فصل سوم : حساب تغییرات

۳-۱ مقدمه

حساب تغییرات شاخه‌ای از آنالیز است که با مسائل ماکزیمم و می‌نیمم سروکار دارد. این نوع مسائل در علوم ریاضی و مهندسی کاربردهای متنوع دارند.

به عنوان یکی از مسائلی که همواره مورد توجه بوده مساله پیداکردن کوتاهترین فاصله بین دو نقطه است که در صفحه جواب این مساله خط راست است. البته اثبات آنکه جواب آن در صفحه یک خط راست است بدون آشنایی با علم حساب تغییرات دشوار است.

مساله کوتاهترین فاصله بین دو نقطه را می‌توان روی یک سطح یا در یک فضای n بعدی مطرح نمود. بدیهی است حل چنین مساله‌ای باید پیچیده باشد.

مساله دیگری که در حساب تغییرات مورد بررسی قرار می‌گیرد پیدا کردن منحنی‌ای مابین همه منحنیهای واقع در صفحه xy است که اگر آنها را حول محور x دوران دهیم مساحت سطح جانبی جسم دوار حاصل می‌نیمم باشد.

مساله سوم مورد نظر مساله‌ای است که توسط برنولی مطرح شده است و آن پیدا کردن خمی است که دو نقطه A و B را از بالا به پائین بهم وصل می‌کند به‌طوری اگر گلوله‌ای در طول این منحنی از A تا B حرکت کند زمان طی شده می‌نیمم باشد.

بالاخره مساله نهایی مساله‌ای که در یونان قدیم مطرح شده است و آن یافتن شکل بسته‌ای با محیط ثابت است. جواب این مساله را یک دایره حدس زده بودند تا آنکه پاپوس ۳۰۰ سال بعد از میلاد نشان داد که جواب دایره است. پاسخ این مساله تحت عنوان می‌نیمم سازی مقید امروزه در حساب تغییرات مطرح می‌شود.

حساب تغییرات با فضای توابع سروکار دارد. برای واردشدن به بحث اصلی حساب تغییرات که تحت عنوان دومین قضیه بنیادی حساب تغییرات مطرح می‌شود نیاز به تعریف زیر داریم.

تعریف. فرض کنید Ω فضایی از توابع بوده که هر یک از آنها بر یک زیر فاصله $[x_0, x_1]$ تعریف شده‌اند. حال اگر J تابعی از Ω به توی R، مجموعه اعداد حقیقی، تعریف شده باشد، $J:\Omega \to R$، آنگاه J را یک فانکشینال یا تابعی می‌نامند.

مساله بنیادی در حساب تغییرات را به‌صورت زیر می‌توان مطرح کرد :

فرض کنید (x_0, y_0) و (x_1, y_1) دو نقطه واقع در صفحه xy باشند و $y = y(x)$ هر منحنی دلخواه باشد که از این دو نقطه می‌گذرد. بین این منحنیها بدنبال منحنی‌ای هستیم که

فانکشینال زیر را اکسترمم کند و ما در اینجا جواب مساله را در حالتی مورد بررسی قرار می‌دهیم که اکسترمم مورد نظر از نوع می‌نیمم باشد.

$$J(Y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,Y,Y')dx \ , \quad Y(x_0)=y_0\,, \quad Y(x_1)=y_1 \tag{1}$$

جواب این مساله بنیادی ممکن است پیوسته یا غیرپیوسته، مشتقپذیر یا غیر مشتقپذیر باشد ولی ما در بحث خود فرض می‌کنیم که جواب پیوسته و با مشتقات پیوسته باشد. مجموعه Ω را شامل چنین جوابهایی، مجموع توابع مجاز می‌نامیم و ما در بحث خود هر تابع مطرح شده را یک تابع مجاز می‌گیریم.

۲-۳ معادله اویلر - لاگرانژ

فرض کنید مساله (۱) دارای جواب باشد، یعنی تابعی مانند $y(x)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $Y\in\Omega$، $J(Y)\geq J(y)$. با فرض

$$Y(x)=y(x)+\varepsilon z(x)\,, \qquad Y'(x)=y'(x)+\varepsilon z(x) \tag{2}$$

که در آن $z(x)$ متعلق به Ω است هم‌چنین $z(x_0)=0$ و $z(x_1)=0$، ε در (۲) عددی ثابت و مثبت است. با جایگزین کردن (۲) در (۱) می‌یابیم

$$J(y+\varepsilon z)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y+\varepsilon z,y'+\varepsilon z')\,dx \tag{4}$$

با توجه به بسط تیلور می‌توان نوشت

$$F(x,y+\varepsilon z,y'+\varepsilon z')=F(x,y,y')+\varepsilon z\frac{\partial F}{\partial y'}+\varepsilon z'\frac{\partial F}{\partial y'}+O(h^2) \tag{5}$$

با قراردادن از (۵) در (۴) داریم

$$J(y+\varepsilon z)=\int_{x_0}^{x_1}\left\{F(x,y,y')+\varepsilon z\frac{\partial F}{\partial y'}+\varepsilon z'\frac{\partial F}{\partial y'}+O(h^2)\right\}dx=I(\varepsilon) \tag{6}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنیم نتیجه انتگرالگیری در (۶) تنها تابعی از ε خواهد بود که آنرا به $I(\varepsilon)$ نمایش داده‌ایم. از طرفی با توجه به (۲) اگر $\varepsilon=0$ را اختیار کنیم $y(x)$ای که به ازای $\varepsilon=0$ حاصل می‌شود همان جواب مساله (۱)، یعنی $y(x)$ است. هم‌اکنون برای می‌نیمم کردن $J(Y)$ در (۱) کافی است معادله $\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$ را تشکیل دهیم. با تشکیل این معادله از (۶) نتیجه می‌شود

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left\{z\frac{\partial F}{\partial y'}+z'\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}dx=0 \tag{7}$$

دومین انتگرال در طرف دوم (۷) را با استفاده از انتگرالگیری جزءبجزء چنین می‌نویسیم

$$\int_{x_\circ}^{x_\backprime} z'\frac{\partial F}{\partial y'}dy = z\frac{\partial F}{\partial y'}\Bigg|_{x_\circ}^{x_\backprime} - \int_{x_\circ}^{x_\backprime} z\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})dx = -\int_{x_\circ}^{x_\backprime} z\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})dx \qquad (۸)$$

با قرار دادن (۸) در (۷) می‌یابیم

$$\int_{x_\circ}^{x_\backprime}(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'})\,z\,dx=\circ \qquad (۹)$$

و چون این تساوی به ازای هر z برقرار است، داریم

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=\circ \qquad (۱۰)$$

معادله (۱۰) را معادله اویلر لاگرانژ می‌نامند. بنابراین برای می‌نیمم کردن فانکشینال (۱) کافی است به حل مسأله زیر بپردازیم

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=\circ, \quad y(x_\circ)=y_\circ, \qquad y(x_\backprime)=y_\backprime \qquad (۱۱)$$

این مساله را مساله اویلر - لاگرانژ می‌نامیم. جواب این مساله را یک منحنی بحرانی می‌نامیم. اگر جواب مساله (۱۱) را $y=\phi(x)$ بنامیم، آنگاه $J(\phi(x))$ یک مقدار بحرانی است که مقداری اکسترمم برای فانکشینال $J(Y)$ است که می‌تواند یک مقدار می‌نیمم یا ماکزیمم باشد. در هر صورت نوع مقدار بحرانی را به سادگی می‌توان تعیین کرد و ما ضمن ارائه مثال آنرا روشن می‌کنیم.

مثال ۱. منحنی بحرانی و مقدار بحرانی فانکشینال زیر را بیابید و نوع آنرا مشخص کنید.

$$J(Y)=\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}(Y'^{۲}-Y^{۲})dx \ , \ Y(\circ)=\circ \ , \ Y(\frac{\pi}{۲})=۱$$

حل. داریم $F(x,y,y')=y'^{۲}-y^{۲}$ و معادله اویلر - لاگرانژ در اینجا به‌صورت زیر در می‌آید

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=-۲y-۲y''=\circ$$

یا $y''+y=\circ$ که دارای جواب عمومی $y=c_۱\cos x+c_۲\sin x$ است با توجه شرایط کرانه‌ای داده شده می‌یابیم $y=\sin x$ که همان منحنی بحرانی است و مقدار بحرانی عبارت است از

$$J(\sin x)=\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}(\cos^۲ x-\sin^۲ x)dx=\circ$$

برای اینکه ببینیم این مقدار بحرانی ماکزیمم است یا می‌نیمم، مقدار فانکشینال J را به ازای یک منحنی دیگر، مثلاً یک خط راست، که از دو نقطه $(\circ,\circ)$، $(\frac{\pi}{۲},۱)$ می‌گذرد می‌یابیم. معادله خط راستی که از این دو نقطه می‌گذرد به‌صورت $y=\frac{۲}{\pi}x$ است و لذا

$$J(\frac{2}{\pi}x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{4}{\pi^2}-\frac{4}{\pi^2}x^2)dx=\frac{4}{\pi^2}(x-\frac{x^3}{3})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}(1-\frac{\pi^2}{12})>0$$

بنابراین $J(\sin x)$ یک مقدار می‌نیمم است.

مثال ۲. منحنی بحرانی و مقدار بحرانی فانکشینال زیر را بیابید.

$$J(Y)=\int_0^1(Y'^2+12xY)dx\ ,\quad Y(0)=0\quad ,\quad Y(1)=1$$

حل. معادله اویلر - لاگرانژ به‌صورت $y''-6x=0$ در می‌آید که دارای جواب عمومی $y=x^3+c_1x+c_2$ است. با توجه به شرایط کرانه‌ای می‌یابیم $y=x^3$ که همان منحنی بحرانی است و مقدار بحرانی برابر است با

$$J(x^3)=\int_0^1(9x^4+12x^4)dx=\frac{21}{5}$$

مثال ۳. نشان دهید که مساله زیر دارای یک جواب ناپیوسته است.

$$J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}Y^2dx,\qquad Y(x_0)=y_0,\qquad Y(x_1)=y_1$$

حل. داریم $F(x,y,y')=y^2$ و معادله اویلر - لاگرانژ به‌صورت $F_y=0$ یا $y=0$ در می‌آید که از دو نقطه $y(0)=0$ و $y(1)=0$ می‌گذرد. بنابراین تابع $y=0$ فانکشینال $\int_0^1 y^2dx$ را می‌نیمم می‌کند. در هر صورت جواب مساله موردنظر را می‌توان به‌صورت

$$y(x)=\begin{cases}y_0, & x=x_0\\ 0, & x_0<x<x_1\\ y_1, & x=x_1\end{cases}$$

در نظر گرفت که فانکشینال موردنظر را می‌نیمم می‌کند. ولی چنانچه مشاهده می‌کنیم این تابع پیوسته نیست و در نتیجه یک تابع مجاز نیست.

چنین نیست که هر مساله به صورت (۱) دارای جواب پیوسته باشد. مثلاً اگر $F(x,y,y')$ نسبت به y' خطی باشد، یعنی بتوان نوشت $F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'$ با این فرض معادله اویلر لاگرانژ به‌صورت $M_y(x,y)-N_x(x,y)=0$ در می‌آید که تابعی از y و x است و معادله دیفرانسیل مرتبه دومی حاصل نمی‌شود و جواب حاصل از آن نمی‌تواند از دو نقطه دلخواه (x_0,y_0) و (x_1,y_1) بگذرد.

مثال ۴. نشان دهید که مساله زیر دارای جواب نیست.

$$J(y)=\int_0^1(Y^2+x^2Y')dx\ ,\ Y(0)=0,\quad Y(1)=2$$

از معادله اویلر لاگرانژ نتیجه می‌شود $M_y - N_x = y - x = 0$ یا $y = x$ که نمی‌تواند در شرایط کرانه‌ای داده شده صدق کند.

همینطور اگر F تنها تابعی از x یا y یا y و x باشد مساله تغییراتی (۱) دارای جواب نیست.

هم‌اکنون فرض کنید F تنها به y' وابسته است یعنی $F = F(y')$

آنگاه معادله اویلر - لاگرانژ عبارت است از $F_{y'y'}y'' = 0$ در نتیجه $y'' = 0$ یا $F_{y'y'} = 0$. چنانچه $y'' = 0$ آنگاه $y = c_1x + c_2$ یک خانواده دو پارامتری از خطوط راست است. چنانچه $F_{y'y'}(y') = 0$ دارای یک یا چند ریشه‌های حقیقی k $y' = k$ باشد، آنگاه $y = kx + c$ و ما با یک خانواده خطوط مستقیم مواجه هستیم که از روی $y = c_1x + c_2$ نیز نتیجه می‌شود، بنابراین جواب در این حالت نیز همان $y = c_1x + c_2$ است.

مثال ۵. نشان دهید که کوتاهترین فاصله بین دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) یک خط راست است.

