۴

نگاشت به وسیلهٔ توابع مقدماتی

تعبیر هندسی تابع یك متغیرهٔ مختلط به عنوان نگاشت، یا تبدیل، در بخش ۱۰ ارائه شد. در آنجا خاطر نشان ساختیم که طبیعت چنین تابعی را، تا حدی، می‌توان از روی نحوهٔ نگاشتن برخی منحنیها و نواحی با شکل نمایش داد.

دراین فصل خواهیم دید که چگونه منحنیها و نواحی گوناگون به وسیلهٔ توابع تحلیلی مقدماتی نگاشته می‌شوند. کاربرد چنین نتایجی در مسائل فیزیکی، بعداً در فصول ۹ و ۱۰ تشریح خواهد شد.

۳۱. توابع خطی

نگاشت صفحهٔ z بروی صفحهٔ w به وسیلهٔ رابطهٔ

$$w=z+C \tag{1}$$

که در آن C عدد مختلط ثابتی است، انتقالی به وسیلهٔ بردار نمایش C است. یعنی اگر

$$z=x+iy \quad \text{و} \quad C=C_1+iC_2،$$

آنگاه تصویر هرنقطهٔ $(x ، y)$ در صفحهٔ z، نقطهٔ

$$(x+C_1 ، y+C_2)$$

درصفحهٔ w است. چون‌هر نقطه درناحیهٔ مفروضی‌ازصفحهٔ z بدین نحو بتوی‌صفحهٔw نگاشته

می‌شود، ناحیهٔ تصویر از نظرهندسی با ناحیهٔ اولیه همنهشت‌است.

خواص نگاشت تعریف شده با رابطهٔ

$$w = Bz \qquad (B \neq 0), \tag{۲}$$

که درآن B مختلط است، بسهولت با استفاده از صورتهای قطبی z و B به دست می‌آید. زیرا اگر $B = be^{i\beta}$ و $z = re^{i\theta}$ آنگاه

$$w = bre^{i(\beta+\theta)}$$

در نتیجه تبدیل تعریف شده با رابطهٔ (۲)، هر نقطهٔ ناصفر z با مختصات قطبی (r, θ) را بروی نقطهٔ ناصفری کـه مختصاتش $(br, \beta+\theta)$ است می‌نگارد. این نگاشت متشکل از دوران بـردار نمایش z حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ $\beta = \arg B$ و نیز انبساط یا انقباض بردار با ضریب $b = |B|$ می‌باشد. بنابراین، تصویر یك ناحیهٔ مفروض در صفحهٔ z ازنظر هندسی با آن ناحیه متشابه است.

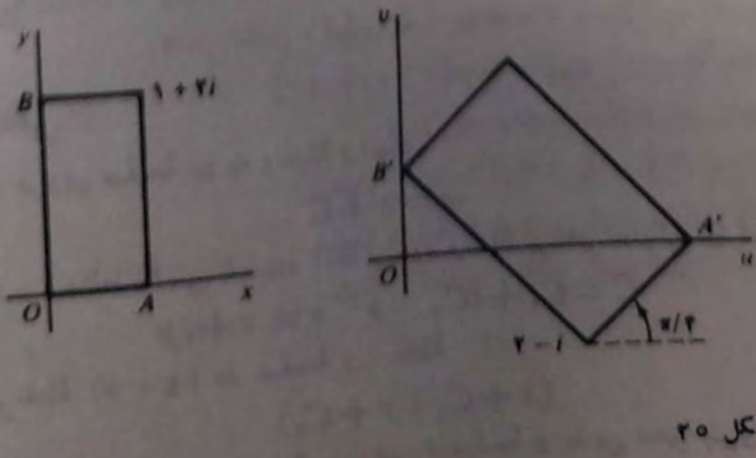
بااعمال‌تبدیل(۱) برمتغیر w در رابطهٔ(۲)، تبدیل خطی کلی‌زیررا به‌دست‌می‌آوریم

$$w = Bz + C \qquad (B \neq 0) \tag{۳}$$

که متشکل‌است از یك‌دوران وانبساط یا انقباضی که به دنبال‌آن یك انتقال‌صورت‌می گیرد. مثلا تبدیل

$$w = (۱+i)z + ۲ - i \tag{۴}$$

ناحیهٔ مستطیلی نشان داده شده در صفحهٔ z شکل ۲۵ را بروی ناحیهٔ مستطیلی نشان داده‌شده در صفحهٔ w می‌نگارد. این مطلب با توجه به اینکه تبدیل (۴) تـرکیبی است از تبدیلات $Z = (۱+i)z$ و $w = Z + ۲ - i$ مشهوداست. چون $۱ + i = \sqrt{۲}\,\exp(i\pi/۴)$، تبدیل اولی دورانی به اندازهٔ $\pi/۴$ و انبساطی با ضریب $\sqrt{۲}$ است. تبدیل دوم انتقالی به وسیلهٔ بردار نمایش $۲ - i$ می‌باشد.



شکل ۲۵

۳۲. تابع $\frac{1}{z}$

رابطهٔ

$$w=\frac{1}{z} \qquad (1)$$

تناظر یك بیکی بین نقاط ناصفر z و w برقرار می کند. چون $z\bar{z}=|z|^2$ نگاشت را می‌توان به وسیلهٔ تبدیلات متوالی زیر بیان کرد

$$Z=\frac{1}{|z|^2}z \text{ ،} \qquad w=\overline{Z}. \qquad (2)$$

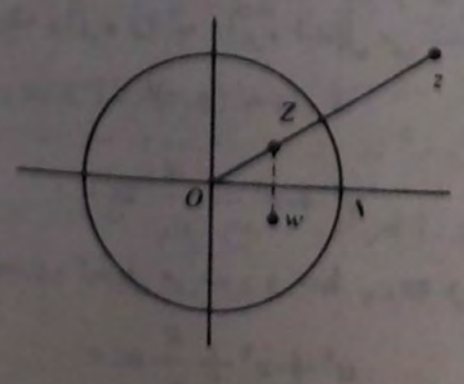
تبدیل اول یك انعکاس نسبت به دایرهٔ $|z|=1$ است. یعنی تصویر نقطهٔ ناصفر z نقطهٔ Z است با خواص

$$|Z|=\frac{1}{|z|} \quad \text{و} \quad \arg Z=\arg z \,.$$

پس نقاط خارج دایرهٔ $|z|=1$ بروی نقاط ناصفر داخل آن نگاشته می‌شوند و بالعکس (شکل ۲۱).

هر نقطه بردایره، بروی خودش نگاشته‌می‌شود. تبدیل دوم از تبدیلهای (۲) فقط یك انعکاس نسبت به محور حقیقی است.

ملاحظه می کنید که تصویر دایرهٔ $|z|=\varepsilon$ دایـرهٔ $|w|=1/\varepsilon$ است. همچنین یك ε همسایگی $|z|<\varepsilon$ ازمبدأ که مبدأ ازآن برداشته‌شده، بایك ε همسایگی $|w|>1/\varepsilon$ از نقطه در بینهایت (بخش ۸) متناظر است. پس طبیعی است که با نوشتن $T(0)=\infty$ ، $T(\infty)=0$



شکل ۲۱

و به ازای بقیهٔ مقادیر z ، $T(z)=1/z$ ، تبدیل Tای برصفحهٔ مختلط توسعه یافته تعریف کنیم. پس این تبدیل T ، نگاشتی است یك بیك وپیوسته ازصفحهٔ مختلط توسعه یافته بروی خودش. پیوستگی این تبدیل درسراسر صفحهٔ توسعه یافته در تمرین ۱۲ (الف) بخش ۱۵ ثابت شد.

اگر a ، b ، c و d اعدادی حقیقی باشند، معادلهٔ

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0,$$

بسته به اینکه $a\neq 0$ یا $a=0$ ، بترتیب ، نمایش دایره یا خط است. وقتی $w=\frac{1}{z}$، این معادله چنین می‌شود

$$d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0,$$

این مطلب بسهولت با استفاده ازمختصات دکارتی وتوجه به اینکه معادلهٔ

$$u+iv=\frac{1}{x+iy}$$

منجر می‌شود به روابط

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

یا

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}\ ,\quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

دیده می‌شود.

بنابراین دایره‌ای $(a\neq 0)$ در صفحهٔ z کــه از مبدأ عبور نکند $(d\neq 0)$ تبدیل به دایره‌ای در صفحهٔ w می‌شودکه از مبدأ عبور نمی‌نماید. یك دایرهٔ ماربــر مبدأ درصفحهٔ z تبدیل به خطی در صفحهٔ w می‌شودکه از مبدأ نمی‌گذرد. خطی در صفحهٔ z که از مبدأعبور نکند تبدیل به دایره‌ای ماربر مبدأ درصفحهٔ w می‌شود. اگر خطوط را درصفحهٔ توسعه یافته به عنوان دوایــر گذرنده از نقطه در بینهایت در نظربگیریم می‌تــوانیم بگوییم کــه تابع Tای که در بالا تعریف شد همیشه دایره را به دایره تبدیل می‌کند.

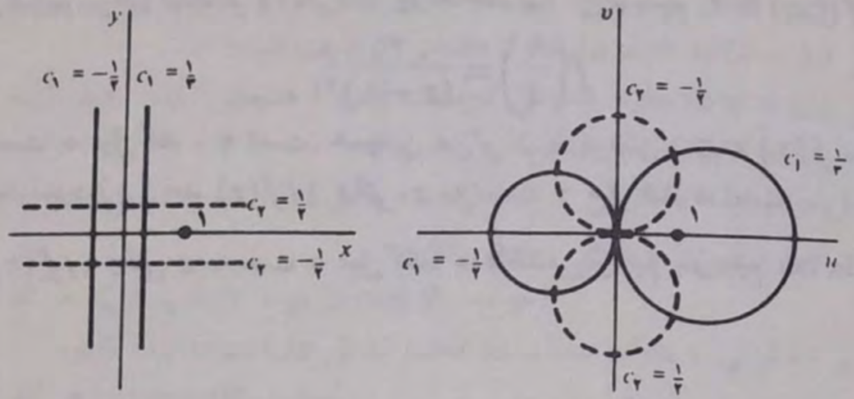
توجه‌کنیدکه خط $x=c_1$ $(c_1\neq 0)$ به دایرهٔ

$$u^2+v^2-\frac{u}{c_1}=0, \tag{۳}$$

که در مبدأ برمحور v مماس است، تبدیل می‌شود و خط $y=c_2$ $(c_2\neq 0)$ بەدایرهٔ

$$u^2+v^2+\frac{v}{c_2}=0 \tag{۴}$$

تبدیل می‌شودکه در مبدأ برمحور u مماس است (شکل ۲۲ را ببینید).



شکل ۳۲

تصویر نیمصفحهٔ $x>c_1$ $(c_1>0)$ عبارت است از ناحیهٔ

$$\frac{u}{u^2+v^2}>c_1, \tag{5}$$

یا

$$\left(u-\frac{1}{2c_1}\right)^2+v^2<\left(\frac{1}{2c_1}\right)^2;$$

بنابراین تصویر هر نقطه در این نیمصفحه، درون دایره‌ای که با معادلهٔ (۳) داده شده واقع است. بالعکس هر نقطه درون دایره، در نامساوی (۵) صدق می‌کند، لذا تصویر یك نقطه‌در این نیمصفحه است. پس تصویر این نیمصفحه، تمام ناحیهٔ مستدیر است.

در بررسی خواص تابع f وقتی نقطه در بینهایت در کاراست، تابع $1/z$ مفیدمی‌باشد. اگر حد $f(z)$ وقتی z به بینهایت میل کند عدد w_0 باشد، می‌توان f را در ∞ مساوی w_0 تعریف کرد تا در آنجا پیوسته باشد. پس می‌نویسیم $f(\infty)=w_0$ عدد w_0 را می‌توان با پیدا کردن حد $f(1/z)$ وقتی z به سمت ۰ میل می‌کند نیز معین نمود. زیرا بنابرتعریف حد (بخش ۱۱)

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=w_0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{z\to 0}f\left(\frac{1}{z}\right)=w_0. \tag{6}$$

به روشی مشابه، اگر حد $1/f(z)$ وقتی z به سمت z_0 میل کند ۰ باشد، می‌توان با نوشتن $f(z_0)=\infty$، f را در z_0 پیوسته نمود. ملاحظه می‌کنیدکه همهٔ اینها باتعریف تابع T از طریق توسعهٔ حوزهٔ تعریف تابع $\frac{1}{z}$، که قبلا دراین بخش ارائه شد، سازگار است.

