در x_n ضرب می‌کنیم. اگر $\alpha = x_۱\dots x_n$، آنگاه:

$$\alpha\Delta = \det \begin{bmatrix} x_۱ & x_۱^۲ & \dots & x_۱^{n-۱} & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n^۲ & \dots & x_n^{n-۱} & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Delta = (-۱)^{n-۱}\det \begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & \dots & x_۱^{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_n & \dots & x_n^{n-۱} \end{bmatrix}.$$

۲) مطلوب است محاسبه

$$\det\left(\begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & \dots & x_۱^{n-۲} & (x_۲+x_۳+\dots+x_n)^{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_n & \dots & x_n^{n-۲} & (x_۱+x_۲+\dots+x_{n-۱})^{n-۱} \end{bmatrix}\right)$$

حل. فرض کنید $S = x_۱ + \dots + x_n$. در این صورت kامین عضو ستون nام به فرم زیر است:

$$(S-x_k)^{n-۱} = (-x_k)^{n-۱} + \sum_{i=۰}^{n-۲} p_i\, x_k^i$$

بنابراین به ستون آخر ترکیبی جطی از بقیه ستون‌ها با ضرایب $-p_۰, \cdots, -p_{n-۲}$ به ترتیب اضافه می‌کنیم. آنگاه به دست می‌آوریم:

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & \dots & x_۱^{n-۲} & (-x_۱)^{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_n & \dots & x_n^{n-۲} & (-x_n)^{n-۱} \end{bmatrix} = (-۱)^n\det \begin{bmatrix} ۱ & x_۱ & \dots & x_۱^{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_n & \dots & x_n^{n-۱} \end{bmatrix}$$

۳) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان مختلط باشد به طوری که به ازای هر $\lambda \in C$، $A \neq \lambda I$. ثابت کنید A مشابه ماتریسی است که حداکثر یک درایه ناصفر روی قطر اصلی دارد.

حل. با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. در حالت $n = ۱$، چیزی برای اثبات نمی‌ماند. در حالت $n = ۲$، قرار دهید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. اگر $b \neq ۰$ یا $c \neq ۰$ یا $b = c = ۰$، A با ماتریس زیر مشابه است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{a}{b} & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -\frac{a}{b} & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & b \\ c - \frac{ad}{b} & a + b \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{a}{c} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \frac{a}{c} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & b - \frac{ad}{c} \\ c & a + d \end{bmatrix}$$

اگر $b = c = ۰$ و $a \neq d$ آنگاه

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d - a \\ ۰ & d \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید $n \geq ۳$ و مساله برای n'، $n' \leq n$ حل شده باشد. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} A' & * \\ * & B \end{bmatrix}$$

که در آن A' ماتریسی $(n - ۱) \times (n - ۱)$ روی میدان مختلط است. به وضوح می‌توانیم فرض کنیم $A' \neq \lambda' I$. طبق فرض استقراء p موجود است که

$$p^{-۱} A' p = \begin{bmatrix} ۰ & * \\ * & \alpha \end{bmatrix}_{n-۱}$$

در این صورت

$$B = \begin{bmatrix} p^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & * \\ * & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{-۱} A' p & * \\ * & \beta \end{bmatrix}$$

مشابه با A است و قطر آن $(\circ,\circ,\cdots,\circ,\alpha,\beta)$ است. از طرف دیگر B را می‌توان به صورت $\begin{bmatrix} \circ & * \\ * & C \end{bmatrix}$ دید، که در آن C ماتریسی $(n-۱)\times(n-۱)$ است که قطر آن $(\circ,\cdots,\circ,\alpha,\beta)$ است. اگر فرض استقراء در مورد C برقرار باشد، داریم $Q^{-۱}CQ=D$ که $D=\begin{bmatrix} \circ & * \\ * & \lambda \end{bmatrix}_{n-۱}$. بنابراین ماتریس

$$E=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & Q^{-۱} \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & Q^{-۱} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & * \\ * & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & * \\ * & D \end{bmatrix}$$

مشابه A است و قطر آن $(\circ,...,\circ,\lambda)$ است و این همان حکم است. اما زمانی که $n-۱=۲$ باشد ممکن است استقراء جواب ندهد و ماتریس خواسته شده به فرم

$$p^{-۱}Ap=\begin{bmatrix} \circ & a & b \\ c & d & \circ \\ e & \circ & d \end{bmatrix}$$

است که $d\neq\circ$ و اعداد e,c,b,a همزمان صفر نیستند. اگر $A,b\neq\circ$ متشابه است با:

$$\begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & \circ \\ ۱ & \circ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & a & b \\ c & d & \circ \\ e & \circ & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & \circ \\ -۱ & \circ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & a & b \\ c & d & \circ \\ e-b-d & a & b+d \end{bmatrix}$$

با انجام نیمی از گام استقراء، قطر ماتریس حاصل $(\circ,d-b,d+b)$ خواهد بود و استقراء پایان می‌پذیرد، حالات $e\neq\circ,c\neq\circ,a\neq\circ$ مشابه است.