حل. هرگاه منحنی c به معادله $y(x)$ از دو نقطه موردنظر بگذرد، آنگاه طول قوس منحنی عبارت است از

$$J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + Y'^2}\, dx \quad , \quad Y(x_0) = y_0, Y(x_1) = y_1$$

جواب این مسأله یک خط راست است. پس کوتاهترین فاصله بین دو نقطه خط راست است.

اکنون فرض کنید F فقط تابعی از x و y' باشد، یعنی $F = F(x, y')$

در این حالت معادله اویلر - لاگرانژ عبارت است از $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$

و یا $F_{y'}(x, y') = c_1$ است که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. و با حل آن یک جواب عمومی برای معادله اویلر - لاگرانژ حاصل می‌شود که وابسته به دو عدد ثابت است. پس مسأله دارای جواب است.

مثال ۶. فانکشینال

$$J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + Y'^2}}{x}\, dx$$

معادله حرکت ذره‌ای از نقطه‌ای به نقطه دیگر در طول یک منحنی $Y = Y(x)$ با سرعت $u = x$ است. جواب معادله اویلر - لاگرانژ حاصل از این فانکشینال را به دست آورید.

حل. معادله اویلر - لاگرانژ به‌صورت $\frac{y'}{x\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$ در می‌آید. با قراردادن $y' = \tan t$ می‌یابیم

$$x=\frac{1}{c_1}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{c_1}\sin t$$

با فرض $c_1^*=\frac{1}{c_1}$ داریم $x=c_1^*\sin t$. از طرفی از اینکه $\frac{dy}{dx}=\tan t$، می‌یابیم $dy=c_1^*\sin t\,dt$. با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود $y=-c_1^*\cos t+c_2$ و از اینرو

$$x=c_1^*\sin t,\quad y-c_2=-c_1^*\cos t$$

جواب پارامتری موردنظر است. با حذف t بین آنها می‌یابیم

$$x^2+(y-c_2)^2=c_1^{*2}$$

که مکان هندسی دایره‌هائی است که مرکزشان روی محور y است.

بالاخره مساله را در حالتی بررسی می‌کنیم که در آن F تنها به y و y' وابسته است، یعنی $F=F(y,y')$، در این حالت معادله اویلر - لاگرانژ برابر است با

$$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0$$

با ضرب طرفین آن در y'، معادله را می‌توان به‌صورت $\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0$ نوشت، در واقع

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=F_yy'+F_{y'}y''-y''F_{y'}-F_{yy'}y'^2-F_{y'y'}-y'y''$$

در نتیجه معادله اویلر- لاگرانژ بعد از انتگرالگیری به‌صورت زیر در می‌آید

$$F-y'F_{y'}=c_1$$

که با حل آن به جواب می‌رسیم.

مثال ۷. مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $Y=Y(x)$ از نقطه (x_0,y_0) تا (x_1,y_1) در حول محور x عبارت است از

$$J(Y)=2\pi\int_{x_0}^{x_1}Y\sqrt{1+Y'^2}\,dx$$

جواب معادله اویلر - لاگرانژ را برای فانکشنال فوق بدست آورید.

حل. F در اینجا به y و y' وابسته است. با جایگذاری در معادله اویلر - لاگرانژ خواهیم داشت

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

با تغییر متغیر $y'=\sinh t$ می‌یابیم $y=c_1\cosh t$. از طرفی

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{c_1\sinh t}{\sinh t}=c_1dt \quad \text{یا} \quad x=c_1t+c_2$$

بنابراین با حذف t $y=c_1\cosh\dfrac{x-c_2}{c_1}$ که یک منحنی کسینوس هایپر بولیک است جواب موردنظر است.

مثال ۸. مسأله تغییراتی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$J(Y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+Y'^2}}{\sqrt{Y}}dx \quad , \quad Y(0)=0 \quad , \quad Y(x_1)=y_1$$

این مسأله توسط برنولی مطرح شده است. در بررسی حرکت یک گلوله در طول یک منحنی از $A(0,0)$ تا $B(x_1,y_1)$ و پیداکردن مسیری که زمان طی شده در طول آن جهت حرکت گلوله از A تا B برنولی به مسأله تغییراتی فوق رسیده است. جواب معادله‌ی اویلر - لاگرانژ را برای این فانکشینال بیابید.

حل. با توجه به معادله اویلر - لاگرانژ

$$F-yF_{y'}=c$$

می‌یابیم

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c$$

و یا $\dfrac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c$ یا $y(1+y'^2)=c_1$ با فرض $y'=\cot t$ می‌یابیم

$$y=\frac{c_1}{1+\cot^2 t}=c_1\sin^2 t=\frac{c_1}{2}(1-\cos 2t)$$

از طرفی

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2c_1\sin t\cos t dt}{\cot t}=2c_1\sin^2 t\,dt=c_1(1-\cos 2t)dt$$

بنابراین خواهیم داشت

$$y=\frac{c_1}{2}(1-\cos 2t),\qquad x-c_2=\frac{c_1}{2}(2t-\sin 2t)$$

از شرط $y(0)=0$ می‌یابیم $c_2=0$. با تغییر متغیر $2t=u$ می‌یابیم

$$y=\frac{c_1}{2}(1-\cos u),\qquad x=\frac{c_1}{2}(c_1-\sin u)$$

که نمایش پارامتری یک سیکلوئید است. پس بهترین مسیر جهت رسیدن از A تا B در کوتاهترین زمان ممکن پیمودن منحنی سیکلوئید است.

حال تعمیمی از مسأله بنیادی را می‌آوریم. فرض می‌کنیم J تابعی بیش از یک تابع مثل $y_1, y_2, \dots, y_n$، در واقع n تابع مستقل از x باشد. منظور پیداکردن یک مجموعه از توابع $Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n$ است بطوریکه

$$J(Y_1, Y_1, \dots, Y_n) = \int_{x_1}^{x_1} F(x, Y_1, \dots, Y_n, Y'_1, \dots, Y'_n)dx$$

را می‌نیمم سازد. معادلات اویلر - لاگرانژ در این حالت به‌صورت زیر در می‌آیند.

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_j} = 0, \qquad j = 1, \dots, n$$

بنابراین منحنی‌های بحرانی از حل n دستگاه معادلات اویلر - لاگرانژ فوق حاصل می‌شوند.
حال مثالی از قرن بیستم می‌آوریم که در سال ۱۹۵۷ توسط *Bellman* ارائه شده است.

برنامه‌سازی پویا یا *Dynamic Programing*

برنامه‌سازی پویا یک روش بهینه‌سازی قوی است که ممکن است برای هر مسأله که حل آن یک فرآیند تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای را در بر دارد بکار رود. برای روشن شدن مطلب مسأله تغییراتی بنیادی زیر را مجدداً در نظر می‌گیریم.

$$J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y, Y')dx , \qquad Y(x_0) = y_0 \ , \ Y(x_1) = y_1$$

فرض کنید c نقطه‌ای بین x_0 تا x_1 باشد و در طول منحنی بحرانی c از (x_0, y_0) حرکت کرده و به نقطهٔ (c, y) برسد و بخواهد برای الباقی منحنی در فاصله c تا x_1، $J(Y)$ بهینه باشد. برای انجام چنین کاری باید $\int_c^{x_1} F\,dx$ می‌نیمم باشد، با تغییر c یک فرآیند جدید حاصل می‌شود و در اینجا گوئیم یک فرآیند تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای داریم که در آن تعداد مراحل متناظر با c، تا بی‌نهایت زیاد می‌شود.
اکنون مسأله تغییراتی *Variation Problem* زیر را در نظر می‌گیریم

$$J(\phi) = \int_{x_0}^{x} F(\xi, \phi, \phi')\,d\xi \ , \qquad \phi' = \frac{d\phi}{dx}$$

$$\phi(x_0) = y_0 \ , \qquad \phi(x) = y$$

فرض می‌کنیم که برای x و y معلومی منحنی $\phi = \varphi$ وجود دارد که $J(\phi)$ را می‌نیمم سازد. این می‌نیمم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S(x, y) = \min_{\varphi}\left\{ \int_{x_0}^{x} F(\bar{x}, \phi, \phi')\,dx \right\}$$

فاصله $[x_0, x]$ را به دو فاصله تقسیم می‌کنیم

$$[x_0, x] = [x_0, x - \Delta x] + [x - \Delta x, x]$$

ϕ را در فاصلهٔ $[x_0, x-\Delta x]$ بهینه می‌گیریم، در حالیکه ϕ در فاصله $[x-\Delta x, x]$ دلخواه است و برابر با $y = \phi(x)$ می‌باشد، در اینصورت

$$\int_{x_0}^{x} F(\zeta,\phi,\phi')d\zeta = \int_{x_0}^{x-\Delta x} F(\zeta,\phi,\phi')\,d\zeta + \int_{x-\Delta x}^{x} F(\zeta,\phi,\phi')\,d\zeta = J_1 + J_2$$

بنابراین

$$S(x,y) \le J_1 + J_2$$

حال با توجه به تعریف $S(x,y)$ و اینکه ϕ بر $[x_0, x-\Delta x]$ بهینه است می‌یابیم

$$J_1 = S(x-\Delta x\ ,\ \phi(x-\Delta x)) = S(x-\Delta x, y - y'\Delta x + O(\Delta x^2))$$

که در آن $y = \phi(x)$ و $y' = \phi'(x)$. همچنین

$$J_2 = F(x,y,y')\Delta x + O(\Delta x^2)$$

که در آن y' دلخواه است. بنابراین

$$S(x,y) \le F(x,y,y')\Delta x + O(\Delta x^2) + S(x-\Delta x, y - y'\Delta x + O(\Delta x^2))$$

با می‌نیمم‌سازی طرف دوم می‌یابیم

$$S(x,y) = \min_{y'} \{ F(x,y,y')\,\Delta x + O(\Delta x^2) + S(x-\Delta x, y - y'\Delta x + O(\Delta x^2)) \}$$

و با بسط جمله آخر می‌یابیم

$$S(x,y) = \min \left\{ F(x,y,y')\Delta x + S(x,y) - \frac{\partial S}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial S}{\partial y} y'\,\Delta x + O(\Delta x^2) \right\}$$

که این مقدار می‌نیمم با مشتقگیری از عبارت فوق نسبت بـه Δx و صـفر قـراردادن آن حاصـل می‌شود.

$$0 = \min \left\{ F(x,y,y') - \frac{\partial S}{\partial x} - y' \frac{\partial S}{\partial y} \right\}$$

که معادله اساسی مشتق جزئی برنامه‌سازی پویا است.

روش ریلی - ریتز (یک روش مستقیم)

تاکنون چنانچه دیدیم روش کار چنین بوده است که مسائل مربوط بـه حـساب تغییـرات را بـه مسائلی به فرم معادلات دیفرانسیل برمـی‌گردانـدیم و سـپس آنهـا را حـل مـی‌کـردیم ولـی در بسیاری موارد معادلات اویلر - لاگرانژ دقیقاً قابل حـل نیـست و روش کلاسـیک حـل را همـوار نمی‌توان به کار برد، مثلاً مساله تغییراتی

$$J(Y)=\int_0^1 \frac{1}{2}(Y'^2+e^Y)dx, \quad Y(0)=0\,, \qquad Y(1)=1$$

دارای معادله اویلر - لاگرانژی به‌صورت

$$y''=e^y, \qquad 0<x<1$$

با شرایط کرانه‌ای $y(1)=1$ و $y(0)=0$ است.

این مساله یک مساله غیرخطی است که آنرا دقیقاً نمی‌توان حل کرد. این وضعیت باعث گسترش روشهای تغییراتی مستقیم شده است که در آن مستقیماً با تابع $J(Y)$ کار داریم، به فرض اینکه غیرمستقیم با معادله دیفرانسیل اویلر - لاگرانژ سروکار داشته باشیم.

در اینجا یکی از روشهای مستقیم که در واقع حاصل زحمات ریلی و ریتز می‌باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چگونگی انجام این روش را در یک مسأله تغییراتی ساده درجه دوم توضیح می‌دهیم. مسأله تغییراتی

$$J(Y)=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}Y'^2+\frac{1}{2}wY^2-qY\right\}dx,$$

را که در آن w نامنفی است در نظر می‌گیریم. با بکاربردن معادله اویلر - لاگرانژ می‌یابیم

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=wy-q-\frac{d}{dx}(y')=0$$

و یا

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+wy=q\,, \qquad 0<x<1$$

معادلهٔ فوق را رها کرده و فرض می‌کنیم y جواب می‌نیمم مساله فوق باشد. به ازای هر $Y\in\Omega$ داریم

$$J(y)=\min_{Y\in\Omega}J(Y), \qquad J(y)\le J(Y)$$

در روش ریلی - ریتز $J(Y)$ را برای تمام فضای توابع مجاز Ω می‌نیمم نمی‌سازیم بلکه برای فضای متناهی R_n از توابع می‌نیمم می‌سازیم. در آنصورت داریم

$$J(y)=\min_{Y\in\Omega}J(Y)\le\min_{Y\in R_n}J(Y)$$

هدف این است که مقدار طرف راست را دقیقاً محاسبه کنیم و در نتیجه یک کران بالا برای $J(y)$ بیابیم. همزمان با آن می‌نیمم تابع Y در R_n یک تابع تقریبی برای تابع واقعی y باشد.

