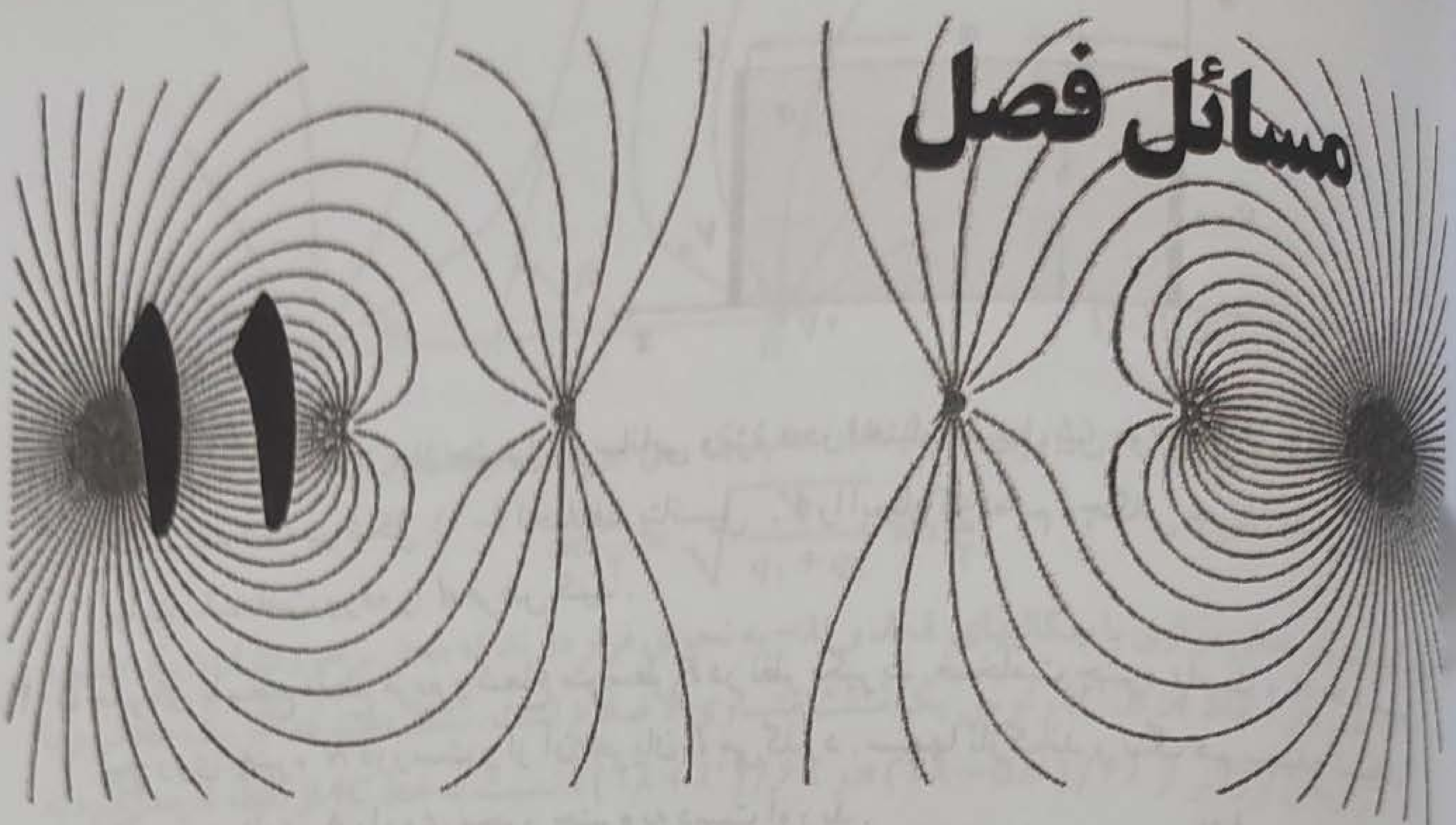
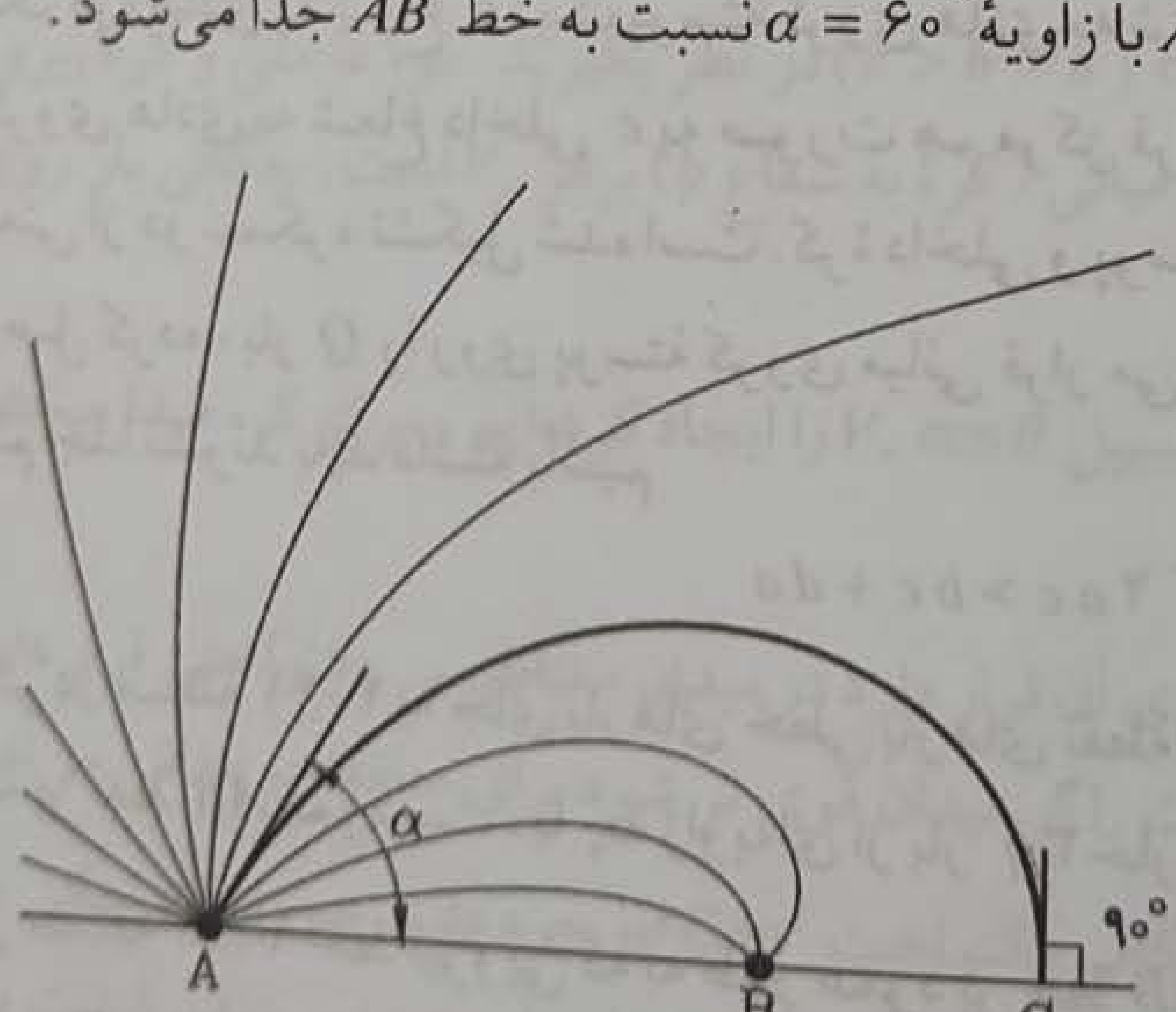
مسائل فصل ۱۱



۱-۱۱ سه میله به طول L اضلاع یک مثلث را تشکیل داده‌اند. روی دو میله بار خطی با