۴) فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ با مقادیر حقیقی و I ماتریس همانی $n\times n$ با مقادیر حقیقی باشد هم‌چنین فرض کنید به ازای هر $t\in\mathbb{R}$،

$$f(t)=\det(I+tA).$$

مطلوب است محاسبه $f'(\circ)$.

حل. اگر فرض کنیم $B=I+tA$، در این صورت هرگاه $B=(b_{ij})$ داریم $b_{ij}=\delta_{ij}+ta_{ij}$.

در این صورت داریم:

$$\det(B) = f(t) = \sum_{\gamma \in s_n} sgn(\gamma) b_{1\gamma(1)} \dots b_{n\gamma(n)}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{\gamma \in s_n} sgn(\gamma) \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i\gamma(i)} (b_{1\gamma(1)} \cdots \hat{b}_{i\gamma(i)} \cdots b_{n\gamma(n)}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\gamma \in s_n} sgn(\gamma)\ a_{i\gamma(i)}\, (b_{1\gamma(1)} \cdots \hat{b}_{i\gamma(i)} \cdots b_{n\gamma(n)}) \\ &\Longrightarrow f'(0) = \sum_{i=1}^{n} (sgn(id)\ a_{ii}\, \underbrace{(1 \times \ldots \times 1)}_{(n-1)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A) \end{aligned}$$

۵) فرض کنید M ماتریسی $2n \times 2n$ و معکوس‌پذیر باشد که به صورت بلوکی زیر باشد.
$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ و $M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ نشان دهید $\det\, M \cdot \det\, H = \det\, A$.

حل. فرض کنید I ماتریس همانی $n \times n$ باشد در این صورت

$$\det\, M \cdot \det\, H = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & H \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} = \det\, A$$

۶) فرض کنید $A = (a_{ik})$ که $i, k = 0, \cdots, n$ و

$$a_{ik} = h_i^{n-k}(1 + h_i^2)^k.$$

مطلوبست $\det\, A$.

حل. قرار دهید $\mu_i = h_i^{-1} + h_i$. در این صورت داریم:

$$h_i^{n-k}(1 + h_i^2)^k = h_i^n (h_i^{-1} + h_i)^k$$

در نتیجه داریم:

$$\det\, A = (h_0 \cdots h_n)^n \det \begin{bmatrix} 1 & \mu_0 & \dots & \mu_0^{n-1} & \mu_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \mu_n & \dots & \mu_n^{n-1} & \mu_n^n \end{bmatrix}.$$

۷) ثابت کنید دترمینان ماتریس پاد متقارن از مرتبه فرد صفر است و اگر یک عدد ثابت به هر درایه یک ماتریس پاد متقارن با مرتبه زوج اضافه کنیم دترمینان تغییری نمی‌کند.

حل. فرض کنید n فرد و A ماتریسی $n \times n$ باشد که پاد متقارن است یعنی $A^t = -A$ در این صورت

$$\det(A^t) = \det(A) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A \Longrightarrow \det(A) = 0$$

هرگاه n زوج باشد، ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & & & \\ \vdots & & A & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$ از مرتبه فرد است پس دترمینان آن صفر است. پس

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{bmatrix} = x \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & & & \\ \vdots & & A & \\ -1 & & & \end{bmatrix} = x \cdot 0 = 0$$

حال داریم:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{bmatrix}$$
$$= \det A + 0 = \det A$$

چون سطر اول $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{bmatrix}$ جمع سطرهای اول دو ماتریس است. حال در این

ماتریس ستون اول را از بقیه ستون‌ها کم می‌کنیم. ماتریس خواسته شده حاصل می‌شود که دترمینان آن همان $\det(A)$ است.

۸) فرض کنید A_n ماتریس پاد متقارن $2n \times 2n$ باشد که عناصر بالای قطر اصلی آن یک است. مطلوبست $\det\,(A_n)$.