به عنوان مثال، مساله را با $n=1$ شروع می‌کنیم، فرض کنید

$$Y_1=\alpha_1 x(1-x)$$

که در آن α_1 یک پارامتر است و همچنین Y_1 در شرایط کرانه‌ای نیز صدق می‌کند با جایگزین کردن آن در $J(Y)$، J به‌صورت تابعی از α بیان می‌شود. اکنون $J(\alpha_1)$ را با حل

$$\frac{dJ}{d\alpha_1}=0$$

بر حسب α_1 می‌نیمم می‌سازیم. این مقدار بهینـه بـرای α_1 را در $J(\alpha_1)$ قـرار مـی‌دهـیم و در نتیجه

یک کران بالا برای $J(y)$ بدست می‌آوریم

$$J(y)\le \min_{Y_1} J(Y_1)$$

این روش را با انتخاب

$$Y_2=\alpha_1 x(1-x)+\alpha_2 x^2(1-x)^2$$

ادامه داده و مقادیر می‌نیمم α_1 و α_2 را از روی

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_1}=0,\qquad \frac{\partial J}{\partial\alpha_2}=0$$

می‌یابیم و با توجه به آن داریم

$$J(y)\le \min_{Y_2} J(Y_2)\le \min_{Y_1} J(Y_1)$$

این روش تکرار را می‌توان به همین صورت ادامه داد و تقریب خوبی برای $J(y)$ یافت. در حالت کلی چنین قرار می‌دهیم

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i(x)$$

که در آن ϕ_i توابع معین هستند و α_iها طوری مشخص می‌شوند که

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_i}=0\,,\qquad i=1,\dots,n$$

و این یک کران بالا برای $J(y)$ نتیجه می‌دهد و Y_n حاصل تقریبی بـرای y خواهـد بـود. یعنـی می‌توان ثابت کرد که

$$J(y)=\lim_{n\to\infty} J(Y_n)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} Y_n=y$$

مثال ۹. مساله تغییراتی زیر را به روش ریلی - ریتز حل کنید.

$$J(Y)=\int_0^1\left(\frac{1}{2}Y'^2+\frac{1}{2}Y^2-Y\right)dx,\qquad y(0)=y(1)=0$$

حل. فضای R_1 را که شامل توابع زیر است در نظر می‌گیریم

$$Y_1=\alpha x(1-x)=\alpha x-\alpha x^2$$

با جایگزین کردن آن در مساله می‌یابیم

$$J(Y_1)=\int_0^1 \{\frac{1}{2}(\alpha-2\alpha x)^2-\alpha x+\alpha x^2+\frac{1}{2}(\alpha x-\alpha x^2)^2\}\,dx$$

با فرض

$$J(y_1)=I(\alpha)$$

می‌یابیم

$$J(Y_1)=\frac{1}{2}\times\frac{11}{30}\alpha^2-\frac{1}{6}\alpha=\frac{\alpha}{6}(\frac{11}{10}\alpha-1)=\frac{11}{60}\alpha^2-\frac{\alpha}{6}=I(\alpha)$$

از

$\frac{\partial J}{\partial \alpha}=0$ نتیجه می‌شود $\qquad \alpha=\frac{5}{11}$

و لذا

$$J(Y_1)=\frac{11}{60}\alpha^2-\frac{\alpha}{6}=\frac{11}{60}\times(\frac{5}{11})^2-\frac{1}{6}\times\frac{5}{11}=0.037879$$

یک کران بالا برای $J(y)$ می‌باشد و $Y_1=\frac{5}{11}x(1-x)$ یک تقریب تغییراتی ساده برای تابع بحرانی واقعی y می‌باشد.

۳-۳ تعمیم مساله تغییراتی (۱)

۱. فانکشینالهایی به‌صورت

$$J(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,Y_1,Y_2,\ldots,Y_n,Y_1',Y_2',\ldots,Y_n')\,dx$$

با شرایط

$$\begin{aligned}&Y_1(x_0)=y_{10}, \qquad Y_2(x_0)=y_{20},\ldots,Y_n(x_0)=y_{n0}\\&Y_1(x_1)=y_{11}, \qquad Y_2(x_1)=y_{21},\ldots,y_n(x_1)=y_{ni}\\&Y_i(x), \quad i=1,2,\ldots,n\end{aligned}$$

تنها یک تابع را متغیر می‌گیریم و سایر توابع را *fixed* می‌گیریم. بدین‌طریق می‌توان تصور نمود که فانکشینال فوق به فانکشینال (۱) تبدیل می‌شود که تنها به یک تابع $Y_i(x)$ وابسته است، یعنی

$$J(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)=\bar{J}(Y_i), \quad i=1,2,\ldots,n$$

بنابراین با استفاده از معادله اویلر - لاگرانژ برای جمیع توابع $Y_i(x), \quad i=1,\ldots,n$ به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = ۰, \quad i = ۱,۲,\ldots,n$$

که با توجه به شرایط فوق جواب اکسترمم حاصل می‌شود. این دستگاه معادلات به دستگاه معادلات اویلر - لاگرانژ موسوم‌اند.

مثال ۱۰. دستگاه معادلات اویلر - لاگرانژ را برای فانکشینال زیر که تنها به دو تابع $Z(x), Y(x)$ وابسته است بدست آورید.

$$U(Y(x), Z(x)) = \int_{x_۰}^{x_۱} F(x, Y, Z, Y', Z')\,dx$$

$$Y(x_۰) = y_۰,\ Z(x_۰) = z_۰$$
$$Y(x_۱) = y_۱,\ Z(x_۱) = z_۱$$

حل. دستگاه معادلات اویلر - لاگرانژ به‌صورت زیر در می‌آید

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = ۰, \qquad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = ۰$$

مثال ۱۱. اکسترمم فانکشینال زیر را با توجه به شرایط داده شده بیابید.

$$J(Y,Z) = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (Y'^۲ + Z'^۲ + ۲YZ)\,dx$$

$$Y(۰) = ۰,\ Y(\frac{\pi}{۲}) = ۱, \quad Z(۰) = ۰, \qquad Z(\frac{\pi}{۲}) = -۱$$

حل. دستگاه معادلات اویلر - لاگرانژ عبارت‌اند از

$$y'' - z = ۰, \qquad z'' - y = ۰$$

لذا $y^{(4)} - y = ۰$ است که در اینصورت دارای جواب عمومی به‌صورت زیر است.

$$y = c_۱ e^x + c_۲ e^{-x} + c_۳ \cos x + c_۴ \sin x$$

و از آنجا

$$z = y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$$

با توجه به شرایط داده شده می‌یابیم $c_۱ = ۰$، $c_۲ = ۰$، $c_۳ = ۰$، $c_۴ = ۱$. بنابراین خواهیم داشت

$$z = -\sin x, \qquad y = \sin x$$

مثال ۱۲. اکسترمم فانکشینال زیر را بیابید.

$$J(Y,Z) = \int_{x_۰}^{x_۱} F(Y', Z')\,dx$$

حل. دستگاه معادلات اویلر - لاگرانژ عبارت‌اند از

$$F_{y'z'} y'' + F_{z'z'} z'' = ۰, \qquad F_{y'y'} y'' + F_{y'z'} z'' = ۰$$

با فرض $F_{y'y'}F_{z'z'}-(F_{y'z'})^{2}\neq 0$ می‌یابیم $y''=0\ ,\ z''=0$، که دارای جواب $y=c_1x+c_2\ ,\ z=c_3x+c_4$ می‌باشند و بیانگر دستگاه معادلات خطوط راست در فضا می‌باشند.

۲. فانکشینالهای شامل مشتقات مراتب بالاتر

فانکشینالی به‌صورت

$$J(Y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,Y,Y',\dots,Y^{(n)})dx$$

را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم

$$Y(x_0)=y_0\ ,\ Y'(x_0)=y'_0,\dots,Y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

$$Y(x_1)=y_1\ ,\ Y'(x_1)=y'_1,\dots,Y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}$$

فرض می‌کنیم تابعی که فانکشینال را اکسترمم می‌کند تابع $y(x)$ باشد. مجدداً مثل بخش اول تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$Y(x)=y(x)+\varepsilon Z(x)\Rightarrow$$

که به ازای $\varepsilon=0$ داریم $Y(x)=y(x)$. از طرفی

$$Y'(x)=y'(x)+\varepsilon Z'(x)$$
$$Y''(x)=y''(x)+\varepsilon Z''(x)$$

که در آن $Z\Big|_{x_0}^{x_1}=0$ ، $Z'\Big|_{x_0}^{x_1}=0$ ، ... ، $Z^{(n)}\Big|_{x_0}^{x_1}=0$

و از آنجا

$$J(Y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y'(x)+\varepsilon Z'(x),y''+\varepsilon Z''(x)+\dots+y^{(n)}+\varepsilon Z^{(n)}(x))\,dx=I(\varepsilon)$$

با توجه به بسط تیلور می‌یابیم

$$I(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1}\left\{F(x,y,y',\dots,y^{(n)})+\varepsilon z\frac{\partial F}{\partial y}+\varepsilon z'\frac{\partial F}{\partial y'}+\dots+\varepsilon z^{(n)}\frac{\partial F}{\partial y^{n}}+O(\varepsilon^{2})\right\}$$

با تشکیل $\left.\dfrac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$ می‌یابیم

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(z\frac{\partial F}{\partial y}+z'\frac{\partial F}{\partial y'}+z''\frac{\partial F}{\partial y''}+\dots+z^{(n)}\frac{\partial F}{\partial y^{n}}\right)dx=0 \qquad (۱۲)$$

که در آن

$$\int_{x_0}^{x_1} z' \frac{\partial F}{\partial y'} dx = z \frac{\partial F}{\partial y'}\Bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} z \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})dx = -\int_{x_0}^{x_1} z \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{dy'})dx \qquad (۱۳)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} z'' \frac{\partial F}{\partial y''} dx = z' \frac{\partial F}{\partial y''}\Bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} z' \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y''})dx = -(z \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''})\Bigg|_{x_0}^{x_1}$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} z \frac{d^2}{dx^2}(\frac{\partial F}{\partial y''})dx = \int_{x_0}^{x_1} z \frac{d^2}{dx^2}(\frac{\partial F}{\partial y''})dx$$

و

$$\int_{x_0}^{x_1} z^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^n} dx = (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} z \frac{d^n}{dx^n}(\frac{\partial F}{\partial y^n})dx$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^n}\right] Z\, dx = 0$$

از طرفی با توجه به دلخواه بودن Z می‌یابیم

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^n} = 0$$

معادله‌ی فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام است که به معادله اویلر پواسن موسوم است که با توجه به شرایط

$$Y(x_0) = y_0 \;, \ldots, Y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$
$$Y(x_1) = y_1 \;, \ldots, Y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}$$

به جواب می‌رسیم.

مثال ۱۳. اکسترمم فانکشینال

$$J(Y) = \int_0^1 (1 + Y''^2)dx$$

را با توجه به شرایط کرانه‌ای

$$Y'(1) = 1 \;,\; Y(1) = 1 \;,\; Y'(0) = 1 \;,\; Y(0) = 0$$

بیابید.

حل. معادله اویلر پواسن عبارت است از

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$

یا $y^{(4)}=0$ که دارای جوابی به‌صورت $y=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$ است که با توجه به شرایط داده شده به جواب $y=x$ می‌رسیم.

مثال ۱۴. اکسترمم فانکشینال

$$J(Y)=\int_0^{\pi/2}(Y''^2-Y^2+x^2)dx$$

را با توجه به شرایط زیر بیابید.

$$Y'(\frac{\pi}{2})=1,\quad Y'(0)=0,\quad Y(\frac{\pi}{2})=0\ ,\quad Y(0)=1$$

حل. معادله اویلر پواسن عبارت است از

$$y^{(4)}-y=0$$

که دارای جواب عمومی به صورت

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$

است که با توجه به شرایط داده شده، جواب مساله برابر $y=\cos x$ است.

مثال ۱۵. اکسترمم فانکشینال

$$J(Y)=\int_{-l}^{l}(\frac{1}{2}\mu Y''^2+\rho Y)\,dx$$

را با توجه به شرایط زیر بیابید.

$$Y'(-l)=0\ ,\quad Y'(l)=0\ ,\ Y(-l)=0\ ,\quad Y(l)=0$$

حل. این مساله مربوط به مسائل یک میله همگن است که در مبحث الاستیسیته ظاهر می‌شود. ρ، μ مقادیر ثابت هستند. معادله اویلر پواسن به‌صورت زیر در می‌آید

$$\rho+\frac{d^2}{dx^2}(\mu y'')=0$$

یا $y^{(4)}=-\dfrac{\rho}{\mu}$ که دارای جواب عمومی به صورت

$$y=-\frac{\rho x^4}{24\mu}+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$$

است. لذا با توجه به شرایط کرانه‌ای، $y=-\dfrac{\rho}{24\mu}(x^2-l^2)^2$ جواب مسأله است.

