جبر خطی و ماتریس‌ها

مؤلف:

دکتر سید منصور واعظ‌پور

استاد دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

انتشارات دانشگاه یزد

۱۳۸۹

سرشناسه	:	واعظ پور، منصور، ۱۳۴۰ -
عنوان و نام پدیدآور	:	جبرخطی و ماتریس‌ها/مولف منصور واعظ‌پور.
مشخصات نشر	:	یزد:دانشگاه یزد، ۱۳۹۳.
مشخصات ظاهری	:	۵۰۷ ص.
شابک	:	978-964-5808-92-9
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا(چاپ سوم).
یادداشت	:	پشت جلد به انگلیسی: ...Mansour vaezpour.linear algebra
یادداشت	:	ویرایش قبلی کتاب حاضر نخستین‌بار تحت عنوان " جبر خطی" در سال" ۱۳۸۲" توسط همین ناشر منتشر شده است.
یادداشت	:	چاپ اول: ۱۳۸۹(فیپا).
یادداشت	:	چاپ سوم.
یادداشت	:	کتابنامه: ص.۵۰۶-۵۰۷
عنوان دیگر	:	جبر خطی.
موضوع	:	جبر خطی
موضوع	:	جبر خطی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	:	ماتریس‌ها
موضوع	:	ماتریس‌ها -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
شناسه افزوده	:	دانشگاه یزد
رده بندی کنگره	:	۱۳۹۳ ۲ج۲و/QA۱۸۴
رده بندی دیویی	:	۵۱۲/۵
شماره کتابشناسی ملی	:	۲۲۴۰۷۵۱
اطلاعات رکورد کتابشناسی	:	فیپا
کد پیگیری	:	۲۲۳۹۴۸۵

مرکز انتشارات دانشگاه: یزد، صفائیه، بلوار دانشگاه، صندوق پستی ۷۴۱- ۸۹۱۹۵ تلفن:۹- ۳۸۲۱۱۶۷۰- ۰۳۵، دورنگار ۳۸۲۰۰۱۲۶- ۰۳۵

عنوان: جبر خطی و ماتریس ها

تالیف: دکتر سیدمنصور واعظ پور

ناشر: انتشارات دانشگاه یزد

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: قم، نشر هم میهن ۰۹۱۰۲۸۰۷۰۲۱

نوبت چاپ: سوم

سال چاپ:۱۴۰۰

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت پشت جلد: ۱۴۵۰۰۰۰ریال

شابک: ۲-۲۰-۵۸۰۸-۹۶۴-۹۷۸ شابک چاپ الکترونیک: ۴-۷۵-۷۳۵۳-۶۲۲-۹۷۸

شماره پیگیری: ۲۲۳۳۲۱۷

****فایل الکترونیک این کتاب در سایت YAZD.AC.IR قابل دسترسی می باشد.**

مراکز پخش:

۱- موسسه کتابیران: تهران، خیابان لبافی نژاد، بین فروردین و اردیبهشت، پلاک ۲۳۸، تلفن: ۶۶۴۹۴۴۰۹- ۶۶۴۱۱۱۷۳- ۰۲۱

۲- کتابفروشی شهر کتاب: یزد، میدان آزادی، ابتدای خیابان فرخی، تلفن: ۹-۳۶۲۷۱۵۳۸-۰۳۵

تقدیم به
همسر و فرزندانم
یحیی، الهه و رامین

پیشگفتار

خداوند بزرگ را سپاس می‌گویم که توفیق نگارش این کتاب را به من ارزانی بخشید. در طی سالیان تدریس جبر خطی در دورهٔ کارشناسی ریاضی، احساس کمبود منابع تدریس که مطابق سرفصل و آئین‌نامه‌های مصوب باشد، انگیزهٔ تألیف این کتاب گردید.

درکتاب حاضر سعی شده است، مطالب با زبانی ساده و مطابق سرفصل درس جبر خطی عنوان گردد و در پایان هر بخش تعداد زیادی تمرین متنوع جهت بالابردن توانایی دانشجو در حل مسأله آورده شده است.

در فصل اول دستگاه معادلات خطی و ماتریس و در فصل دوم دترمینان که جهت اختصار از تعریف آن به روش اصل موضوعی خودداری شده است، مورد بحث قرار می‌گیرد. در صورت آشنایی دانشجویان با مباحث فوق، می‌توان از مطالعهٔ آن صرف نظر کرد. در فصل سوم تعریف فضاهای برداری، پایه و بعد یک فضا بیان می‌گردد که پایه و اساس مطالعهٔ دیگر فصل‌های کتاب است. در فصل چهارم، بحث پراهمیت تبدیل‌های خطی و تابعک خطی و خواص آنها مطرح می‌شود. در فصل پنجم ابتدا بردارها و مقادیر ویژه و در ادامه به روش قطری کردن ماتریس و فرم متعارف جردن یک ماتریس پرداخته می‌شود. در فصل ششم جبر چند جمله‌ای‌ها، زیرفضاهای پایا و قضیهٔ مشهورکیلی-هامیلتون و چند جمله‌ای مینیمال مورد بحث قرار می‌گیرد. در انتهای و در فصل هفتم فضاهای ضرب داخلی و فرم‌های درجه دوم ارائه می‌گردد.

در انتها از کلیه افرادی که اینجانب را در تایپ و اصلاح کتاب یاری نموده‌اند به‌ویژه سرکار خانم‌ها سمیرا شعبانیان و ماجده پاسدار کمال تشکر و سپاس را دارم.

پاییز ۸۹

سید منصور واعظ پور
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

فهرست مطالب

فصل ۱ دستگاه معادلات خطی و ماتریس ۱

۱-۱ ماتریس ۱

۱-۲ دستگاه معادلات خطی ۱۸

۱-۳ معادلات همگن ۳۹

۱-۴ ماتریس‌های مقدماتی ۴۵

۱-۵ حاصلضرب کرونکر و کاربردی از آن ۵۴

مسائل تکمیلی ۶۰

مسائل حل شده ۶۷

فصل ۲ دترمینان ۸۳

۲-۱ دترمینان ۸۳

۲-۲ دترمینان و معکوس یک ماتریس ۹۸
۲-۳ قاعده کرامر ۱۱۰
مسائل تکمیلی ۱۱۴
مسائل حل شده ۱۲۱

فصل ۳ فضاهای برداری **۱۳۷**
۳-۱ فضاهای برداری ۱۳۷
۳-۲ زیرفضاهای تولید شده و استقلال خطی ۱۴۹
۳-۳ پایه و بعد یک فضا ۱۶۳
۳-۴ مختصات یک بردار ۱۸۰
۳-۵ فضاهای سطری و ستونی یک ماتریس ۱۹۱
مسائل تکمیلی ۲۱۰
مسائل حل شده ۲۱۹

فصل ۴ تبدیل‌های خطی **۲۲۹**
۴-۱ تبدیل خطی ۲۳۰
۴-۲ ترکیب تبدیل‌های خطی و یکریختی ۲۴۹
۴-۳ نمایش ماتریسی تبدیل‌های خطی ۲۶۲
۴-۴ تابعک خطی و فضای دوگان ۲۷۳
۴-۵ فضای دوگان مضاعف و پوچ‌ساز یک مجموعه ۲۸۳
مسائل تکمیلی ۲۹۴
مسائل حل شده ۳۰۳

فصل ۵ بردارهای ویژه و فرم‌های متعارف **۳۲۳**
۵-۱ بردارها و مقادیر ویژه ۳۲۴
۵-۲ قطری کردن ماتریس ۳۳۷
۵-۳ فرم متعارف جردن یک ماتریس ۳۵۱

مسائل تکمیلی ۳۶۶
مسائل حل شده ۳۷۱

فصل ۶ چندجمله‌ای‌های خاص و قضیهٔ کیلی-هامیلتون ۳۷۹
۶-۱ جبر چند جمله‌ای‌ها ۳۸۰
۶-۲ زیرفضاهای پایا و قضیه کیلی-هامیلتون ۳۹۰
۶-۳ چند جمله‌ای می‌نیمال ۴۰۱
مسائل تکمیلی ۴۱۱
مسائل حل شده ۴۱۹

فصل ۷ فضاهای ضرب داخلی ۴۳۹
۷-۱ فضای ضرب داخلی ۴۳۹
۷-۲ فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت ۴۵۲
۷-۳ قطری شدن متعامد ۴۶۶
۷-۴ فرم‌های درجهٔ دوم ۴۷۶
۷-۵ ماتریس‌های مثبت معین ۴۸۵
مسائل تکمیلی ۴۹۴
مسائل حل شده ۴۹۶
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۴۹۷
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۵۰۱
فهرست راهنما ۵۰۴
مراجع ۵۰۶

فصل ۱

دستگاه معادلات خطی و ماتریس

۱-۱ ماتریس

قبل از شروع هر بحث لازم است که مفهوم «میدان» که تقریباً در تمامی تعاریف و مفاهیم جبر خطی ظاهر می‌شود یادآوری شود.

تعریف ۱-۱-۱ . مجموعه ناتهی $\mathbb{F}$ همراه با دو عمل جمع و ضرب که به هر دو عضو x و y از $\mathbb{F}$ به ترتیب اعضای $x+y$ و xy از $\mathbb{F}$ را نسبت داده و در شرایط زیر صدق می‌کنند، میدان نامیده می‌شود.

۱) برای هر $x, y \in \mathbb{F}$، $x+y=y+x$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) برای هر $x, y, z \in \mathbb{F}$، $(x+y)+z=x+(y+z)$ (خاصیت شرکت پذیری جمع)،

۳) عضو منحصربه‌فرد $0 \in \mathbb{F}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{F}$، $x + 0 = 0 + x = x$ (عضو خنثی جمع)،

۴) برای هر $x \in \mathbb{F}$ عضو منحصربه‌فرد $-x \in \mathbb{F}$ وجود دارد به‌طوری که $x + -x = 0$ (عضو قرینه نسبت به جمع)،

۵) برای هر $x, y \in \mathbb{F}$، $xy = yx$ (خاصیت جابه‌جایی ضرب)،

۶) برای هر $x, y, z \in \mathbb{F}$، $x(yz) = (xy)z$ (خاصیت شرکت‌پذیری ضرب)،

۷) عضو ناصفر و منحصربه‌فرد $1 \in \mathbb{F}$ وجود دارد به طوری که $1x = x$ برای هر $x \in \mathbb{F}$ (عضو خنثی ضرب)،

۸) برای هر عضو ناصفر $x \in \mathbb{F}$، عضو منحصربه‌فرد $x^{-1} \in \mathbb{F}$ وجود دارد به طوری‌که $xx^{-1} = 1$ (عضو معکوس ضرب)،

۹) برای هر $x, y, z \in \mathbb{F}$، $x(y + z) = xy + xz$ (خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع).

اعضای یک میدان معمولاً اسکالر نامیده می‌شوند.

مثال ۱-۱-۲ . مجموعه‌های اعداد مختلط، اعداد حقیقی و اعداد گویا با همان اعمال جمع و ضرب معمولی یک میدان می‌باشند.

مثال ۱-۱-۳ . اگر مجموعه $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ را با اعمال جمع و ضرب به سنج ۳ درنظر بگیریم، یا به عبارتی اعمال جمع و ضرب روی این مجموعه به صورت زیر تعریف شوند،

$\times$	۰	۱	۲
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲
۲	۰	۲	۱

$+$	۰	۱	۲
۰	۰	۱	۲
۱	۱	۲	۰
۲	۲	۰	۱

آنگاه $\mathbb{Z}_3$ یک میدان خواهد بود. لازم به ذکر است که در اینجا ۰ عضو خنثی برای عمل جمع و ۱ عضو خنثی رای عمل ضرب بوده، ۲ قرینه جمعی ۱ و ۲ معکوس ضربی ۲ است.

چنین میدان‌هایی را که تعداد اعضای آن‌ها متناهی است، میدان متناهی می‌نامند.

مثال ۱-۱-۴ . اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه $\mathbb{Z}_p = \{۰, ۱, \ldots, p-۱\}$ با اعمال جمع و ضرب به سنج p یک میدان متناهی است.

تعریف ۱-۱-۵ . عدد صحیح و مثبت n را مشخصه میدان $\mathbb{F}$ گویند، هرگاه n کوچکترین عددی باشد که حاصل n مرتبه جمع ۱ با خودش صفر شود، یا به عبارتی،

$$\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{n \text{ مرتبه}} = ۰$$

اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، $\mathbb{F}$ را یک میدان با مشخصه صفر گویند.

مثال ۱-۱-۶ . اعداد مختلط و اعداد حقیقی میدان‌هایی با مشخصه صفر و $\mathbb{Z}_p$ میدانی با مشخصه p است.

آرایه مستطیلی از اسکالرها در اغلب مسایل دنیای حقیقی ظاهر می‌شوند. کیلی ریاضیدان انگلیسی برای اولین بار در سال ۱۸۵۸ کلمه «ماتریس» را برای این گونه آرایه مستطیلی از اعداد به‌کار برد. اغلب خوانندگان با مفهوم ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها آشنایی دارند ولی برای یادآوری بعضی از تعاریف و قضایا را به طور خلاصه در اینجا می‌آوریم.

یک ماتریس $m \times n$ بر روی میدان $\mathbb{F}$ عبارت است از یک تابع A از مجموعه زوج‌های مرتب (i,j) از اعداد صحیح، $۱ \leq i \leq m$ و $۱ \leq j \leq n$ در میدان $\mathbb{F}$. درایه‌های ماتریس A عبارت‌اند از اسکالرهای $A(i,j) = a_{ij}$ و اغلب بسیار راحت‌تر است که این ماتریس را با نمایش درایه‌هایش در یک آرایه مستطیلی m سطری و n ستونی توصیف کنیم.

اگر A یک ماتریس $m \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و درایه (i,j)ام آن را با a_{ij} نشان دهیم آنگاه A به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \vdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \vdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

بنابراین a_{ij} درایه سطر iام و ستون jام خواهدبود. معمولاً اگر تأکید روی میدان $\mathbb{F}$ نباشد، به طور ساده A یک ماتریس نامیده می‌شود.

هر ماتریس $m \times ۱$ یک ماتریس ستونی و هر ماتریس $۱ \times n$ یک ماتریس سطری نامیده می‌شود. همچنین هرگاه $m = n$، A یک ماتریس مربع و هرگاه تمام درایه‌های A صفر باشد، A یک ماتریس صفر نامیده می‌شود. دو ماتریس A و B را مساوی گویند هرگاه A و B هم اندازه باشند و $a_{ij} = b_{ij}$ برای هر i و j. اگر A و B ماتریس‌های $m \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، آنگاه جمع A و B و ضرب اسکالر c در A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \vdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \vdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \vdots & b_{۱n} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \vdots & b_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m۱} & b_{m۲} & \ddots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{۱۱} + b_{۱۱} & a_{۱۲} + b_{۱۲} & \vdots & a_{۱n} + b_{۱n} \\ a_{۲۱} + b_{۲۱} & a_{۲۲} + b_{۲۲} & \vdots & a_{۲n} + b_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} + b_{m۱} & a_{m۲} + b_{m۲} & \vdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$cA = c \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \vdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \vdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{۱۱} & ca_{۱۲} & \vdots & ca_{۱n} \\ ca_{۲۱} & ca_{۲۲} & \vdots & ca_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m۱} & ca_{m۲} & \vdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که تنها ماتریس‌های هم‌اندازه می‌توانند با هم جمع شوند. به راحتی ثابت می‌شود که جمع و ضرب اسکالر دارای خواص زیر هستند:

قضیه ۱-۱-۷ . اگر A، B و C ماتریس‌های $m \times n$ و c و d اسکالر باشند آنگاه:

۱) $A + B = B + A$،

۲) $A + (B + C) = (A + B) + C$،

۳) $A = \circ + A = A + \circ$،

۴) $\circ = A + (-A) = (-A) + A$،

۵) $c(A + B) = cA + cB$،

۶) $(c + d)A = cA + dA$،

۷) $(cd)A = c(dA)$.

هرگاه A یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد آنگاه:

۱) درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$، ... و a_{nn} را درایه‌های قطر اصلی A نامند.

۲) A رایک ماتریس قطری گویند هرگاه تمام درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. اگر A یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n باشد، اغلب آن را به صورت زیر

$$A = \text{diag}(a_۱, a_۲, ..., a_n)$$

نیز نشان می‌دهند.