برای مثال، تابع

$$f(z)=\frac{4z^2}{(1-z)^2}$$

را درنظرمی گیریم. برای اینکه f را در ∞ پیوسته‌سازیم، می‌نویسیم $f(\infty)=4$ زیرا حد

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{4}{(z-1)^2}$$

وقتی z به سمت ۰ میل کند، ۴ است. همچنین می‌توان با نوشتن $f(1)=\infty$، f را در $z=1$ پیوسته نمود زیرا حد $1/f(z)$ وقتی z به سمت ۱ میل کند ۰ است. سرانجام اگر حدتابع $1/f(1/z)$ وقتی z به‌سمت ۰ میل کند، ۰ باشدمی‌توانیم بنویسیم $f(\infty)=\infty$.

تمرینات

۱. نشان دهید که تبدیل $w=iz$ دوران صفحه به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/2$ است. تصویر نوار نامتناهی $0<x<1$ را پیدا کنید.

جواب $0<v<1$.

۲. نشان دهید که تبدیل $w=iz+i$ نیمصفحهٔ $x>0$ را بروی نیمصفحهٔ $v>1$ می‌نگارد.

۳. ناحیه‌ای را پیدا کنید که نیمصفحهٔ $y>0$ تحت تبدیل $w=(1+i)z$ بروی آن‌نگاشته می‌شود. (الف) با استفاده ازمختصات قطبی ؛ (ب) با استفاده ازمختصات دکارتی. این ناحیه را با شکل نمایش دهید.

جواب $v>u$.

۴. تصویر ناحیهٔ $y>1$ را تحت تبدیل $w=(1-i)z$ پیداکنید.

۵. تصویر نوارنیمه نامتناهی $0<y<2$ ، $x>0$ را تحت تبدیل $w=iz+1$ پیداکنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.

جواب $-1<u<1$ ، $v>0$.

۶. از تبدیل $w=B(z+C)$ که در آن B و C اعداد مختلط ثابت‌اند و $B\neq 0$ توصیفی هندسی ارائه دهید.

۷. نشان‌دهید که اگر $c_1>0$، تصویر نیمصفحهٔ $x<c_1$ تحت تبدیل $w=1/z$ داخل یك دایره‌است. اگر $c_1=0$ ، تصویرچیست؟

۸. نشان دهید که تصویر نیمصفحهٔ $y>c_2$ تحت تبدیل $w=1/z$ داخل یك دایره است، مشروط براینکه $c_2>0$. تصویر را وقتی $c_2<0$ پیدا کنید. همچنین تصویر را وقتی $c_2=0$ ، پیدا نمایید.

۹. تصویر نوار نیمه نامتناهی $0<y<1/(2c)$ را تحت تبدیل $w=1/z$ پیدا کنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.

جواب $u^2+(v+c)^2>c^2$ ، $v<0$.

۱۰. تصویر ربع صفحهٔ $x>1$ ، $y>0$ را تحت تبدیل $w=1/z$ پیدا کنید.

جواب $\left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ ، $v<0$.

۱۱. درستی نگاشت نواحی و قسمتهایی ازکرانه‌های نشان داده شده در (الف) شکل ۴

ضمیمهٔ ۲ ؛ (ب) شکل ۵ ضمیمهٔ ۲ ، را تحت تبدیل $w = 1/z$ ، تحقیق کنید .
۱۲. تبدیل $w = 1/(z-1)$ را بطور هندسی توصیف کنید.
۱۳. تبدیل $w = i/z$ را بطور هندسی توصیف کنید ؛ همچنین نشان دهید که این تبدیل ، دایره و خط را به دایره وخط تبدیل می کند .
۱۴. تصویر نوار نیمه نامتناهی $x \geqslant 0$ ، $0 \leqslant y \leqslant 1$ را تحت تبدیل $w = i/z$ پیدا کنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.
جواب $\rho \geqslant \cos\varphi$ ، $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ که $w = \rho e^{i\varphi}$.
۱۵. تصویر هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را تحت تبدیل $w = 1/z$ پیدا کنید.
جواب $\rho^2 = \cos 2\varphi$ که $w = \rho e^{i\varphi}$.
۱۶. فرض کنیم دایرهٔ $|z| = 1$ دارای جهت مثبت، یا جهت عکس‌حرکت عقربه‌های‌ساعت، باشد. جهت تصویر این دایره تحت تبدیل $w = 1/z$ را معین کنید .
۱۷. نشان‌دهید که‌هر گاه‌دایره‌ای تحت تبدیل $w = 1/z$ به دایره تبدیل‌شودمرکزدایرهٔ اولی هیچ وقت بروی مرکز دایرهٔ تصویر نگاشته نمی‌شود .
۱۸. حکم (۶) بخش ۳۲ را ثابت کنید .
۱۹. نشان‌دهید که

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad \text{اگر وفقط اگر} \quad \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0 .$$

۲۰. $f(-1)$ و $f(\infty)$ را به قسمی معین کنید که اگر

$$f(z) = \frac{-z+1}{z+1} \qquad (z \neq -1, \infty),$$

تابع f در صفحهٔ توسعه یافته پیوسته باشد.
جواب $f(\infty) = -1$ ، $f(-1) = \infty$.

۳۳. تبدیل خطی کسری

تبدیل

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0), \tag{1}$$

که درآن a ، b ، c و d اعداد مختلط ثابتی‌هستند ، تبدیل خطی‌کسری یا تبدیل موبیوس[1] نامیده می‌شود . وقتی $c = 0$ ، این تبدیل تنها یك تبدیل خطی است (بخش ۳۱) . وقتی $c \neq 0$، رابطهٔ (۱) رامی‌توان چنین‌نوشت

1. Möbius

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\,\frac{۱}{cz+d}, \qquad (۲)$$

و واضح است که شرط $ad-bc\neq ۰$ نشان می‌دهد که تبدیل خطی کسری، تابع ثابتی نیست.

وقتی که کسرها برداشته شوند رابطهٔ (۱) به صورت

$$Azw+Bz+Cw+D=۰ \qquad (۳)$$

درمی‌آید که برحسب z و برحسب w خطی است، یا برحسب z و w دوخطی است. بنابراین، اسم دیگر تبدیل خطی کسری تبدیل دوخطی است.

با حل معادلهٔ (۱) نسبت به z درمی‌یابیم که

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a}. \qquad (۴)$$

بنابراین، اگر $c=۰$، هر نقطه درصفحهٔ w تصویر یك وفقط یك نقطه در صفحهٔ z است؛ اگر $c\neq ۰$، همین مطلب بجز برای حالت $w=a/c$، درست است. حال حوزهٔ تعریف تبدیل (۱) را توسعه می‌دهیم تا تبدیل خطی کسری Tای برصفحهٔ توسعه یافتهٔ z تعریف نماییم. ابتدا می‌نویسیم

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}. \qquad (۵)$$

سپس می‌نویسیم $T(\infty)=\infty$ اگر $c=۰$ و می‌نویسیم $T(-d/c)=\infty$ و $T(\infty)=a/c$ اگر $c\neq ۰$. اینها با قرارداد آخر بخش قبل مطابقت دارند.

وقتی حوزهٔ تعریف بدین روش توسعه می‌یابد، تبدیل خطی کسری (۱) نگاشتی یك بیك ازصفحهٔ مختلط توسعه یافته بروی خودش می‌شود. یعنی $T(z_۱)\neq T(z_۲)$ هر گاه $z_۱\neq z_۲$ و به ازای هر نقطهٔ w در صفحهٔ توسعه یافته، نقطهٔ zای در آن صفحه هست که $T(z)=w$. بنابراین در ارتباط با تبدیل T، تبدیل معکوس $T^{-۱}$ای موجود است که برصفحهٔ توسعه یافته به شکل زیر تعریف می‌شود:

$T^{-۱}(w)=z$ اگر وفقط اگر $T(z)=w$.

اگر دراین تعریف و در معادلهٔ (۴) z و w را با هم تعویض کنیم درمی‌یابیم که

$$T^{-۱}(z)=\frac{-dz+b}{cz-a} \qquad (ad-bc\neq ۰).$$

بنابراین، خود $T^{-۱}$ تبدیل خطی کسری است که در آن $T^{-۱}(\infty)=\infty$ اگر $c=۰$، و $T^{-۱}(a/c)=\infty$ و $T^{-۱}(\infty)=-d/c$ اگر $c\neq ۰$.

اگر S و T دو تبدیل خطی کسری باشند آنگاه ترکیب $S[T(z)]$ نیز چنین است. با ترکیب عباراتی از نوع (۵)، درستی این مطلب را می‌توان تحقیق کرد.

قبلا ملاحظه کردیم که اگر $c=۰$، تبدیل خطی کسری (۱) از نوع خاص $w=Bz+C$ $(B\neq ۰)$ است. از طرف دیگر، اگر $c\neq ۰$، صورت (۲) معادلهٔ (۱) نشان می‌دهد که تبدیل خطی کسری ترکیبی از انواع خاص زیر است

$$Z=cz+d\ ,\ W=\frac{1}{Z}\ ,\quad w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}W\ .$$

بدین ترتیب نتیجه می‌شود که تبدیل خطی‌کسری ، دایره را به دایره تبدیل می‌کند زیرا این تبدیلات خطی‌کسری خاص واجد این خاصیت‌اند (بخشهای ۳۱ و ۳۲ را ببینید) . دراینجا خطوط در صفحهٔ توسعه یافته به عنوان دوایر ماربر نقطه در بینهایت درنظر گرفته می‌شوند .

دقیقاً یك تبدیل خطی کسری موجود است که سه نقطهٔ مفروض ومتمایز z_1 ، z_2 و z_3 را ، بترتیب، بروی سه نقطهٔ مشخص ومتمایز w_1 ، w_2 و w_3 می‌نگارد . در واقع ، رابطهٔ

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \tag{۶}$$

چنین تبدیلی را تعریف می کند. برای تحقیق درستی آن، ابتدا توجه کنید که رابطهٔ (۶) را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned}(z-z_3)(w-w_1)(z_2-z_1)(w_2-w_3)=\\(z-z_1)(w-w_3)(z_2-z_3)(w_2-w_1),\end{aligned} \tag{۷}$$

که این به نوبهٔ خود با بسط ضربها می‌تواند به صورت (۳) درآید. سپس ملاحظه کنید که اگر $z=z_1$ ، سمت راست رابطهٔ (۷) صفر می‌شود و درنتیجه $w=w_1$. همین طور اگر $z=z_3$، سمت‌چپ صفرمی‌شود وبالنتیجه $w=w_3$. اگر $z=z_2$ ، معادلهٔ خطی

$$(w-w_1)(w_2-w_3)=(w-w_3)(w_2-w_1)$$

را به‌دست می‌آوریم که جواب یکتایش $w=w_2$ است. به‌عنوان تمرین نشان دهید که رابطهٔ (۶) تنها تبدیل خطی کسری را تعریف می کند که نقاط z_1 ، z_2 و z_3 را ، بترتیب ، به w_1 ، w_2 و w_3 می نگارد.

در رابطهٔ (۶) ، نقطه در بینهایت‌را می‌توان به‌عنوان یکی ازنقاط داده شده درصفحهٔ z یاصفحهٔ w مطرح کرد . مثلا اگر w_2 ، ∞ باشد در آن رابطه w_2 را به $1/w_2$ تبدیل می‌نماییم وسپس، بعد از برداشتن کسرها درصورت ومخرج‌سمت چپ، می‌نویسیم $w_2=0$. با این عمل رابطهٔ زیرحاصل می‌شود

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\ . \tag{۸}$$

برای روشن شدن مطلب ، تبدیل خطی کسری T ای را تعیین می کنیم که $z_1=1$ ، $z_2=0$ و $z_3=-1$ را ، بترتیب ، بروی $w_1=i$ ، $w_2=\infty$ و $w_3=1$ می‌نگارد. اگر مقادیر مفروض z_1 ، z_2 ، z_3 و w_1 ، w_3 را در رابطهٔ (۸) جایگزین کنیم درمی‌یابیم که

$$w=\frac{(1+i)z+(i-1)}{2z}\ .$$

بسهولت تحقیق می‌شود که نقاط مفروض درصفحهٔ z بروی نقاط مشخص درصفحهٔ w نگاشته می‌شوند .

۳۴. تبدیلات خطی کسری خاص

حال همهٔ تبدیلات خطی کسری‌ای رامعین می کنیم که نیمصفحهٔ بالایی $\operatorname{Im} z \geqslant 0$، رابروی قرص واحد $|w| \leqslant 1$ می‌نگارند.