۳. هرگاه داشته باشیم

$$J(Y,Z)=\int_{x_0}^{1}F(x,Y,Y',\dots,Y^{(n)},Z,Z',\dots,Z^{(m)})\,dx$$

آنگاه به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0$$

که با توجه به شرایط داده شده به جواب می‌رسیم. جزئیات کار به متعلم واگذار می‌شود.

۴. فانکشینالهای وابسته به توابع چند متغیره

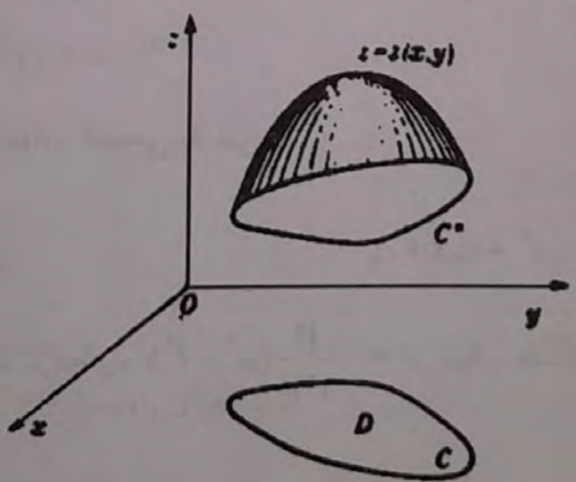
فانکشینال زیر را در نظر بگیرید

$$J(Z(x,y)) = \iint_D F(x,y,Z,\frac{\partial Z}{\partial x},\frac{\partial Z}{\partial y})\,dx\,dy$$

$$= \iint_D P(x,y,Z,p,q)\,dx\,dy \quad , \quad p = \frac{\partial Z}{\partial x},\ q = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

با شرط آنکه همه سطوح $Z = f(x,y)$ بر ناحیه D تعریف شده باشند و در فضا دارای یک مرز مشترک باشند، بدون آنکه به کلیت موضوع خللی وارد شود می‌توان فرض نمود همه این سطوح صفحه xy را بر روی کران D قطع می‌کنند.

هرگاه $z = z(x,y)$ سطحی باشند که فانکشینال مورد نظر و اکسترم می‌کند و $Z = Z(x,y)$ یک سطح دلخواه و هر دو با کران مشترک D باشند آنگاه با فرض $Z(x,y) = Z(x,y) + \varepsilon\, w(x,y)$ می‌یابیم



$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial w}{\partial y}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$I(\varepsilon)=\iint_D F(x,y,z+\varepsilon w,z_x+\varepsilon w_x,z_y+\varepsilon w_y)\,dx\,dy$$

فانکشینال فوق وقتی اکسترمم است که

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

از طرفی با توجه به بسط تیلور

$$F(x,y,z+\varepsilon w,z_x+\varepsilon w_x,z_y+\varepsilon w_y)=F(x,y,z,z_x,z_y)+\varepsilon w\frac{\partial F}{\partial z}+\varepsilon w_x\frac{\partial F}{\partial z_x}+$$
$$+\varepsilon w_y\frac{\partial F}{\partial z_y}+O(\varepsilon^2)$$

بنابراین

$$I(\varepsilon)=\iint_D\left\{F(x,y,z,z_x,z_y)+\varepsilon w\frac{\partial F}{\partial z}+\varepsilon w_x\frac{\partial F}{\partial z_x}+\varepsilon w_y\frac{\partial F}{\partial z_y}+O(\varepsilon^2)\right\}dx\,dy$$

لذا

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\iint_D\left(w\frac{\partial F}{\partial z}+w_x\frac{\partial F}{\partial z_x}+w_y\frac{\partial F}{\partial z_y}\right)dx\,dy=0 \qquad (14)$$

$$\iint_D w_x\frac{\partial F}{\partial z_x}dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}w_x\frac{\partial F}{\partial z_x}dx$$

$$=\int_c^d\left[\left.w\frac{\partial F}{\partial z_x}\right|_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}-\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}w\frac{\partial F}{\partial z_x}dx\right]dy$$

ولی بر کران $x=\varphi_1(y)$ و $x=\varphi_2(y)$ مقدار w برابر صفر است. بنابراین

$$\iint_D w_x\frac{\partial F}{\partial z_x}dx\,dy=-\iint_D w\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x}dx\,dy$$

و همین‌طور

$$\iint_D w_y\frac{\partial F}{\partial z_y}dx\,dy=-\iint_D w\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y}dx\,dy$$

بنابراین (۱۴) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\iint_D w\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y}\right)dx\,dy=0$$

و چون تساوی فوق به ازای هر w برقرار است، بنابراین لازم است که

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y}=0$$

معادله‌ی فوق به معادله استراگرادسکی موسوم است که با فرض $z_x=p$ و $z_y=q$ به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}=0$$

یا

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q=0$$

مثال ۱۶. اکسترمم فانکشینال

$$J(Z(x,y))=\iint_D\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

را طوری بیابید که $Z(x,y)$ بر روی ∂D، کران ناحیه D مقدار مشخص $f(x,y)$ را اختیار کند.

حل. معادله استراگرادسکی به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

که یک معادله لاپلاس است و با فرض

$$Z(x,y)\big|_{\partial D}=f(x,y)$$

به مساله دیریکله تبدیل می‌شود و دارای جوابی یکتا بر D است.

مثال ۱۷. فانکشینال زیر را بررسی کنید.

$$J(Z(x,y))=\iint_D\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2+2Z\,f(x,y)\right]dx\,dy$$

$$z\big|_{\partial D}=f(x,y)$$

حل. معادله استراگرادسکی عبارت است از

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)$$

معادله فوق یک معادله پواسن است که با توجه به شرط داده شده می‌توان به حل آن پرداخت.

مثال ۱۸. از بین همه سطوحی که از یک منحنی بسته C می‌گذرد، سطحی را بیابید که دارای مساحت می‌نیمم باشد.

حل. مساحت چنین سطحی عبارت است از

$$S(Z(x,y) = \iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial Z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial Z}{\partial y})^2}\, dx\, dy$$

با توجه به فرمول استراگرادسکی می‌یابیم

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\} = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(1+(\frac{\partial z}{\partial y})^2\right) - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2) = 0$$

در صورتیکه که داشته باشیم

$$J(Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \iint_D \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

که در آن

$$p_i = \frac{\partial Z}{\partial x_i}$$

در اینصورت فرمول استراگرادسکی به‌صورت $F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(F_{p_i}) = 0$ در می‌آید. مثلاً بر روی فانکشینال

$$J = \iiint_D \left((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2 \right) dx\, dy$$

معادله استراگرادسکی به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

۵. فانکشینالهای وابسته به مشتقات جزیی مراتب بالاتر

هرگاه فانکشینال به مشتقات جزئی مرتبه بالاتر وابسته باشد، مثلاً داشته باشیم

$$J(Z(x,y)) = \iint_D F(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2})\, dx\, dy$$

با فرض

$$t = z_{yy}\ ,\ s = z_{xy}\ ،\quad r = z_{xx}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}$$

می‌یابیم

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}(F_p) - \frac{\partial}{\partial y}(F_q) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_r) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(F_s) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(F_t) = 0$$

مثلاً هرگاه

$$J = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

آنگاه معادله فوق به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \nabla^4 z = 0$$

که یک معادله بایهارمونیک است.

۳-٤ مسائل تغییراتی با کرانهای متحرک و برخی مسائل دیگر

۱. ساده‌ترین مساله با کران متحرک

در مسائل بخش قبل فرض کردیم که نقاط کرانه‌ای (x_0, y_0) و (x_1, y_1) فانکشینال

$$J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y, Y')\,dx$$

ثابت هستند ولی در این بخش می‌خواهیم فرض کنیم که هر دو نقطه کرانه‌ای یا لااقل یک نقطه کرانه‌ای متحرک است. بدیهی است حل مسائل با کرانهای متحرک سبب تغییر در معادله اویلر

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

نخواهد شد بلکه شرایط کرانه‌ای هستند که به دردسر می‌افتند. در هر صورت می‌بایست به نحوی کران را کنترل کرد. معمولاً کران را به‌طور کلی آزاد نمی‌گذارند و فرض می‌کنند کران روی یک منحنی مشخص حرکت کند. برای این منظور فرض می‌کنیم (x_0, y_0) نقطه‌ای ثابت بوده و کران دیگر متحرک باشد و فرض می‌کنیم کران دیگر از نقطه (x_1, y_1) به نقطه $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ حرکت کند. در اینصورت تغییر فانکشینال ناشی از این جابجایی برابر خواهد شد با (بجای Y از نماد y استفاده کرده‌ایم)

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1 + \Delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

(۱۵)

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \delta y, y' + \delta y')dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta_x} \{F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')\}dx$$

از طرفی با توجه به قضیه میانگین

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx = F\Big|_{x=x_1+\theta\delta x_1} \delta x_1, \qquad 0<\theta<1$$

هم‌چنین با توجه به پیوستگی F می‌توان چنین نوشت

$$F\Big|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')\Big|_{x=x_1} + \varepsilon_1$$

هرگاه $\delta x_1 \to 0$ و $\delta y_1 \to 0$، آنگاه $\varepsilon_1 \to 0$ در نتیجه داریم

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx = F(x, y, y')\Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \varepsilon_1 \delta x_1$$

با توجه به فرمول تیلور عبارت دوم طرف راست را چنین می‌نویسیم

$$\int_{x_0}^{x_1} \{F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')\}dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \Big\{F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\,\delta y' + O(\delta x^2, \delta x\,\delta y, \delta y^2)\Big\}dx$$

هم‌اکنون با استفاده از انتگرالگیری به روش جزء به جزء می‌یابیم

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(x, y, y')\delta y\, dx = [F_{y'}\delta_y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}F_{y'}\delta y\, dx$$

چون ابتدای آن ثابت است $\delta y\Big|_{x=x_0} = 0$ بنابراین

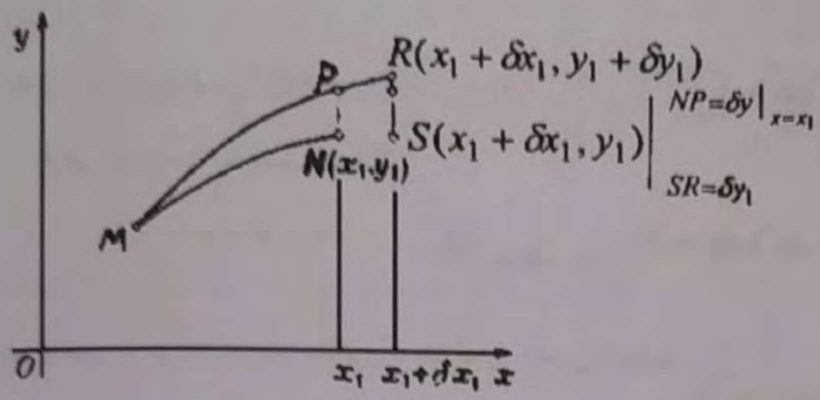
$$\int_{x_0}^{x_1} \{F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')\}\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\Big\{F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y, y')\Big\}\delta y\, dx + [F_{y'}\delta_y]_{x=x_1}$$

ولی نظر به اینکه به ازای مقادیر اکسترمم معادله اویلر - لاگرانژ برقرار است بنابراین $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ و از آنجا

$$\int_{x_0}^{x_1} \{F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y'\}\, dx = [F_{y'}\delta_y]_{x=x_1}$$

توجه کنید که δy با δy_1 برابر نیست.



از طرفی

$$\delta y_1 \cong \delta y + y'(x_1)\delta x_1$$

یا

$$\delta y \cong \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1$$

در نتیجه

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx \cong F(x,y,y')\Big|_{x=x_1} \delta x_1$$

و

$$\int_{x_0}^{x_1}\{F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y')\}\,dx \cong [F_{y'}]_{x=x_1}(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1)$$

بنابراین

$$\delta J \cong F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1)$$
$$=(F - y'F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1$$

برای می‌نیمم شدن فانکشینال لازم است که $\delta J = 0$ و از آنجا

$$(F - y'F_{y'})_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1 = 0 \qquad (۱۶)$$

چون δx_1، δy_1 مستقل هستند، می‌یابیم

$$(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1} = 0, \qquad F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0$$

ولی در بسیاری مسائل همانطور که در اول بحث گفته شد کران انتهایی را مقید می‌کنند که در راستای یک منحنی مثلاً $y_1 = \varphi(x_1)$ حرکت کند، در آن صورت δx_1، δy_1 مستقل نبوده بلکه به هم وابسته‌اند و داریم $\delta y_1 \cong \varphi'(x_1)\delta x_1$ و از آنجا معادله (۱۶) به‌صورت زیر در می‌آید

$$(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\varphi'(x_1)\delta x_1 = (F - y'F_{y'} + \varphi' F_{y'})_{x=x_1}\delta x_1$$

$$= \{F + (\varphi' - y')F_{y'}\}\delta x_1 = 0$$

یا

(۱۷)

$$\left(F + (\varphi' - y')F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1} = 0$$

که رابطه‌ای را بین y' و φ' در نقطه انتهای کران به دست می‌دهد و بـه شـرط ترانـسورسالیتی *transursality* موسوم است.