۳) A رایک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) گویند هرگاه تمام درایه‌های پایین (بالای) قطر اصلی صفر باشند. حالت کلی یک ماتریس بالا مثلثی A وپایین مثلثی B به صورت زیر است :

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & ... & a_{۱n} \\ \circ & a_{۲۲} & ... & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & ... & \circ & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & \circ & ... & \circ \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \circ \\ b_{n۱} & b_{n۲} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱-۱-۸ . اگر $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه ترانهاده A که با A^t نشان داده می‌شود عبارت است از یک ماتریس $n \times m$ که ستون j ام آن، سطر jام A است، یا به عبارت دیگر،

$$\begin{bmatrix} A^t \end{bmatrix}_{ij} = a_{ji}.$$

مثال ۱-۱-۹ . اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ آنگاه $A^t = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

بسیار واضح است که،

$$\begin{bmatrix} cA \end{bmatrix}^t = cA^t$$

و

$$\begin{bmatrix} A+B \end{bmatrix}^t = A^t + B^t.$$

تعریف ۱-۱-۱۰ . اگر $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \end{bmatrix}$ یک ماتریس سطری و $B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱} \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی باشد، آنگاه حاصل‌ضرب A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱} \end{bmatrix} = a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱n}b_{n۱} = \sum_{k=۱}^{n} a_{۱k}b_{k۱},$$

یعنی حاصل‌ضرب یک ماتریس سطری $۱ \times n$ در یک ماتریس ستونی $n \times ۱$ یک اسکالر است.
حال اگر یک A ماتریس $m \times p$ و B یک ماتریس $p \times n$ باشد آنگاه حاصل‌ضرب $C = AB$ یک

ماتریس $m \times n$ است که،

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \text{سطر } i\text{ام } A \times \text{ستون } j\text{ام } B \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\ b_{kj} \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B تنها زمانی تعریف شده است که تعداد ستون‌های A و سطرهای B با هم مساوی باشند.

مثال ۱-۱-۱۱ . اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ آنگاه

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

و

$$BA = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 15 & 8 \end{bmatrix}.$$

توجه داشته‌باشید که در مثال قبل حاصل‌ضرب AB یک ماتریس 2×2 است در صورتی حاصل‌ضرب BA یک ماتریس 3×3 می‌باشد، بنابراین لزوماً AB و BA باهم مساوی نیستند. بعضی از خواص ضرب ماتریس‌ها در قضیه زیر بیان شده است که اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۱-۱-۱۲ . فرض کنید A، B و C ماتریس‌هایی باشند که اعمال زیر روی آنها تعریف شده و k یک اسکالر دلخواه باشد، آنگاه:

۱) $A(BC) = (AB)C$،

۲) $A(B+C) = AB + AC$ و $(A+B)C = AC + BC$،

۳) $IA = AI = A$،

۴) $k(BC) = (kB)C = B(kC)$،

۵) $(AB)^t = B^t A^t$.

تعریف ۱-۱-۱۳ . ماتریس A را متقارن گویند هرگاه $A^t = A$ و A را پادمتقارن گویند هرگاه $A^t = -A$.

مثال ۱-۱-۱۴ . ماتریس‌های A و B که به صورت زیر تعریف شده‌اند به ترتیب متقارن و پادمتقارن می‌باشند.

$$A = \begin{bmatrix} e & a & b \\ a & f & c \\ b & c & g \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ -a & ۰ & c \\ -b & -c & ۰ \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱-۱-۱۵ . اگر A یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد آنگاه رد یا اثر A که با trA نشان داده می‌شود عبارت است از مجموع درایه‌های واقع در قطر اصلی A یا به عبارتی:

$$trA = a_{۱۱} + a_{۲۲} + ... + a_{nn} = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}.$$

اگر A و B دو ماتریس هم‌اندازه باشند، آنگاه تفاضل دو ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A - B = A + (-B).$$

پس از تعریف اعمال جبری جمع و ضرب ماتریس‌ها و تعریف تفاضل ماتریس‌ها از روی عمل جمع، این سوال مطرح است که آیا تقسیم ماتریس‌ها را هم می‌توان از روی عمل ضرب تعریف کرد؟ منظور از تقسیم ماتریس A بر ماتریس B یافتن ماتریس‌هایی مانند X یا Y است به طوری که $A = BX$ یا $A = YB$

از آنجا که ضرب ماتریس‌ها همواره تعریف شده نیست و در صورت امکان نیز ممکن است ماتریس‌های X و Y منحصر به فرد نباشند، بنابراین این مطلب را فقط برای دسته‌ای از ماتریس‌های مربع که ماتریس‌های معکوس‌پذیر یا نامنفرد نامیده می‌شوند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۶ . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. ماتریس $B_{n\times n}$ را معکوس چپ A گوییم هرگاه $BA = I$ و ماتریس $B_{n\times n}$ را معکوس راست A گوییم هرگاه $AB = I$. اگر

$$AB = BA = I,$$

آنگاه B را معکوس A نامیم و A را معکوس‌پذیر یا نامنفرد گوییم.

مثال ۱-۱-۱۷ . اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - bc \neq ۰$ آنگاه ماتریس

$$B = \frac{۱}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

معکوس A خواهدبود.

لم ۱-۱-۱۸ . اگر A دارای معکوس چپ B و معکوس راست C باشد، آنگاه $B = C$.

برهان. فرض کنید $BA = I$ و $AC = I$، آنگاه:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

■

بنابراین اگر A دارای یک معکوس چپ و یک معکوس راست باشد، آنگاه A دارای یک معکوس منحصر به فرد است که آن را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم. قضیه زیر که بعضی از خواص معکوس‌پذیری را بیان می‌کند به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود.

قضیه ۱-۱-۱۹ . فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند،

۱) اگر A معکوس‌پذیر باشد آنگاه $A^{-۱}$ نیز معکوس‌پذیر است و $A = (A^{-۱})^{-۱}$،

۲) اگر A و B هر دو معکوس‌پذیر باشند، آنگاه AB نیز معکوس‌پذیر است و $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$،

۳) اگر A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه A^t نیز معکوس‌پذیر است و $(A^t)^{-۱} = (A^{-۱})^t$.

خواص بیشتر ماتریس‌های معکوس‌پذیر و روش پیدا کردن معکوس یک ماتریس در بخش‌های بعدی بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

در ادامه مفهومی را معرفی خواهیم کرد که اغلب درکارکردن با ماتریس‌ها مفید واقع خواهد شد.

یک زیرماتریس از ماتریس A، ماتریسی است که از حذف سطرها و ستون‌های مشخصی از A به‌دست می‌آید. بااستفاده از خطوط افقی یا عمودی یک ماتریس A را می‌توان به زیرماتریس‌هایی افرازکرد که این زیرماتریس‌ها بلوک نامیده می‌شوند. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right],$$

این ماتریس به چهار بلوک تقسیم شده است که اگر قرار دهیم:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix},$$

آنگاه A را می‌توان به صورت :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

نوشت که این ماتریس، ماتریس بلوکی نامیده می‌شود.

ضرب ماتریس‌هایی که بلوک‌های A_{ij} افراز شده فرمولی شبیه ضرب ماتریس‌هایی دارد که A_{ij} اسکالر است. به عنوان مثال اگر:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

ماتریس‌های بلوکی باشند به طوری که ضرب بلوک‌ها تعریف شده باشد یا به عبارتی تعداد ستون‌های A_{ik} با تعداد سطرهای B_{kj} مساوی باشند آنگاه:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix},$$

توجه داشته‌باشید برای اینکه ضرب ماتریس‌های بلوکی تعریف شده باشد باید ستون‌های A شبیه سطرهای B افراز شده باشند.

مثال ۱-۱-۲۰ . فرض کنید ماتریس‌های بلوکی A و B به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ \hline a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix},$$

$$B = \left[\begin{array}{cc} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \\ \hline b_{۳۱} & b_{۳۲} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{۱۱} \\ B_{۲۱} \end{bmatrix},$$

آنگاه:

$$C = AB = \begin{bmatrix} C_{۱۱} \\ C_{۲۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{۱۱}B_{۱۱} + A_{۱۲}B_{۲۱} \\ A_{۲۱}B_{۱۱} + A_{۲۲}B_{۲۱} \end{bmatrix}.$$

در حالت خاص اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که به صورت بلوکی از ماتریس های ستونی افراز شده باشد، یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ & \dots & A_n \end{bmatrix},$$

که A_jها ستون‌های A هستند و $X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی باشد آنگاه AX به صورت مجموعی از ماتریس‌های ستونی A باضریب x_i است، یا به عبارت دیگر:

$$AX = \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_۱A_۱ + x_۲A_۲ + \dots + x_nA_n.$$

مثال ۱-۱-۲۱ . اگر $A = \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۴ & ۰ & ۱ \\ \hline ۰ & ۰ & ۲ & -۱ \end{array}\right]$ و $B = \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & -۲ & ۱ \end{array}\right]$،
حاصل‌ضرب BA رابا استفاده از ضرب بلوکی ماتریس‌ها به‌دست آورید.

$$BA = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۵ & -۲ \\ -۳ & ۴ & ۶ & -۲ \\ \hline ۱ & ۵ & ۱۰ & -۱ \\ ۱۱ & -۳ & ۵ & -۳ \end{array}\right].$$

مثال ۱-۱-۲۲ . اگر $A = \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ \hline ۱ & -۱ & -۲ \end{array}\right]$، مطلوب است محاسبه $A^۸$.

حل. اگر قراردهیم $A_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $A_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $A_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A_{۲۲} = \begin{bmatrix} -۲ \end{bmatrix}$
آنگاه:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & ۰ \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{۱۱} & ۰ \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{۱۱}^۲ & ۰ \\ A_{۲۱}A_{۱۱} + A_{۲۲}A_{۲۱} & A_{۲۲}^۲ \end{bmatrix}.$$

اما داریم:

$$A_{۲۱}A_{۱۱} + A_{۲۲}A_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ & ۲ \end{bmatrix} = ۰$$

درنتیجه:

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} A_{۱۱}^{۲} & ۰ \\ ۰ & A_{۲۲}^{۲} \end{bmatrix}.$$

آنگاه:

$$A^{۴} = (A^{۲})^{۲} = \begin{bmatrix} A_{۱۱}^{۲} & ۰ \\ ۰ & A_{۲۲}^{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{۱۱}^{۲} & ۰ \\ ۰ & A_{۲۲}^{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{۱۱}^{۴} & ۰ \\ ۰ & A_{۲۲}^{۴} \end{bmatrix}.$$

بنابراین:

$$A^{۸} = \begin{bmatrix} A_{۱۱}^{۸} & ۰ \\ ۰ & A_{۲۲}^{۸} \end{bmatrix}.$$

ازطرفی داریم: $A_{۲۲}^{۸} = \begin{bmatrix}(-۲)^{۸}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲۵۶\end{bmatrix}$ وهمچنین $A_{۱۱}^{۲} = ۲A_{۱۱}$. درنتیجه:

$$A^{۸} = \begin{bmatrix} ۱۲۸A_{۱۱} & ۰ \\ ۰ & ۲۵۶ \end{bmatrix} = ۱۲۸ \begin{bmatrix} A_{۱۱} & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۱۲۸ \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

تمرین ۱.۱

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) اگر $A \neq ۰$ یک ماتریس مربع باشد آنگاه A معکوس‌پذیر است.

(ب) اگر A و B معکوس‌پذیر باشند آنگاه $A + B$ معکوس‌پذیر است.

(پ) اگر A و B هر دو معکوس‌پذیر باشند آنگاه $(A^{-۱}B)^t$ معکوس‌پذیر است.

(ت) $(AB)^t = A^tB^t$.

(ث) اگر $A^{۴} = ۳I$ آنگاه A معکوس‌پذیر است.

(ج) اگر $A^{۲} = A$ و $A \neq ۰$ آنگاه A معکوس‌پذیر است.

(چ) اگر $AB = B$ به ازای یک ماتریس ناصفر B، آنگاه A معکوس‌پذیر است.

(ح) اگر A یک ماتریس پادمتقارن و معکوس‌پذیر باشد آنگاه $A^{-۱}$ نیز پادمتقارن است.

(خ) اگر $AB=I$ آنگاه A و B معکوس‌پذیرند.

(د) اگر $A^{۲}=۰$ آنگاه A معکوس‌پذیر نیست.

(ذ) اگر $A^{۲}=A$ و $A\neq ۰$ باشد، آنگاه $A=I$.

(ر) اگر A، B و AB متقارن باشند آنگاه $AB=BA$.

(ز) اگر $AB^t=I$ آنگاه A معکوس‌پذیراست، اگر و فقط اگر B معکوس‌پذیر باشد.

(ژ) اگر ماتریس مربع A معکوس‌پذیر نباشد آنگاه ماتریس AB به ازای هر B معکوس‌پذیر نیست.

(س) معکوس یک ماتریس بالامثلثی معکوس‌پذیر، بالامثلثی است.

(ش) اگر A معکوس‌پذیر و متقارن باشد آنگاه $A^{-۱}$ نیز متقارن است.

(ص) اگر A یک ماتریس بالامثلثی باشد به طوری که $A^tA=AA^t$، آنگاه A قطری است.

(ض) اگر $A\neq ۰$ و $AB=AC$ باشد، آنگاه $B=C$.

(ط) ماتریس $A-A^t$ پادمتقارن است.

۲) فرض کنید A یک ماتریس ۲×۲ باشد، نشان دهید:

(آ) اسکالرهای a، b، c و d وجود دارند به طوری که،

$$A=a\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

(ب) اسکالرهای p، q، r و s وجود دارند به طوری که،

$$A=p\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+q\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}+r\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

۳) فرض‌کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$. نشان دهیداگر $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ اسکالرهایی باشند به طوری که،

$$t_۱A+t_۲B+t_۳C=۰.$$

آنگاه، $t_۱ = t_۲ = t_۳ = ۰$.

۴) نشان دهید اگر به‌ازای هر ماتریس $A_{m\times n}$، داشته باشیم $Q + A = A$، آنگاه $Q = ۰$.

۵) در هر یک از موارد زیر ماتریس A را پیدا کنید.

(آ) $(۳A^t + ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix})^t = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$.

(ب) $(۲A^t - ۵\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix})^t = ۴A - q\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$.

۶) فرض کنید A یک ماتریس مربع باشد:

(آ) نشان دهید $A - A^t$ پادمتقارن است.

(ب) یک ماتریس متقارن S و یک ماتریس پادمتقارن W را بیابید که $A = S + W$ باشد.

۷) اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \dots & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۱ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است محاسبه A^k.

۸) فرض کنید A یک ماتریس ۲×۲ باشد:

(آ) نشان دهید اگر ضرب A با ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ جابه‌جایی باشد، آنگاه $A = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ c & a \end{bmatrix}$، که بدیهی است a و c اسکالرهای دلخواه هستند.

(ب) نشان دهید ضرب A با هر ماتریس ۲×۲ جابه‌جایی است اگر وفقط اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & a \end{bmatrix}$ باشد، که a یک اسکالر دلخواه است.

۹) حاصل ضرب A و B را با استفاده از بلوک‌های مشخص شده به‌دست آورید هرگاه:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right],\qquad B=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 5 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right].$$

۱۰) A را به صورت بلوکی مناسب افراز کرده و A^n را به‌دست آورید، هرگاه:

(آ) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(ب) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

۱۱) فرض کنید A و B ماتریس های $n\times n$ باشند به طوری که جمع درایه های هر سطر آنها ۱ باشد.نشان دهید جمع درایه‌های هر سطر AB نیز ۱ خواهدبود.

۱۲) نشان دهید:

(آ) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

(ب) $\operatorname{tr}(AA^t)$ برابر است با مجموع مربعات درایه‌های ماتریس A.

(پ) به‌ازای هیچ ماتریس A و B تساوی $AB-BA=I$ برقرار نخواهد بود.

۱۳) فرض کنید C یک ماتریس 2×2 باشد. نشان دهید ماتریس‌های A و B وجود دارند به طوری که $C=AB-BA$ اگر و فقط اگر $c_{11}+c_{22}=0$.

۱۴) فرض کنید E_{ij} یک ماتریس $n\times n$ باشد که درایه سطر i ام و ستون j ام آن ۱ و بقیه درایه‌های آن صفر باشند. مطلوب است محاسبه $E_{pq}E_{rs}$.

۱۵) ماتریس A را پوچ‌توان گویند هرگاه عدد صحیح و مثبت k وجود داشته باشد به طوری که $A^k=0$.

(آ) نشان دهید ماتریس
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$
پوچ‌توان است.

(ب) نشان دهید هیچ ماتریس معکوس‌پذیر پوچ‌توان نیست.

(پ) نشان دهید هر ماتریس بالامثلثی که درایه‌های قطر اصلی آن صفر باشد پوچ‌توان است.

(ت) اگر A یک ماتریس پوچ‌توان باشد به طوری که $A^k = 0$، نشان دهید $I - A$ معکوس‌پذیر است و معکوس آن $I + A + ... + A^{k-1}$ می‌باشد.