چون تبدیل خطی کسری

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0) \tag{1}$$

هرخط درصفحهٔ z را به دایره یاخطی در صفحهٔ w تبدیل می کند، می‌دانیم که کرانهٔ این نیمصفحه، $\operatorname{Im} z=0$، را به‌یك دایره یایك خط تبدیل می کند. درواقع کرانهٔ $\operatorname{Im} z=0$ باید به‌یك دایره تبدیل‌شود زیرا تصویرش‌درقرص $|w| \leqslant 1$ واقع و درنتیجه کراندار است. حال فرض کنیم که نقاطی براین دایره موجود باشند که در داخل قرص واقع‌اند. پس چون رابطهٔ(۱) تابع پیوسته‌ای از z را تعریف می کند، نقطه‌ای‌درست زیرمحور x وجودخواهد داشت‌که بروی نقطه‌ای نزدیك آن دایره و درون قرص نگاشته شود. چون نگاشت‌نیمصفحه بروی قرص است، این نقطه همچنین تصویر نقطه‌ای روی (یا بالای) محور x خواهد بود. ولی، این با یك‌بیك بودن تبدیل خطی کسری‌ای که برتمام‌صفحه تعریف شود متناقض است. در نتیجه تصویر کرانهٔ نیمصفحه، $\operatorname{Im} z=0$، بایدکرانهٔ قرص، $|w|=1$، باشد.

حال یك تبدیل خطی کسری ازخط $\operatorname{Im} z=0$ بروی دایرهٔ $|w|=1$ بطوریکتا معین می‌شود هر گاه بخواهیم که سه نقطهٔ مفروض برخط را بروی سه نقطهٔ مشخص دایره بنگارد. نقاط $z=0$، $z=1$ و $z=\infty$ را روی خط انتخاب می کنیم و همهٔ تبدیلات به صورت (۱) راکه‌این نقاط را بروی نقاطی واقع بردایره می‌نگارند،معین می کنیم.

به‌استناد رابطهٔ (۱)، این‌شرط‌که $|w|=1$ وقتی $z=0$ و $z=\infty$، منجر به‌روابط

$$|d|=|b|, \tag{2}$$

$$|c|=|a| \tag{3}$$

می‌شود. از رابطهٔ (۳) و اینکه $ad-bc\neq 0$ نتیجه می‌شودکه $a\neq 0$ و $c\neq 0$. بنابراین

$$w=\frac{a}{c}\,\frac{z+b/a}{z+d/c},$$

یا، چون $|a/c|=1$،

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-z_1} \tag{4}$$

که درآن α یك عدد حقیقی ثابت و z_0 و z_1 اعداد مختلط ثابتی هستند. چون $|b/a|=|d/c|$، بنابر روابط (۲) و (۳)، معلوم می‌شودکه $|z_1|=|z_0|$. حال این شرط را روی رابطهٔ (۴) می گذاریم که $|w|=1$ هر گاه $z=1$. درنتیجه

$$|1-z_1|=|1-z_0|,$$

یا

$$(1-z_1)(1-\bar z_1)=(1-z_0)(1-\bar z_0).$$

اما $z_1\bar z_1=z_0\bar z_0$ زیرا $|z_1|=|z_0|$، و رابطهٔ فوق به

$$z_1+\bar z_1=z_0+\bar z_0,$$

یا $\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_0$ تحویل می‌یابد. مجدداً چون $|z_1|=|z_0|$، نتیجه‌می‌شود که $z_1=z_0$ یا $z_1=\bar z_0$. شرط $z_1=z_0$ منجر به نگاشت $w=\exp(i\alpha)$ از صفحهٔ z بروی نقطه‌ای تک می‌شود، پس، $z_1=\bar z_0$.

بنابراین، تبدیل مطلوب باید به صورت

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar z_0} \tag{۵}$$

باشد. ملاحظه می کنید که نقطهٔ $w=0$ تصویر z_0 است، بنابراین نقطهٔ z_0 باید در بالای محور حقیقی باشد یا

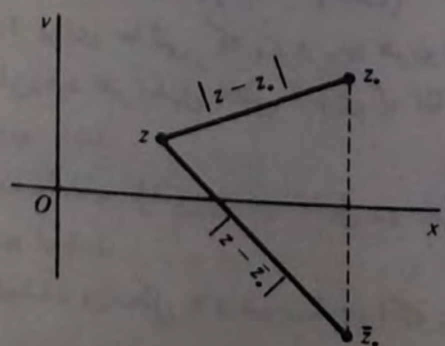
$$\operatorname{Im} z_0>0. \tag{۶}$$

حال نشان می‌دهیم که با شرط (۶)، تبدیل (۵) عملا نیمصفحهٔ $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ را بروی قرص $|w|\leqslant 1$ می‌نگارد. این عمل‌را با تعبیرهندسی رابطهٔ

$$|w|=\frac{|z-z_0|}{|z-\bar z_0|}$$

انجام می‌دهیم. اگر نقطهٔ z در بالای محور حقیقی باشد، این نقطه و نقطهٔ z_0 در یك طرف محوری واقع‌اند که عمود منصف پاره خط واصل بین z_0 و $\bar z_0$ است. در نتیجه، فاصلهٔ $|z-z_0|$ ازفاصلهٔ $|z-\bar z_0|$ کوچکتر است (شکل ۲۳) یعنی $|w|<1$. همچنین اگر z زیر محور حقیقی‌واقع باشد، فاصلهٔ $|z-z_0|$ ازفاصلهٔ $|z-\bar z_0|$ بزرگتراست‌وبنابراین $|w|>1$. چون‌هر تبدیل خطی کسری‌نگاشت یك‌بیکی ازصفحهٔ توسعه یافته بروی خودش است‌بنابراین هر نقطهٔ w که $|w|<1$ باید تصویردقیقاً یك نقطه دربالای محور حقیقی باشد.

نتیجه می گیریم که هر تبدیل خطی کسری به صورت (۵) که عدد حقیقی α دلخواه و قسمت موهومی عدد مختلط z_0 مثبت است، به‌روشی یك بیك نیمصفحهٔ $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ را بروی قرص $|w|\leqslant 1$ می‌نگارد.



شکل ۲۳

این نتیجه را می‌توان برای تشریح اینکه‌چرا تبدیل همانی‌ضرورتاً تنها تبدیلی‌نیست که ناحیهٔ‌مفروضی را بروی‌خودش می‌نگارد به‌کار برد. در واقع هر تبدیل‌خطی کسری به‌صورت

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1} \tag{۷}$$

که درآن α حقیقی و $|z_0|<1$، به‌روشی یك‌بیك قرص $|z|\leqslant 1$ را بروی قرص $|w|\leqslant 1$ می‌نگارد. اثبات این مطلب را جزو تمرینات گذاشته‌ایم.

تمرینات

۱. تبدیـل خطی کسری‌ای پیدا کنید که نقاط $z_1=2$ ، $z_2=i$ ، $z_3=-2$ را بروی نقاط $w_1=1$ ، $w_2=i$ ، $w_3=-1$ می نگارد.

جواب $w=(3z+2i)/(iz+6)$.

۲. تبدیل خطی کسری‌ای پیدا کنید که نقاط $z_1=-i$ ، $z_2=0$ ، $z_3=i$ را بروی نقاط $w_1=-1$ ، $w_2=i$ ، $w_3=1$ بنگارد. محورموهومی به‌چه‌منحنی‌ای تبدیل می‌شود؟

۳. تبدیـل دوخطی‌ای پیدا کنید کـه نقاط $z_1=\infty$ ، $z_2=i$ ، $z_3=0$ را بـروی نقاط $w_1=0$ ، $w_2=i$ ، $w_3=\infty$ بنگارد.

جواب $w=-1/z$.

۴. تبدیل دوخطی‌ای پیدا کنید که نقاط z_1 ، z_2 ، z_3 را بروی نقاط $w_1=0$ ، $w_2=1$ ، $w_3=\infty$ بنگارد.

جواب $w=[(z-z_1)(z_2-z_3)]/[(z-z_3)(z_2-z_1)]$.

۵. نشان‌دهید که ترکیب دوتبدیل خطی کسری خود یك‌تبدیل خطی کسری است.

۶. یك نقطهٔ‌ثابت ازتبدیل $w=f(z)$ ، نقطه‌ای مانند z_0 است به‌قسمی که $z_0=f(z_0)$. نشان‌دهید که هرتبدیل دوخطی، به‌استثنای تبدیل همانی $w=z$ ، حداکثر دونقطهٔ ثابت در صفحهٔ توسعه یافته دارد.

۷. نقاط‌ثابت (تمرین۶)تبدیلات زیر را پیدا کنید

(الف) $w=(z-1)/(z+1)$ ؛ (ب) $w=(6z-9)/z$.

جواب (الف) $z=\pm i$ ؛ (ب) $z=3$.

۸. معادلهٔ (۶) بخش ۳۳ را برای حالتی که z_2 و w_2 هردونقطه در بینهایت باشند بطور مناسبی تغییر دهید. سپس نشان‌دهید هرتبدیل خطی کسری که نقاط ثابتش (تمرین ۶) ۰ و ∞ هستند باید به‌صورت $w=az$ باشد.

۹. ثابت‌کنید اگر مبدا یك‌نقطهٔ ثابت(تمرین ۶) تبدیل دوخطی‌ای باشد، تبدیل را می‌توان به‌صورت $w=z/(cz+d)$ نوشت.

۱۰. درستی نگاشت‌نشان‌داده‌شده درشکل ۱۲ ضمیمهٔ ۲راکه درآن $w=(z-1)/(z+1)$ تحقیق کنید.

۱۱. اعداد ثابت درتبدیل(۵) بخش ۳۴ را به‌قسمی تعیین کنید که نیمصفحهٔ $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ را

بروی قرص $|w| \leqslant 1$ بنگارد به‌طوری که تصاویر نقاط $z=\infty$ ، $z=0$ و $z=1$ ، بترتیب، نقاط $w=-1$ ، $w=1$ و $w=i$ باشند. نشان‌دهید که تصویر محور x مثبت، نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|w|=1$ است. سپس درستی نگاشتی را که در شکل ۱۳ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده است تحقیق کنید.

۱۲. با استفاده از تبدیل $w=(i-z)/(i+z)$ ، که درشکل ۱۳ ضمیمهٔ ۲ نشان داده‌شده است، نشان دهید که با تبدیل خطی کسری $w=(z-2)/z$ قرص $|z-1| \leqslant 1$ بروی نیمصفحهٔ $\mathrm{Re}\, w \leqslant 0$ نگاشته می‌شود.

راهنمایی: ابتدا قرص مفروض‌را به‌اندازهٔ یك‌واحد به‌سمت چپ انتقال دهید. سپس معکوس تبدیل مذکور در ضمیمهٔ ۲ را به‌کار برید و به‌دنبال آن، دورانی به‌اندازهٔ $\pi/2$ رادیان انجام دهید.

۱۳. تبدیل (۵) بخش ۳۴، باشرط (۶) آن، نقطهٔ $z=\infty$ را بروی نقطهٔ $w=\exp(i\alpha)$ که بر کرانهٔ قرص $|w| \leqslant 1$ واقع است می‌نگارد. نشان‌دهید که اگر $0<\alpha<2\pi$ و نقاط $z=0$ و $z=1$ ، بترتیب ، بروی نقاط $w=1$ و $w=\exp(i\alpha/2)$ نگاشته شوند، تبدیل را می‌توان چنین نوشت

$$w=\exp(i\alpha)\frac{z+\exp(-i\alpha/2)}{z+\exp(i\alpha/2)}$$

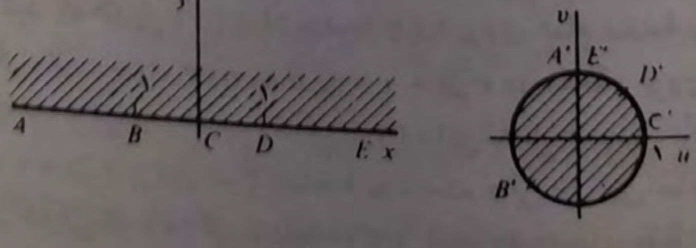
۱۴. توجه کنید که وقتی $\alpha=\pi/2$، تبدیل تمرین ۱۳ چنین می‌شود

$$w=\frac{iz+\exp(i\pi/4)}{z+\exp(i\pi/4)} \cdot$$

تحقیق کنید که این حالت خاص، نیمصفحهٔ $\mathrm{Im}\, z>0$ وپاره‌خطهای کرانه‌اش را به‌نحوی می‌نگارد که درشکل ۲۴ نشان‌داده‌شده است.

۱۵. نشان‌دهید که وقتی $\mathrm{Im}\, z_0>0$، تبدیل(۵) بخش ۳۴ نیمصفحهٔ پائینی $\mathrm{Im}\, z \leqslant 0$ را بروی قرص واحد $|w| \leqslant 1$ می‌نگارد.