توجه کنید که هرگاه جواب عمومی معادله اویلر – لاگرانژ $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ را به صورت تابعی مانند $y = f(x, c_1, c_2)$ نشان دهیم، با توجه بـه اینکـه کـران اول آن ثابـت است یکی از اعداد ثابت را می‌تـوان تعیـین نمـود و بـه جـوابی بـه‌صـورت $y = f(x, c)$ رسـید. هم‌اکنون با توجـه بـه ایـن تـابع و رابطـه ترانـسورسالیتی مـی‌تـوان یـک یـا چنـد منحنـی را مابین $y = f(x, c)$ تعیین نمود که فانکشینال را اکسترمم کند.

هرگاه نقطهٔ ابتدایی کران تیز متحرک بود و مثلاً در طول منحنی $y = \psi(x)$ حرکت کند آنگاه رابطه ترانسورسالیتی در این نقطه به‌صورت زیر در می‌آید

(۱۸)

$$\left(F + (\psi' - y')F_{y'}\right)\Big|_{x=x_0} = 0$$

برای روشن شدن مطلب به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱۹. شرط ترانسورسالیتی را برای فانکشینال زیر تعیین کنید

$$J = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

حل. شرط ترانسورسالیتی $F + F_{y'}(\varphi' - y') = 0$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$A(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x, y)y'}{\sqrt{1 + y'^2}}(\varphi' - y') = 0$$

یا

$$\frac{A(x, y)(1 + \varphi'y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

با فرض $A(x, y) \neq 0$ آنگـاه مـی‌یـابیم $1 + y'\varphi' = 0$ یـا $y' = -\frac{1}{\varphi'}$. بنـابراین در اینجـا شـرط ترانسورسالیتی به شرط تعامد بدل می‌شود.

مثال ۲۰. فانکشینال $J(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}dx$ را با شرط $y(0) = 0$ و با توجه به اینکـه نقطـه انتهایی روی خط $y_1 = x_1 - 5$ حرکت کند در نظر بگیرید. اکسترمم این فانکشینال را بیابید.

حل. داریم

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$$

با جایگذاری در معادله اویلر - لاگرانژ خواهیم داشت

$$cy\sqrt{1+y'^2}=1$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $y'=\tan t$ می‌یابیم

$$y=c_1\cos t\,,\qquad c_1=\frac{1}{c}$$

از طرفی

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{-c_1\sin t\,dt}{\tan t}=-c_1\cos t\,dt$$

در نتیجه $x=-c_1\sin t+c_2$. بنابراین با حذف t خواهیم داشت

$$(x-c_2)^2+y^2=c_1^2$$

از $y(0)=0$ می‌یابیم $c_1=c_2$. با مقایسه به مسأله قبل می‌یـابیم $A(x,y)=\frac{1}{y}$. بنـابراین شـرط ترانسورسالیتی به شرط تعامد در این مساله تبدیل می‌شود. بنابراین خط $y_1=x_1-5$ بایـد بـه دایره $(x-c_1)^2+y^2=c_1^2$ عمود باشد و در نتیجه می‌بایست از مرکز دایره بگذرد و یا یک قطر آن باشد. با توجه به اینکه $y_1'=1$ و از روی $y'=-\frac{x-c_1}{y}$ می‌یـابیم $x-c=y$ از طرفـی هـم $y_1-x=-5$، بنابراین $c=5$. لذا دایره مـوردنظر $(x-5)^2+y^2=25$ اسـت کـه مرکـز آن نقطه $(5,0)$ است که واقع بر خط $y_1=x_1-5$ است.

اگر در مساله‌ای نقطه انتهایی کران (x_1,y_1) در طول یک خط قائم حرکت کند، آنگـاه $\delta x_1=0$ و رابطهٔ (۱۶) به‌صورت زیر در می‌آید

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0$$

مثلاً اگر مساله برنولی موردنظر باشد، یعنی فانکشینال به‌صورت زیر باشد

$$J(y)=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

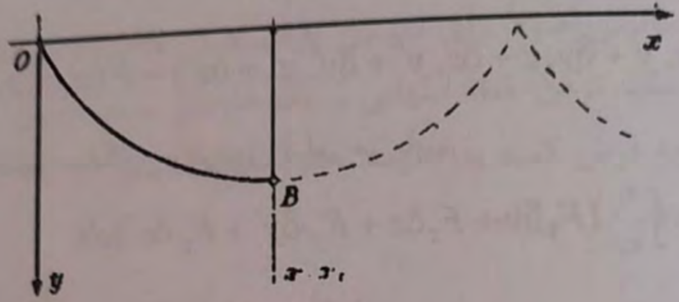
آنگاه جواب آن همواره به‌صورت سیکلوئید خواهد بود و با توجه به اینکه $y(0)=0$ می‌یابیم

$$y=c_1(1-\cos t)\qquad,\qquad x=c_1(t-\sin t)$$

برای تعیین c_1 از تساوی $F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0$ خواهیم داشت

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1} = 0$$

که از آنجا $y'(x_1) = 0$. بنابراین سیکلوئید موردنظر سیکلوئیدی است که در نقطه x_1 بر خطی موازی محور x مماس بوده و یا بر خط قائم عمود باشد. بنابراین نقطه (x_1, y_1) باید پائینترین نقطه سیکلوئید یا نقطه می‌نیمم آن باشد.



و چون این نقطه به ازای $t=\pi$ بدست می‌آید بنابراین

$$x_1 = c_1(\pi - \sin\pi) = c_1\pi, \quad c_1 = \frac{x_1}{\pi}$$

بنابراین منحنی بحرانی برابر است با

$$y = \frac{x_1}{\pi}(1-\cos t), \qquad x = \frac{x_1}{\pi}(t-\sin t)$$

همینطور نقطه انتهایی (x_1, y_1) روی یک خط افقی $y = y_1$ حرکت کند آنگاه $\delta y_1 = 0$ و تساوی (۱۶) به‌صورت زیر در می‌آید

$$[F - y'F_{y'}]_{x=x_1} = 0$$

۲. فانکشینالهای وابسته به منحنیهایی با انتهای متحرک

هم‌اکنون به بررسی فانکشینال زیر با نقاط انتهایی متحرک می‌پردازیم.

$$J(y,z) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$$

فرض می‌کنیم یکی از نقاط کران $M(x_0, y_0, z_0)$ ثابت و نقطه انتهایی کران $N(x_1, y_1, z_1)$ متحرک باشد. معادلات منحنی بحرانی از حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$

حل این دستگاه معادلات به چهار عدد ثابت برمی‌گردد که با توجه به ثابت بودن نقطه اول کران، دو عدد ثابت مشخص و دو عدد ثابت دیگر نامشخص باقی می‌مانند. در هر صورت همانند آنچه قبلاً گفته شد

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')dx-\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx$$
$$=\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1}F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')dx$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\{F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')-F(x,y,z,y',z')\}\,dx$$

مجدداً با بکاربردن قضیه میانگین و فرمول تیلور می‌یابیم

$$\delta J=F\big|_{x=x_1}\delta x_1+\int_{x_0}^{x_1}\{F_y\delta y+F_z\delta z+F_{y'}\delta y'+F_{z'}\delta z'\}dx$$

با انتگرالگیری به روش جزء به جزء خواهیم داشت

$$\delta J=F\big|_{x=x_1}\delta x_1+[F_{y'}\delta y]_{x=x_1}+[F_{z'}\delta z]_{x=x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left\{(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta y+(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'})\delta z\right\}dx$$

و چون فانکشینال در طول منحنی بحرانی مورد بررسی است، بنابراین

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0 \quad \text{و} \quad F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

لذا

$$\delta J=F\big|_{x=x_1}\delta x_1+[F_{y'}\delta y]_{x=x_1}+[F_{z'}\delta z]_{x=x_1}$$

همانند آنچه در گذشته بیان شد می‌توان نوشت

$$\delta z\big|_{x=x_1}=\delta z_1-z'(x_1)\delta x_1 \quad \text{و} \quad \delta y\big|_{x=x_1}=\delta y_1-y'(x_1)\delta x_1$$

و در نتیجه

(۱۸)

$$\delta J=[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]\big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}\big|_{x=x_1}\delta z_1=0$$

با توجه به شرایط اکسترمم پی می‌بریم $\delta J=0$. اگر نقطه انتهایی به‌طور دلخواه تغییر کند آنگاه δx_1 ، δy_1 و δz_1 مستقل بوده و خواهیم داشت

$$F_{z'}\Big|_{x=x_1}=0,\qquad F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0,\qquad [F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]\Big|_{x=x_1}=0$$

حال اگر نقطه انتهایی (x_1, y_1, z_1) مقید به حرکت روی یک منحنی $y=\varphi(x)$ و $z=\psi(x)$ باشد آنگاه شرط (۱۸) به صورت زیر در می‌آید

$$\{F+(\varphi-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}\}\Big|_{x=x_1}\delta x_1=0$$

و چون δx_1 اختیاری است بنابراین شرط ترانسورسالیتی زیر حاصل می‌شود

$$\{F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\varphi'-z')F_{z'}\}\Big|_{x=x_1}=0$$

ولی این شرط ترانسورسالیتی اصولاً برای تعیین پارامترهای موجود در منحنیهای اکسترمم کفایت نمی‌کند، یعنی مقیدکردن نقطه انتهایی بر یک منحنی سبب تعیین منحنی‌های بحرانی نخواهد شد. ولی چنانچه فرض کنیم به جای منحنی، نقطه انتهایی بر یک سطح $z=\varphi(x,y)$ حرکت کند آنگاه در (x_1, y_1) می‌یابیم

$$\delta z_1=\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta y_1 \tag{19}$$

که در آن δx_1 و δy_1 مستقل هستند. بنابراین شرط $\delta J=0$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\{F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]\Big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}\Big|_{x=x_1}\delta z_1=0$$

با جایگزین کردن (۱۹) در آن می‌یابیم

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}+\varphi'_xF_{z'}]\Big|_{x=x_1}\delta x_1++[F_{y'}+F_z\varphi'_y]\Big|_{x=x_1}\delta y_1=0$$

و لذا به خاطر مستقل و اختیاری بودن δx_1 و δy_1 خواهیم داشت

$$[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F'_z]\Big|_{x=x_1}=0$$

$$[F_{y'}+F'_z\varphi'_y]\Big|_{x=x_1}=0$$

که شرایط ترانسورسالیتی بوده و برای تعیین مقادیر ثابت در منحنیهای بحرانی تفاوت می‌کند.

۳. فانکشینالهای وابسته به چند تابع

فرض کنید داشته باشیم

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y'_1,y'_2,\dots,y'_n)\,dx$$

و نقطه ابتدایی $M(x_0, y_{10}, y_{20},\dots,y_{n0})$ ثابت و نقطه $N(x_1, y_{11}, y_{21},\dots,y_{n1})$ متحرک است،

آنگاه می‌یابیم

$$(F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i})\Big|_{x=x_1}\delta x_1+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i}'\Big|_{x=x_1}\delta y_{c1}=0$$

جزئیات کار به متعلم واگذار می‌شود.

مثال ۲۱. شرایط ترانسورسالیتی را برای فانکشینال

$$J(y,z)=\int_{x_0}^{x_1} A(y,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

طوری تعیین کنید که نقطه انتهایی بر سطح $z=\varphi(x,y)$ حرکت کند.

حل. شرایط ترانسورسالیتی عبارت‌اند از

$$[F_{y'}+F_{z'}\varphi_y']\Big|_{x=x_1}=0,\qquad [F-y'F_{y'}+(\varphi_x'-z')F_{z'}]\Big|_{x=x_1}=0$$

بنابراین خواهیم داشت

$$y'+\varphi_y'z'=0,\qquad 1+\varphi_x'z'=0$$

یا

$$\frac{1}{\varphi_x'}=\frac{y'}{\varphi_y'}=\frac{z'}{-1}$$

و این بدان معنی است که بردار مماس $(1,y',z')$ بر منحنی بحرانی در نقطه (x_1,y_1,z_1) و بردار قائم بر سطح $z=\varphi(x,y)$ در همان نقطه با هم موازی هستند. بنابراین شرط ترانسورسالیتی در این حالت به شرط تعامد بر سطح $z=\varphi(x,y)$ بر می‌گردد.