۱۶) فرض کنید Q یک ماتریس $m \times n$ و X یک بردار ستونی $n \times 1$ باشد، نشان دهید:

$$X^t Q^t Q X \geq 0.$$

۲-۱ دستگاه معادلات خطی

در این بخش به مطالعه دستگاه معادلات خطی می‌پردازیم. این دستگاه‌ها در بسیاری ازمسایل عملی رشته‌های مهندسی، اقتصاد، شیمی و غیره ظاهر می‌شوند.
جبرخطی روش منظمی به منظور حل این گونه دستگاه‌ها ارائه می‌نماید. در حالت دو متغیره اگر a، b و c اعداد حقیقی باشند، آنگاه نمودار معادله

$$ax + by = c,$$

یک خط راست است. با الهام از این موضوع معادلاتی به این شکل را معادلات خطی برحسب x و y نامیده‌اند. در یک معادله خطی هرگاه فقط دو یا سه متغیر داشته باشیم آنها را x، y و z نمایش می‌دهیم ولی اگر تعداد آنها زیادتر شود از علائمی مانند $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱-۲-۱ . یک معادله به صورت:

$$a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + ... + a_nx_n = b,$$

یک معادله خطی بر حسب متغیرهای $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n نامیده می‌شود که $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n اسکالرهایی هستند که به ترتیب ضریب $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n نامیده می‌شوند.

گردایه‌ای متناهی از معادلات خطی برحسب متغیرهای $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n یک دستگاه معادلات خطی نامیده می‌شود.

درحالت کلی یک دستگاه معادلات خطی شامل m معادله و n متغیر به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + ... + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ a_{۱۲}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + ... + a_{۲n}x_n = b_۲ \\ \vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

در این دستگاه a_{ij}ها و b_iها اسکالر هستند.

استفاده از اندیس‌های دوتایی برای ضریب از این نظر که جایگاه آنها را در دستگاه مشخص می‌کند بسیار مفید است. اگر قرار دهیم:

$$B=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}.$$

آنگاه با استفاده از تعریف ضرب ماتریس‌ها و تساوی دو ماتریس دستگاه معادلات فوق را می‌توان به صورت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},$$

یا به طور خلاصه به صورت $AX=B$ نمایش داد که این طرز نمایش، فرم ماتریسی دستگاه معادلات نامیده می‌شود. معمولاً ماتریس A را ماتریس ضرایب، X را ماتریس متغیرها و B را ماتریس ثابت می‌نامند.

تعریف ۱-۲-۲ . دنباله s_1، s_2، ... و s_n از اسکالرها را یک جواب معادله

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b,$$

گویند، هرگاه $x_1=s_1$، $x_2=s_2$، ... و $x_n=s_n$ دراین معادله صدق کنند و یا به عبارت دیگر:

$$a_1s_1+a_2s_2+\ldots+a_ns_n=b.$$

یک دنباله از اسکالرهای s_1، s_2، ... و s_n را یک جواب دستگاه معادلات گویند هرگاه جواب هر یک از معادلات این دستگاه باشد.

یک دستگاه معادلات را که حداقل یک جواب داشته باشد سازگار و در غیر این صورت ناسازگار گویند.

مثال ۱-۲-۳ . دستگاه $\begin{cases} x+y=2\\ x+y=3\end{cases}$ یک دستگاه ناسازگار است، زیرا هیچ جوابی ندارد.

مثال ۱-۲-۴ . دستگاه $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ بینهایت جواب دارد، زیرا به ازای هر مقدار دلخواه s و t مقادیر $x_1 = t - s + 1$، $x_2 = t + s + 2$، $x_3 = s$ و $x_4 = t$ یک جواب این دستگاه خواهد بود.

مقادیر s و t که در جواب دستگاه مثال قبل ظاهر شدند پارامتر نامیده می‌شوند و جواب دستگاه که به صورت پارامتری بر حسب پارامترهای s و t داده شده است جواب عمومی دستگاه نامیده می‌شود. همواره می‌توان جواب‌های یک دستگاه را در صورت وجود به صورت پارامتری بیان کرد.

مثال ۱-۲-۵ . جواب معادله $3x - y + 2z = 6$ را به صورت پارامتری بیان کنید.

حل. اگر y را بر حسب x و z بدست آوریم، داریم:

$$y = 3x + 2z - 6,$$

قرار می‌دهیم $x = t$ و $z = s$ که s و t اسکالرهای دلخواهی هستند، در نتیجه جواب معادله به صورت

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 2s - 6 \\ z = s \end{cases}$$

به دست می‌آید.

البته می‌توانستیم معادله را بر حسب x نیز حل کنیم، دراین صورت $x = \frac{1}{3}(y - 2z + 6)$ خواهد بود و اگر قرار دهیم $y = p$ و $z = q$، در این حالت جواب معادله به صورت:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(p - 2q + 6) \\ y = p \\ z = q \end{cases}$$

به دست می‌آید که p و q اسکالرهای دلخواه هستند.

هنگامی که دستگاه معادلات ما فقط دو معادله با دو متغیر x و y داشته باشد به راحتی می‌توان آن را تعبیر هندسی کرد. بدین صورت که چون نمودار هر معادله یک خط راست است و دو خط در صفحه سه حالت نسبت به هم دارند از این رو یا دو خط همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که در این صورت دستگاه دقیقاً یک جواب دارد و یا با هم موازیند که دستگاه اصلاً جواب ندارد یا هر دو خط یکی هستند که دستگاه بینهایت جواب دارد. اما در حالت‌هایی که تعداد متغیرهای ما زیاد باشند نمی‌توانند تعبیر هندسی داشته باشند بنابراین با استفاده از روشهای جبری باید جواب آنها را بررسی کرد. بعداً نشان خواهیم داد که برای جواب‌های هر دستگاه معادلات با متغیرهای بیشتر نیز دقیقاً یکی از این سه حالت اتفاق می‌افتد.

ایده اصلی در حل دستگاه معادلات خطی این است که دستگاه را به یک دستگاه جدید که دارای همان مجموعه جواب با حل ساده‌تری است تبدیل کنیم. در این راستا نخست تعریف زیر را می‌آوریم:

تعریف ۱-۲-۶ . دو دستگاه معادلات خطی را هم‌ارز گوییم هرگاه هر دو دارای یک مجموعه جواب باشند.

با توجه به تعریف بالا، روند چنین است که نخست اعمالی را که انجام آنها روی دستگاه منجر به یک دستگاه هم‌ارز می‌شود مشخص می‌کنیم و سپس با انجام آنها روی دستگاه آن را به دستگاه هم‌ارزی تبدیل می‌کنیم و هدف این است که نهایتاً به دستگاه هم‌ارزی که حل ساده باشد برسیم. نخست با یک مثال روش حذفی برای حل دستگاه‌ها را که از قبل با آن آشنایی دارید مرور می کنیم.

مثال ۱-۲-۷ . برای حل دستگاه،

$$\begin{cases} ۲x_۱ - x_۲ + x_۳ = ۰ \\ x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ = ۰ \end{cases}$$

اگر -۲ برابر سطر دوم را به سطر اول اضافه کنیم نتیجه می‌گیریم:

$$-۷x_۲ - ۷x_۳ = ۰,$$

یا به طور معادل $x_۲ = -x_۳$ و اگر ۳ برابر معادله اول را به معادله دوم اضافه کنیم داریم که،

$$۷x_۱ + ۷x_۳ = ۰,$$

یا $x_{۱} = -x_{۳}$. اگر قرار دهیم $x_{۳} = t$ آنگاه جواب دستگاه به صورت،

$$\begin{cases} x_{۱} = -t \\ x_{۲} = -t \\ x_{۳} = t \end{cases}$$

به دست می‌آید. در اینجا برای حذف متغیر چنین عمل کردیم که ابتدا طرفین یک معادله را در یک اسکالر ضرب کردیم و سپس این معادله را با معادلات دیگر جمع کردیم تا بعضی از متغیرها حذف شوند. این اعمال، دستگاه را به دستگاه هم‌ارز تبدیل کرد، چنین اعمالی معمولاً اعمال مقدماتی نامیده می‌شوند.

تعریف ۱-۲-۸ . اعمال زیر روی دستگاه معادلات خطی، اعمال مقدماتی نامیده می‌شوند.

۱) جابه‌جا کردن دو معادله

۲) ضرب نمودن طرفین معادله در یک اسکالر غیر صفر

۳) اضافه نمودن مضربی از یک معادله به معادله دیگر

قضیه ۱-۲-۹ . انجام هر کدام از اعمال مقدماتی روی یک دستگاه معادلات خطی، دستگاه معادلات هم‌ارزی نتیجه می‌دهد.

اثبات: فقط قسمت (پ) را اثبات می‌کنیم و اثبات قسمت‌های (آ) و (ب) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنید،

$$a_{۱}x_{۱} + a_{۲}x_{۲} + ... + a_{n}x_{n} = b, \qquad (۱\text{-}۱)$$

$$c_{۱}x_{۱} + c_{۲}x_{۲} + ... + c_{n}x_{n} = d, \qquad (۱\text{-}۲)$$

دو معادله مختلف در دستگاه معادلات داده شده، باشند. همچنین فرض کنید معادله (۱ـ۱) با معادله حاصل از افزودن k برابر معادله (۱ـ۲) به معادله (۱ـ۱) عوض شود، یا به عبارتی معادله (۱ـ۱) با معادله

$$(a_{۱} + kc_{۱})x_{۱} + (a_{۲} + kc_{۲})x_{۲} + ... + (a_{n} + kc_{n})x_{n} = b + kd,$$

عوض شود. اگر $s_۱$، $s_۲$، ... و s_n یک جواب دستگاه اول باشند، آنگاه

$$a_۱s_۱ + a_۲s_۲ + ... + a_ns_n = b,$$

و

$$c_۱s_۱ + c_۲s_۲ + ... + c_ns_n = d,$$

با ضرب کردن طرفین معادله دوم در k و جمع آن با معادله اول رابطه زیر بدست می‌آید،

$$(a_۱ + kc_۱)s_۱ + (a_۲ + kc_۲)s_۲ + ... + (a_n + kc_n)s_n = b + kd, \qquad (۱\text{-}۳)$$

در نتیجه $s_۱$، $s_۲$، ... و s_n یک جواب دستگاه جدید هستند. علاوه بر این دستگاه دوم هیچ جواب اضافه‌ای ندارد زیرا مراحل قبل بازگشت‌پذیر است. در حقیقت، دستگاه اول با افزودن $-k$ برابر معادله (۱ـ۲) به معادله (۱ـ۳) از دستگاه دوم نتیجه می‌شود. لذا طبق آنچه گفته شد هر جواب دستگاه دوم نیز یک جواب دستگاه اول است و در نتیجه دو دستگاه معادل هستند.

توجه داریم هنگام انجام هر کدام از اعمال مقدماتی روی دستگاه معادلات تنها ضرایب متغیرها و عدد ثابت سمت راست تغییر می‌کنند و بقیه اجزای دستگاه بدون تغییر باقی می‌مانند. بنابراین به منظور راحتی و ساده‌نویسی معمولاً از نوشتن و تکرار اجزای دیگر پرهیز شده و متناظر با هر دستگاه یک ماتریس که به نام ماتریس افزوده دستگاه مشهور است در نظر گرفته می‌شود و به جای انجام اعمال روی معادلات، اعمال مشابه روی سطرهای این ماتریس انجام می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۰ . فرض کنید:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + ... + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + ... + a_{۲n}x_n = b_۲ \\ \vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

یک دستگاه معادلات خطی با m معادله و n متغیر باشد، ماتریس افزوده دستگاه که با $[A : B]$ نشان

داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A:B]=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} & b_۱ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} & b_۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

معادل اعمال مقدماتی برای معادلات، اعمال زیر روی سطرهای ماتریس‌ها تعریف می‌شوند که به اعمال سطری مقدماتی معروفند.

تعریف ۱-۲-۱۱ . اعمال سطری مقدماتی روی یک ماتریس عبارتند از:

۱) عوض کردن جای دو سطر

۲) ضرب کردن یک سطر در یک اسکالر ناصفر

۳) اضافه نمودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر

مثال ۱-۲-۱۲ . جواب دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases} ۳x+۴y+z=۱ \\ ۲x+۳y=۰ \\ ۴x+۳y-z=-۲ \end{cases}$$

حل : ماتریس افزوده دستگاه فوق به صورت زیر است:

$$[A:B]=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۳ & -۱ & -۲ \end{bmatrix},$$

برای اینکه اولین درایه سمت چپ سطر اول را به یک تبدیل کنیم، قرینه سطر دوم را به سطر اول اضافه می‌نماییم در این صورت ماتریس زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۳ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}.$$

اکنون برای حذف متغیر اول از معادلات دیگر باید درایه‌های اول سطرهای بعدی صفر شود. برای این کار ۲− برابر سطر اول را به سطر دوم و ۴− برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه می‌کنیم و در نتیجه ماتریس زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۲ \\ ۰ & -۱ & -۵ & -۶ \end{bmatrix},$$

حال متغیر دوم را از معادلات اول و سوم حذف می‌کنیم، برای این کار با استفاده از درایه ۱ واقع در سطر دوم و ستون دوم، درایه‌های بالا و پایین این یک را صفر می‌کنیم. بنابراین قرینه سطر دوم را به سطر اول و سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم. نهایتاً ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ & -۷ & -۸ \end{bmatrix}.$$

توجه داریم انجام این اعمال، ستون اول را تغییر نمی‌دهد زیرا درایه اول سطر دوم صفر بود. نهایتاً برای حذف متغیر سوم از معادلات اول و دوم یا به عبارتی صفر کردن درایه‌های سوم سطرهای اول و دوم مشابه مشابه قبل ابتدا سطر سوم را در $-\frac{۱}{۷}$ ضرب کرده و سپس ۳− برابر سطر سوم را به سطر اول و ۲ برابر سطر سوم را به سطر اول اضافه می‌کنیم تا ماتریس زیر حاصل شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۳}{۷} \\ ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۲}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۱ & +\frac{۸}{۷} \end{bmatrix},$$

حال دستگاه متناظر با این ماتریس افزوده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_{۱} = -\frac{۳}{۷} \\ x_{۲} = \frac{۲}{۷} \\ x_{۳} = \frac{۸}{۷} \end{cases}$$

که با توجه به هم‌ارز بودن این دستگاه با دستگاه اول، این جواب، جواب دستگاه اول نیز هست.

بی‌تردید انتخاب اعمال انجام شده روی ماتریس افزوده در مثال قبل به طور تصادفی نبوده و اعمال طوری انتخاب شده بودند که به یک ماتریس مشخص برسیم، به بیان دیگر اعمال طوری انتخاب شده بودند که مشابه حذف متغیرها در دستگاه معادلات عمل شود. دراینجا ماتریس مورد نظر را علاقه‌مند هستیم تا پس از انجام اعمال سطری مقدماتی به آن برسیم معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱-۲-۱۳ . ماتریس A را یک ماتریس سطری-پلکانی گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱) تمام سطرهای صفر درپایین ماتریس قرار داشته باشند.

۲) اولین درایه غیر صفر هر سطر از سمت چپ ۱ باشد که به آن ۱ پیشرو گویند.

۳) ۱ پیشرو هر سطر در سمت راست ۱ پیشرو سطر بالای آن قرار داشته باشد.

در حقیقت، تمام درایه‌هایی که در زیر یا در سمت چپ ۱ پیشرو قرار دارند باید صفر باشند ولی درایه‌های بالا و سمت راست دلخواه هستند.

فرم دیگر ماتریس مورد نظر، ماتریس سطری-پلکانی تحویل یافته است که تعریف آن به صورت زیر است.

تعریف ۱-۲-۱۴ . ماتریس A یک ماتریس سطری-پلکانی تحویل یافته نامیده می‌شود هرگاه A یک ماتریس سطری-پلکانی بوده و علاوه بر این ۱ پیشرو تنها درایه غیر صفر در ستون خود باشد.

بنابراین یک ماتریس سطری-پلکانی، سطری-پلکانی تحویل یافته است هرگاه درایه‌های بالای ۱ پیشرو نیز صفر باشند. از این رو با انجام چند عمل سطری مقدماتی می‌توان یک ماتریس سطری-پلکانی را به یک ماتریس سطری-پلکانی تحویل یافته تبدیل کرد.

مثال ۱-۲-۱۵ . ماتریس‌های زیر به فرم سطری_پلکانی هستند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

و ماتریس‌های زیر به فرم سطری_پلکانی تحویل یافته هستند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

حال باید روند انجام مراحل سطری مقدماتی برای رسیدن به یک ماتریس سطری_پلکانی یا سطری_پلکانی تحویل یافته مشخص گردد. در اینجا روشی را که تحت عنوان «روش حذفی گوس» مشهور است بیان می‌کنیم. روند انجام عملیات در روش حذفی گوس جهت تبدیل یک ماتریس به ماتریس سطری_پلکانی به شرح زیر است:

۱) اگر ماتریس صفر باشد، به فرم سطری_پلکانی است و روند کامل است.