۱۶. تبدیل (۷) بخش ۳۴ را استنتاج کنید.



$$w=\frac{iz+e^{i\pi/4}}{z+e^{i\pi/4}}$$

شکل ۲۴

راهنمایی: می‌توان تبدیلات خطی کسری متوالی به کار برد، به‌این‌ترتیب که ابتدا قرص $|z| \leqslant 1$ را بروی نیمصفحهٔ $\operatorname{Im} Z \geqslant 0$ وسپس آن نیمصفحه را بروی قرص $|w| \leqslant 1$ نگاشت.

۱۷. نشان‌دهید که‌وقتی $z_0 = 0$، تبدیل (۷) بخش ۳۴ دورانی به‌اندازهٔ زاویهٔ $\alpha + \pi$ حول مبدأ است.

۱۸. نشان‌دهید که هیچ تبدیل خطی‌کسری ای به‌صورت (۷)، بخش ۳۴، وجود ندارد که‌قرص $|z| \leqslant 1$ را بروی‌قرص $|w| \leqslant 1$ بنگارد به‌قسمی که نقاط $z_1 = 1$ ، $z_2 = i$ ، $z_3 = -1$ دارای تصاویر $w_1 = 1$ ، $w_2 = -i$ ، $w_3 = -1$ باشند.

۱۹. نشان‌دهید که رابطهٔ (۶) بخش ۳۳ تنها تبدیل خطی کسری‌ای را تعریف می کند که سه‌نقطهٔ مفروض z_1 ، z_2 و z_3 را، بترتیب، بروی سه‌نقطهٔ متمایز و مشخص w_1 ، w_2 و w_3 می نگارد.

راهنمایی: فرض کنید S و T چنین تبدیلات خطی کسری باشند. سپس بااستفاده از نتیجهٔ تمرین ۶ ، نشان دهید که $w = S^{-1}[T(z)]$ تبدیل همانی $w = z$ است.

۲۰. ثابت کنید که اگر یک‌تبدیل دوخطی هرنقطهٔ محور x را بتوی محور u بنگارد آنگاه، همهٔ ضرایب موجود دراین تبدیل حقیقی‌اند، مگر محتملا بایك عامل مشترك مختلط. عکس این‌حکم بدیهی است.

۳۵ . تابع z^n

ابتدا تبدیل

$$w = z^2 \tag{1}$$

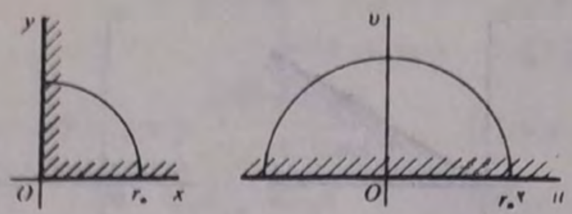
را درنظرمی گیریم که بسادگی می توان آن‌را برحسب مختصات‌قطبی بیان کرد. اگر $z = re^{i\theta}$ و $w = \rho e^{i\varphi}$ آنگاه

$$\rho e^{i\varphi} = r^2 e^{i2\theta}$$

بنابراین تصویر هرنقطهٔ ناصفر z بامجذور کردن هنگ و مضاعف کـردن آوندی از z پیدا می‌شود یعنی $|w| = |z|^2$ و $\arg w = 2\arg z$.

ملاحظه می کنید که تبدیل (۱) تمام صفحهٔ z را بروی تمام صفحهٔ w مـی نگارد. این تبدیل نگاشت یك‌بیکی ازربع‌اول $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ ، $r \geqslant 0$ درصفحهٔ z بروی نیمصفحهٔ بالایی صفحهٔ w، $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ ، $\rho \geqslant 0$ ، است (شکل ۲۵) . این‌تبدیل همچنین نگاشتی از نیمصفحهٔ بالایی $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ، $r \geqslant 0$ بروی تمام صفحهٔ w است. ولی در این حالت تبدیل یك‌یك نیست‌زیرامحورهای حقیقی‌مثبت ومنفی درصفحهٔ z هردو بروی محور حقیقی مثبت درصفحهٔ w نگاشته می‌شوند.

دایـرهٔ $r = r_0$ به‌دایرهٔ $\rho = r_0^2$ تبدیل و قطاع $r \leqslant r_0$ ، $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ بـه روشی



شکل ۲۵ $w=z^2$

یک‌بیک بروی ناحیهٔ نیمدایره‌ای $\rho\leqslant r_0^2$ ، $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ نگاشته می‌شود (شکل ۲۵).

در مختصات دکارتی تبدیل $w=z^2$ چنین می‌شود

$$u+iv=x^2-y^2+i2xy .$$

بنابراین، تصویر هذلولی $x^2-y^2=c_1$ $(c_1\neq 0)$ خط $u=c_1$ و تصویر هذلولی $2xy=c_2$ $(c_2\neq 0)$ خط $v=c_2$ است. این هذلولیها درفصل ۲ (شکل ۱۷) رسم شده‌اند. دونقطهٔ ناصفر z و $-z$ همیشه دارای یک‌تصویرند و هر نقطهٔ خط $u=c_1$ تصویر دقیقاً دوتا ازاینگونه نقاط درصفحهٔ z است که آن دونقطه برشاخه‌های مختلف هذلولی $x^2-y^2=c_1$ واقع‌اند. پس‌نقاط‌روی‌یک‌شاخهٔ‌خاص این‌هذلولی، بانقاط روی‌خط $u=c_1$ تناظری یک‌بیک دارند.

همچنین، نگاشت هذلولی $2xy=c_2$ بروی خط $v=c_2$ به‌قسمی است که هرشاخه بهروشی یک‌بیک بروی‌آن خط نگاشته می‌شود.

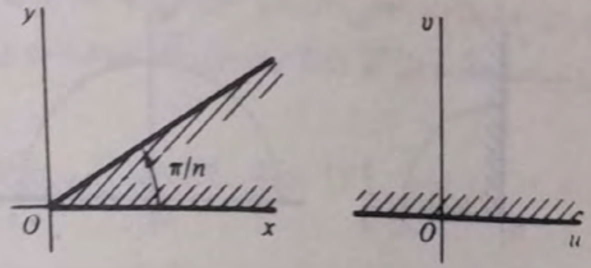
تصاویر نواحی‌ای که کرانه‌هایشان شامل‌چنین هذلولیهایی باشند بسادگی به‌دست می‌آیند. مثلا توجه کنید که حوزهٔ $x>0$ ، $y>0$ ، $xy<1$ متشکل‌از همهٔ‌نقاط واقع برشاخه‌های بالایی هذلولیهایی از خانوادهٔ $xy=c$ است که درآن $0<c<1$. بنابراین تصویر این‌حوزه متشکل ازهمهٔ نقاط‌واقع برخطوط $v=2c$ می‌باشد. یعنی تصویر این‌حوزه نوار افقی $0<v<2$ است.

وقتی n یک‌عدد صحیح و مثبت است، تبدیل

$$w=z^n \quad \text{یا} \quad \rho e^{i\varphi}=r^n e^{in\theta} ، \qquad (۲)$$

ناحیهٔ $r\geqslant 0$ ، $0\leqslant\theta\leqslant\pi/n$ رابروی‌نیم‌صفحهٔ‌بالایی $\rho\geqslant 0$ ، $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ می‌نگارد (شکل ۲۶). تمام‌صفحهٔ z بروی‌تمام‌صفحهٔ w نگاشته می‌شود به‌طوری‌که هر نقطهٔ ناصفر درصفحهٔ w ، تصویر n نقطهٔ متمایز در صفحهٔ z است. دایرهٔ $r=r_0$ بروی‌دایرهٔ $\rho=r_0^n$ وقوس $r=r_0$ ، $0\leqslant\theta<2\pi/n$ بهروشی یک‌بیک بروی دایرهٔ $\rho=r_0^n$ نگاشته می‌شود.

بخش ۳۶



$w = z^n$

شکل ۳۶

۳۶. تابع $z^{1/2}$

بنا بر بخش ۶، مقادیر $z^{1/2}$ دو ریشهٔ دوم zاند وقتی $z \neq 0$. در بخش ۲۸ دیدیم کـه این تابع چندمقداری را نیز می‌توان چنین نوشت

$$z^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\log z\right) \qquad (z \neq 0). \tag{1}$$

اگر ازمختصات قطبی واینکه $\log z = \operatorname{Log} r + i(\Theta + 2k\pi)$، که درآن $r = |z|$، $\Theta = \operatorname{Arg} z$ و $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$، استفاده کنیم رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\,\exp\frac{i(\Theta + 2k\pi)}{2} \qquad (r > 0,\ k = 0, 1). \tag{2}$$

چون تابع‌نمایی مختلط دارای دورهٔ $2\pi i$ است بـه‌ازای هرعددمختلط ناصفر z ایـن فرمول دومقدار $z^{1/2}$ را وقتی $k = 0$ و $k = 1$ به‌دست می‌دهد.

شاخهٔ اصلی F_0 تابع‌چندمقداری $z^{1/2}$، تابع تحلیلی‌ای است کـه از رابطهٔ (۱) بااستفاده از شاخهٔ اصلی $\log z$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر در رابطهٔ (۲) k را مساوی صفر بگیریم درمی‌یابیم که

$$F_0(z) = \sqrt{r}\,\exp\frac{i\Theta}{2} \qquad (r > 0,\ -\pi < \Theta < \pi). \tag{3}$$

پرتو $\Theta = \pi$ بریدگی شاخه برای F_0 ونقطهٔ $z = 0$ نقطهٔ شاخه است. توجه کنید که سمت راست رابطهٔ (۳) برای‌نقاط روی‌بریدگی شاخهٔ F_0 تعریف می‌شود؛ معهذا، تابع‌حاصل از این‌توسعه حتی‌درآنجا پیوسته نیست. علت این‌امر وجود مقادیری از Θ نزدیك به π ونزدیك به $-\pi$ درهرهمسایگی یك‌نقطهٔ محورحقیقی است.

تبدیل $w = F_0(z)$ حوزهٔ $r > 0$، $-\pi < \Theta < \pi$ را بروی نیمهٔ‌سمت‌راست $\rho > 0$، $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ و صفحهٔ w می‌نگارد که $w = \rho e^{i\varphi}$. این تبدیـل همچنین نـاحیهٔ $0 \leqslant r \leqslant r_0$، $-\pi < \Theta < \pi$ را بروی نیمقرص $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{r_0}$، $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

می‌نگارد (شکل ۲۷) زیرا $\rho=\sqrt{r}$ و $\varphi=\Theta/2$.
وقتی دررابطهٔ (۲) $k=1$، شاخهٔ

$$F_1(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i(\Theta+2\pi)}{2} \qquad (r>0,\ -\pi<\Theta<\pi) \tag{۴}$$

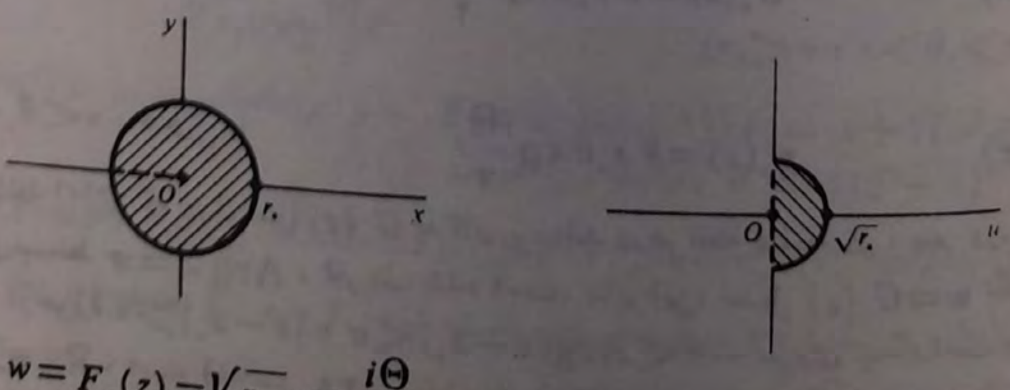
را داریم. چون $\exp(i\pi)=-1$، نتیجه می‌شود که $F_1(z)=-F_0(z)$. بنابراین مقادیر $\pm F_0(z)$ کلیهٔ مقادیر $z^{1/2}$ را درهر نقطه از حوزهٔ $r>0$، $-\pi<\Theta<\pi$ نمایش می‌دهند. اگر، به‌وسیلهٔ عبارت (۳)، حوزهٔ تعریف F_0 را توسعه دهیم تاشامل پرتو $\Theta=\pi$ گردد و اگر بنویسیم $F_0(0)=0$، مقادیر $\pm F_0(z)$ کلیهٔ مقادیر $z^{1/2}$ را درتمام صفحهٔ z نمایش می‌دهند.