مثال ۲۲. مقدار بحرانی فانکشینال

$$J(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

را با توجه به اینکه $z_0=\varphi(x_0,y_0)$ و $z_1=\varphi_1(x_1,y_1)$ بیابید.

حل. به عبارت دیگر می‌خواهیم کوتاهترین فاصله‌ی بین دو سطح $z=\varphi(x,y)$ و $z=\psi(x,y)$ را می‌یابیم. چون تابع انتگراند تنها به y' و z' وابسته است بنابراین جواب یک خط راست است و چون فانکشینال $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y^2}+z'^2dx$ حالت خاصی از $\int_{x_0}^{x_1}A(x,y,z)\sqrt{1+x'^2+z'^2}dx$ به ازای $A=1$ است، شرط ترانسورسلیتی به شرط تعامد برمی‌گردد. بنابراین جواب ما خطی است که بر سطوح $z=\varphi(x,y)$ در (x_0,y_0,z_0) و $z=\psi(x,y)$ در (x_1,y_1,z_1) عمود است. یعنی خط را باید طوری جابجا کرد که بر هر دو سطح عمود باشد.

مثال ۲۳. اکسترمم فانکشینال

$$J(y,z)=\int_{0}^{x_1}(y'^2+z'^2+2yz)\,dx\ ,\ \ y(0)=0, z(0)=0$$

را طوری بیابید که نقطه (x_1, y_1, z_1) در صفحه $x=x_1$ حرکت کند.

حل. دستگاه معادلات اویلر - لاگرانژ به‌صورت

$$y''-z=0, \qquad z''-y=0$$

در می‌آیند و از آنجا $y^{(4)}-y=0$ که دارای جواب عمومی به‌صورت

$$y=c_1\cosh x+c_2\sinh x+c_3\cos x+c_4\sin x$$

است و هم‌چنین

$$z=y''=c_1\cosh x+c_2\sinh x-c_3\cos x-c_4\sin x$$

با توجه به شرایط $y(0)=0$ و $z=(0)=0$ می‌یابیم $c_1+c_3=0$ و $c_1-c_3=0$، در نتیجه $c_1=c_3=0$. به جهت آنکه حرکت در صفحه $x=x_1$ صورت می‌پذیرد و $\delta z_1=0$ از معادله

$$[F-y'F_y-z'F_{z'}]\Big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}\Big|_{z=z_1}\delta z_1=0$$

می‌یابیم

$$F_{z'}\Big|_{z=z_1}=0, \qquad F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0$$

چون در این مسأله $F_{y'}=2y'$ و $F_{z'}=2z'$، در نتیجه

$$z'(x_1)=0, \qquad y'(x_1)=0$$

یا

$$c_2\cosh x_1-c_4\cos x_1=0\ , \qquad c_2\cosh x_1+c_4\cos x_1=0$$

هرگاه $\cos x_1\neq 0$ آنگاه $c_2=c_4=0$. بنابراین اکسترمم تنها وقتی اتفاق می‌افتد که محاسبه در طول خط راست $x=0$ و $z=0$ یکی در طول محور xها باشد.

در حالتی که $\cos x_1=0$ آنگاه $x_1=n\pi+\frac{\pi}{2}$، در نتیجه $c_2=0$ و c_4 دلخواه خواهد بود به‌طوری که $y=c_4\sin x\ ,\ z=-c_4\cos x$ و در این حالت برای c_4 دلخواه داریم $J=0$.

۴. مسائلی با کرانهای متحرک و با فانکشینالهایی به‌صورت زیر

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')\,dx$$

در بخش اول فرض کردیم که

$$y'(x_1)=y'_1,\ y(x_1)=y_1 \qquad y'(x_0)=y'_0\ , \qquad y(x_0)=y_0$$

مقادیر ثابتی هستند. اگر برخی از این مقادیر متغیر باشند، آنگاه مساله را با کران متحرک می‌نامیم. در هر صورت منحنی بحرانی، جواب معادله (معادله اویلر پواسن) زیر است.

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$$

این معادله دارای جواب عمومی به صورت $y = y(x_1, c_1, c_2, c_3, c_4)$ است که به چهار پارامتر وابسته است.

چهار شرط برای تعیین این چهار پارامتر لازم است.

برای حل مساله فرض می‌کنیم y, y' در ابتدا مشخص باشند یعنی $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$ در دست باشند و سایر مقادیر یعنی $y(x_1)$ و $y'(x_1)$ متغیر باشند با شرایط داده شده دو پارامتر را می‌توان از جواب حذف نمود و تنها دو پارامتر در جواب باقی می‌مانند. همانند بخش اول می‌توان نوشت

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'')\,dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \{F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'') - F(x, y, y', y'')\}\,dx$$

با به کار بردن قضیه میانگین و توجه به پیوستگی توابع F, $y(x), y'(x), y''(x)$ می‌یابیم

$$\delta J = F(x, y, y', y'')\big|_{x=x_1} \delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} \{F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y'' + O(\delta y^2, \delta y\delta y', \delta y^2)\}\,dx$$

در نتیجه

$$\delta J = F\big|_{x=x_1} \delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} \{F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y''\}\,dx$$

با انتگرالگیری به روش جزءبجزء و توجه به اینکه $\delta y\big|_{x=x_0} = 0$ ، $\delta y'\big|_{x=x_0} = 0$ و

$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$ می‌یابیم

$$\delta J = \left(F\delta x_1 + F_{y'}\delta y + F_{y''}\delta y' - \frac{d}{dx}(F_{y''})\delta y \right)\Bigg|_{x=x_1}$$

با جایگذاری $\delta y_1 = y'(x_1)\delta x_1 + (\delta y)_{x=x_1}$ و $\delta y'_1 = y''(x_1)\,\delta x_1 + (\delta y')_{x=x_1}$

در δJ می‌یابیم

$$\delta J = \left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{d}{dx}(F_{y''}) \right]\Bigg|_{x=x_1} \delta x_1$$

$$+\left[F_{y'}-\frac{d}{dx}(F_{y''})\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta y_1+F_{y''}\Big|_{x=x_1}\delta y'_1=0 \qquad (20)$$

در صورت مستقل بودن δ_{x_1}، δy_1 و $\delta y'_1$ می‌یابیم

$$\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{d}{dx}(F_{y''})\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

$$\left[F_{y'}\frac{d}{dx}(F_{y''})\right]\Bigg|_{x=x_1}=0\ ,\ F_{y''}\Big|_{x=x_1}=0$$

و در صورتی که رابطه‌ای بین δx_1، δy_1، $\delta y'_1$ برقرار باشد مثلاً $y_1=\varphi(x_1)$ و $y'_1=\varphi(x_1)$ آنگاه

$$\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1 \quad \text{و} \quad \delta y'_1=\varphi'(x_1)\delta x_1$$

و در نتیجه می‌یابیم

$$\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{d}{dx}(F_{y''})+(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''})\varphi'+F_{y''}\psi'\right]\Bigg|_{x=x_1}\delta x_1=0$$

از اینرو

$$\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{d}{dx}(F_{y''})+(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''})\varphi'+F_{y''}\psi'\right]\Bigg|_{x=x_1}=0$$

این شرط با توجه به معادله $y_1=\varphi(x_1)$ و $y'_1=\psi(x_1)$ برای تعیین اعداد و ثابت کفایت می‌کند. اگر x_1، y_1 و y'_1 با معادله $\varphi(x_1,y_1,y'_1)=0$ به هم مربوط باشند در اینصورت دو تا از سه مقدار δx_1، δy_1، $\delta y'_1$ دیگر وابسته به آنها است و داریم

$$\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta y_1+\varphi'_{y'_1}\delta y'_1=0$$

مثلاً $\delta y'_1$ را می‌توان به‌صورت زیر بر حسب بقیه محاسبه نمود

$$\delta y'_1=-\frac{\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi_{y_1}\delta y_1}{\varphi'_{y'_1}}\ , \qquad \varphi'_{y'_1}\neq 0 \qquad (21)$$

اکنون با جایگذاری آن در (۲۰) و توجه به مستقل از هم‌بودن δx_1 و δy_1 به دو معادله می‌رسیم که به همراه معادله $\varphi(x_1,y_1,y'_1)=0$ قادر به محاسبه x_1، y_1، y'_1 خواهیم شد.

مثال ۲۴. با فرض متغیربودن $y'(1)$، مسأله را برای فانکشینال زیر حل کنید.

$$J(y)=\int_0^1(1+y''^2)dx\ , \quad y(0)=0\ , \quad y'(0)=1\ , \quad y(1)=1$$

حل. معادله اویلر پواسن $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$ در این حالت به‌صورت $y^{(4)} = 0$ در می‌آید که دارای جوابی به صورت $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$ است. با توجه به شرایط داده شده می‌یابیم

$$c_1 = 0,\quad c_2 = 1,\quad c_3 + c_4 = 0$$

چون $\delta x_1 = 0$ و $\delta y_1 = 0$ و با توجه به اینکه $\delta y_1'$ دلخواه است می‌یابیم

$$F_{y''}\Big|_{x=x_1} = 0 \quad \text{یا} \quad y''(1) = 0$$

بنابراین

$$y''(x) = 2c_3 + 6c_4x$$

در $x=1$ داریم $2c_3 + 6c_4 = 0$. از طرفی هم $c_3 + c_4 = 0$، لذا $c_3 = 0$ و $c_4 = 0$. بنابراین اکسترمم تنها روی خط $y = x$ رخ می‌دهد.

۳-۵ شرایط کافی برای یک اکسترمم

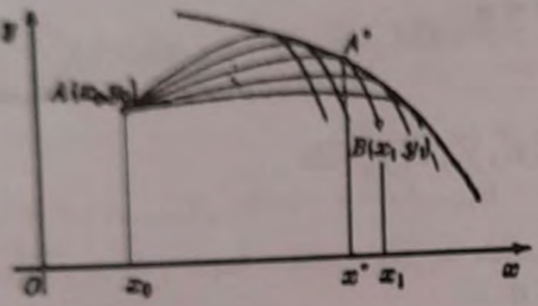
هرگاه از هر نقطه یک ناحیه D واقع در صفحه oxy تنها یک منحنی از خانواده منحنیهای $y=y(x,c)$ بگذرد، آنگاه این خانواده منحنیها را در ناحیه D را یک میدان *Proper* می‌نامیم. $p(x,y)$ ضریب زاویه خط مماس در نقطه $M(x,y)$ واقع بر منحنی در این منحنی را ضریب زاویه میدان در نقطه M می‌نامند.

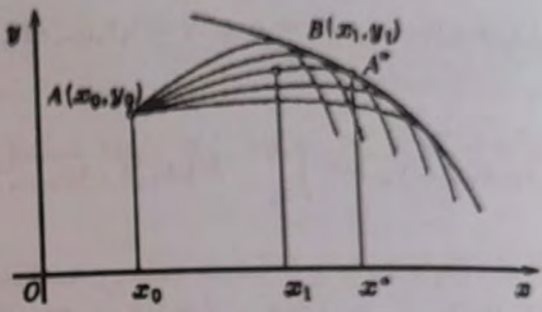
مثلاً خطوط راست $y = x + c$ در داخل دایره $x^2 + y^2 = 1$ تشکیل یک میدان با ضریب زاویه $p(x,y) = 1$ می‌دهند. از طرف دیگر خانواده منحنیهای $y = (x-a)^2 - 1$ تشکیل یک میدان داخل دایره یکه نمی‌دهند. زیرا در داخل آن برخی از منحنیها همدیگر را قطع می‌کنند.

اگر همه منحنیها از یک نقطه در داخل میدان بگذرند و کل میدان را بپوشانند در نقطه دیگری در داخل میدان همدیگر را قطع نکنند آنگاه به چنین خانواده‌ای نمی‌توان یک میدان گفت ولی ما آنها را نیز استثنائاً یک میدان می‌نامیم و برای آنکه با میدان فوق تفاوت بگذاریم آنها را میدانهای مرکزی (*Central fields*) می‌نامیم. مثلاً خانواده منحنیهای $y = c\sin x$ تشکیل میدان مرکزی در ناحیه $0 \le x \le b, b < \pi$ می‌دهند. و حال آنکه تشکیل میدان در فاصله $a \le x \le b\ ,\ a > 0, b < \pi$ می‌دهند.

هرگاه یک میدان سره یا مرکزی از یک خانواده منحنیهای اکسترمم حاصل برای یک مساله تغییراتی حاصل شود آنگاه آنرا میدان اکسترممها می‌نامند.

بحث مربوط به میدان اکسترممها را می‌توان بدون هیچ قید و بندی برای هر فضا با بعدهای اختیاری تعمیم داد. خانواده $i=1,2,\dots,n$ ، $y_i=y_i(x,c_1,\dots,c_n)$ در یک میدان در ناحیه D از فضای $(n+1)$ بعدی $x,y_1,\dots,y_n$ نامند، اگر از هر نقطه این فضای D فقط و فقط یکی از این منحنیها بگذرد. مشتقات جزیی تابع $y_i(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ نسبت به x محاسبه شده در نقطه $(x,y_1,\dots,y_n)$ توابع ضریب زاویه نامیده می‌شوند و با $p_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n)$ نمایش داده می‌شوند.