۲) در غیر این صورت، اولین ستون از سمت چپ را که دارای درایه غیر صفر است مشخص می‌کنیم و سطری را که این درایه غیر صفر روی آن قرار دارد به سطر اول انتقال می‌دهیم.

۳) حال این سطر را در عکس اولین درایه غیر صفر آن ضرب می‌کنیم تا ۱ پیشرو تولید شود.

۴) با اضافه کردن مضربی از این سطر به سطرهای دیگر، درایه‌های زیر این ۱ پیشرو را تبدیل به صفر می‌کنیم.

۵) چهار مرحله قبلی را روی ماتریسی که شامل سطرهای باقیمانده است تکرار می‌کنیم.

این روند زمانی متوقف می‌شود که دیگر سطری باقی نمانده باشد یا سطرهای باقی‌مانده فقط شامل صفر باشند. چنانچه بخواهیم ماتریس تبدیل به یک ماتریس سطری_پلکانی تحویل یافته گردد، در مرحله (۴) مضربی از سطر شامل ۱ پیشرو را به سطرهای بالایی نیز اضافه می‌کنیم تا درایه‌های بالای ۱ پیشرو نیز صفر شوند.

توجه داشته‌باشید که این روند یک روند بازگشتی است، یعنی پس از اتمام روند برای سطر اول به ابتدا بازگشته و همان روند را برای سطرهای باقی‌مانده تکرار می‌کنیم.

بنابراین، این روند به سادگی می‌تواند برای کامپیوتر برنامه‌نویسی شود. با توجه به روش حذفی گوس قضیه زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۱-۲-۱۶ . هر ماتریس را می‌توان با انجام دنباله‌ای از اعمال سطری-مقدماتی به فرم سطری-پلکانی تحویل یافته تبدیل کرد.

زمانی که ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات خطی به فرم سطری-پلکانی (تحویل یافته) تبدیل شود، متغیر متناظر با ستونی که حاوی ۱ پیشرو است، «متغیر پیشرو» نامیده می‌شود.

مثال ۱-۲-۱۷ . فرم سطری-پلکانی و سطری-پلکانی تحویل یافته ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۱ & ۹ \\ ۰ & -۲ & -۶ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۶ & -۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۹ & ۲ & ۲ & ۱۹ \end{bmatrix}.$$

حل. اولین ستون غیر صفر ماتریس، ستون دوم است و یکی از درایه‌های غیر صفر این ستون در سطر دوم قرار دارد. بنابراین نخست سطر دوم و اول را جابه‌جا می‌کنیم و سپس بقیه مراحل را مطابق روش حذفی گوس دنبال می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۱ & ۹ \\ ۰ & -۲ & -۶ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۶ & -۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۹ & ۲ & ۲ & ۱۹ \end{bmatrix}$$

سطر اول و دوم را جابه‌جا می‌کنیم،

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۶ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۱ & ۹ \\ ۰ & ۲ & ۶ & -۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۹ & ۲ & ۲ & ۱۹ \end{bmatrix},$$

سطر اول را در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم،

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۱ & ۹ \\ ۰ & ۲ & ۶ & -۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۹ & ۲ & ۲ & ۱۹ \end{bmatrix},$$

-۲ برابر سطر اول را به سطر سوم و -۳ برابر سطر اول را به سطر چهارم اضافه می‌کنیم،

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۱ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۵ & ۲ & ۲۲ \end{bmatrix},$$

تا اینجا عملیات روی سطر اول به پایان می‌رسد. حال همان روند را روی سطرهای باقی‌مانده انجام می‌دهیم. اولین ستون غیر صفر، ستون چهارم است که یک درایه غیر صفر در همان سطر دوم قرار دارد، لذا سطر دوم را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم نتیجه می‌شود،

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۹}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۵ & ۲ & ۲۲ \end{bmatrix}.$$

اگر ۵− برابر سطر دوم را به سطر چهارم اضافه کنیم نتیجه می‌شود،

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

بدین ترتیب عملیات روی سطر دوم نیز کامل می‌شود. روند حذفی را روی دو سطر باقی‌مانده ادامه می‌دهیم. برای این کار سطر سوم را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرده و سپس $\frac{1}{2}$ برابر آن را به سطر چهارم اضافه می‌کنیم و نهایتاً ماتریس زیر حاصل می‌شود،

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

بدین ترتیب عملیات روی سطر سوم نیز کامل می‌شود. چون سطر چهارم فقط دارای درایه‌های صفر است، بنابراین روند در اینجا متوقف می‌شود و ماتریس حاصل فرم سطری - پلکانی دارد.

اگر می‌خواستیم ماتریس به فرم سطری‌ـپلکانی تحویل یافته درآید، در همان مرحله که درایه‌های زیر ۱ پیشرو را تبدیل به صفر کردیم، درایه‌های بالای آن را نیز باید تبدیل به صفر می‌کردیم. در آن صورت ماتریس سطری‌ـپلکانی تحویل یافته به صورت زیر به دست می‌آمد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

برای حل دستگاه معادلات خطی بهتر است که ماتریس افزوده متناظر به فرم سطری‌ـپلکانی تحویل یافته تبدیل شود.

مثال ۱-۲-۱۸ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_۱ - ۳x_۲ + x_۳ - x_۴ = -۱ \\ -x_۱ + ۳x_۲ + ۳x_۴ + x_۵ = ۳ \\ ۲x_۱ - ۶x_۲ + ۲x_۳ - ۲x_۴ + x_۵ = -۳ \\ -x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ + x_۴ = ۱ \end{cases}$$

حل. ماتریس افزوده دستگاه را نوشته و آن را به فرم سطری-پلکانی تحویل یافته در می‌آوریم.

$$[A:B] = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۱ & -۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۰ & ۳ & ۱ & ۳ \\ ۲ & -۶ & ۲ & -۲ & ۱ & -۳ \\ -۱ & ۳ & -۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

اگر سطر اول به سطر دوم و ۲− برابر سطر اول به سطر سوم و سطر اول به سطر چهارم اضافه شود داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۱ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

حال قرینه سطر دوم را به سطر اول اضافه می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۰ & -۳ & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

نهایتاً اگر قرینه سطر سوم را به سطر دوم و سطر سوم را به سطر اول اضافه کنیم ماتریس زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۰ & -۳ & ۰ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

در اینجا عملیات حذفی کامل می‌شود و دستگاه متناظر به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} x_۱ - ۳x_۲ - ۳x_۴ = -۴ \\ x_۳ + ۲x_۴ = ۳ \\ x_۵ = -۱ \end{cases}$$

که متغیرهای غیر پیشرو $x_۲$ و $x_۴$ هستند. اگر قرار دهیم $x_۲ = s$ و $x_۴ = t$ جواب دستگاه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_۱ = -۴ + ۳s + ۳t \\ x_۲ = s \\ x_۳ = ۳ - ۲t \\ x_۴ = t \\ x_۵ = -۱ \end{cases}$$

مثال ۱-۲-۱۹ . در مورد جواب‌های دستگاه زیر بحث کنید.

$$\begin{cases} x + ۱۰z = ۵ \\ ۳x + y - ۴z = -۱ \\ ۴x + y + ۶z = ۱ \end{cases}$$

حل. ماتریس افزوده دستگاه را نوشته و با استفاده از روش حذفی گوس آن را به فرم سطری-پلکانی در می‌آوریم.

$$[A:B]=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱۰ & ۵ \\ ۳ & ۱ & -۴ & -۱ \\ ۴ & ۱ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}.$$

اگر ۳− برابر سطر اول به سطر دوم و ۴− برابر سطر اول به سطر سوم اضافه شود داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱۰ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۳۴ & -۱۶ \\ ۰ & ۱ & -۳۴ & -۱۹ \end{bmatrix},$$

نهایتاً قرینه سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱۰ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۳۴ & -۱۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix},$$

پس از این نیازی به ادامه عملیات نمی‌باشد و دستگاه متناظر با این ماتریس به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} x+۱۰z=۵ \\ y-۳۴z=-۱۶ \\ ۰=-۳ \end{cases}$$

سومین معادله این دستگاه نتیجه می‌دهد که این دستگاه هیچ جوابی ندارد یا به عبارتی دستگاه سازگار نیست.

مثال ۱-۲-۲۰ . در دستگاه زیر a و b و c را طوری پیدا کنید که دستگاه سازگار باشد.

$$\begin{cases} x+۳y+z=a \\ -x-۲y+z=b \\ ۳x+۷y-z=c \end{cases}$$

حل. ماتریس افزوده دستگاه را نوشته و با انجام عملیات حذفی آن را به فرم سطری-پلکانی در می‌آوریم.

$$[A:B]=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & a \\ -۱ & -۲ & ۱ & b \\ ۳ & ۷ & -۱ & c \end{bmatrix}.$$

اگر سطر اول به سطر دوم و -۳ برابر سطر اول به سطر سوم اضافه شود، داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & a \\ ۰ & ۱ & ۲ & b+a \\ ۰ & -۲ & -۴ & c-۳a \end{bmatrix},$$

حال -۳ برابر سطر دوم به سطر اول و ۲ برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۵ & -۲a-۳b \\ ۰ & ۱ & ۲ & b+a \\ ۰ & ۰ & ۰ & c-a+۲b \end{bmatrix},$$

پس از این نیازی به ادامه عملیات نمی‌باشد و دستگاه متناظر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} x-۵z=-۲a-۳b \\ y+۲z=b+a \\ ۰=c-a+۲b \end{cases}$$

از معادله سوم نتیجه می‌شود وجود جواب دستگاه به ثابت $c-a+۲b$ بستگی دارد. اگر $c-a+۲b\neq ۰$ آنگاه دستگاه هیچ جوابی ندارد. بنابراین شرط سازگار بودن دستگاه این است که $c-a+۲b=۰$ یا به عبارتی $c=a-۲b$ باشد که در این صورت با قراردادن $z=t$ جواب‌های دستگاه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x=۵t-(۲a+۳b) \\ y=-۲t+(a+b) \\ z=t \end{cases}$$

تا اینجا بیشتر بحث ما پیرامون اعمال سطری مقدماتی و فرم سطری - پلکانی تحویل یافته ماتریس‌ها بود و در مورد ستون‌های ماتریس و عملیات روی آنها صحبتی نکردیم. زیرا از دید دستگاه معادلات خطی طبیعی بود که بیشتر روی سطرهای ماتریس و اعمال روی آنها صحبت شود، ولی به هر حال به طور مشابه اعمال ستونی‌ـمقدماتی و فرم ستونی‌ـپلکانی تحویل یافته یک ماتریس نیز تعریف می‌شوند و با روندی مشابه روند حذفی گوس می‌توان هر ماتریس را به فرم ماتریس ستونی‌ـپلکانی تحویل یافته تبدیل کرد.

تمرین ۲.۱

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) هر دستگاه معادلات خطی حداقل یک جواب دارد.

(ب) هر دستگاه معادلات خطی حداکثر یک جواب دارد.

(پ) هر دستگاه معادلات خطی با n معادله و n متغیر حداکثر یک جواب دارد.

(ت) اگر ماتریس افزوده $[A : B]$ به فرم سطری‌ـپلکانی تحویل یافته باشد، آنگاه دستگاه $AX = B$ باید یک جواب داشته باشد.

(ث) اگر R یک ماتریس سطری‌ـپلکانی تحویل یافته مربع باشد آنگاه $R = I$

(ج) اگر R یک ماتریس سطری‌ـپلکانی تحویل یافته مربع باشد، که دارای هیچ سطر صفر نباشد، آنگاه $R = I$ است.

۲) دستگاه معادلات خطی زیر را با استفاده از روش حذفی گوس حل کنید.

(آ)
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = -۱ \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = ۱ \\ ۳x_۱ + ۵x_۲ - ۲x_۳ = -۱ \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 = 17 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \\ 2x_1 - 7x_3 + 11x_4 = 7 \end{cases}$$

(پ)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 10x_4 = -5 \end{cases}$$

(ت)
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

(ث)
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 4x_5 = -5 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

(ج)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - 4x_5 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -8 \end{cases}$$

۳) با توجه به مقدار a در مورد جواب دستگاه زیر بحث کنید.

$$\begin{cases} x + ۲y - ۳z = ۴ \\ ۳x - y + ۵z = ۲ \\ ۴x + y + (a^۲ - ۱۴)z = a + ۲ \end{cases}$$

۴) ماتریس زیر را بدون به وجود آمدن درایه کسری به ماتریس سطری-پلکانی تحویل یافته تبدیل کنید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۲ & ۷ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

۵) تمام حالات ممکن فرم سطری-پلکانی تحویل یافته ماتریس زیر را مشخص کنید.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

۶) مقدار k را طوری بیابید که دستگاه‌های زیر سازگار باشند و جواب دستگاه را پیدا کنید.

(آ)
$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ = ۳ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = k \\ ۵x_۱ + ۴x_۲ + ۶x_۳ = ۱۵ \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} ۲x_۱ + (۴ - k)x_۲ + ۷ = ۰ \\ (۲ - k)x_۱ + ۲x_۲ + ۳ = ۰ \\ ۲x_۱ + ۵x_۲ + ۶ - k = ۰ \end{cases}$$

(پ)
$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۳x_۲ + ۶x_۳ - ۵x_۴ = ۳ \\ x_۲ - ۴x_۳ + x_۴ = ۱ \\ ۴x_۱ - ۵x_۲ + ۸x_۳ - ۹x_۴ = k \end{cases}$$

۷) به ازای چه مقداری از $Y = \begin{bmatrix} y_۱ & y_۲ & y_۳ & y_۴ \end{bmatrix}^t$ دستگاه معادلات $AX = Y$ سازگار

است:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۸) فرض کنید R و R' ماتریس‌های ۳ × ۲ به فرم سطری - پلکانی تحویل یافته باشند به طوری که دستگاه‌های $RX=۰$ و $R'X=۰$ دارای جواب‌های یکسان باشند، نشان دهید $R=R'$ است.

۹) فرض کنید فرم سطری‌ـپلکانی تحویل یافته A به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & -۵ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

اگر ستون‌های اول، دوم و چهارم A به شرح زیر باشند، ماتریس A را پیدا کنید.

$$A_۱=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, \quad A_۲=\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad A_۴=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

۱۰) فرض کنید:

$$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

به ازای چه ماتریس‌های $X_{n\times ۱}$، اسکالر c وجود دارد به طوری که $AX=cX$ باشد.

۱۱) به طور مشابه سطرها، اعمال ستونی مقدماتی و ماتریس‌های ستونی - پلکانی تحویل یافته را تعریف کرده و نشان دهید هر ماتریس را می‌توان به فرم ستونی - پلکانی تحویل یافته تبدیل کرد.

۱-۳ معادلات همگن

دراین بخش به معرفی دستگاه معادلات خطی همگن و بررسی شرایطی که منجر به وجود جواب غیربدیهی برای این دستگاه‌ها می‌شود، می‌پردازیم.

یک دستگاه معادلات خطی را همگن گویند، هرگاه تمام ثابت‌های سمت راست معادله صفر باشند. یا به عبارتی دستگاه به صورت:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

یا به فرم ماتریسی $AX = 0$ باشد. از آنجا که $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ همیشه یک جواب دستگاه همگن خواهد بود از این رو این دستگاه همواره سازگار است. این جواب، جواب بدیهی دستگاه نامیده می‌شود. اگر این دستگاه جواب‌های دیگری به جز صفر داشته باشد آنها را جواب غیربدیهی نامند.

مثال ۱-۳-۱ . نشان دهید دستگاه همگن زیر دارای جواب غیربدیهی است.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

حل. ماتریس افزوده دستگاه را نوشته و به فرم سطری-پلکانی تحویل یافته در می‌آوریم.

$$[A : B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

متغیرهای پیشرو $x_۱$، $x_۲$ و $x_۴$ هستند. بنابراین $x_۳$ را به عنوان پارامتر در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $x_۳ = t$ در نتیجه جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x_۱ = -t \\ x_۲ = t \\ x_۳ = t \\ x_۴ = ۰ \end{cases}$$

حال به ازای هر مقدار مخالف صفر t یک جواب غیربدیهی برای دستگاه به دست می‌آید.

وجود یک جواب غیر بدیهی در مثال قبل از آنجا مشخص گردید که در جواب‌های دستگاه یک پارامتر t ظاهر شد. این پارامتر به دلیل اینکه یک متغیر غیر پیشرو در دستگاه وجود داشت ظاهر گردید. وجود این متغیر غیر پیشرو به دلیل این بود که چهار متغیر و سه معادله داشتیم، یعنی تعداد معادلات کمتر از تعداد متغیرها بود. این مطلب را می‌توان به حالت کلی نیز تعمیم داد.