حل. سطر اول را به سطرهای ۳ تا $2n$ اضافه و سطر دوم را از سطرهای ۳ تا $2n$ کم می‌کنیم داریم $\det\,(A) = \det\,(A_{n-1})$.

۹) فرض کنید $A_n = (a_{ij})$ ماتریسی $(m+1) \times (m+1)$ باشد که در آن $a_{ij} = \binom{n+i}{j}$. نشان دهید $\det\,A = 1$.

حل. ملاحظه می‌کنیدکه A_0 ماتریسی مثلثی با قطر$(1, \cdots, 1)$ است. پس $\det\,(A_0) = 1$. داریم:

$$A_{n+1} = A_n\ B$$

که در آن $B = (b_{ij})$ که $b_{i,i+1} = 1$ برای $i \leq m-1$ و $b_{ii} = 1$ و در جاهای دیگر b_{ij} صفر است. حال با استقراء حکم حاصل می‌شود.

۱۰) فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد که برای هر $i = 1, ..., n-1$، $a_{i,i+1} = c_i$ و بقیه درایه‌های ماتریس صفر است. ثابت کنید دترمینان ماتریس $I + A + ... + A^{n-1}$ برابر $(1-c)^{n-1}$ است که $c = c_1 ... c_n$.

حل. به راحتی می‌توان دید که $\det\,(I-A) = 1-c$. اگر $e_1, ..., e_n$ پایه استاندارد $\mathbb{F}^n$ باشد، A تبدیلی است که $Ae_i = e_{i-1}$. پس $A^n = c_1 - c_n I$. پس

$$(I + A + .. + A^{n-1})(I - A) = (I - c)I$$

درنتیجه:

$$(1-c)\det\,(I + A + ... + A^{n-1}) = (1-c)^n$$

هرگاه $c \neq 1$ با تقسیم طرفین تساوی بر $1 - c$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. دترمینان ماتریس به صورت پیوسته به c_1 تا ... تا c_n بستگی دارد پس برای $c = 1$ نیز حاصل برقرار است. (این حالت را مستقلاً و با محاسبه مستقیم نیز می‌توان بررسی کرد.)

۱۱) مطلوبست $\det\ (c)$ که $C_{n\times n}=(c_{ij})$، $c_{ij}=a_ib_j$ برای هر $i\neq j$ و $c_{ii}=x_i$.

حل. ثابت می‌کنیم

$$\det\ (c)=\Pi_{i=1}^{n}(x_i-a_ib_i)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i-a_ib_i})$$

اثبات را با استقراء روی n انجام می‌دهیم. برای $n=2$ بررسی این مهم آسان است. حکم استقراء را در حالت $n=3$ انجام می‌دهیم در حالت کلی مشابه است:

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3\end{bmatrix}=$$

$$\det\begin{bmatrix} x_1-a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ 0 & x_2 & a_2b_3\\ 0 & a_3b_2 & x_3\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3\end{bmatrix}$$

دترمینان اول از فرض استقراء محاسبه می‌شود و دترمینان دوم، از سطر اول، a_1 را فاکتور می‌گیریم و برای $i\geq 2$، a_i برابر سطر اول را از سطر iام کم می‌کنیم و دترمینان را محاسبه می‌کنیم.

۱۲) فرض کنید $A_{n\times n}=(a_{ij})$ که در آن

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{|i-j|} & i\neq j\\ 2 & i=j\end{cases}$$

مطلوبست $\det\ A$.

حل. سطر دوم A را به اولین سطر می‌افزاییم و سپس سومین سطر را به دومی و ... و nامین

سطر را به $n-۱$ امین سطر، داریم:

$$\det\ A = \det\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & +۱ & \dots & \pm۱ \\ -۱ & ۲ & -۱ & \dots & \pm۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ & \dots & \pm۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pm۱ & \pm۱ & \pm۱ & \dots & -۱ \\ \pm۱ & \pm۱ & \pm۱ & \dots & ۲ \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۱ \\ \pm۱ & \pm۱ & \dots & ۲ \end{bmatrix}$$

حال ستون اول را از ستون دوم کم می‌کنیم، دومین ستون را از سومی و ... و $(n-۱)$ امین ستون را از nامین ستون کم می‌کنیم در این صورت داریم:

$$\det\ A = \det\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & ۱ & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ & n+۱ \end{bmatrix} = n+۱.$$