فرض کنید منحنی $y=y(x)$ یک منحنی بحرانی برای یک مساله تغییراتی مثلاً مساله

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$$

با نقاط ثابت $M(x_0,y_0)$ و $N(x_1,y_1)$ باشد. گوئیم منحنی $y=y(x)$ در میدان منحنی‌های بحرانی تابعی مجاز است اگر خانواده‌ای از منحنی‌های $y=y(x,c)$ که تشکیل میدان می‌دهند موجود بوده و به ازای یک مقدار خاص c مثلاً $c=c_0$ یک منحنی از این خانواده به منحنی $y=y(x)$ بدل شود و در ضمن روی کران D نباشد.

مثال ۲۵. فانکشنال

$$J(y)=\int_0^a (y'^2-y^2)\,dx$$

مفروض است. یک میدان مرکزی برای منحنیهای بحرانی طوری پیدا کنید که منحنی بحرانی $y=0$ نقاط $(0,0)$ و $(a,0)$ را با فرض $0<a<\pi$ بهم وصل کند.

حل. معادله اویلر - لاگرانژ برای فانکشنال فوق به‌صورت $y''+y=0$ بوده که دارای جواب عمومی $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ است. نظر به اینکه منحنی بحرانی خواسته شده می‌بایست از نقطه $(0,0)$ بگذرد می‌یابیم $c_1=0$ و $y=c_2\sin x$، به‌طوری که منحنیهای اخیر در میدان $0\le x\le a<\pi$ تشکیل یک میدان مرکزی می‌دهند. به ازای $c_2=0$ منحنی بحرانی $y=0$

حاصل می‌شود، c_2 ضرب زاویه میدان در نقطه $(\circ,\circ)$ است. اگر $a \geq \pi$ آنگاه میدانی در کار نخواهد بود.

۳-۶ مسائل تغییراتی مقید

فرض کنید بخواهیم فانکشینال

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{x_\circ}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx$$

را طوری اکسترمم کنیم که شرایط زیر نیز برقرار باشند.

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \circ \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m \ , \quad m < n$$

قضیه. مقدار اکسترمم فانکشینال

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{x_\circ}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx$$

با قیود

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \circ \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m \ , \ m < n$$

را می‌توان از روی فانکشینال زیر و معادلات قیود به دست آورد

$$J^* = \int_{x_\circ}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \varphi_i \right) dx = \int_{x_\circ}^{x_1} F^* dx$$

یعنی مقادیر اکسترمم مورد نظر و هم‌چنین $\lambda_i(x)$ از روی

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = \circ \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

و معادلات قیود

$$\varphi_i = \circ \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

حاصل می‌شود.

معادلات $\varphi_i = \circ$ را همچنین می‌توان به‌عنوان معادلات اویلر فانکشینال J^* مورد بررسی قرار داد، در صورتی که نه فقط $y_1, y_2, \ldots, y_n$ بلکه $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ را نیز متغیرهای فانکشینال J^* در نظر بگیریم معادلات

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_i) = \circ \ , \quad i = 1, 2, \ldots,$$

مستقل فرض می‌شوند، یعنی یک ژاکوبین از مرتبه m مخالف صفر مثلاً

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq \circ$$

موجود است.

اثبات. با تشکیل δJ از روی

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$$

و فرض اکسترمم کردن این فانکشینال، با قراردادن $\delta J = 0$ می‌یابیم

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} (Fy_j \delta y_j + Fy_j' \delta y_j')dx = 0$$

همانند گذشته با انتگرالگیری از عبارت دوم به روش جزء بجزء و توجه به اینکه $(\delta y_j)_{x=x_0} = 0, (\delta y_j)' = \delta y_i'$ و $(\delta y_j)_{x=x_1} = 0$ می‌یابیم

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} (Fy_j \delta y_i - \frac{d}{dx} Fy_j' \delta y_j')dx = 0 \qquad (22)$$

نظر به اینکه $y_1, y_2, \ldots, y_n$ با m رابطه مستقل زیر به هم وابسته‌اند

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

δy_iها دلخواه نبوده و از قضیه اساسی حساب تغییرات نمی‌توان استفاده نمود. δy_j در m رابطه زیر صادق است

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

در بین n عبارت $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$، m تمامی آنها به هم وابسته و n-m تای آنها مستقل هستند. بدون آنکه به کلیت موضوع خللی وارد شود آنها را $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_m$ و $\delta y_{m+1}, \ldots, \delta y_n$ می گیریم.

با ضرب طرفین تساوی $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j = 0$ در $\lambda_i(x)\, dx$ و انتگرالگیری از آن در فاصله x_0 تا x_1 و جمع کردن آن از $i = 1$ تا $i = n$ خواهیم داشت

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j dx = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (23)$$

هم‌اکنون با جمع کردن آن با (۲۲) می‌یابیم

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right) \delta y_j dx = 0 \qquad (24)$$

با قراردادن

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \varphi_i$$

(۲۴) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}(F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j})\delta y_j dx=0$$

هم‌اکنون ضرایب $\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_m(x)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که m معادله زیر را داشته باشیم

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0\ ,\qquad j=1,2,...,m$$

یا

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\delta\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_j}=0,\qquad j=1,2,...,m$$

این یک دستگاه معادلات نسبت به λ_i با ژاکوبین غیرصفر

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m)}{D(y_1,y_2,...,y_m)}\neq 0$$

است. در نتیجه، برای این سیستم جوابی به‌صورت

$$\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_m(x)$$

موجود است. با چنین انتخابی از λها شرط لازم برای اکسترمم

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}(F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j})\delta y_j dx$$

به‌صورت زیر در می‌آید

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=m+1}^{n}(F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j})\delta y_j dx=0$$

و به جهت مستقل بودن $\delta y_{m+1},...,\delta y_n$ می‌یابیم

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0\ ,\qquad j=m+1,m+2,...,n$$

با توجه به اینکه

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0\ ,\qquad j=1,2,...,m$$

بنابراین شرایط وجود اکسترمم به‌صورت زیر در می‌آید

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0\ ,\qquad j=1,2,...,n$$

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,...,y_n)=0\ ,\qquad i=1,2,...,n$$

مثال ۲۶. کوتاهترین فاصله بین دو نقطه $M(x_0, y_0, z_0)$ ، $N(x_1, y_1, z_1)$ واقع بر سطح $\varphi(x, y, z)$ را بیابید.

حل. فاصله بین دو نقطه M و N عبارت است از

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

که در آن $y = y(x)$ ، $z = z(x)$ ، $x = x$ معادلات منحنی واقع بین دو نقطه M، N است. می‌بایست می‌نیمم فانکشینال فوق را با قید $\varphi(x, y, z)$ بیابیم. برای یافتن می‌نیمم مزبور از فانکشینال کمکی

$$l^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\varphi(x, y, z)\right) dx$$

استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه $F^* = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda(x)\varphi(x, y, z)$ و با نوشتن معادلات اویلر

$$F_y^* - \frac{d}{dx} F_{y'}^* = 0, \quad F^* - \frac{d}{dx} F_{z'}^* = 0$$

می‌یابیم

$$\lambda(x)\varphi_y - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

$$\lambda(x)\varphi_z - \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

با حل دستگاه معادلات فوق و قید $\varphi(x, y, z) = 0$ مقادیر $\lambda(x), z(x), y(x)$ مشخص می‌شود. به عبارت دیگر اکسترممی برای فانکشینال با توجه قید داده شده حاصل می‌شود.

۳-۷ مساله هم‌پیرامونی

مساله هم‌پیرامونی پیدا کردن منحنی است واقع در یک صفحه با طول ثابت به‌طوری که مساحت داخل آن ماکزیمم باشد. هرگاه چنین منحنیهایی با طول ثابت را با معادلات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ در نظر بگیریم آنگاه منظور یافتن ماکزیمم فانکشینال

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy' - yx')\, dt \quad \text{یا} \quad S = \int_{t_0}^{t_1} x\, y' dt$$

با توجه به اینکه فانکشینال $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$ دارای مقدار ثابت l باشد، است. بنابراین در این مسأله با یک فانکشینال مقید سروکار داریم. حالتی کلی‌تر از این مساله یافتن اکسترمم برای فانکشینال

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)\, dx$$

با توجه به قید

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)\, dx = l_i \,, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن l_i ها ثابت هستند موردنظر است. قیود این چنینی را شرایط هم‌پیرامونی می‌نامند.
برای تعیین چنین اکسترممی $z_i(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$z_i(x) = \int_{x_0}^{x} F_i dx \,, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

به‌طوری که $z_i(x_0) = 0$ ، $z_i(x_1) = l_i$ با مشتقگیری از z_i نسبت به x داریم

$$z'_i(x) = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

بدین طریق بجای قیود انتگرالی می‌توان از قیود فوق استفاده نمود. بنابراین کافی است فانکشینال

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)\, dx$$

را با توجه به قید زیر اکسترمم کنیم

$$F_i - z'_i = 0 \,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

بدین منظور فانکشینال زیر را در نظر می‌گیریم

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \Big(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z'_i)\Big)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx$$

که در آن

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z'_i)$$

معادلات اویلر - لاگرانژ عبارت‌اند از

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \,, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$$F^*_{z_i} - \frac{d}{dx} F^*_{z'_i} = 0 \,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

یا

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial F_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\Big(F_{y'_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial y'_j}\Big) = 0 \,, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_i(x) = 0 \,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

از روی m معادله آخر پی می‌بریم که λ_iها مقادیر ثابت بوده و n معادله اول، معـادلات اویلـر - لاگرانژ برای فانکشینال زیر هستند.

$$J^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i)\, dx$$

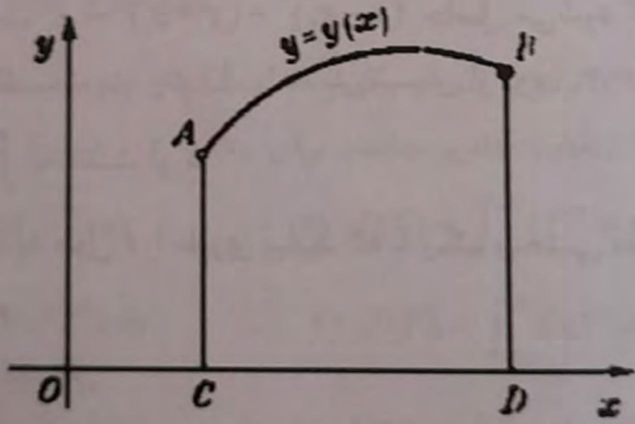
بنابراین بـرای پیـداکردن اکـسترمم مقیـد مـوردنظر کـافی اسـت از معـادلات اویلـر - لاگرانـژ فانکشینال کمکی فوق استفاده کنیم. مقـادیر ثابـت $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ در جـواب عمـومی دسـتگاه معادلات اویلر - لاگرانژ و همچنین مقادیر ثابت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ را از روی شرایط کرانه‌ای

$$y_j(x_0) = y_{j0}, \qquad y_j(x_1) = y_{j1}$$

و شرایط هم‌پیرامونی زیر به دست می‌آیند.

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i\, dx = l_i \;, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

مثال ۲۷. منحنی‌ای با طول ثابت l را طوری پیدا کنید که مـساحت ذوزنقـه‌ای شـکل $ABCD$ زیر دارای مساحت ماکزیمم باشد.



حل. کافی است که اکسترمم فانکشینال

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\, dx \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1$$

را با توجه به شرط هم‌پیرامونی

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 1$$

بیابیم. بدین منظور اکسترمم فانکشینال کمکی زیر را می‌یابیم

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda\sqrt{1 + y'^2})\, dx$$

نظر به اینکه انتگراند شامل x نیست جواب معادله اویلر – لاگرانژ متناظر با فانکشینال S^{**} را می‌توان از روی $F - y'F_{y'} = c_1$ به دست آورد. در مورد مساله فوق این معادله به‌صورت زیر در می‌آید

$$y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y_2'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

و از آنجا

$$y - c_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$$

با فرض $y' = \tan t$ می‌یابیم $y - c_1 = -\lambda\cos t$ و از روی

$$dx = \frac{dy}{\tan t} = \frac{\lambda \sin t\, dt}{\tan t} = \lambda \cos t\, dt$$

می‌یابیم $x = \lambda \sin t + c_2$. در نتیجه معادلات پارامتری منحنیهای اکسترمم عبارت‌اند از

$$x - c_2 = \lambda \sin t$$

$$y - c_1 = -\lambda \cos t$$

با حذف t بین آنها رابطه $(x-c_2)^2 + (y-c_1)^2 = \lambda^2$ حاصل می‌شود که خانواده‌ای از دوایر هستند. مقادیر ثابت c_1، c_2 و λ را می‌توان از روی $y(x_0) = y_0$، $y(x_1) = y_1$ و $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = l$ به دست آورد.