قضیه ۱-۳-۲ . اگر در یک دستگاه معادلات خطی همگن تعداد متغیرها بیش از تعداد معادلات باشد، آن دستگاه دارای جواب غیر بدیهی است و در حقیقت بینهایت جواب دارد.

برهان. فرض کنید دستگاه دارای m معادله و n متغیر باشد که $m < n$ و R فرم سطری-پلکانی تحویل یافته ماتریس افزوده این دستگاه باشد. همچنین فرض کنید r تعداد متغیرهای پیشرو باشد، چون r از تعداد معادلات دستگاه بزرگتر نمی‌تواند باشد بنابراین $r \leq m$ است و در نتیجه $r < n$. بنابراین $n - r$ متغیر غیر پیشرو داریم و در نتیجه $n - r$ پارامتر در جواب‌ها ظاهر خواهد شد. بنابراین دستگاه بینهایت جواب خواهد داشت. ■

مثال ۱-۳-۳ . نمودار معادله $ax^۲ + bxy + +cy^۲ + dx + ey + f = ۰$ که در آن a و b و c

همگی صفر نیستند، یک مقطع مخروطی نامیده می‌شود. نشان دهید برای هر پنج نقطه در صفحه که روی یک خط نباشند یک مقطع مخروطی وجود دارد که از این نقاط می‌گذرد.

حل. فرض کنید مختصات این نقاط (p_i, q_i) برای $1 \leq i \leq 5$ باشند. نمودار فوق از نقطه (p_i, q_i) می‌گذرد هرگاه:

$$ap_i^2 + bp_iq_i + cq_i^2 + dp_i + eq_i + f = 0$$

در نتیجه یک دستگاه همگن شامل پنج معادله و شش متغیر a، b، c، d، e و f خواهیم داشت و بنا به قضیه قبل این دستگاه دارای جواب غیر بدیهی است. از طرفی a، b و c همگی صفر نیستند، زیرا در غیر این صورت اگر $a = b = c = 0$ باشد، آنگاه هر پنج نقطه روی خط $dx + ey + f = 0$ قرار می‌گیرند که خلاف فرض است. پس حداقل یکی از a، b و c مخالف صفر است و این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۱-۳-۴ . اگر X_1 و X_2 جواب‌های دستگاه معادلات خطی همگن $AX = 0$ باشند و $c \in \mathbb{F}$ ، آنگاه $cX_1 + X_2$ نیز یک جواب این دستگاه خواهد بود.

برهان. می‌دانیم:

$$A(cX_1 + X_2) = cAX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0.$$

در نتیجه $cX_1 + X_2$ نیز یک جواب این دستگاه همگن خواهد بود. ■

نتیجه ۱-۳-۵ . هر دستگاه معادلات خطی همگن یا فقط جواب بدیهی دارد یا بینهایت جواب دارد.

اگر $AX = B$ یک دستگاه معادلات خطی باشد، آنگاه دستگاه همگن $AX = 0$ را دستگاه همگن متناظر با $AX = B$ نامند. هرگاه X_1 یک جواب دستگاه معادلات خطی $AX = B$ باشد و X_0 یک جواب دستگاه همگن متناظر $AX = 0$ باشد، آنگاه:

$$A(X_1 + X_0) = AX_1 + AX_0 = B + 0 = B.$$

عکس این مطلب نیز درست است که آن را به صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۳-۶ . فرض کنید X_1 یک جواب خاص دستگاه معادلات خطی $AX = B$ باشد، آنگاه هر جواب X_2 از دستگاه $AX = B$ به فرم $X_2 = X_0 + X_1$ است که X_0 یک جواب دستگاه همگن متناظر می‌باشد.

برهان. فرض کنید X_2 یک جواب دلخواه دستگاه $AX = B$ باشد، در نتیجه $AX_2 = B$. قرارمی‌دهیم $X_0 = X_2 - X_1$. آنگاه :

$$AX_0 = A(X_2 - X_1) = AX_2 - AX_1 = B - B = 0.$$

یعنی X_0 یک جواب دستگاه همگن متناظر است. از طرف دیگر از اینکه $X_0 = X_2 - X_1$، نتیجه می‌شود:

$$X_2 = X_0 + X_1 \quad .$$

■

نتیجه ۱-۳-۷ . دستگاه معادلات خطی $AX = B$، یا اصلاً جواب ندارد، یا دقیقاً یک جواب دارد، یا بینهایت جواب دارد.

برهان. فرض‌کنید دستگاه $AX = B$ دارای یک جواب X_1 باشد، آنگاه بنا به قضیه قبل جواب‌های دیگر این دستگاه به صورت $X_0 + X_1$ هستند و X_0 جواب دستگاه همگن متناظر است. اگر دستگاه همگن متناظر فقط جواب بدیهی داشته باشد آنگاه تمام جواب‌های دیگر دستگاه ناهمگن با X_1 برابرند و این دستگاه دقیقاً یک جواب X_1 خواهد داشت و اگر دستگاه همگن یک جواب غیر بدیهی داشته باشد، بنا به نتیجه قبل دارای بینهایت جواب است و در نتیجه دستگاه $AX = B$ نیز دارای بینهایت جواب خواهد بود. ■

قضیه زیر شرط لازم و کافی را برای اینکه یک دستگاه معادلات خطی با n معادله، n متغیر جواب داشته باشد، بیان می‌کند.

قضیه ۱-۳-۸ . اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

۱) A معکوس‌پذیر است.

۲) دستگاه $AX = B$ به ازای هر ماتریس $B_{n\times 1}$ سازگار است.

برهان. (ب) $\Longrightarrow$ (آ)، اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد آنگاه، از آنجا که $A(A^{-1}B) = B$ بنابراین $X = A^{-1}B$ یک جواب دستگاه خواهد بود و دستگاه سازگار است.
(آ) $\Longrightarrow$ (ب)، فرض کنید دستگاه $AX = B$ به ازای هر ماتریس $n \times 1$، سازگار باشد، آنگاه دستگاه‌های $AX = e_j$ برای $1 \leq j \leq n$، که e_j ستون j ام ماتریس همانی است سازگار هستند. فرض کنید X_j جواب دستگاه $AX = e_j$ باشد، ماتریس C را که X_j ها ستون آن باشند در نظر می‌گیریم:

$$C = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$AC = \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \dots & AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} = I$$

در نتیجه $C = A^{-1}$. ■

تمرین ۳.۱

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) هر دستگاه معادلات خطی همگن حداقل یک جواب دارد.

(ب) هر دستگاه معادلات خطی همگن با n معادله و n متغیر حداکثر یک جواب دارد.

(پ) هر دستگاه معادلات خطی با m معادله و n متغیر که $m > n$، فقط یک جواب دارد.

(ت) اگر دستگاه معادلات خطی همگن متناظر با یک دستگاه معادلات خطی دارای یک جواب باشد آنگاه آن دستگاه دارای یک جواب است.

(ث) اگر یک دستگاه جواب غیر بدیهی داشته باشد همگن نیست.

(ج) اگر یک دستگاه جواب بدیهی داشته باشد همگن است.

(چ) اگر دستگاه همگن دارای یک جواب باشد، دارای بینهایت جواب است.

(ح) اگر یک دستگاه همگن دارای جواب غیر بدیهی باشد آنگاه فرم سطری - پلکانی ماتریس افزوده آن دارای یک سطر صفر است.

(خ) اگر ماتریس افزوده یک دستگاه همگن دارای یک سطر صفر باشد آن دستگاه دارای جواب غیر بدیهی است.

۲) در هرکدام از موارد زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که دستگاه داده شده دارای جواب غیر بدیهی باشد و جواب‌های آن را به دست آورید.

(آ)
$$\begin{cases} x - ۲y + z = ۰ \\ x + ay - ۳z = ۰ \\ -x + ۶y - ۵z = ۰ \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} x + y - z = ۰ \\ ay - z = ۰ \\ x + y + az = ۰ \end{cases}$$

(پ)
$$\begin{cases} ax + y + z = ۰ \\ x + y - z = ۰ \\ x + y + az = ۰ \end{cases}$$

(ت)
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۰ \\ ۲x_۱ + (۳ + a)x_۲ - ۳x_۳ = ۰ \\ (a - ۱)x_۱ + ۴x_۲ - ۳x_۳ = ۰ \end{cases}$$

۳) دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

(آ)
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۰ \\ ۳x_۱ + ۶x_۲ + ۱۰x_۳ = ۰ \\ ۲x_۱ + ۵x_۲ + ۷x_۳ = ۰ \\ x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ = ۰ \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ + x_۴ = ۰ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۸x_۳ + ۲x_۴ = ۰ \\ ۳x_۱ + ۶x_۲ + ۲x_۳ = ۰ \end{cases}$$

۴) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و R فرم سطری‌ـپلکانی تحویل یافته A باشد. ثابت کنید دستگاه $AX = ۰$ دارای جواب غیربدیهی است اگر و فقط اگر تعداد سطرهای غیر صفر R کمتر از n باشد.

۱-۴ ماتریس‌های مقدماتی

در این بخش با استفاده از مفهوم ماتریس‌های مقدماتی بعضی از قضایا در مورد ماتریس‌ها و دستگاه معادلات خطی را اثبات می‌کنیم.

تعریف ۱-۴-۱ . ماتریس $A_{n\times n}$ را ماتریس مقدماتی گوییم هرگاه از انجام یک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس همانی $n\times n$ به دست آمده باشد.

مثال ۱-۴-۲ . ماتریس‌های زیر ماتریس‌های مقدماتی هستند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳ برابر سطر سوم $I_۳$ به سطر اول آن اضافه شده است

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

سطر دوم و چهارم $I_۴$ جابجا شده است

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

سطر دوم $I_۲$ در ۳− ضرب شده است

اگر ماتریس A از سمت چپ در یک ماتریس مقدماتی E ضرب شود حاصل آن همان ماتریسی می‌شود که از انجام عمل سطری مقدماتی متناظر روی A به دست می‌آید. این مطلب را در قضیه بعد که اثبات آن به عنوان تمرین به خواننده واگذار شده است، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۴-۳ . اگر یک ماتریس مقدماتی E از انجام یک عمل سطری مشخص روی I_m به دست آمده باشد و A یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه حاصلضرب EA همان ماتریسی است که از انجام آن عمل سطری روی A به دست می‌آید.

مثال ۱-۴-۴ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۳ & ۶ \\ ۱ & ۴ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس مقدماتی باشد که از افزودن ۳ برابر سطر اول I به سطر سوم آن به دست آمده باشد، آنگاه:

$$EA = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۳ & ۶ \\ ۴ & ۴ & ۱۰ & ۹ \end{bmatrix}$$

دقیقاً ماتریسی است که از افزودن ۳ برابر سطر اول A به سطر سوم آن به دست می‌آید.

هرگاه ماتریس E از انجام یک عمل سطری مقدماتی روی I به دست آمده باشد.آنگاه یک عمل سطری‌ـمقدماتی وجود دارد که با انجام آن روی E ماتریس I به دست می‌آید. به عنوان مثال، اگر E از ضرب سطر iام I در c به دست آمده باشد، آنگاه با ضرب سطر iام E در $\frac{۱}{c}$ مجدداً ماتریس I به دست می‌آید. حالات ممکن به شرح زیر است.

۱) اگر E از ضرب سطر iام I در $c \neq ۰$ به دست آید، آنگاه با ضرب سطر i ام E در $\frac{۱}{c}$، I به دست می‌آید.

۲) اگر E با جابجا کردن سطرهای i وj، I به دست آمده باشد، آنگاه با جابجا کردن سطرهای i و j از E، I به دست می‌آید.

۳) اگر E با افزودن c برابر سطر iام Iبه سطر jام آن به دست آمده باشد، آنگاه با افزودن $-c$ برابر سطر iام E به سطر jام آن، ماتریس I به دست می‌آید.

اعمالی که با انجام آنها روی E، ماتریس I به دست می‌آید، اعمال معکوس نامیده می‌شوند.

قضیه ۱-۴-۵ . هر ماتریس مقدماتی معکوس‌پذیر است و معکوس آن یک ماتریس مقدماتی خواهد بود.

برهان. فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی باشد، لذا E با انجام یک عمل سطری مقدماتی روی I حاصل شده است. حال فرض کنید $E_\circ$ ماتریسی باشد که با انجام عمل معکوس آن عمل، روی I حاصل شده باشد، آنگاه بنا به قضیه قبل داریم:

$$E_\circ E = I \quad \text{و} \quad EE_\circ = I$$

از این رو ماتریس مقدماتی $E_\circ$ معکوس E می‌باشد. ■

اگر ماتریس B را بتوان با انجام تعداد متناهی عمل سطری مقدماتی روی A به دست آورد، آنگاه بنا به قضیه قبل با انجام اعمال معکوس روی B نیز می‌توان به A رسید. با توجه به این مطلب تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱-۴-۶ . ماتریس‌های A و B را هم‌ارز سطری گوییم و می‌نویسیم $A \sim B$، هر گاه با انجام تعداد متناهی اعمال سطری روی یکی از ماتریس‌ها، ماتریس دیگر حاصل شود.

قضیه زیر یک رابطه اساسی بین ماتریس‌های $n \times n$ و دستگاه معادلات خطی با n معادله و n متغیر را بیان می‌کند که در مباحث بعدی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه ۱-۴-۷ . اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه گزاره‌های زیر با هم معادلند.

۱) A معکوس‌پذیر است.

۲) دستگاه $AX = \circ$ فقط جواب بدیهی دارد.

۳) A هم‌ارز سطری با I_n است.

۴) دستگاه $AX = B$ به ازای هر ماتریس $B_{n\times 1}$، سازگار است.

برهان. معادل بودن قسمت (۱) و (۴) در قضیه (۸.۳.۱) ثابت شد. لذا کافی است ثابت کنیم که:

$$(۱) \Longrightarrow (۲) \Longrightarrow (۳) \Longrightarrow (۱)$$

(۲) $\Longleftarrow$ (۱)، فرض کنید X_1 یک جواب دستگاه $AX = \circ$ باشد در نتیجه $AX_1 = \circ$ است. بنابراین $A^{-1}(AX_1) = \circ$ و این نتیجه می‌دهد $X_1 = \circ$.

(۳)$\Longrightarrow$(۲)، فرض کنید $AX = 0$ فرم ماتریسی دستگاه زیر باشد.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

و فرض کنید این دستگاه فقط جواب بدیهی دارد. اگر با روش حذفی گوس، ماتریس افزوده دستگاه را به فرم سطری-پلکانی تحویل یافته درآوریم، آنگاه تمام متغیرهای ما پیشرو خواهند بود، زیرا در غیر این صورت یک متغیر غیر پیشرو خواهیم داشت که نتیجه می‌دهد دستگاه بینهایت جواب دارد، بنابراین دستگاه متناظر به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{matrix} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & \ddots & \\ & & & x_n = 0 \end{matrix}$$

بنابراین ماتریس افزوده دستگاه یعنی:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی به فرم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در خواهد آمد. اگر ستون آخر در این ماتریس‌ها را نادیده بگیریم، نتیجه می‌شود A با انجام اعمال سطری مقدماتی به I_n تبدیل می‌شود، بنابراین $A \sim I_n$ است.

(۱) $\Longleftarrow$ (۳)، فرض کنید A هم‌ارز سطری با I_n باشد. در نتیجه با انجام دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی روی A ماتریس I_n به دست می‌آید. بنا به قضیه (۳.۴.۱) هر کدام از این اعمال سطری مقدماتی را می‌توان با ضرب ماتریس A در یک ماتریس مقدماتی از سمت چپ روی A اعمال کرد. بنابراین می‌توان ماتریس‌های مقدماتی $E_۱$، $E_۲$، ... و E_k را طوری یافت که:

$$E_k \dots E_۲ E_۱ A = I_n.$$

بنا به قضیه (۵.۴.۱)، $E_۱$، $E_۲$، ... و E_k معکوس‌پذیرند. بنابراین اگر طرفین معادله بالا را در معکوس این ماتریس‌ها ضرب کنیم نتیجه می‌شود:

$$A = E_۱^{-۱} E_۲^{-۱} \dots E_k^{-۱} I_n = E_۱^{-۱} E_۲^{-۱} \dots E_k^{-۱} \qquad (۱\text{-}۴)$$

و از آنجا که حاصل ضربی از ماتریس‌های معکوس‌پذیر، معکوس‌پذیر است، A نیز معکوس‌پذیر خواهد بود. ■

با استفاده از اثبات (۱) $\Longleftarrow$ (۳) می‌توان روشی را برای پیدا کردن معکوس ماتریس $A_{n\times n}$، به دست آورد. زیرا اگر طرفین معادله (۱ـ۴) را معکوس کنیم، نتیجه می‌شود:

$$A^{-۱} = E_k \dots E_۲ E_۱ I_n.$$

این عبارت بیان می‌کند که ماتریس معکوس A یعنی $A^{-۱}$ را می‌توان با ضرب ماتریس همانی I_n در ماتریس‌های مقدماتی $E_۱$، $E_۲$، ... و E_k از سمت چپ به‌دست آورد. از آنجاکه ضرب یک ماتریس از سمت چپ در یک ماتریس مقدماتی معادل انجام عمل سطری مقدماتی متناظر روی ماتریس است، نتیجه می‌گیریم که اگر دنباله‌ای از همان اعمال سطری مقدماتی که A را به I_n تبدیل می‌کند روی I_n انجام دهیم، ماتریس $A^{-۱}$ به دست خواهد آمد. روش عملی چنین است که ماتریس I_n را درکنار ماتریس A می‌نویسیم و همزمان هر عمل سطری مقدماتی که روی A انجام می‌دهیم، همان عمل را روی I_n نیز انجام می‌دهیم. زمانی که A به I_n تبدیل شود، I_n به $A^{-۱}$ تبدیل خواهد شد.