۱۳) فرض کنید $A=(a_{ij})$ یک ماتریس $n\times n$ روی میدان اعداد گویا باشد به طوری که $a_{ij}=gcd(i,j)$ که در آن $gcd(i,j)$ بزرگترین مقسوم علیه j,i است. آیا A دارای وارون است. چرا؟

حل. بله ماتریس A وارون‌پذیر است. ماتریس‌های $B=(b_{ij})$ و $C=(c_{ij})$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$b_{ij}=\begin{cases}\varphi(i) & i=j \\ ۰ & i\neq j\end{cases}, \qquad c_{ij}=\begin{cases}۱ & j\mid i \\ ۰ & j\nmid i\end{cases}$$

که در آن φ تابع اویلر است. با محاسبه درایه‌ها می‌توان نشان داد $A=CBC^t$. بنابراین

$$\det\ (A)=\varphi(۱)\cdot\varphi(۲)\cdot\ldots\cdot\varphi(n)$$

۱۴) دترمینان ماتریس $n \times n$ که اعضای قطر اصلی آن r و اعضای غیر قطر آن برابر λ است را محاسبه کنید.

حل. ماتریس مذکور نمایشی به صورت زیر دارد:

$$A = \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \cdot & \cdot & r & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{bmatrix}$$

برای محاسبه دترمینان A، ستون اول را از یک یک ستون‌های دیگر کم می‌کنیم. سپس سطرهای دوم، سوم، ... و nام را به سطر اول اضافه می کنیم در ماتریس حاصل تمام اعضای بالای قطر اصلی صفر خواهد بود پس

$$\det\,(A) = [r + (n-1)\lambda](r-\lambda)^{n-1}.$$

۱۵) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند ثابت کنید هرگاه $A + \lambda B$ برای $n+1$ مقدار متمایز λ پوچ توان باشد، آنگاه A و B پوچ توان هستند.

حل. می‌دانیم که

$$(A + \lambda B)^n = A^n + \lambda C_1 + \dots + \lambda^{n-1} C_{n-1} + \lambda^n B^n$$

که در آن $C_1, \dots, C_{n-1}$ به λ بستگی ندارند. فرض $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$، $n+1$ مقدار متمایز ذکر شده در مسئله باشند. همچنین فرض کنید $a, c_1, \dots, c_{n-1}, b$ به ترتیب درایه (i,j) ام ماتریس‌های $A^n, C_1, \dots, C_{n-1}, B^n$ باشند در این صورت داریم:

$$a + \lambda_i C_1 + \dots + \lambda_i^{n-1} C_{n-1} + \lambda_i^n B = 0, \qquad (1 \le i \le n+1)$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید این یک دستگاه $(n+1)$ معادله‌ی $(n+1)$ مجهولی است و

ماتریس جواب آن به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & \lambda_۱ & \dots & \lambda_۱^{n-۱} & \lambda_۱^n \\ ۱ & \lambda_۲ & \dots & \lambda_۲^{n-۲} & \lambda_۲^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & \lambda_{n+۱} & \dots & \lambda_{n+۱}^{n-۱} & \lambda_{n+۱}^n \end{bmatrix}$$

به راحتی درمی‌یابیم که دترمینان این ماتریس $\Pi_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)$ است. چون λ_iها متمایزند. پس دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است. در نتیجه فقط جواب بدیهی دارد. پس $a = b = ۰$ یعنی $A^n = B^n = ۰$ و این به این معناست که A و B پوچ توان هستند.

۱۶) فرض کنید برای n ،$j = ۰, ۱, \dots, n$ ،$a_j = a_۰ + jd$ که $d, a_۰$ اعداد حقیقی ثابت‌اند. قرار دهید:

$$A = \begin{bmatrix} a_۰ & a_۱ & \dots & a_n \\ a_۱ & a_۰ & \dots & a_{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-۱} & \dots & a_۰ \end{bmatrix}$$

مطلوبست $\det A$.