مثال ۲۸. منحنی AB به طول l را طوری بیابید که با یک منحنی مفروض $y = f(x)$ دارای مساحتی ماکزیمم باشد.

حل. باید اکسترمم فانکشینال

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y - f(x))\, dx\ , \quad y(x_0) = y_0\ ,\ y(x_1) = y_1$$

را با توجه به شرط

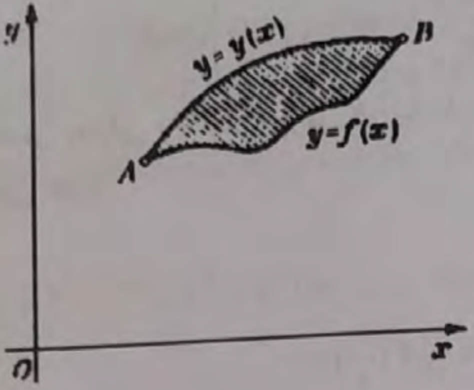
$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = l$$

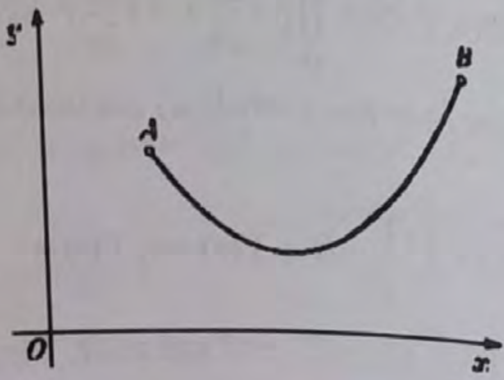
بیابیم.

با تشکیل معادله اویلر – لاگرانژ فانکشینال کمکی

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(y - f(x) + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right) dx$$

شرایط کرانه‌ای و شرط فوق، منحنی اکسترمم حاصل می‌شود.





۸-۳ تمرینات

۱. جواب معادله اویلر-لاگرانژ را در هر یک از مسائل تغییراتی زیر را بیابید.

۱) $J(Y)=\int_{0}^{2}\frac{\sqrt{1+Y'^{2}}}{\sqrt{Y}}\,dx$

۲) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}(Y^{2}+2xYY')\,dx$

۳) $J(Y)=\int_{0}^{1}(2xY-Y^{2}-Y'^{2})\,dx$

۲. جواب معادله اویلر – لاگرانژ را در هر یک از فانکشینالهای زیر بیابید. منحنیهای بحرانی و مقادیر بحرانی آنها را با انتخاب مقادیر مناسب برای x_0 و x_1 و شرایط کرانه‌ای بیابید.

۱) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{Y(1+Y'^{2})}\,dx$

۲) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}(Y'^{2}+2YY'-16Y^{2})\,dx$

۳) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}Y'(1+x^{2}Y')\,dx$

۴) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}(xY'+Y'^{2})\,dx$

۵) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+Y^{2}}{Y'^{2}}\,dx,$

۶) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}(Y^{2}+Y'^{2}-2Y\sin x)\,dx$

۷) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}(16Y^{2}-Y''^{2}+x^{2})\,dx$

۸) $J(Y)=\int_{x_0}^{x_1}(2xY+Y'''^{2})\,dx$

۹) $J(Y,Z)=\int_{x_0}^{x_1}(2YZ-2Y^{2}+Y'^{2}+Z'^{2})\,dx$

۱۰) $J(Y,Z)=\int_{x_0}^{x_1}(Y'^{2}+Z'^{2}+Y'Z')\,dx$

۳. معادله استراگرادسکی را برای فانکشینالهای زیر بیابید.

۱) $J\big(Z(x,y)\big)=\iint_{D}\left((\frac{\partial Z}{\partial x})^{2}-(\frac{\partial Z}{\partial y})^{2}\right)dx\,dy$

۲) $J(u(x,y,z))=\iiint_D\left((\frac{\partial u}{\partial x})^۲+(\frac{\partial u}{\partial y})^۲+(\frac{\partial u}{\partial z})^۲+۲uf(x,y,z)\right)dx\,dy$

۴. منحنی بحرانی و مقدار بحرانی هر یک از فانکشینالهای زیر را یافته و نوع مقدار بحرانی را مشخص کنید.

۱) $J(Y)=\int_۰^۱ \frac{Y'^۲}{x^۳}dx\ ;\ Y(۰)=۰,\ Y(۱)=۱$

۲) $J(Y)=\int_۰^۱ (Y^۲-Y'^۲-۲Y\cos x)dx;\ Y(۰)=۰,\ Y(\frac{\pi}{۲})=۰$

۳) $J(Y)=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (Y^۲-Y'^۲+۲xY)dx;\ Y(۰)=۰,\ Y(\frac{\pi}{۲})=۰$

۴) $J(Y)=\int_۰^{\frac{۳\pi}{۲}} (Y^۲-Y'^۲-۲Y\sin ۲x)\,dx;\ Y(۰)=۰,\ Y(\frac{۳\pi}{۲})=۱$

۵) $J(Y)=\int_۰^{\pi}(-Y'^۲+Y''^۲)dx,\ Y(۰)=۰;\ Y'(۰)=۰,\ Y(\pi)=۱,\ Y'(\pi)=۰$

۵. معادله اویلر- لاگرانژ فانکشینال $J(Y)=\int_{x_۰}^{x_۱}(\lambda^۲Y^۲-Y'^۲-۲Y\sin ۲x)dx$ را بیابید و شرایط کرانه‌ای $Y(x_۰)=y_۰$، $Y(x_۱)=y_۱$ را طوری انتخاب کنید که مقدار بحرانی حاصل می‌نیمم باشد.

۶. منحنی بحرانی و مقدار بحرانی فانکشینالهای زیر را بیابید و در صورت امکان نوع اکسترمم را مشخص کنید.

۱) $J(Y)=\int_۰^۱(Y'^۲+Y^۲+۲Y)\,dx\ ,\ \ Y(۰)=۰,\ \ Y(۱)=۰$

۲) $J(Y)=\int_۰^۱(Y'^۲+Y^۲+۲e^{۲x})\ dx\ ,\ \ Y(۰)=\frac{۱}{۳},\ \ Y(۱)=\frac{۱}{۳}ch۱$

۳) $J(Y)=\int_۰^۱\frac{۱+Y^۲}{Y'^۲}dx\ ,\ \ Y(۰)=۰,\ \ Y(۱)=sh۱$

۴) $J(Y)=\int_۰^۱\sqrt{Y(۱+Y'^۲)}\,dx,\ \ Y(۰)=-۱,\ \ Y(۱)=۱$

۵) $J(Y)=\int_۱^۲ Y'(۱+x^۲Y')\,dx,\ \ Y(۱)=۳,\ \ Y(۲)=۵$

۶) $J(Y)=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\{-Y'^۲+Y^۲+Y(\cos ۲x+\sin ۳x)\}\,dx,\ \ Y(۰)=۰,\ \ Y(\frac{\pi}{۲})=۰$

۷) $J(Y)=\int_۰^{\pi}(Y^۲-۲Y'^۲+Y\cos x)\,dx,\ \ y(۰)=۰,\ \ y(\pi)=۰$

۷. منحنی بحرانی و مقدار بحرانی فانکشینال

$$J(Y)=\int_{\circ}^{1} Y\sqrt{1-Y'^{2}}\,dx, \qquad Y(\circ)=Y(1)=\circ$$

را بیابید و نوع آنرا مشخص کنید. همچنین به کمک روش رایلی ریتز یک کران بالا برای اکسترمم مقدار بحرانی

$$J(Y)=\int_{\circ}^{1} (Y'^{2}+Y^{2}+2Y)\,dx, \qquad Y(\circ)=Y(1)=\circ$$

بیابید.

۸. اکسترمم فانکشینال $J(Y)=\int_{\circ}^{1} Y'\sqrt{1-Y'^{2}}\,dx$ را به ازای $Y(\circ)=\circ$ و $Y(1)=1$ بیابید.

شرط ترانسورسالیتی برای فانکشینال $J(Y)=\int_{\circ}^{x} Y'\sqrt{1-Y'^{2}}\,dx$ به چه شرطی تبدیل می‌شود و سپس اکسترمم آنرا بیابید.

۹. منحنی بحرانی و مقدار بحرانی فانکشینال زیر را بیابید و نوع آنرا مشخص کنید.

$$J(Y)=\int_{\circ}^{1}\{Y'^{2}+4YY'+Y(\cos 2x+\sin 2x)+e^{-x}\}\,dx, \qquad Y(\circ)=Y(1)=\circ$$

۱۰. شرط ترانسورسالیتی را برای فانکشینال

$$J(Y)=\int_{\circ}^{1} A(x,y)\exp\{\arctan Y'\sqrt{1+Y'^{2}}\}\,dx, \qquad A(x,y)\neq \circ$$

بیابید و سپس مساله را در حالت $A(x,y)=x^{2}+y^{2}$ بررسی کنید.

۱۱. معادله اویلر - لاگرانژ را برای فانکشینال زیر بیابید.

$$J(Y)=\int_{x_{\circ}}^{x_{1}} F(x,Y,Y',Y'')\,dx$$

۱۲. فانکشینال $J(Y)=\int_{x_{\circ}}^{x_{1}} F(x,Y,Y'_{1},\dots,Y^{(n)})\,dx$ را با توجه به شرایط

$$Y(x_i)=y_i, Y'(x_i)=y'_i,\dots,Y^{(n-1)}(x_i)=y_i^{(n-1)}, \quad i=\circ,1$$

در نظر بگیرید. منحنیها و مقادیر بحرانی آنرا از حل کدام معادله می‌توان بدست آورد. معادله حاصل را حل کنید.

۱۳. نقطه ثابت $(x_{\circ},y_{\circ})$ و نقطه متحرک (x,y) و فانکشینال $J(Y)=\int_{x_{\circ}}^{x} F(x,Y,Y')\,dx$ را در نظر بیگرید. در این فانکشینال منحنی Y از $(x_{\circ},y_{\circ})$ و (x,y) می‌گذرد. شرط ترانسورسالیتی را بدست آورید.

۱۴. معادله استراگرادسکی را برای معادله زیر بنویسید.

$$J(Z(x,y)) = \iint_D \left((Z_x)^۲ - (Z_y)^۲\right) dx\, dy$$

۱۵. با استفاده از فانکشینال

$$J(Y,Z) = \int_{x_۱}^{x_۲} F(y'(x'), z'(x))\, dx$$

دستگاه معادلات اویلر - لاگرانژ متناظر با آن را به ساده‌ترین صورت خود بنویسید و نشان دهید که منحنی بحرانی که این فانکشینال را می‌نیمم می‌کند خطی راست است، سپس به کمک فانکشینال $J(Y,Z) = \int_۱^۲ \sqrt{۱ + Y'^۲ + Z'^۲}\, dx$ نشان دهید که منحنی بحرانی که دو نقطه $A(۱,۱,۲)$ و $B(۲,۲,۸)$ را بهم وصل می‌کند و این فانکشینال را می‌نیمم می‌کند، خطی مستقیم است. معادله این خط مستقیم را بیابید.

۱۶. منحنی بحرانی و مقدار بحرانی هر یک از فانکشینالهای زیر را در صورت امکان بیابید.

$$۱. J(Y) = \int_۰^۲ (xY' + Y'^۲)dx;\ Y(۰) = ۱,\ Y(۲) = ۰$$

$$۲. J(Y) = \int_{-۱}^۲ Y'(۱ + x^۲ Y')dx;\ Y(-۱) = ۱,\ Y(۲) = ۴$$

$$۳. J(Y) = \int_۰^a (Y'^۲ - ۲YY' - ۱۶Y\ )dx,\ Y(۰) = ۰,\ Y(a) = ۰$$

$$۴. J(Y) = \int_۰^۲ \frac{x^۳}{Y'^۲} dx;\ Y(۱) = ۱,\ Y(۲) = ۴$$

۱۷. سطوح بحرانی و مقدار بحرانی هر یک از فانکشینالهای زیر را با انتخاب مقادیر معین برای $x_۰$ و $x_۱$ و شرایط کرانه‌ای مناسب بیابید.

$$۱. J(Y) = \int_{x_۰}^{x_۱} (۱۶Y^۲ - Y''^۲ + x^۲)dx$$

$$۲. J(Y) = \int_{x_۰}^{x_۱} (۲xY + Y'''^۲)dx$$

$$۳. J(Y,Z) = \int_{x_۰}^{x_۱} (۲YZ - ۲Y^۲ + Y'^۲ - Z'^۲)dx$$

$$۴. J(Y,Z) = \int_{x_۰}^{x_۱} (Y'^۲ + Z'^۲ + Y'Z')dx$$

$$۵. J(Z) = \iint_D (Z_x^۲ + Z_y^۲ - Z^۲)\, dx\, dy$$