مثال ۱-۴-۸ . معکوس ماتریس A را به‌دست آورید هرگاه،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}.$$

حل.

$$[A : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۳ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۸ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

اگر ۲− برابر سطر اول به سطر دوم و منفی سطر اول به سطر سوم اضافه گردد، داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۵ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right],$$

۲− برابر سطر دوم را به سطر اول و ۲ برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم نتیجه می‌شود:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۹ & ۵ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۵ & ۲ & ۱ \end{array}\right],$$

حال سطر سوم را در ۱− ضرب می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۹ & ۵ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۵ & -۲ & -۱ \end{array}\right].$$

و نهایتاً اگر ۳ برابر سطر سوم را به سطر دوم و ۹− برابر سطر سوم را به سطر اول اضافه کنیم به‌دست می‌آید:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -۴۰ & ۱۶ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱۳ & -۵ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۵ & -۲ & -۱ \end{array}\right] = [I : A^{-۱}].$$

درنتیجه:

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۴۰ & ۱۶ & ۹ \\ ۱۳ & -۵ & -۳ \\ ۵ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}.$$

در صورتی که از معکوس‌پذیری ماتریس داده شده نیز اطلاعی نداشته باشیم، با توجه به معادل بودن قسمت‌های (۱) و (۳) در قضیه قبل، در این روش می‌توان از معکوس‌پذیری آن ماتریس نیز مطلع شد. بدین صورت که اگر با انجام تعداد متناهی اعمال سطری مقدماتی ماتریس I_n حاصل نشود یا به عبارت دیگر یکی از سطرهای ماتریس به صفر تبدیل شود، نتیجه می‌گیریم که ماتریس A معکوس‌پذیر نیست.

مثال ۱-۴-۹ . معکوس ماتریس A را در صورت وجود به دست آورید هرگاه:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۴ \\ ۲ & ۴ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}.$$

حل.

$$[A:I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۶ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۴ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۶ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۸ & -۹ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۸ & ۹ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۶ & ۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۸ & ۹ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

چون در سمت چپ یک سطر صفر ظاهر شد، بنابراین ماتریس A معکوس‌پذیر نیست.

تمرین ۴.۱

۱) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(آ) هر ماتریس مقدماتی یک ماتریس مربع است.

(ب) تنها درایه‌های ماتریس‌های مقدماتی صفر و یک هستند.

(پ) ماتریس همانی یک ماتریس مقدماتی است.

(ت) ماتریس صفر یک ماتریس مقدماتی است.

(ث) حاصلضرب دو ماتریس مقدماتی یک ماتریس مقدماتی است.

(ج) جمع دو ماتریس مقدماتی، یک ماتریس مقدماتی است.

(چ) ترانهاده یک ماتریس مقدماتی، یک ماتریس مقدماتی است.

(ح) اگر B ماتریس حاصل از انجام یک عمل سطری مقدماتی روی A باشد، آنگاه B را با انجام یک عمل ستونی مقدماتی روی A نیز می‌توان به دست آورد.

(خ) اگر B با انجام یک عمل سطری مقدماتی روی A به دست آید آنگاه B^t با انجام یک عمل ستونی مقدماتی روی A^t به دست می‌آید.

(د) اگر E یک ماتریس سطری مقدماتی باشد آنگاه A و EA حداکثر در دو سطر اختلاف دارند.

(ذ) اگر E یک ماتریس مقدماتی باشد، آنگاه $E^t = E$ خواهد بود.

(ر) اگر A یک ماتریس بالا مثلثی معکوس‌پذیر باشد، آنگاه A^{-1} نیز بالا مثلثی است.

۲) در هر مورد ماتریس معکوس‌پذیر U را طوری پیدا کنید که $UA = R$ به فرم سطری پلکانی تحویل یافته باشد.

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 15 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

۳) با پیدا کردن ماتریس ستونی و ناصفر X به طوری که $AX = 0$، نشان دهید A معکوس‌پذیر

نیست، هرگاه:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & -۳ \\ -۲ & ۵ & ۱۷ \end{bmatrix}$$

۴) نشان دهید ماتریس مربع A معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر $AB=AC$ نتیجه دهد $B=C$ است.

۵) با استفاده از اعمال سطری مقدماتی مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر معکوس‌پذیر است و در صورت معکوس‌پذیر بودن، معکوس آن را پیدا کنید.

(آ) $\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۴ & -۱ & ۲ \\ ۶ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

۶) نشان دهید هر ماتریس بالا مثلثی معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر درایه‌های قطر اصلی آن ناصفر باشند.

۷) نشان دهید اگر A معکوس‌پذیر نباشد ماتریس ناصفر $B_{n\times n}$ وجود دارد به طوری که $AB=۰$ است.

۸) ثابت کنید اگر A یک ماتریس $m\times n$، B یک ماتریس $n\times m$ باشد به طوری که $n<m$ آنگاه AB معکوس‌پذیر نیست.

۹) فرض کنید A و B ماتریس‌های مربع و هم‌اندازه باشند، نشان دهید AB معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر A و B هر دو معکوس‌پذیر باشند.

۱۰) اگر A یک ماتریس پاد متقارن باشد نشان دهید $I+A$ معکوس‌پذیر است.

۱-۵ حاصلضرب کرونکر و کاربردی از آن

تعریف حاصلضرب ماتریس‌ها را که از قبل با آن آشنا بودید و در بخش ۲ نیز آن را یادآوری کردیم، طبیعی‌ترین تعریف ضرب است که کلیه خواص مورد انتظار را در اغلب کاربردها دارد. به هر حال در بعضی از حالات بسیار خاص تعریف‌های دیگری نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد، که در این بخش نمونه‌ای از آنها را که به «حاصلضرب کرونکر دو ماتریس» معروف است معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱-۵-۱ . فرض کنید $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشد. حاصلضرب کرونکر A و B به صورت $A \otimes B$ نمایش داده شده و به فرم بلوکی زیر تعریف است.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & a_{۱۲}B & \dots & a_{۱n}B \\ a_{۲۱}B & a_{۲۲}B & \dots & a_{۲n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱}B & a_{m۲}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

هر کدام از بلوک‌های این ماتریس، یک ماتریس $p \times q$ است و در نتیجه $A \otimes B$ یک ماتریس $mp \times nq$ است.

مثال ۱-۵-۲ . فرض کنید A و B ماتریس‌هایی به صورت زیر باشند،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}.$$

در نتیجه:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} B & ۲B \\ ۳B & ۴B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -۱ & ۴ & -۲ & ۸ \\ ۲ & -۳ & ۴ & -۶ \\ \hline -۳ & ۱۲ & -۴ & ۱۶ \\ ۶ & -۹ & ۸ & -۱۲ \end{array}\right],$$

و

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} -A & ۲A \\ ۲A & -۳A \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -۱ & -۲ & ۴ & ۸ \\ -۳ & -۴ & ۱۲ & ۱۶ \\ \hline ۲ & ۴ & -۳ & -۶ \\ ۶ & ۸ & -۹ & -۱۲ \end{array}\right].$$

توجه داشته باشید که $A \otimes B \neq B \otimes A$ ولی اگر سطرهای دوم و سوم و سپس ستون‌های دوم و سوم ماتریس $B \otimes A$ را با هم عوض کنیم ماتریس $A \otimes B$ به دست می‌آید. در حالت کلی نیز می‌توان نشان داد که درایه‌های $B \otimes A$ تجدید آرایشی از درایه‌های $A \otimes B$ هستند و با جابجایی بعضی از سطرها و ستون‌های $B \otimes A$ ماتریس $A \otimes B$ به‌دست می‌آید. لذا به نوعی می‌توان این حاصلضرب را دارای خاصیت جابجایی دانست. مثلاً برای ترانهاده حاصلضرب دو ماتریس داریم:

$$(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$$

و ترتیب حاصلضرب پس از ترانهاده گرفتن عوض نمی‌شود.

به هر حال این حاصلضرب کرونکر علی‌رغم بعضی ازکاربردهای آن در آمار، آنالیز عددی و مخابرات در ریاضیات زیاد مورد توجه نیست. در ادامه کاربردی از حاصلضرب کرونکر در حل معادلات خطی شامل ماتریس‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم. اما نخست یک تعریف را می‌آوریم.

تعریف ۱-۵-۳ . اگر $X = [x_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه ماتریس ستونی $V(X)$ با mn سطر به صورت،

$$V(X) = \begin{bmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} & \dots & x_{۱m} & x_{۲۱} & \dots & x_{۲m} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}^t$$

تعریف می‌شود که از نوشتن درایه‌های سطرهای X به صورت یک دنباله به دست می‌آید.

$V(.)$ را می‌توان به عنوان یک نگاشت که هر ماتریس را به یک بردار ستونی تبدیل می‌کند در نظر گرفت.

معادله ماتریسی،

$$AX = C \qquad (۵-۱)$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$، C یک ماتریس $n \times m$ و متغیر X یک ماتریس $n \times m$ است را در نظر بگیرید. اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد به سادگی جواب منحصر به فرد این معادله به صورت $X = A^{-1}C$ به دست می‌آید. ولی اگر بتوانیم این معادله را به صورت دستگاه معادلات خطی معمولی که در فصل اول مورد بحث قرارگرفت تبدیل کنیم بحث پیرامون جواب‌های آن بسیار راحت خواهد بود. برای مثال اگر $n = m = 2$ باشد آنگاه معادله (۱ـ۵) به صورت،

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \tag{۶-۱}$$

است که به سادگی می‌توان نشان داد با دستگاه معادلات خطی زیر هم‌ارز است.

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \tag{۷-۱}$$

ماتریس 4×4 در معادله (۱ـ۷) همان $A \otimes I_2$ است. بنابراین معادله (۱ـ۷) را می‌توان به صورت

$$(A \otimes I_2)V(X) = V(C)$$

نوشت. به سادگی می‌توان ثابت کرد که در حالت کلی نیز معادله (۱ـ۵) را می‌توان به صورت

$$(A \otimes I_m)V(X) = V(C) \tag{۸-۱}$$

نوشت. به این ترتیب معادله (۱ـ۵) به صورت دستگاه معادلات خطی (۱ـ۸) تبدیل می‌شود و می‌توان آن را حل نمود. همچنین به سادگی دیده می‌شود که معادله

$$XB = C,$$

را می‌توان به صورت،

$$(I_n \otimes B^t)V(X) = V(C),$$

نوشت. بنابراین با استفاده از آن نتیجه می‌شود معادله ماتریسی

$$AX + XB = C \qquad (۱-۹)$$

با دستگاه معادلات خطی

$$(A \otimes I_m + I_n \otimes B^t)V(X) = V(C) \qquad (۱-۱۰)$$

که دارای mn معادله است، هم‌ارز است. لذا می‌توان با استفاده از معادله (۱ـ۱۰) در مورد جواب‌های معادله (۱ـ۹) بحث نمود. به عنوان مثال معادله ماتریسی (۱ـ۹) دارای جواب منحصر به فرد است هرگاه ماتریس

$$M = A \otimes I_m + I_n \otimes B^t$$

یک ماتریس نامنفرد باشد. که در این حالت درایه‌های X از معادله $V(X) = M^{-1}V(C)$ به دست می‌آیند.

تمرین ۵.۱

۱) نشان دهید حاصلضرب کرونکر خاصیت شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری نسبت به جمع دارد. یا به عبارتی،

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

۲) فرض کنید A، B، C و D به ترتیب ماتریس‌هایی $m \times n$، $p \times q$، $n \times r$ و $q \times s$ باشند. ثابت کنید:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

۳) اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، توان کرونکر A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$A^{[2]} = A \otimes A, A^{[3]} = A \otimes A \otimes A, \ldots$$

نشان دهید اگر C یک ماتریس $n \times r$ باشد، آنگاه:

$$(AC)^{[2]} = A^{[2]}C^{[2]}$$

سپس این خاصیت را به حالت کلی، $(AC)^{[k]} = A^{[k]}C^{[k]}$ تعمیم دهید هرگاه k یک عدد صحیح و مثبت باشد.

۴) نشان دهید اگر

$$M = A \otimes I_m + I_n \otimes B^t$$

آنگاه:

$$M^۲ = A^۲ \otimes I_m + ۲A \otimes B^t + I_n \otimes (B^t)$$

۵) فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times m$ باشند نشان دهید:

$$V(A^t) = PV(A), \qquad V(B) = QV(B^t)$$

که در آن P و Q ماتریس‌های ثابت $mn \times mn$ می باشند و ازجابجایی سطرهای ماتریس همانی I_{mn} حاصل شده‌اند. سپس ثابت کنید،

$$B \otimes A = P(A \otimes B)Q$$

۶) معادله

$$A^۲X + ۲AXB + XB^۲ = C$$

را که در آن A، B، C و X به ترتیب ماتریس‌هایی $n \times n$، $m \times m$، $n \times m$ و $n \times m$ هستند در نظر بگیرید. نشان دهید این معادله را می‌توان به صورت،

$$M^۲V(X) = V(C)$$

نوشت، که در آن $M = A \otimes I_m + I_n \otimes B^t$ است.

۷) معادله ماتریسی $AX = C$ را حل کنید هرگاه:

(آ) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $C = I_۲$

(ب) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $C = I_۲$

(پ) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

(ت) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۸) معادله ماتریسی $AX + XB = C$ را حل کنید هرگاه:

(آ) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $C = I_۲$

(ب) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

مسائل تکمیلی

۱) ماتریس $n \times n$، A روی میدان اعداد مختلط را ریشه دوم ماتریس B گوییم هرگاه $A^۲ = B$.
ماتریسی مثال بزنید که ریشه دوم نداشته باشد.

۲) فرض کنید بعد از انجام عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس A، ماتریس حاصل دارای r سطر ناصفر است. نشان دهید ماتریس‌های وارون‌پذیر L و R وجود دارند به طوری که:

$$LAR = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳) فرض کنید m عدد طبیعی ثابتی باشد و M ماتریس $n \times n$ با این خاصیت باشد که برای هر ماتریس $m \times n$ مثل A، $AM = A$. ثابت کنید $M = I$.

۴) ثابت کنید عمل تعویض در سطر یک ماتریس را می‌توان با دنباله متناهی از اعمال سطری مقدماتی دو نوع دیگر به‌دست آورد.

۵) فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$[A, B] = AB - BA$$

نشان دهید:

(آ) $[A, B] = [B, A]$.

(ب) اتحاد ژاکوبی:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = ۰$$

(پ) با فرض $A = [X, Y]$ ثابت کنید $\operatorname{tr}(A) = ۰$. آیا عکس آن هم برقرار است یعنی اگر $\operatorname{tr}(A) = ۰$ آیا لزوماً ماتریس‌هایی چون X و Y وجود دارند به قسمی که $A = [X, Y]$.

۶) کلیه ماتریس‌های $A_{۳\times۲}$ و $B_{۲\times۳}$ را بیابید که

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۳ \\ ۳ & ۲ & ۰ \\ -۳ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

۷) اگر A و B و $A+B$ وارون‌پذیر باشند در این صورت نشان دهید:

(آ) $A^{-۱}+B^{-۱}$ وارون‌پذیر است.

(ب) $A(A+B)^{-۱}B=B(A+B)^{-۱}A$

۸) فرض کنید A و B ماتریس‌های $n\times n$ باشند به قسمی که

$$AB=-A-B$$

در این صورت نشان دهید $AB=BA$.

۹) فرض کنید A و B ماتریس‌های پوچ توان هستند و $AB=BA$. ثابت کنید $A+B$ نیز پوچ توان است.

۱۰) فرض کنید A و B ماتریس‌های ۲ × ۴ و ۴ × ۲ روی میدان اعداد حقیقی باشند به طوری که

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در این صورت مطلوبست محاسبه BA.