حل. با اضافه کردن ستون اول A به ستون آخر داریم:

$$\det\,(A) = (a_۰ + a_۰)\det \begin{bmatrix} a_۰ & a_۱ & a_۲ & \dots & ۱ \\ a_۱ & a_۰ & a_۱ & \dots & ۱ \\ a_۲ & a_۱ & a_۰ & \dots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-۱} & a_{n-۲} & \dots & ۱ \end{bmatrix}$$

با کم کردن nامین سطر از $(n+۱)$ سطر، $(n+۱)$امین سطر از nامین، ... و دومین سطر از

دومین سطر فوق داریم:

$$\det(A) = (a_0 + a_n)\det\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 1 \\ d & -d & -d & \dots & 0 \\ d & d & -d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d & d & d & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

پس

$$\det(A) = (-1)^n(a_0 + a_n)\det\begin{bmatrix} d & -d & -d & \dots & d \\ d & d & -d & \dots & d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \\ d & d & d & \dots & d \end{bmatrix}$$

با اضافه کردن آخر سطر به سطرهای دیگر داریم:

$$\det(A) = (-1)^n(a_0 + a_n)\det\begin{bmatrix} 2d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2d & 2d & 0 & \dots & 0 \\ 2d & 2d & 2d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d & d & d & \dots & d \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^n(a_0 + a_n)2^{n-1}d^n$$

۱۷) فرض کنید $A = (a_{ij})$ که در آن $a_{ij} = a^{|i-j|}$. مطلوبست $\det A$.

حل. برای هر $i \geq 2$، a برابر سطر $(i-1)$ام را از سطر iام کم کنید، ماتریس بالا مثلثی حاصل خواهد شد که $a_{11} = 1$ و $a_{ii} = 1 - a^2$ برای هر $i \geq 1$. و همان طورکه می‌دانیم دترمینان این ماتریس $(1 - a^2)^{n-1}$ است.

۱۸) فرض کنید $\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x & h & -1 & 0 \\ x^2 & hx & h & 0 \\ x^3 & hx^2 & hx & -1 \end{bmatrix}$ و Δ_n را به طور مشابه تعریف کنید.
ثابت کنید $\Delta_n = (x+h)^n$.

حل. Δ_{n+1} را نسبت به ستون آخر بسط می‌دهیم داریم:

$$\Delta_{n+1} = x\Delta_n + h\Delta_n = (x+h)\Delta_n$$

و به راحتی به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

۱۹) (دترمینان کوشی): فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد که $a_{ij} = (x_i + y_j)^{-1}$ که $x_i, y_j \in \mathbb{F}$ و $x_i + y_j \neq 0$. مطلوبست $\det A$.

حل. با استقراء نشان می‌دهیم:

$$\det A = \frac{\Pi_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\Pi_{i,j}(x_i + x_j)}$$

برای $n = 1$ داریم $A_{1\times 1}$. پس $\det(A) = (x_1 + y_1)^{-1}$ و حکم استقراء برقرار است. حال فرض کنید برای $n = K$ حکم برقرار باشد نشان می‌دهیم برای $n = k + 1$ نیز حکم برقرار است. اثبات در دو مرحله صورت می‌گیرد. ابتدا ستون آخر را از تک تک ستون‌های قبل کم می‌کنیم به دست می‌آوریم:

$$a'_{ij} = (x_i+y_j)^{-1} - (x_i+y_n)^{-1} = (y_n - y_j)(x_i+y_n)^{-1}(x_i+y_j)^{-1} \qquad \forall j \neq n$$

از هر سطر عامل $(x_i + y_n)^{-1}$ را فاکتور می‌گیریم و از هر ستون به جز ستون آخر عامل $y_n - y_j$ را فاکتور می‌گیریم. حاصل دترمینان ماتریس $B = (b_{ij})$ است که $b_{in} = 1$ و $b_{ij} = a_{ij}$ برای هر $j \neq n$. برای محاسبه این دترمینان، سطر آخر را از تک تک سطرهای قبلی کم می‌کنیم از هر سطر به جز سطر آخر $x_i \cdots x_n$ را فاکتور می‌گیریم و از هر ستون به جز ستون آخر $(x_n + y_j)^{-1}$ را فاکتور می‌گیریم، در این صورت دترمینان کوشی با مرتبه پایین‌تر حاصل می‌شود.

۲۰) فرض کنید $A=(a_{ij})$ که در آن $a_{ij}=(1-x_iy_j)^{-1}$. مطلوبست $\det\,(A)$.