بااستفاده از سایرشاخه‌های گوناگون $\log z$ درعبارت (۱)، شاخه‌های بیشتری از $z^{1/2}$ به‌دست می‌آید. شاخه‌ای که درآن پرتو $\theta=\alpha$ بریدگی شاخه است بارابطهٔ

$$f_\alpha(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \qquad (r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi) \tag{۵}$$

داده‌می‌شود. ملاحظه کنید که‌وقتی $\alpha=-\pi$، شاخهٔ $F_0(z)$ و وقتی $\alpha=\pi$ شاخهٔ $F_1(z)$ را داریم. درست مثل حالات F_0 و F_1، بااستفاده از عبارت (۵) برای تعریف f_α در نقاط ناصفر روی بریدگی‌شاخه‌وبانوشتن $f_\alpha(0)=0$، حوزهٔ تعریف f_α را به‌تمام‌صفحهٔ مختلط توسعه می‌دهیم. البته اینگونه توسعه‌ها درتمام صفحه پیوسته نیستند.

توجه به‌این امر که اگر $w=f_\alpha(z)$ آنگاه $z=w^2$ مفید است. مثلا می‌دانیم (بخش ۳۵) که تابع $w=z^2$ نگاشتی یك‌بیك از شاخهٔ هذلولی $2xy=1$، که در ربع اول‌صفحهٔ z واقع است، بروی‌خط $v=1$ درصفحهٔ w می‌باشد. بنابراین بعداز تعویض‌صفحات z و w درمی‌یابیم که شاخهٔ f_0، بابریدگی شاخه $\theta=0$، خط $y=1$ در صفحهٔ z را به‌روشی یك‌بیك بروی‌شاخهٔ هذلولی $2uv=1$ که در ربع اول صفحهٔ w واقع است، می‌نگارد.



$$w=F_0(z)=\sqrt{r}\exp\frac{i\Theta}{2} \qquad (r>0,\ -\pi<\Theta<\pi)$$

شکل ۲۷

۳۷. توابع گنگ دیگر

فرض کنیم n ، عدد صحیح و مثبتی بزرگتر ازیك باشد. وقتی $z\neq 0$ ، مقادیر $z^{1/n}$ ریشه‌های n ام z اند و بنا بر بخش ۲۸ تابع چندمقداری $z^{1/n}$ را می‌توان این‌طور نوشت

$$z^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) \qquad (z\neq 0).$$

چون $\log z=\log r+i(\Theta+2k\pi)$ ، که در آن $r=|z|$ ، $\Theta=\operatorname{Arg} z$ و $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ درمی‌یابیم که

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta+2k\pi)}{n} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1}$$

حالت $n=2$ دربخش قبل درنظر گرفته‌شد. درحالت کلی هریك از n تابع

$$F_k(z)=\sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta+2k\pi)}{n} \tag{2}$$

$$(r>0, -\pi<\Theta<\pi, k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

یك‌شاخهٔ $z^{1/n}$ است. تبدیل $w=F_k(z)$ نگاشت یك بیکی ازحوزهٔ $r>0$ ، $-\pi<\Theta<\pi$ بروی حوزهٔ $\rho>0$ ، $(2k-1)\pi/n<\varphi<(2k+1)\pi/n$ است که در آن $w=\rho e^{i\varphi}$. این n شاخهٔ $z^{1/n}$ درهرنقطهٔ z درحوزهٔ $r>0$ ، $-\pi<\Theta<\pi$ ، n ریشهٔ متمایز z را به‌ما می‌دهند. وقتی $k=0$ ، شاخهٔ اصلی پیدا می‌شود و شاخه‌های بیشتری از نوع (۵) بخش گذشته را بسهولت می‌توان ساخت.

شاخه‌های تابع دومقداری $(z-z_0)^{1/2}$ را می‌توان باتوجه به‌اینکه ترکیبی است از انتقال $Z=z-z_0$ باتابع دومقداری $Z^{1/2}$ به‌دست آورد. هر شاخهٔ $Z^{1/2}$ شاخه‌ای از $(z-z_0)^{1/2}$ را به‌دست‌می‌دهد. به‌منظور به‌دست‌آوردن عباراتی برای‌شاخه‌های $(z-z_0)^{1/2}$، می‌نویسیم $r_0=|z-z_0|$ و $\theta_0=\arg(z-z_0)$ و $\Theta_0=\operatorname{Arg}(z-z_0)$. دوتا از این شاخه‌ها عبارت‌اند از

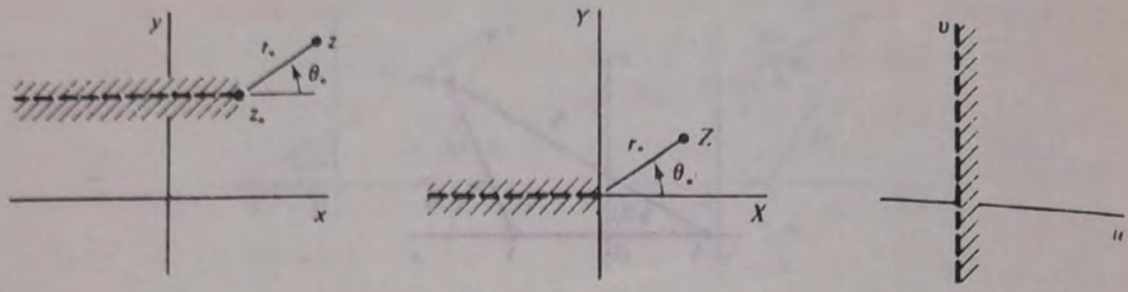
$$G_0(z)=\sqrt{r_0}\exp\frac{i\Theta_0}{2} \qquad (r_0>0, -\pi<\Theta_0<\pi) \tag{3}$$

و

$$g_0(z)=\sqrt{r_0}\exp\frac{i\theta_0}{2} \qquad (r_0>0, 0<\theta_0<2\pi). \tag{4}$$

شاخهٔ $Z^{1/2}$ که درنوشتن $G_0(z)$ به‌کار برده‌شد درهرنقطهٔ صفحهٔ Z ، بجز درمبدأ و نقاط روی‌نیمخط $\operatorname{Arg} Z=\pi$ ، تعریف شده است. بنابراین، تبدیل $w=G_0(z)$ نگاشت یك‌بیکی ازحوزهٔ $|z-z_0|>0$ ، $-\pi<\operatorname{Arg}(z-z_0)<\pi$ بروی نیمهٔ راست صفحهٔ w ، $\operatorname{Re} w>0$ ، است (شکل ۲۸) . تبدیل $w=g_0(z)$ حوزهٔ $|z-z_0|>0$ ، $0<\arg(z-z_0)<2\pi$ رابه‌روشی یك‌بیك بروی‌نیمصفحهٔ بالایی $\operatorname{Im} w>0$ می‌نگارد.

حال به‌عنوان مثالی آموزنده و تاحدی پیشرفته، تابع دومقداری $(z^2-1)^{1/2}$ را در



شکل ۲۸

نظر می‌گیریم. با استفاده ازخواص ثابت‌شدهٔ توابع لگاریتمی می‌نویسیم

$$(z^2-1)^{1/2}=\exp\left[\frac{1}{2}\log(z^2-1)\right] \tag{5}$$
$$=\exp\left[\frac{1}{2}\log(z-1)+\frac{1}{2}\log(z+1)\right]$$
$$=(z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2} \qquad (z\neq\pm 1).$$

بنابراین، اگر $f_1(z)$ شاخه‌ای از $(z-1)^{1/2}$ باشد که برحوزهٔ D_1 تعریف‌شده و f_2 شاخه‌ای از $(z+1)^{1/2}$ باشد که برحوزهٔ D_2 تعریف شده است آنگاه حاصلضرب $f_1(z)f_2(z)$ شاخه‌ای از $(z^2-1)^{1/2}$ است که درهمهٔ نقاط واقع درهردوحوزهٔ D_1 و D_2 تعریف‌شده است.

برای به‌دست‌آوردن شاخهٔ مشخصی از $(z^2-1)^{1/2}$، شاخه‌ای از $(z-1)^{1/2}$ و شاخه‌ای از $(z+1)^{1/2}$ را، که بارابطهٔ (۴) داده شده‌اند به‌کار می‌بریم. اگر بگذاریم $r_1=|z-1|$ و $\theta_1=\arg(z-1)$، آن‌شاخه از $(z-1)^{1/2}$ چنین است

$$\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2} \qquad (r_1>0,\ 0<\theta_1<2\pi).$$

شاخه‌ای از $(z+1)^{1/2}$ که بارابطهٔ (۴) داده می‌شود عبارت است از

$$\sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2} \qquad (r_2>0,\ 0<\theta_2<2\pi)$$

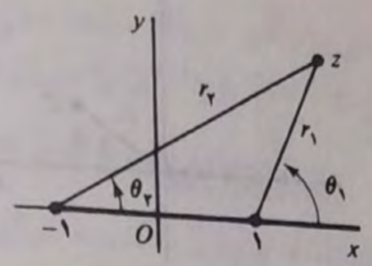
که درآن $r_2=|z+1|$ و $\theta_2=\arg(z+1)$. بنابراین حاصلضرب این دوشاخه، شاخهٔ f از $(z^2-1)^{1/2}$ است که بارابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f(z)=\sqrt{r_1r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2} \qquad (r_1>0,\ r_2>0,\ 0<\theta_k<2\pi,\ k=1,2). \tag{6}$$

همچنانکه درشکل ۲۹ نشان داده شده است، شاخهٔ f همه جا درصفحهٔ z بجز برنیمخط $y=0$، $x\geqslant -1$ تعریف شده است.

شاخهٔ f از $(z^2-1)^{1/2}$ را که بارابطهٔ (۶) داده شد می‌توان به‌تابع

$$F(z)=\sqrt{r_1r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2} \tag{7}$$



شکل ۲۹

$$(r_1>0\ ,\ r_2>0\ ,\ r_1+r_2>2\ ,\ 0\leqslant\theta_k<2\pi\ ,\ k=1\ ,\ 2),$$

توسعه داد که همه جا در صفحهٔ z بجز بر پاره‌خط $-1\leqslant x\leqslant 1$ ، $y=0$ تحلیلی است.
چون به‌ازای هر z درحوزهٔ تعریف F بجز بر نیمخط $x>1$، $y=0$ ، داریم $F(z)=f(z)$،
فقط لازم است نشان دهیم که F بر آن نیمخط تحلیلی است. برای انجام این کار، حاصلضرب
آن شاخه‌های $(z-1)^{1/2}$ و $(z+1)^{1/2}$ را که با رابطهٔ (۳) داده شده‌اند تشکیل می‌دهیم.

یعنی تابع زیر را درنظر می گیریم

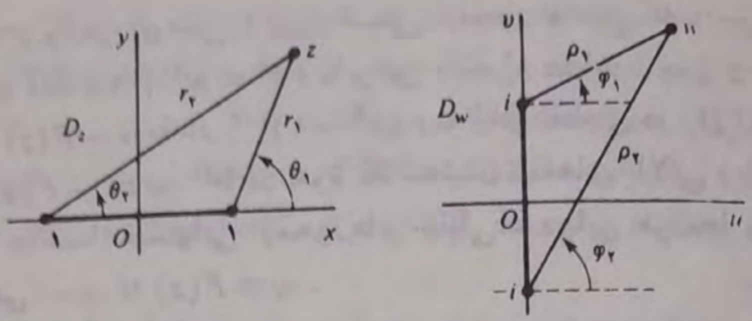
$$G(z)=\left(\sqrt{r_1}\exp\frac{i\Theta_1}{2}\right)\left(\sqrt{r_2}\exp\frac{i\Theta_2}{2}\right)$$
$$(r_1>0\ ,\ r_2>0\ ,\ -\pi<\Theta_k<\pi\ ,\ k=1\ ,\ 2),$$

که در آن $r_1=|z-1|$ ، $r_2=|z+1|$ ، $\Theta_1=\mathrm{Arg}(z-1)$ و $\Theta_2=\mathrm{Arg}(z+1)$.
ملاحظه کنید که G درتمام صفحهٔ z بجز بر نیمخط $x\leqslant 1$ ، $y=0$ تحلیلی است. حال وقتی
نقطهٔ z در بالا یا روی نیمخط $x>1$ ، $y=0$ واقع باشد، $F(z)=G(z)$ زیرا در آن حالت
$\theta_k=\Theta_k$ $(k=1\ ,\ 2)$. وقتی z در زیر آن نیمخط واقع باشد $\theta_k=\Theta_k+2\pi$ $(k=1\ ,\ 2)$
بالنتیجه $\exp(i\theta_k/2)=-\exp(i\Theta_k/2)$ و مجدداً $F(z)=G(z)$. چون در حوزه‌ای
شامل نیمخط $x>1$ ، $y=0$ داریم $F(z)=G(z)$ وچون $G(z)$ در آن حوزه تحلیلی است،
$F(z)$ در آن حوزه تحلیلی است. بنابراین، $F(z)$ همه‌جا بجز بر پاره‌خط $-1\leqslant x\leqslant 1$ ،
$y=0$ تحلیلی است.