۱۱) نشان دهید هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت جمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشت. آیا این نمایش یکتاست؟

۱۲) هرگاه A و B هر دو متقارن (یا پادمتقارن) باشند آیا AB نیز متقارن خواهد بود؟ نشان دهید $AB+BA$ متقارن و $AB-BA$ پادمتقارن است.

۱۳) اگر یکی از ماتریس‌های A و B متقارن و دیگری پادمتقارن باشد آیا AB پادمتقارن خواهد بود؟ نشان دهید $AB+BA$ پادمتقارن و $AB-BA$ متقارن است.

۱۴) فرض کنید مجموع درایه‌های هر ستون ماتریس $n\times n$، A برابر c باشد و $A^{۲}=I$. مطلوبست محاسبه مقدار c.

۱۵) فرض کنید A ماتریس $n\times r$ باشد که برای هر ماتریس B با اثر صفر داشته باشیم:

$$\operatorname{tr}(BA)=\circ,$$

نشان دهید به ازای یک λ، $A=\lambda I$.

۱۶) فرض کنید S شامل تمام ماتریس‌های حقیقی $n\times n$ باشد که مجموع هر یک از سطرهای آن برابر ۱ شود.

(آ) ثابت کنید S نسبت به ضرب ماتریس‌ها بسته است.

(ب) آیا S عضو همانی دارد؟

(پ) آیا همه عناصر S معکوس‌پذیرند؟

۱۷) فرض کنید A و B ماتریس‌های $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند به طوری که A و B و $A+B$ خودتوان هستند. ثابت کنید $AB=-BA$ و نتیجه بگیرید:

$$\operatorname{tr}(AB)=\circ.$$

۱۸) فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند به طوری که $AB=-A-B$. ثابت کنید $AB=BA$.

۱۹) فرض کنید A ماتریس $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. ثابت کنید:

$$\operatorname{tr}(AA^t)=\circ \;\Leftrightarrow\; A=\circ.$$

۲۰) فرض کنید $I+A$ ماتریس وارون‌پذیری باشد که در آن A ماتریس $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ و I ماتریس همانی است. نشان دهید $(I+A)^{-۱}$ با $I-A$ جابجا می‌شود.

۲۱) فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید برای هر بردار ستونی چون x، $Ax=0$ اگر و تنها اگر $A^tAx=0$. آیا این حقیقت در مورد ماتریس A با درایه‌های مختلط هم برقرار است؟

۲۲) فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ با درایه‌های نامنفی باشند که مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون برابر ۱ باشد. ثابت کنید جمع درایه‌های هر سطر و هر ستون ماتریس AB نیز ۱ است.

۲۳) فرض کنید R یک حلقه باشد و A ماتریسی $n\times n$ روی حلقه R باشد. همچنین فرض کنید $A-A^2$ پوچ توان باشد. نشان دهید اگر ماتریس A پوچ توان نباشد آنگاه ماتریس ناصفری مثل B وجود دارد به قسمی که

$$B^2=B.$$

۲۴) فرض کنید A ماتریس 2×2 روی میدان اعداد حقیقی باشند به قسمی که $\mathrm{tr}(A)=0$. ثابت کنید $A^2=\lambda I$ و با استفاده از این نشان دهید:

$$C(AB-BA)^2=(AB-BA)^2C$$

که در آن C و B ماتریس‌های 2×2 روی میدان اعداد حقیقی‌اند.

۲۵) نشان دهید برای هر n ماتریس حقیقی $n\times n$ای وجود دارد که برابر توان دوم هیچ ماتریسی نیست. آیا این مسأله برای ماتریس‌های مختلط هم درست است؟ برای یک میدان دلخواه چطور؟

۲۶) اگر A ماتریسی 2×2 باشد که $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^2)=0$ آنگاه A پوچ توان است.

۲۷) فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند و داشته باشیم $BAA^t=0$. ثابت کنید $BA=0$. نتیجه بگیرید اگر A متقارن باشد و k عدد طبیعی دلخواهی باشد که $BA^k=0$ آنگاه $BA=0$.

۲۸) فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ روی میدان اعداد مختلط باشند به طوری که

$$A^2B+BA^2=2ABA,$$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی m،

$$\mathrm{tr}(AB - BA)^m = 0.$$

۲۹) فرض کنید $A \neq 0$ ماتریسی $n \times n$ روی میدان اعداد حقیقی باشد به طوری که

$$a_{ik}a_{jk} = a_{kk}, \qquad (1 \leq i, j, k \leq n).$$

ثابت کنید مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A مخالف صفر است.

۳۰) فرض کنید A ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. همچنین فرض کنید ماتریس A با $AA^t - A^tA$ جابجا می‌شود. ثابت کنید $AA^t = A^tA$.

۳۱) فرض کنید A، B و C ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{R}$ باشند به طوری که

$$AA^t + BB^t + CC^t = 0$$

ماتریس‌های A، B و C را مشخص کنید.

۳۲) فرض کنید A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

نشان دهید سری اخیر همگراست و ثابت کنید

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP.$$

۳۳) فرض کنید A ماتریس مربعی 2×2 معکوس‌پذیر روی میدان $\mathbb{Z}_p$ باشد که p عددی اول است. نشان دهید اگر $q = (p^2 - 1)(p^2 - p)$، آنگاه

$$A^{q+2} = A^2.$$

۳۴) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند و $A + \lambda B$ به ازای $n + 1$ مقدار متمایز λ ماتریس پوچ توان است. نشان دهید A و B نیز باید پوچ توان باشند.

۳۵) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. نشان دهید که با تعداد متناهی عمل سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی می‌توان از A به یک ماتریس R رسید که هم تحویل شده سطری پلکانی و هم تحویل شده ستونی پلکانی باشد. یعنی $R_{ij} = ۰$ هرگاه $i \neq j$ و $R_{ij} = ۰$ به ازای $۱ \leq i \leq r$ و $R_{ii} = ۰$ برای هر $r < i$. نشان دهید $R = PAQ$ که P و Q ماتریس‌های $m \times m$ و $n \times n$ معکوس‌پذیر هستند.

۳۶) (آ) فرض کنید A ماتریس $n \times n$ روی میدان حقیقی باشد به طوری که $n \geq ۲$. همچنین فرض کنید A متقارن و معکوس‌پذیر با درایه‌های مثبت است. نشان دهید تعداد درایه‌های صفر ماتریس $A^{-۱}$ کمتر مساوی $n^۲ - ۲n$ است.

(ب) چه تعداد درایه صفر در معکوس ماتریس $n \times n$ زیر موجود است؟

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۲ & \dots & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & ۲ & \dots & ۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۲ & \dots & \end{bmatrix}$$

۳۷) فرض کنید R و R' دو ماتریس تحویل شده سطری پلکانی ۳×۲ باشند و جواب‌های دستگاه‌های $RX = ۰$ و $R'X = ۰$ یکسان باشند. ثابت کنید $R = R'$.

۳۸) فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

به ازای کدام $Y = (y_۱, y_۲, y_۳, y_۴)^t$ دستگاه $AX = Y$ جواب دارد؟

۳۹) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ روی میدان اعداد حقیقی باشد به طوری که $m \neq n$. نشان دهید حداقل یکی از دو ماتریس AA^t یا A^tA وارون‌پذیر نیست.

۴۰) نشان دهید برای هر ماتریس $n \times n$، A ماتریس $n \times n$، $B \neq 0$ موجود است به طوری که AB خودتوان است.

۴۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی ۲ × ۲ با درایه‌های مختلط باشد. همچنین فرض کنید A تحویل شده سطری باشد و $a + b + c + d = 0$. ثابت کنید دقیقاً سه ماتریس از این نوع وجود دارد.

۴۲) دستگاه $AX = B$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $[A_1|B_1]$ تحویل شده سطری پلکانی ماتریس افزوده باشد. ثابت کنید $AX = B$ ناسازگار است اگر و تنها اگر $[A_1|B_1]$ سطری به صورت $\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ داشته باشد.

۴۳) فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند و داشته باشیم $BA = B$ و $AB = A$. نشان دهید $A^2 = A$، $B^2 = B$ و

$$(A - B)^2 = 0$$

۴۴) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نشان دهید اگر A یک سطر صفر داشته باشد آنگاه AB نیز سطر صفر دارد.

۴۵) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $A^2 + 2A - 2I = 0$. ثابت کنید A معکوس‌پذیر است و وارون آن را به‌دست آورید.

۴۶) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ متقارن روی میدان اعداد حقیقی باشند که $A^2 + B^2 = 0$. نشان دهید $A = B = 0$.

مسائل حل شده

۱) فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند به قسمی که $AB = -A - B$. در این صورت نشان دهید $AB = BA$.

حل. با توجه به فرض داریم $AB+A+B = 0$. دراین صورت $AB+A+B+I-I = 0$. پس

$$(A+I)(B+I) = I \Rightarrow (A+I) = (B+I)^{-1} \Rightarrow (B+I)(A+I) = I$$
$$\Rightarrow BA + A + B + I = I \Rightarrow BA = -A - B$$
$$\Rightarrow BA = AB$$

۲) فرض کنید A و B ماتریس‌های پوچ توان هستند و $AB = BA$. ثابت کنید $A+B$ نیز پوچ توان است.

حل. فرض کنید i و j کوچکترین اعداد صحیح مثبتی باشند که $A^i = 0$ و $B^j = 0$. هرگاه $k = i + j - 1$ در این صورت داریم:

$$(A+B)^k = A^k + \binom{k}{1} A^{k-1} B + \cdots + B^k$$

به راحتی ملاحظه می‌کنیم که تک تک جملات فوق صفر می‌شوند پس $A+B$ پوچ توان است.

۳) فرض کنید A و B ماتریس‌های 2×4 و 4×2 روی میدان اعداد حقیقی باشند به طوری که

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت مطلوبست محاسبه BA.

حل. داریم:

$$A = \begin{bmatrix} (A_1)_{2\times 2} \\ ------ \\ (A_2)_{2\times 2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} (B_1)_{2\times 2} & \vdots & (B_2)_{2\times 2} \end{bmatrix}.$$

در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = I \Rightarrow A_1 = B_1^{-1} \\ A_1B_2 = -I \\ A_2B_1 = -I \\ A_2B_2 = I \Rightarrow toA_2 = B_2^{-1} \end{cases} \\
&\Rightarrow BA = B_1A_1 + B_2A_2 = I + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

۴) فرض کنید مجموع درایه‌های هر ستون ماتریس $n \times n$، A برابر c باشد و $A^2 = I$. مطلوبست محاسبه مقدار c.

حل. چون $A^2 = I$ پس داریم:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow 1 &= \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right) a_{kj}
\end{aligned}
$$

$$= c\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = c^2$$
$$\Rightarrow c = \pm 1.$$

۵) فرض‌کنید A ماتریس $n\times n$ باشدکه برای هر ماتریس B با اثر صفر داشته باشیم $\mathrm{tr}(BA) = 0$. نشان دهید به ازای یک λ، $A = \lambda I$.

حل. فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد. همچنین فرض کنید B_{ij} ماتریسی $n \times n$ باشد که مؤلفه (i,j)ام آن ۱ است که در آن $i \neq j$ و بقیه درایه‌ها صفر می‌باشند.
چون $i \neq j$ لذا B_{ij} ماتریسی با اثر صفر است. بنابراین $B_{ij}A$ ماتریسی با اثر صفر است.
از طرفی می‌دانیم:

$$\begin{array}{cl} B_{ij}A = \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ & & 0 & & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \leftarrow \text{سطر } i\text{ام} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

و لذا $\mathrm{tr}(B_{ij}A) = a_{ji}$. از طرفی $\mathrm{tr}(B_{ij}A) = 0$ در نتیجه $a_{ji} = 0$ که در آن $i \neq j$.
یعنی A ماتریسی قطری است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

اکنون فرض کنید $i \neq j$ و ماتریس c_{ij} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{cl} c_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{سطر } i\text{ام-ستون } j\text{ام} \\ \leftarrow \text{سطر } j\text{ام-ستون } i\text{ام} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

به وضوح $\mathrm{tr}(c_{ij}) = 0$ آنگاه $\mathrm{tr}(c_{ij}A) = 0$. اما

$$\mathrm{tr}(c_{ij}A) = a_{ii} - a_{jj}$$

پس $a_{ii} = a_{jj}$. بنابراین $A = \lambda I$.

۶) فرض کنید S شامل تمام ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ باشد که مجموع هر یک از سطرهای آن برابر یک شود.

(آ) ثابت کنید S نسبت به ضرب ماتریس‌ها بسته است.

(ب) آیا S عضو همانی دارد؟

(پ) آیا همه عناصر S معکوس‌پذیرند؟

حل.

(آ) فرض کنید $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ اعضای S باشند. پس

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

حال فرض کنید $C = AB$ و $c = (c_{ij})$. پس

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

حال $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ را به ازای $1 \leq i \leq n$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\right) a_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1.\end{aligned}$$

پس مجموع درایه‌های هر سطر ماتریس AB برابر یک است لذا S نسبت به ضرب ماتریس‌ها بسته است.

(ب) چون ماتریس همانی مجموع هر یک از سطرهایش یک است پس عضو S است و S دارای همانی است.

(پ) خیر. ماتریس A را به گونه‌ای در نظر بگیرید که درایه‌های ستون اول همگی برابر یک و بقیه درایه‌ها صفر است. A وارون‌پذیر نیست چون ستون صفر دارد.

۷) فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند به طوری که A و B و $A+B$ خودتوان هستند. ثابت کنید $AB = -BA$ و نتیجه بگیرید $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

حل. با توجه به فرض $A = A^2$، $B = B^2$ و $A + B = (A+B)^2$. بنابراین

$$\begin{aligned} A + B = (A+B)^2 = (A+B)(A+B) &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= A + AB + BA + B = A + B + AB + BA \\ &\Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA. \end{aligned}$$

در نتیجه $\operatorname{tr}(AB) = -\operatorname{tr}(BA)$. از طرفی می‌دانیم $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. پس $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

۸) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند به طوری که $AB = -A - B$. ثابت کنید $AB = BA$.

حل. داریم:

$$\begin{aligned} AB + A + B = 0 &\Rightarrow AB + A + B + I - I = 0 \\ &\Rightarrow (A+I)(B+I) = I \\ &\Rightarrow (B+I)^{-1} = A + I \\ &\Rightarrow (B+I)(A+I) = I \\ &\Rightarrow BA + A + B + I = I \\ &\Rightarrow BA = -A - B \\ &\Rightarrow AB = BA. \end{aligned}$$

۹) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید:

$$\operatorname{tr}(AA^t) = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

حل. هرگاه $A = 0$ داریم $A^tA = 0$. بنابراین $\operatorname{tr}(AA^t) = 0$. حال فرض کنید $\operatorname{tr}(AA^t) = 0$، $A = (a_{ij})$ و $A^t = (b_{ij})$. بنابراین برای هر $1 \leq i, j \leq n$،

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

اکنون قرار دهید $AA^t = (c_{ij})$. می‌دانیم که

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

چون $\operatorname{tr}(AA^t) = 0$ بنابراین $\sum_{k=1}^{n} c_{ii} = 0$. پس داریم:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}.$$

چون $a_{ki} = b_{ki}$، بنابراین $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{ik})^2 = 0$ پس برای هر i و k، $a_{ik} = 0$ بنابراین $A = 0$.

۱۰) فرض کنید $A + I$ ماتریس وارون‌پذیری باشد که در آن A ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ و I ماتریس همانی است. نشان دهید $(I + A)^{-1}$ با $I - A$ جابجا می‌شود.

حل. چون ماتریس $I + A$ وارون دارد پس $I = (I + A)^{-1}(I + A)$. بنابراین

$$I = (I + A)^{-1}(I + A) = (I + A)^{-1} + (I + A)^{-1}A$$
$$\Rightarrow (I - A)^{-1}A = I - (I + A)^{-1} \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

همچنین داریم:

$$I = (I + A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1} + A(I + A)^{-1}.$$

در نتیجه:

$$A(I + A)^{-1} = I - (I - A)^{-1} \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

با توجه به روابط (۱ـ۴) و (۱ـ۵) داریم:

$$A(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}A.$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned}(I - A)(I + A)^{-1} &= (I + A)^{-1} - A(I + A)^{-1} \\ &= (I + A)^{-1} - (I + A)^{-1}A \\ &= (I + A)^{-1}(I - A).\end{aligned}$$

۱۱) فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند و داشته باشیم $BAA^t=0$. ثابت کنید $BA=0$. نتیجه بگیرید اگر A متقارن باشد و k عدد طبیعی دلخواهی باشد که $BA^k=0$ آنگاه $BA=0$.