حل. چون $(1-x_iy_j)^{-1}=(y_j^{-1}-x_i)^{-1}y_j^{-1}$ داریم:

$$\det\,A=\gamma\det\,B$$

که در آن $\gamma=(y_1\dots y_n)^{-1}$ و $B=(b_{ij})$ که

$$b_{ij}=(y_i^{-1}-x_i^{-1})^{-1}$$

دترمینان B دترمینان کوشی است (سوال ۱۹) پس

$$\det\,B=\gamma^{-1}\Pi_{i>j}(y_j-y_i)(x_j-x_i)\Pi_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}$$

۲۱) فرض کنید A ماتریس پادمتقارن از مرتبه n است. نشان دهید هرگاه n زوج باشد، $\mathrm{adj}(A)$ پادمتقارن و هرگاه n فرد باشد، $\mathrm{adj}(A)$ متقارن است.

حل. داریم $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(\overline{A_{ij}})$. چون $A^t=-A$ پس داریم:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\;\det\,(-\tilde{A}_{ij})=(-1)^{i+j}(-1)^{n-1}\;\det\,(\tilde{A}_{ij})=(-1)^{n-1}A_{ij}$$

به راحتی حکم مسأله حاصل می‌شود.

۲۲) ثابت کنید اگر A ماتریس پوچ توان باشد، آنگاه $A+I$ وارون‌پذیر است.

حل. چون A ماتریس پوچ توان است بنابراین kای وجود دارد که $A^k=0$. اگر k فرد باشد داریم:

$$I=A^k+I^k=(A+I)(A^{k-1}-A^{k-2}I+\dots+I^k)$$

بنابراین $A+I$ وارون پذیر است. هرگاه k زوج باشد، داریم:

$$\begin{aligned}A^k=0\Longrightarrow A^{k+1}=0\Longrightarrow A^{k+1}+I^{k+1}&=I\\&=(I+A)(A^k-A^{k-2}I+\dots+I^k)\end{aligned}$$

درنتیجه $A+I$ وارون پذیر است.

۲۳) فرض کنید A, B ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند نشان دهید هرگاه A وارون پذیر باشد آنگاه AB و BA متشابه‌اند.

حل. قرار دهید $D = ABA^{-1}$. بنابراین $AB = DA$. پس

$$DA = AB = ABAA^{-1} = A(BA)A^{-1}$$

و لذا DA با BA متشابه است. از طرفی DA همان AB است پس AB با BA متشابه است.

۲۴) فرض کنید $c_1, c_2, ..., c_n$، n عدد حقیقی باشند، ماتریس (c_ic_j) را در نظر بگیرید مطلوبست محاسبه $\det\ (I_n + (c_ic_j))$.

حل. برای محاسبه دترمینان مورد نظر ابتدا در سطر اول از c_1 و سطر دوم از c_2 و ... و ستون nام از C_n فاکتور می‌گیریم. لذا داریم:

$$\det\ A = \det \begin{bmatrix} 1 + c_1^2 & c_1c_2 & \dots & c_1c_n \\ c_2c_1 & 1 + c_2^2 & \dots & c_2c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_nc_1 & c_nc_2 & \dots & 1 + c_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= (c_1c_2...c_n)^2\ \det \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1^2} + 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1}{c_2^2} + 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \frac{1}{c_n^2} + 1 \end{bmatrix}$$

حال سطر آخر را از تک تک سطرها کم می‌کنیم سپس سطر اول را در c_1^2 ضرب و از سطر آخر کم می‌کنیم و سطر دوم را در c_2^2 ضرب و از سطر آخر کم می‌کنیم، ... و سطر $(n-1)$ام را در c_{n-1}^2 ضرب و از سطر آخر کم می‌کنیم. دترمینان حاصل دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی

است. در واقع داریم:

$$\det(A) = (c_1 \dots c_n)^2 \det \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1^2} & 0 & \dots & -\frac{1}{c_n^2} \\ 0 & \frac{1}{c_2^2} & \dots & -\frac{1}{c_n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{c_n^2}+1 \end{bmatrix}$$

در مرحله بعد داریم:

$$\det(A) = (c_1 c_2 \dots c_n)^2 \det \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1^2} & 0 & \dots & -\frac{1}{c_n^2} \\ 0 & \frac{1}{c_2^2} & \dots & -\frac{1}{c_n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{c_1^2+c_2^2+\dots+c_{n-1}^2}{c_n^2}+1+\frac{1}{c_n^2} \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\det(A) = (c_1 c_2 \dots c_n)^2 [\frac{c_2+c_2^2+\dots+c_n^2}{(c_1 c_2 \dots c_n)^2}+\frac{1}{c_1^2 c_2^2 \dots c_n^2}] = 1+c_1^2+\dots+c_n^2.$$