خود تابع F را که با رابطهٔ (۷) تعریف شده است نمی توان به تابعی که در نقاط
روی پاره‌خط $-1\leqslant x\leqslant 1$ ، $y=0$ تحلیلی است توسعه داد. زیرا وقتی نقطهٔ z از آن
پاره‌خط پایین آید مقدار سمت‌راست رابطهٔ (۷) از $i\sqrt{r_1 r_2}$ به‌اعدادی نزدیک به $-i\sqrt{r_1 r_2}$
می‌جهد. پس این توسیع حتی در آنجا پیوسته نخواهد بود.

تبدیل $w=F(z)$ نگاشت یك‌بیکی است ازحوزهٔ D_z متشکل ازهمهٔ نقاط صفحهٔ z بجز
نقاط روی پاره‌خط $-1\leqslant x\leqslant 1$ ، $y=0$ بر روی حوزهٔ D_w متشکل از تمام صفحهٔ w به‌استثنای
پاره‌خط $u=0$ ، $-1\leqslant v\leqslant 1$ (شکل ۳۰).

قبل از اثبات این مطلب، توجه‌می‌کنیم که اگر $z=iy$ $(y>0)$ آنگاه $\theta_1+\theta_2=\pi$



شکل ۳۰ $w = F(z)$

و $r_2 = r_2 > 1$ ؛ بنابراین، محور مثبت y بروی قسمتی از محور v نگاشته می‌شود که برای آن $v > 1$. بعلاوه، محور منفی y بروی قسمتی از محور v نگاشته مـی‌شود که بـرای آن $v < -1$. هـر نقطه در نیمهٔ بالایی $y > 0$ از حـوزهٔ D_z ، بتوی نیمهٔ بالایـی $v > 0$ از صفحهٔ w نگاشه مـی‌شود و هر نقطه در نیمهٔ پایینی حوزهٔ D_z ، $y < 0$ ، بتوی نیمهٔ پـایینی صفحهٔ w ، $v < 0$، نگاشته می‌شود. نیمخط $x > 1$ ، $y = 0$ بـروی محور حقیقی مثبت و نیمخط $x < -1$ ، $y = 0$ بروی محور حقیقی منفی نگاشته می‌شود.

بـرای اینکه نشان دهیم تبدیـل $w = F(z)$ یک‌بیک است توجه مـی‌کنیم که اگر $F(z_1) = F(z_2)$ آنگاه $z_1^2 - 1 = z_2^2 - 1$. از این رابطه نتیجه می‌شود که $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. معهذا به‌علت نحوهٔ نگاشته‌شدن نیمه‌های بالایی و پایینی حوزهٔ D_z وقسمتهای محور حقیقی واقع در D_z توسط F، حالت $z_1 = -z_2$ غیرممکن است. بنابـراین اگـر $F(z_1) = F(z_2)$ ، آنگاه $z_1 = z_2$ و F یک‌بیک است.

برای نشان دادن اینکه F حوزهٔ D_z را بروی D_w می‌نگارد ، تابع H ای‌پیدا می کنیم که D_w را بتوی D_z بنگارد ؛ بااین‌خاصیت کـه اگر $z = H(w)$ آنگاه $w = F(z)$. این کار نشان خواهد داد که به‌ازای هر نقطهٔ w در D_w ، نقطهٔ zای در D_z هست به‌قسمی کـه $F(z) = w$ و بنابراین نگاشت برواست. نگاشت H معکوس F خواهد بود.

برای پیدا کردن H ابتدا توجه‌می‌کنیم که اگر w یک‌مقدار $(z^2 - 1)^{1/2}$ برای z خاصی باشدآنگاه z مقداری از $(w^2 + 1)^{1/2}$ به‌ازای آن‌مقدار w است. تابع H یک شاخهٔ تابع چندمقداری

$$(w^2 + 1)^{1/2} = (w - i)^{1/2}(w + i)^{1/2}$$

است. باپیروی از روشمان جهت به‌دست‌آوردن شاخهٔ $F(z)$ از $(z^2 - 1)^{1/2}$ ، مـی نویسیم $w - i = \rho_1 \exp(i\varphi_1)$ و $w + i = \rho_2 \exp(i\varphi_2)$. بااین‌محدودیتها که $\rho_1 > 0$ ، $\rho_2 > 0$، $\rho_1 + \rho_2 > 2$ و $-\pi/2 \leqslant \varphi_k < 3\pi/2$ که درآن $k = 1, 2$ ، سپس می‌نویسیم

$$H(w) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} \exp \frac{i(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}, \tag{8}$$

حوزهٔ تعریف D_w است. این‌شاخه نقاط D_w واقع در بـالا یاپایین محـور u را ، بترتیب ، بروی نقاط بالایی، یاپایینی محور x می‌نگارد. این تبدیل محور u مثبت را بتوی قسمتی از

محور x که $x>1$ ومحور u منفی‌را بتوی قسمتی ازمحور x منفی که $x<-1$ می‌نگارد. اگر $z=H(w)$ آنگاه $z^2=w^2+1$ وبنابراین $w^2=z^2-1$. چون z در D_z است و چـون $F(z)$ و $-F(z)$ دومقدار $(z^2-1)^{1/2}$ بـه‌ازای نقطه‌ای در D_z اند می‌بینیم کـه $w=F(z)$ یا $w=-F(z)$. اما ازنحوهٔ نگاشته‌شدن نیمه‌های بالایی وپایینی حوزه‌های تعریف F و H به‌انضمام قسمتهایی ازمحورهای حقیقی که دراین حوزه‌ها واقع‌اند، توسط این توابع، بدیهی است که $w=F(z)$.

شاخه‌های توابع دومقداری

$$w=(z^2+Az+B)^{1/2}=[(z-z_0)^2-z_1^2]^{1/2}\qquad (z_1\neq 0), \tag{9}$$

که درآن $A=-2z_0$ و $B=z_0^2-z_1^2$، و نگاشتهای حاصل از این شاخه‌هارا مـی‌توان به‌کمک نتایجی که فوقاً برای F پیدا کردیم و بااستفاده ازتبدیلات‌متوالی زیر، بررسی کرد

$$Z=\frac{z-z_0}{z_1},\qquad W=(Z^2-1)^{1/2},\quad w=z_1W. \tag{10}$$

تمرینات

۱. ناحیه‌ای‌راکه قطاع $r<1$، $0<\theta<\pi/4$ باتبدیل (الف) $w=z^2$؛ (ب) $w=z^3$؛ (ج) $w=z^4$، بروی‌آن نگاشته می‌شود توصیف نمایید.

۲. نشان‌دهید که تبدیل $w=z^2$ نگـاشت یک‌بیکی است از خطوط $x=c\ (c\neq 0)$ بروی سهمـی‌هـا $v^2=-4c^2(u-c^2)$؛ و خطـوط $y=d\ (d\neq 0)$ بـروی سهمـی‌هـا $v^2=4d^2(u+d^2)$. توجه کنید که همهٔ این سهمی‌ها دارای کانون‌نهایی در نقطهٔ $w=0$ هستند.

۳. ناحیه‌ای‌درصفحهٔ z پیدا کنید که تصویرش تحت‌تبدیل $w=z^2$ حوزه‌ای‌مستطیلی درصفحهٔ w محدود به‌خطوط $u=1$، $u=2$، $v=1$ و $v=2$ باشد.

۴. نشان‌دهید که شاخهٔ اصلـی تـابع $z^{1/2}$، حوزهٔ محدود بـه محور y و سهمـی $y^2=-4(x-1)$ را بروی حـوزهٔ‌مثلثی محدود به خطوط $v=u$، $v=-u$ و $u=1$ می‌نگارد. قسمتهای متناظر دوناحیه را نشان‌دهید. تمرین ۲ را ببینید.

۵. نشان‌دهید که شاخهٔ $w=\sqrt{r}\exp(i\theta/2)$، $r>0$، $0<\theta<2\pi$ از تابع‌چندمقداری $z^{1/2}$ نگاشت یک‌بیکی از حوزهٔ بین دوسهمی

$$r=\frac{2a^2}{1-\cos\theta},\qquad r=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$$

بروی نوار $a<v<b$ است که درآن $b>a>0$. تمرین ۲ را ببینید.

۶. تصویر حوزهٔ $r>0$، $-\pi<\theta<\pi$ درصفحهٔ z راتحت‌هریک ازتبدیلات تعریف شده با چهار شاخهٔ $z^{1/4}$، کـه بارابطهٔ (۲) بخش ۳۷ بـه‌ازای $n=4$ داده مـی‌شوند، معین کنید. بااستفاده ازاین چهارشاخه، ریشه‌های چهارم i را تعیین کنید.

۷. شاخهٔ F از $(z^2-1)^{1/2}$ دربخش ۳۷ برحسب مختصات قطبی r_1، r_2، θ_1، θ_2 تعریف

شد. بطورهندسی توضیح دهید چرا شرایط $r_۱>۰$، $۰<\theta_۱+\theta_۲<\pi$، ربع $x>۰$، $y>۰$ از صفحهٔ z را توصیف می‌کند. سپس نشان دهید که تبدیل $w=F(z)$ آن ربع را بروی ربع $u>۰$، $v>۰$ درصفحهٔ w می‌نگارد.

راهنمایی: برای قسمت اول، توجه کنید که درهر نقطه برمحور y مثبت، $\theta_۱+\theta_۲=\pi$ و وقتی نقطهٔ z درامتداد پرتو $\theta_۲=c$ $(۰<c<\pi/۲)$ به‌طرف راست حرکت کند، $\theta_۱+\theta_۲$ کاهش می‌یابد.

۸. برای تبدیل $w=F(z)$ از ربع اول صفحهٔ z بروی ربع اول صفحهٔ w (تمرین ۷)، نشان دهید که

$$u=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sqrt{r_۱r_۲+x^۲-y^۲-۱}\quad,\quad v=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sqrt{r_۱r_۲-x^۲+y^۲+۱},$$

که درآن $r_۱^۲r_۲^۲=(x^۲+y^۲+۱)^۲-۴x^۲$، ونشان دهید که تصویر قسمتی ازهذلولی $x^۲-y^۲=۱$ که در ربع‌اول است عبارت است از پرتو $u>۰$، $v=u$.

۹. نشان‌دهید که درتمرین ۸، حوزهٔ D که زیر هذلولی ودر ربع اول صفحهٔ z واقع است باشرایط $r_۱>۰$، $۰<\theta_۱+\theta_۲<\pi/۲$ توصیف می‌شود. سپس نشان دهید که تصویر D، هشت‌یك $۰<v<u$ است. شکل حوزه‌هارا بکشید.

۱۰. فرض کنیم F شاخهٔ $(۱-z^۲)^{۱/۲}$، که‌دربخش ۳۷ تعریف شد، و $z_۰=r_۰\exp(i\theta_۰)$، که درآن $r_۰>۰$ و $۰\leqslant\theta_۰<۲\pi$، یك نقطهٔ مشخص باشد. نشان دهید که شاخهٔ $F_۰$ از $(z_۰^۲-z^۲)^{۱/۲}$، که بریدگی شاخه‌اش پاره‌خط بین نقاط $z_۰$ و $-z_۰$ است، بافرمول $F_۰(z)=z_۰F(Z)$ داده‌می‌شود که درآن $Z=z/z_۰$.

۱۱. بنویسید $z-۱=r_۱\exp(i\theta_۱)$ و $z+۱=r_۲\exp(i\Theta_۲)$، که درآن $۰<\theta_۱<۲\pi$ و $-\pi<\Theta_۲<\pi$ و سپس شاخه‌ای برای تابع

(الف) $(z^۲-۱)^{۱/۲}$ ؛ (ب) $\left(\dfrac{z-۱}{z+۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

تعریف کنید. درهرحالت بریدگی شاخه بایدمتشکل از دو پرتو $\theta_۱=۰$ و $\Theta_۲=\pi$ باشد.