حل. طبق فرض $BAA^t=0$. حال طرفین رابطه را از راست در B^t ضرب می‌کنیم. در نتیجه:

$$BAA^tB^t=0\Rightarrow BA(BA)^t=0\Rightarrow \mathrm{tr}(BA(BA)^t)=0,$$

و بنا بر مسأله ۹، $BA=0$.

برای اثبات قسمت دوم فرض کنید n عددی طبیعی باشد که $k\leq 2^n$ (توجه کنید چنین nای موجود است). قرار می‌دهیم $m=2^n-k$ و طرفین رابطه $BA^k=0$ را از راست در A^m ضرب می‌کنیم. داریم:

$$0=BA^kA^m=BA^{m+k}=BA^{2^n}.$$

اکنون با استقراء روی n نشان می‌دهیم اگر BA^{2^n}، آنگاه $BA=0$. اگر $n=1$، آنگاه $BA^2=0$ و چون $A=A^t$ پس $BAA^t=0$ و بنا بر قسمت قبل $BA=0$.

حال فرض کنید $n>1$ و حکم برای $n-1$ برقرار باشد یعنی اگر $BA^{2^{n-1}}=0$، آنگاه $BA=0$. حکم را برای n بررسی می‌کنیم. پس فرض می‌کنیم $BA^{2^n}=0$.

با ضرب طرفین رابطه در B^t از راست داریم:

$$0=BA^{2^n}B^t=BA^{2^{n-1}}A^{2^{n-1}}B^t \qquad (۱۳\text{-}۱)$$

به راحتی بررسی می‌شود که برای هر r طبیعی، $(A^t)^r=(A^r)^t$ و چون A متقارن است پس $A^t=A$ و در نتیجه ملاحظه می‌کنیم:

$$A^{2^{n-1}}=(A^t)^{2^{n-1}}=\left(A^{2^{n-1}}\right)^t.$$

حال با توجه به رابطه (۱ـ۶) داریم:

$$0=BA^{2^{n-1}}A^{2^{n-1}}B^t=BA^{2^{n-1}}(BA^{2^{n-1}})^t$$

در نتیجه $\operatorname{tr}\left(BA^{۲^{n-۱}}(BA^{۲^{n-۱}})^t\right) = ۰$ و بنابر مسأله ۹، $BA^{۲^{n-۱}} = ۰$. پس بنابر فرض استقراء $BA = ۰$.

۱۲) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ روی میدان اعداد مختلط باشند به طوری که

$$A^{۲}B + BA^{۲} = ۲ABA.$$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی m، $\operatorname{tr}(AB - BA)^m = ۰$.

حل. با توجه به رابطه $A^{۲}B + BA^{۲} = ۲ABA$ داریم:

$$A^{۲}B - ABA = ABA - BA^{۲} \Rightarrow A(AB - BA) = (AB - BA)A,$$

لذا A با $AB - BA$ جابجا می‌شود. پس A با هر توان $AB - BA$ جابجا می‌شود. بنابراین اگر m عدد طبیعی دلخواه باشد ملاحظه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(AB - BA)^m &= (AB - BA)(AB - BA)^{m-۱}\\ &AB(AB - BA)^{m-۱} - BA(AB - BA)^{m-۱}\\ &= AB(AB - BA)^{m-۱} - B(AB - BA)^{m-۱}A.\end{aligned}$$

حال قرار دهید $C = B(AB - BA)^{m-۱}$. پس

$$(AB - BA)^m = AC - CA.$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\operatorname{tr}(AB - BA)^m = \operatorname{tr}(AC) - \operatorname{tr}(CA) = ۰.$$

۱۳) فرض کنید $A \neq ۰$ ماتریسی $n \times n$ روی میدان حقیقی باشد به طوری که به ازای هر $۱ \leq i, j, k \leq n$، $a_{ik}a_{jk} = a_{kk}$. ثابت کنید مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A مخالف صفر است.

حل. داریم:

$$a_{kk}a_{kk} = a_{kk} \Rightarrow a_{kk} = ۱ \quad \text{یا} \quad a_{kk} = ۰,$$

فرض کنیم برای هر k، $a_{kk} = 0$. لذا داریم:

$$\begin{cases} 0 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + \cdots + a_{nn}a_{nn} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = a_{n1}a_{n1} + a_{12}a_{12} + \cdots + a_{nn}a_{nn} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow a_{n1} = a_{n2} = \cdots = a_{nn} = 0 \end{cases}$$

پس همه درایه‌های ماتریس A مخالف صفر است و این با $A \neq 0$ در تناقض است.

۱۴) فرض کنید A ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. همچنین فرض کنید ماتریس A با $AA^t - A^tA$ جابجا می‌شود. ثابت کنید $AA^t = A^tA$.

حل. فرض کنید $C = AA^t - A^tA$. نشان می‌دهیم $\operatorname{tr}(CC^t) = 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(CC^t) &= \operatorname{tr}((AA^t - A^tA)(AA^t - A^tA)^t) \\ &= \operatorname{tr}((AA^t - A^tA)(AA^t - A^tA)) \\ &= \operatorname{tr}((AA^t - A^tA)AA^t - (AA^t - A^tA)A^tA), \end{aligned}$$

و چون A با $AA^t - A^tA$ جابجا می‌شود داریم:

$$(AA^t - A^tA)AA^t = A(AA^t - A^tA)A^t.$$

بنابراین

$$\operatorname{tr}(CC^t) = \operatorname{tr}(A(AA^t - A^tA)A^t - (AA^t - A^tA)A^tA).$$

قرار می‌دهیم $B = (AA^t - A^tA)A^t$. در این صورت ملاحظه می‌کنیم که

$$\operatorname{tr}(CC^t) = \operatorname{tr}(BA - AB) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$

بنا بر مسأله ۹ چون $\operatorname{tr}(CC^t) = 0$، پس $C = 0$ بنابراین $A^tA = AA^t$.

۱۵) فرض کنید A، B و C ماتریس‌هایی $n \times n$ روی میدان $\mathbb{R}$ باشند به طوری که $AA^t + BB^t + CC^t = ۰$. ماتریس‌های A، B و C را مشخص کنید.

حل. فرض کنید $A = (a_{ij})$، $B = (b_{ij})$ و $C = (c_{ij})$. $A^t = (a'_{ij})$ و $AA^t = (d_{ij})$. بنابراین $a'_{ij} = a_{ij}$ و $d_{ij} = \sum_{k=۱}^n a_{ik}a'_{kj}$. در نتیجه:

$$\mathrm{tr}(AA^t) = \sum_{i=۱}^n d_{ii} = \sum_{i=۱}^n \sum_{k=۱}^n a_{ik}a'_{ki} = \sum_{i=۱}^n \sum_{k=۱}^n a_{ik}^۲$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\mathrm{tr}(BB^t) = \sum_{i=۱}^n \sum_{k=۱}^n b_{ik}^۲, \qquad \mathrm{tr}(CC^t) = \sum_{i=۱}^n \sum_{k=۱}^n c_{ik}^۲$$

از طرفی بنا به فرض $\mathrm{tr}(AA^t + BB^t + CC^t) = ۰$ پس

$$\begin{aligned} ۰ &= \mathrm{tr}(AA^t) + \mathrm{tr}(BB^t) + \mathrm{tr}(CC^t) \\ &= \sum_{i=۱}^n \sum_{k=۱}^n (a_{ik}^۲ + b_{ik}^۲ + c_{ik}^۲) \end{aligned}$$

پس $a_{ik} = b_{ik} = c_{ik} = ۰$ برای هر $۱ \leq i, k \leq n$. بنابراین $A = B = C = ۰$.

۱۶) (آ) فرض کنید A ماتریس $n \times n$ روی میدان حقیقی باشد به طوری که $n \geq ۲$. همچنین فرض کنید A متقارن و معکوس‌پذیر با درایه‌های مثبت است. نشان دهید تعداد درایه‌های صفر ماتریس $A^{-۱}$ کمتر مساوی $n^۲ - ۲n$ است.

(ب) چه تعداد درایه صفر در معکوس ماتریس $n \times n$ زیر موجود است؟

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۲ & \dots & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۲ & \dots & ۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۲ & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

حل.

(آ) عناصر A و $A^{-۱}$ را به ترتیب با a_{ij} و b_{ij} نشان می‌دهیم. برای $k \neq m$ داریم $\sum_{i=۰}^{n} a_{ki}b_{im} = ۰$. چون a_{ij} مثبت‌اند، حداقل یکی از $\{b_{im} : i = ۱, ۲, \dots, n\}$ مثبت و حداقل یکی منفی است. پس حداقل ۲ درایه غیرصفر در هر ستون $A^{-۱}$ داریم.

(ب) تمام b_{ij}ها صفرند مگر

$$b_{۱۱} = ۲,\ b_{nn} = (-۱)^n,\ b_{i(i+۱)} = b_{(i+۱)i} = (-۱)^i \qquad i = ۱, ۲, \dots, n-۱.$$

۱۷) فرض کنید R و R' دو ماتریس تحویل شده سطری-پلکانی ۳ × ۲ باشند و جواب‌های دستگاه‌های $RX = ۰$ و $R'X = ۰$ یکسان باشند. ثابت کنید $R = R'$.

حل. ماتریس ۳ × ۲ سطری-پلکانی در حالت کلی به یکی از فرم‌های زیر است:

$$R_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & b \end{bmatrix}, \quad R_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & a \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad R_۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$
$$R_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & a & b \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad R_۵ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad R_۶ = \begin{bmatrix} ۱ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

حال فرض کنیم R مساوی یکی از ماتریس‌های فوق باشد مثلاً $R = R_۱$. حال چون $RX = ۰$ و $R'X = ۰$ ثابت می‌کنیم R' هیچ یک از حالت‌های ۲ تا ۶ را ندارد.

$$R' = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow R'X = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow x_۲ + cx_۳ = ۰ \Rightarrow x_۲ = -cx_۳,$$

پس جواب به فرم $(x_1, -cx_3, x_3)$ است. از طرفی

$$X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + ax_3 = 0 \\ x_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -ax_3 \\ x_2 = -bx_3 \end{cases}$$

پس جواب به فرم $x_3(-a, -b, 1)$ است. پس جواب‌ها یکسان نیستند و این تناقض است و در بقیه حالت‌ها نیز به طور مشابه به تناقض می‌رسیم.

۱۸) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

به ازای کدام $Y = (y_1.y_2, y_3, y_4)^t$ دستگاه $AX = Y$ جواب دارد.

حل. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -\frac{2}{7}y_2 + \frac{1}{7}y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{7}y_2 + \frac{1}{7}y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 - \frac{2}{3}y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{9}y_1 - \frac{y_2}{3} + y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 = 0 \\ 5y_1 + 3y_2 - 9y_4 = 0 \end{cases}$$

بنابراین به ازای $Y = (y_1.y_2, \frac{2}{3}y_1 + y_2, \frac{5}{9}y_1 + \frac{y_2}{3})^t$ که $y_1, y_2 \in \mathbb{F}$، دستگاه $AX = Y$ جواب دارد.

۱۹) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ روی میدان اعداد حقیقی باشد به طوری که $m \neq n$. نشان دهید حداقل یکی از دو ماتریس AA^t یا A^tA وارون‌پذیر نیست.

حل. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: اگر $m < n$، طبق قضیه ۷.۴.۱، $AX = 0$ جواب غیربدیهی دارد. بنابراین

$$\exists X_1 \neq 0: \quad AX_1 = 0 \Rightarrow A^tAX_1 = 0 \Rightarrow (A^tA)X_1 = 0.$$

پس دستگاه $(A^tA)X = 0$ جواب غیربدیهی دارد. لذا A^tA وارون‌پذیر نیست.

حالت ۲: اگر $n < m$ در این حالت A^t ماتریس $n \times m$ است و $A^tX = 0$ جواب غیربدیهی دارد. پس

$$\exists X_1 \neq 0: \quad A^tX_1 = 0 \Rightarrow A(A^tX_1) = (AA^t)X_1 = 0,$$

پس دستگاه $(AA^t)X = 0$ جواب غیربدیهی دارد. پس AA^t معکوس‌پذیر نیست.

۲۰) نشان دهید برای هر ماتریس $n \times n$، A ماتریس $n \times n$، $B \neq 0$ وجود دارد به طوری که AB خودتوان است.

حل. دو حالت در نظر می‌گیریم. اگر A معکوس‌پذیر نباشد پس $AX = 0$ دارای جواب غیربدیهی مانند $X_1 \neq 0$ است. ماتریس B ماتریسی باشد که ستون اول آن X_1 و بقیه ستون‌های آن صفر باشد.

$$0 \neq B = \left[X_1 \,\vdots\; 0 \;\; \ldots \,\vdots\; 0\right] \Rightarrow AB = \left[AX_1 \,\vdots\; 0 \,\vdots\; \ldots \,\vdots\; 0\right] = 0,$$

پس AB خودتوان است.

اگر A معکوس‌پذیر باشد قرار دهید $B = A^{-1} \neq 0$، $AB = I$ پس خودتوان است.

۲۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی 2×2 با درایه‌های مختلط باشد. همچنین فرض کنید A تحویل شده سطری باشد و $a + b + c + d = 0$. ثابت کنید که دقیقاً سه ماتریس از این نوع وجود دارد.

حل. چون $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تحویل شده سطری-پلکانی است پس حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

حالت ۱:

$$a = 1 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 1 + b + d = 0 \Rightarrow b + d = -1.$$

هرگاه $d=\circ$ داریم $b=-۱$ و در صورتی که $d=۱$ داریم $b=-۲$ که غیر قابل قبول است لذا $A_۱=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$.

حالت ۲:

$$a=\circ \Rightarrow \begin{cases} b=۱ \\ b=\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=۱ \Rightarrow d=-۱ & \text{قابل قبول} \\ c=\circ \Rightarrow d=\circ & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

پس $A_۲=\begin{bmatrix} \circ & \circ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A_۳=\begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$.

۲۲) فرض کنید A و B ماتریس‌های $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند و داشته باشیم $BA=B$ و $AB=A$. نشان دهید $A^۲=A$، $B^۲=B$ و

$$(A-B)^۲=\circ.$$

حل. داریم:

$$AB=A \Rightarrow ABA=A^۲ \Rightarrow A(BA)=A^۲$$
$$\Rightarrow AB=A^۲ \Rightarrow A=A^۲,$$

مجدداً با توجه به اینکه $BA=B$ به طور مشابه می‌توان نشان داد که $B^۲=B$.
حال نشان می‌دهیم $(A-B)^۲=\circ$.

$$(A-B)^۲=(A-B)(A-B)=A^۲-AB-BA+B^۲=\circ.$$

۲۳) فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نشان دهید اگر ماتریس A یک سطر صفر داشته باشد آنگاه AB نیز سطر صفر دارد.

حل. فرض کنیم $A=(a_{ij})$، $B=(b_{ij})$ و سطر rام ماتریس A صفر باشد. یعنی

$$a_{r۱}=a_{r۲}=\cdots=a_{rn}=\circ.$$

فرض کنید $AB = (c_{ij})$. نشان می‌دهیم سطر rام ماتریس AB نیز صفر است. برای این منظور فرض می‌کنیم c_{rs} درایه دلخواه از سطر rام باشد.

$$c_{rs} = \sum_{k=۱}^{n} a_{rk} b_{rs} = ۰,$$

زیرا a_{rk} برای $۱ \leq k \leq n$ صفر است.

۲۴) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $A^۲ + ۲A - ۲I = ۰$. ثابت کنید A معکوس‌پذیر است و وارون آن را به‌دست آورید.

حل. با توجه به رابطه $A^۲ + ۲A - ۲I = ۰$ داریم:

$$A^۲ + ۲A = ۲I \Rightarrow \frac{۱}{۲}A^۲ + A = I \Rightarrow A(\frac{۱}{۲}A + I) = I.$$

حال با انتخاب $B = \frac{۱}{۲}A + I$ داریم $AB = BA = I$. لذا A معکوس‌پذیر و B وارون آن است.

۲۵) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ متقارن روی میدان اعداد حقیقی باشند که $A^۲ + B^۲ = ۰$. نشان دهید $A = B = ۰$.

حل. چون A و B متقارن هستند پس $A = A^t$ و $B = B^t$. لذا

$$BB^t + AA^t = A^۲ + B^۲ = ۰ \Rightarrow \mathrm{tr}(BB^t) + \mathrm{tr}(AA^t) = ۰.$$

از طرفی بنا بر سؤال ۱۲ (ب) بخش ۱.۱ برای هر ماتریس چون P داریم:

$$\mathrm{tr}(PP^t) \geq ۰.$$

بنابراین

$$\mathrm{tr}(BB^t) = \mathrm{tr}(AA^t) = ۰$$

و بنا بر مسأله ۹، $A = B = ۰$.