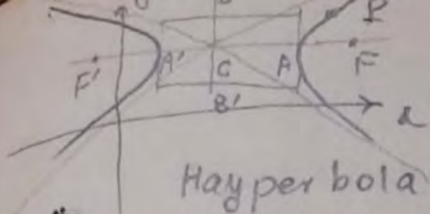
۱۲. بابه‌کاربردن علامات بخش ۳۷ نشان دهید که تابع

$$\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right)^{۱/۲}=\sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}}\,\exp\frac{i(\theta_۱-\theta_۲)}{۲}$$

یك شاخه با همان حوزهٔ تعریف D_z وهمان بریدگی شاخه مربوط به F است. نشان دهید که این تبدیل D_z رابروی نیمصفحهٔ سمت‌راست $\rho>۰$، $-\pi/۲<\varphi<\pi/۲$ می‌نگارد، که نقطهٔ $w=۱$ تصویر نقطهٔ $z=\infty$ است. تبدیل معکوس عبارت است از

$$z=\frac{۱+w^۲}{۱-w^۲}\qquad(u>۰).$$

۱۳. نشان‌دهید که تبدیل تمرین ۱۲ ناحیهٔ خارجی دایرهٔ واحد $|z|=۱$ درنیمصفحهٔ بالایی z را بـروی ناحیه‌ای در ربع اول مـی‌نگارد کـه بین‌خط $v=u$ و محور u است. شکل



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$C\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$, $\begin{cases}AA'=2a\\BB'=2b\end{cases}$

$PF-PF'=2a$

$CF=CF'=\sqrt{a^2+b^2}$

ناحیه‌ها را بکشید.

۱۴. بنویسید $z=r\exp(i\Theta)$ ، $z-1=r_1\exp(i\Theta_1)$ ، $z+1=r_2\exp(i\Theta_2)$ ، که در آن مقادیر هر سه زاویه بین $-\pi$ و π واقع است و شاخه‌ای از تابع $[(z^2-1)]^{1/2}$ را تعریف کنید که بریدگی شاخه‌اش متشکل از دو پاره‌خط $y=0$ ، $x\leqslant -1$ و $0\leqslant x\leqslant 1$ ، $y=0$ است.

۳۸. تبدیل $w=\exp z$

تبدیل

$$w=e^z \quad \text{یا} \quad \rho e^{i\varphi}=e^x e^{iy} ،$$

که در آن $z=x+iy$ و $w=\rho\exp(i\varphi)$ را می‌توان چنین نوشت

$$\rho=e^x ,\ \varphi=y .$$

این تبدیل نگاشت یك‌بیکی از خط $y=c$ بروی پرتو $\varphi=c$ ، که مبدأ از آن خارج شده است، می‌باشد. خط $x=c$ بروی دایرهٔ $\rho=e^c$ نگاشته می‌شود. معهذا ملاحظه می‌کنید که تعدادی نامتناهی نقطه برخط $x=c$ با یك نقطهٔ تصویر موجودند.

ناحیهٔ مستطیلی $a\leqslant x\leqslant b$ ، $c\leqslant y\leqslant d$ بروی ناحیهٔ

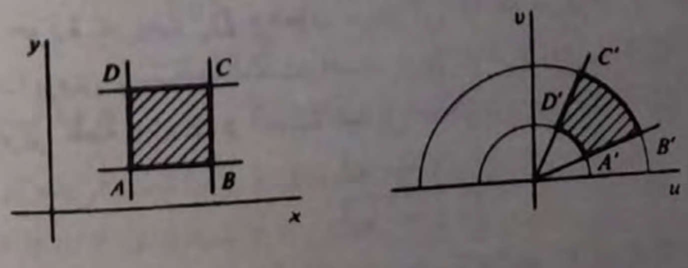
$$e^a\leqslant\rho\leqslant e^b ,\ c\leqslant\varphi\leqslant d$$

محدود به قسمتهایی از دوایر و پرتوها نگاشته می‌شود. اگر $d-c<2\pi$ ، این نگاشت یك‌بیك است. این دو ناحیه و قسمتهای متناظر کرانه‌هایشان در شکل ۳۱ نشان داده شده‌اند. بخصوص اگر $c=0$ و $d=\pi$ آنگاه $0\leqslant y\leqslant\pi$ و مستطیل بروی نیمهٔ یك حلقهٔ مستدیر، همچنانکه در شکل ۸ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده است، نگاشته می‌شود.

بنا بر بخش ۲۲، تبدیل $w=e^z$ نگاشت یکی بیکی است از نوار $(2n-1)\pi<y\leqslant(2n+1)\pi$ ، که n یك عدد صحیح است، بروی مجموعه نقاط ناصفر صفحهٔ w. از بخش ۲۶ می‌دانیم که اگر z در آن نوار واقع باشد و $w=e^z$ آنگاه

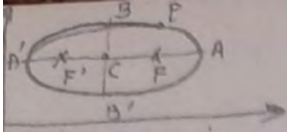
$$z=\operatorname{Log}w+2n\pi i .$$

نوار نامتناهی $0<y<\pi$ بروی نیمهٔ بالایی صفحهٔ w ، $\rho>0$ ، $0<\varphi<\pi$ ،



شکل ۳۱

$w=e^z$



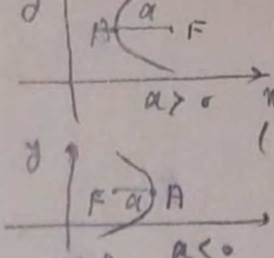
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

$c \,|\, {x_0 \atop y_0}$, $\left\{ \begin{array}{l} AA' = 2a \\ BB' = 2b \end{array} \right.$

$PF + PF' = 2a$

Ellipse (بیضی)

$CF = CF' = \sqrt{a^2 - b^2}$



Parabola (سهمی)

$(y-y_0)^2 = 4a(x-$

$A \,|\, {x_0 \atop y_0}$

نگاشته می‌شود. قسمتهای متناظر کرانه‌های دوناحیه درشکل ۶ ضمیمهٔ ۲ نشان‌داده‌شده‌اند. این نگاشت نوار بروی نیمصفحه بخصوص درکاربردها مفیداست.

نــوار نیمه‌نامتناهی $x \leqslant 0$ ، $0 \leqslant y \leqslant \pi$ بــروی ناحیهٔ نیمدایره‌ای $0 < \rho \leqslant 1$ ، $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (شکل ۷، ضمیمهٔ ۲) نگاشته می‌شود. توجه کنید که ناحیهٔ تصویر شامــل نقطهٔ $w=0$ نیست زیرا e^z هیچ‌وقت صفر نیست.

۳۹. تبدیل $w = \sin z$

ازآنجاکه

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \text{ ،}$$

تبدیل $w = \sin z$ را می‌توان چنین نوشت

$$u = \sin x \cosh y \text{ ،} \quad v = \cos x \sinh y \,. \tag{۱}$$

اینکه تبدیل $w = \sin z$ نگاشت یك‌بیکی است ازنوار

$$-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2 \quad \text{،} \quad y \geqslant 0$$

درصفحهٔ z بروی نیمهٔ بالایی صفحهٔ w ، $v \geqslant 0$ ، همچنانکه درشکل ۹ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده است، درکاربردها اهمیت خاصی دارد. حال بادرنظر گرفتن تصاویر خط عمودی $x = c$ که درآن $-\pi/2 \leqslant c \leqslant \pi/2$ ، درستی این مطلب‌را تحقیق‌می‌کنیم.

محور y $(x=0)$ به‌روشی یك‌بیك بروی محور v $(u=0)$ نگاشته می‌شود وقسمتهای پایینی این‌محورها بایکدیگر متناظرند وقسمتهای بالایی هم همینطورند. زیرا تصویر نقطهٔ $(0 \text{ ،} y)$ برمحور y نقطهٔ $(0 \text{ ،} \sinh y)$ برمحور v است.

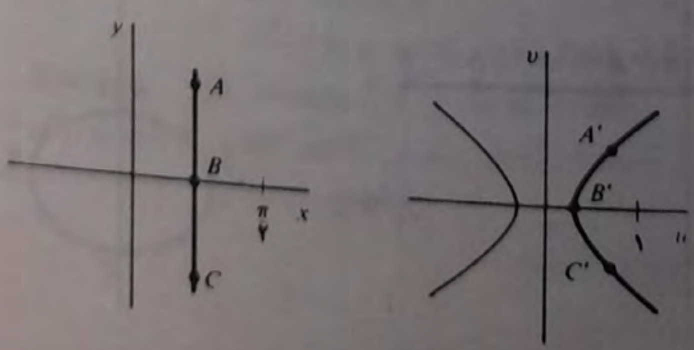
اگر $0 < c < \pi/2$ ، خط $x = c$ به‌روشی یك‌بیك بروی منحنی

$$u = \sin c \cosh y \text{ ،} \quad v = \cos c \sinh y \tag{۲}$$

نگاشته می‌شودکه شاخهٔ سمت راست هذلولی

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1 \tag{۳}$$

باکانونهای $(\pm 1 \text{ ،} 0)$ است. شکل ۳۲ را ببینید.



$w = \sin z$

شکل ۳۲

تصویر خط $x=\pi/2$، که با نوشتن $x=\pi/2$ در روابط (۱) به‌دست می‌آید، متشکل است از نقاط $(u, 0)$ بر محور u که $u \geqslant 1$. نگاشت خط $x=\pi/2$ یك‌بیك نیست زیرا نقاط $\pi/2+iy$ و $\pi/2-iy$ دارای یك تصویرند. معهذا نگاشت بر نیمهٔ بالایی یا نیمهٔ پایینی آن خط، یك‌بیك است.

تصویر خط $x=c$، $-\pi/2 \leqslant c < 0$، بسهولت از نتایج فوق بوسیلهٔ اتحاد $\sin z = -\sin(-z)$ به‌دست می‌آید. تصویر عبارت است از شاخهٔ سمت چپ هذلولی (۳)، بجز وقتی که $c=-\pi/2$. در این‌حالت، تصویر متشکل است از نقاط $(u, 0)$ که $u \leqslant -1$.

حال، با توجه به تصاویر نیمه‌های بالایی همهٔ این خطوط، واضح است که تبدیل $w=\sin z$ نوار نیمه نامتناهی $-\pi/2 \leqslant x < \pi/2$، $y \geqslant 0$ را به‌روشی یك‌بیك بروی نیمهٔ بالایی صفحهٔ w، $v \geqslant 0$، می‌نگارد. همان‌طور که درشکل ۱۰ ضمیمهٔ ۲ نشان داده‌شده است، نیمهٔ سمت راست نوار بروی ربع اول صفحهٔ w نگاشته می‌شود.

تبدیل $w=\sin z$ خط افقی $y=c$ را بروی منحنی زیر می‌نگارد

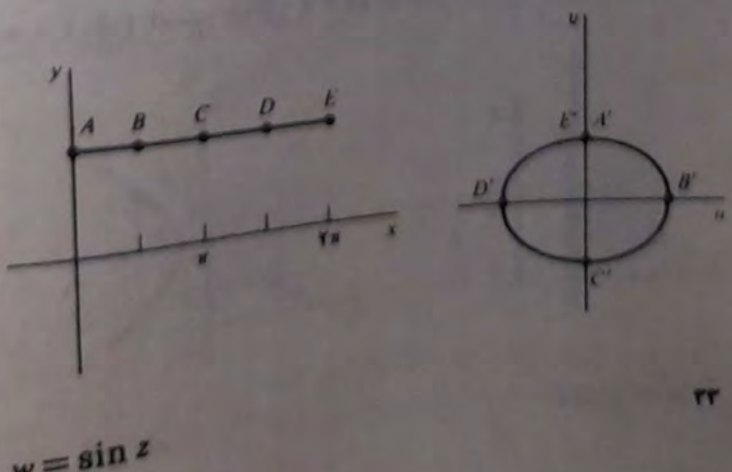
$$u=\sin x\cosh c, \quad v=\cos x\sinh c. \tag{۴}$$

اگر $c \neq 0$، این‌منحنی عبارت است از بیضی

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c}+\frac{v^2}{\sinh^2 c}=1. \tag{۵}$$

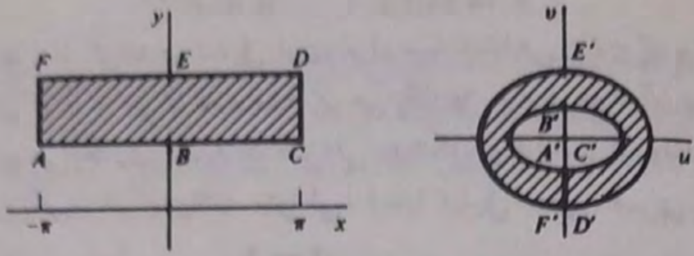
پاره خط $y=c$، $0 \leqslant x \leqslant \pi$ به‌روشی یك‌بیك بروی نیمهٔ راست این بیضی نگاشته می‌شود، درحالی که پاره خط $y=c$، $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ به‌روشی یك‌بیك بروی نیمهٔ چپ نگاشته‌می‌شود. شکل ۳۳ را ببینید. تصویرمحور x، که با نوشتن $c=0$ در روابط (۴) به دست می‌آید، قسمتی ازمحور u است که $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

ناحیهٔ مستطیلی $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$، $c_1 \leqslant y \leqslant c_2$، همان‌طور که‌درشکل ۳۴ نشان داده شده است، بروی ناحیهٔ محدود به دوبیضی همکانون نگاشته می‌شود. هردوضلع $x=\pm\pi$،



شکل ۳۳

$w=\sin z$



شکل ۳۴ $w=\sin z$

$c_1 \leqslant y \leqslant c_2$ بروی پاره خط $u=0$ ، $-\sinh c_2 \leqslant v \leqslant -\sinh c_1$ نگاشته می‌شوند. بنابراین اگر $c_1 > 0$ ، تصویر ناحیهٔ مستطیلی حلقهٔ بیضوی با یک بریدگی درطول محور v منفی است. وقتی نقطهٔ z کرانه‌راطی کند تصویرش مسیری پیرامون یک بیضی، سپس درامتداد بریدگی وآنگاه پیرامون بیضی دیگر می‌سازد و مجدداً درامتداد بریدگی به‌نقطهٔ شروع برمی‌گردد.

ناحیهٔ مستطیلی $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ ، $0 \leqslant y \leqslant c$ ، همان‌طور که درشکل ۱۱ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده است، به روشی یک‌بیک بروی ناحیهٔ نیم‌بیضوی نگاشته می‌شود.

۴۰. تبدیلات متوالی

ازآنجاکه $\cos z = \sin(z+\pi/2)$، تبدیل

$$w=\cos z$$

را می‌توان متوالیاً به صورت

$$Z=z+\frac{\pi}{2}, \quad w=\sin Z$$

نوشت. پس این تبدیل همان تبدیل سینوس است که مقدم بر آن یک انتقال به سمت راست به اندازهٔ $\pi/2$ صورت گرفته است.

تبدیل

$$w=\sinh z$$

را می‌توان چنین نوشت $w=-i\sin(iz)$ یا اینکه

$$Z=iz, \quad W=\sin Z, \quad w=-iW.$$

ازاینرو، این ترکیبی است ازتبدیل سینوس با دورانهایی تحت زوایای قائمه. همچنین تبدیل

$$w=\cosh z$$

اساساً یک تبدیل کسینوس است.

تبدیل

$$w=(\sin z)^{1/2}$$

را، که‌درآن توان کسری‌مبین شاخهٔ اصلی است، می‌توان به‌صورت تبدیلات متوالی زیر نوشت

$$Z = \sin z \ , \qquad w = Z^{1/2}.$$

همچنانکه در بخش قبل متذکر شدیم تبدیل اول، نوار نیمه‌نامتناهی $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ ، $y \geqslant 0$ را بروی ربع اول $X \geqslant 0$ ، $Y \geqslant 0$ درصفحهٔ Z می‌نگارد؛ تبدیل دوم آن ربع را بروی یك هشت یك درصفحهٔ w می‌نگارد. تبدیلات متوالی درشکل ۳۵ رسم شده‌اند.

به‌عنوان مثال‌دیگری از تبدیلات متوالی، ابتدا تبدیل خطی کسری

$$Z = \frac{z-1}{z+1}$$

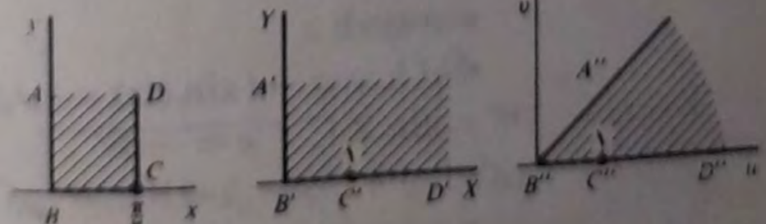
را درنظر می‌گیریم. بسهولت نشان‌داده‌می‌شود که این‌تبدیل نیمصفحهٔ $y > 0$ را بروی‌نیمصفحهٔ $Y > 0$ درصفحهٔ Z می‌نگارد. سپس ملاحظه‌می‌کنید که تبدیل $w = \operatorname{Log} Z$ نیمصفحهٔ $Y > 0$ را بروی نوار $0 < v < \pi$ درصفحهٔ w می‌نگارد. پس‌نتیجه می‌گیریم که تبدیل

$$w = \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}$$

نیمصفحهٔ $y > 0$ را بروی‌نوار $0 < v < \pi$ می‌نگارد. نقاط متناظر روی کرانه‌ها درشکل ۱۹ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده‌اند.

۴۱. جدول تبدیلات نواحی

ضمیمهٔ ۲ شامل مجموعه شکلهایی است که تبدیلات تعدادی ناحیهٔ ساده و مفید را به‌وسیلهٔ توابع مقدماتی گوناگون نشان می‌دهد. درهرحالت، تناظر یك‌بیکی بین نقاط داخلی ناحیهٔ مفروض ونقاط داخلی ناحیهٔ تصویر موجود است. قسمتهای متناظر کرانه‌ها بوسیلهٔ حروف نشان داده شده‌اند. بعضی نگاشتها که درمتن کتاب موردبحث قرار نگرفته‌انـد نیز نشان داده‌شده‌اند. تحقیق درستی آنها را می‌تـوان به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خـواننده گذاشت. تعدادی‌ازتبدیلات‌را که‌درضمیمهٔ ۲ داده‌شده‌است‌می‌توان‌به‌وسیلهٔ تبدیل‌شوارتس- کریستوفل[1]، که در فصل ۱۰ بررسی خواهد شد، استنتاج کرد.



شکل ۳۵

$$w = (\sin z)^{1/2}.$$

1. Schwarz_Christoffel

تمرینات

۱. نشان‌دهید که خطوط $ky = x$ تحت‌تبدیل $w = \exp z$ ، که در آن $w = \rho \exp(i\varphi)$ ، بروی‌حلزونیهای $\rho = \exp(k\varphi)$ نگاشته می‌شوند.

۲. درستی نگاشت ناحیه و کرانه‌های نشان داده شده در شکل ۷ ضمیمهٔ ۲ را تحت تبدیل $w = e^z$ تحقیق کنید.

۳. تصویر نوار نیمه‌نامتناهی $0 \leqslant y \leqslant \pi$ ، $x \geqslant 0$ را تحت‌تبدیل $w = \exp z$ پیدا کنید وقسمتهای متناظر کرانه‌هارا نمایش دهید.

۴. شاخه‌ای از $\log(z-1)$ تعریف کنید که صفحهٔ z بریده‌شده، متشکل از همهٔ نقاط بجز نقاط روی نیمخط $x \geqslant 1$ ، $y = 0$ از محور حقیقی، را بروی نوار $0 < v < 2\pi$ در صفحهٔ w می‌نگارد.

۵. تحقیق کنید که تبدیل $w = \sin z$ ، خط $x = c$ $(0 < c < \pi/2)$ را به‌روشی یك‌بیك بروی شاخهٔ سمت‌راست هذلولی‌ای می‌نگارد که بارابطهٔ (۳) بخش ۳۹ داده شده‌است.

۶. نشان‌دهید که‌تحت‌تبدیل $w = \sin z$ خط $x = c$ $(\pi/2 < c < \pi)$ بروی‌شاخهٔ‌سمت‌راست هذلولی‌ای نگاشته می‌شود که بارابطهٔ (۳) بخش ۳۹ داده شده‌است. توجه کنید که نگاشت‌یك‌بیك است ونیمه‌های بالایی وپایینی خط، بترتیب، بروی نیمهٔ پایینی و بالایی شاخه نگاشته می‌شوند.

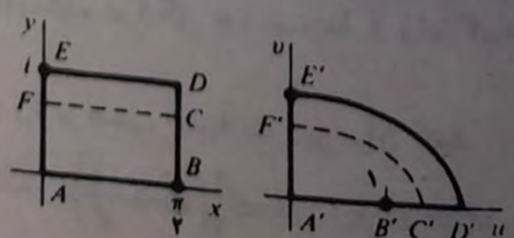
۷. تصویر خط $x = c$ $(-\pi < c < -\pi/2)$ را تحت‌تبدیل $w = \sin z$ معین کنید.

۸. درستی نگاشت به‌وسیلهٔ $\sin z$ را، که در شکل ۱۰ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده است، تحقیق کنید.

۹. نشان دهید که تحت‌تبدیل $w = \sin z$ تصاویر پاره‌خطهایی که کرانهٔ ناحیهٔ مستطیلی $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ ، $0 \leqslant y \leqslant 1$ را تشکیل می‌دهند عبارت‌اند از پاره‌خطها وقوس $D'E'$ که درشکل ۳۶ نشان داده شده است. قوس $D'E'$ ربعی از بیضی زیراست

$$(u/\cosh 1)^2 + (v/\sinh 1)^2 = 1.$$

۱۰. بااستفاده از نگاشت پاره‌خطهای $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ ، $y = c$ ؛ نگاشتی راکه درشکل ۳۶ نشان داده شده است کامل نمایید و ثابت کنید که تبدیل $w = \sin z$ تناظر یك‌یکی



$w = \sin z$.

شکل ۳۶

بین نقاط ناحیهٔ مستطیلی و نقاط ناحیهٔ $A'B'D'E'$ برقرار می کند.

۱۱. درستی نگاشت به‌وسیلهٔ $\sin z$ را، که درشکل ۱۱ ضمیمهٔ ۲ نشان داده شده است، تحقیق کنید.

۱۲. نشان دهید که تبدیل $w=\cosh z$ نقاط $z=iy$ $(0\leqslant y\leqslant \pi/2)$ را بتوی پاره‌خط $0\leqslant u\leqslant 1$ ، $v=0$ از محور u می نگارد.

۱۳. نشان‌دهید که تحت‌تبدیل $w=\cosh z$ تصویر نوار نیمه‌نامتناهی $0\leqslant x$ ، $0\leqslant y\leqslant \pi/2$ ربع‌اول صفحهٔ w است. قسمتهای متناظر کرانه‌های ناحیه‌هارا نشان دهید.

۱۴. تبدیل $w=\cosh z$ را برحسب‌تبدیل $w=\sin z$ ، دوران و انتقال بیان کنید.

۱۵. نشان‌دهید که تبدیل $w=\sin^2 z$ ناحیهٔ $0\leqslant x\leqslant \pi/2$ ، $0\leqslant y$ رابروی ناحیهٔ $0\leqslant v$ می‌نگارد و قسمتهای متناظر کرانه‌هارا نشان دهید.

۱۶. نشان‌دهید که تحت‌تبدیل $w=(\sin z)^{1/4}$ نوارنیمه‌نامتناهی $-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2$ ، $0\leqslant y$ بروی قسمتی از ربع اول که زیرخط $v=u$ واقع است نگاشته می‌شود و قسمتهای متناظر کرانه‌ها را معین کنید.

۱۷. نشان‌دهید که تبدیل خطی کسری $Z=(z-1)/(z+1)$ محور x را بروی محور Y، پاره‌خط $-1<x<1$ ، $y=0$ رابروی‌نیمهٔ‌منفی محور X ، ونیمصفحه‌های $y>0$ و $y<0$ را، بترتیب، بروی نیمصفحه‌های $Y>0$ و $Y<0$ می‌نگارد. نشان‌دهید که وقتی شاخهٔ اصلی به‌کار برده‌شود تابع‌مرکب

$$w=Z^{1/2}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$$

صفحهٔ z ، بجزپاره‌خط $-1\leqslant x\leqslant 1$ ، $y=0$ ، رابروی‌نیمصفحهٔ $u>0$ می‌نگارد. (این مسئله را باتمرین ۱۲ بخش ۳۷ مقایسه کنید.)

۱۸. بااستفاده از صورت قطبی z نشان‌دهید که تبدیل

$$w=z+\frac{1}{z}$$

هردونیمهٔ بالایی وپایینی دایرهٔ $r=1$ را بروی‌پاره‌خط $-2\leqslant u\leqslant 2$ ، $v=0$ می نگارد.

۱۹. نشان دهید که تبدیل $w=z+1/z$ دایرهٔ $r=c$ را بروی بیضی زیر می‌نگارد

$$u=\left(c+\frac{1}{c}\right)\cos\theta\ ,\quad v=\left(c-\frac{1}{c}\right)\sin\theta\ .$$

۲۰. درستی نگاشت نشان داده‌شده درشکل ۱۶ ضمیمهٔ ۲ را، که در آن $w=z+1/z$ ، تحقیق کنید.

۲۱. نگاشت $w=\cosh z$ را برحسب تبدیلات زیر بیان کنید

$$Z=e^z\ ,\quad w=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right)$$