چگالی 2λ C/m و روی یک میله بار خطی با چگالی λ C/m قرار دارد. شدت میدان الکتریکی در مرکز مثلث چقدرست؟ از جواب مسئلهٔ ۲-۵ استفاده کنید.

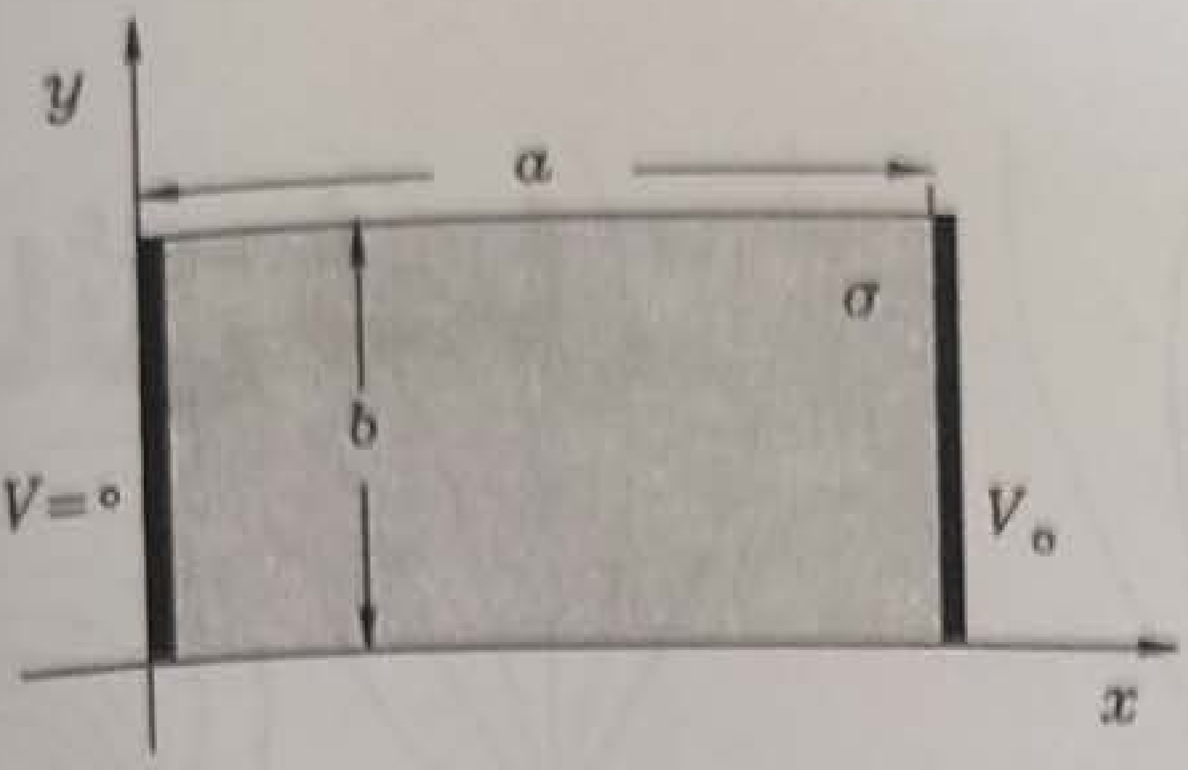
۲-۱۱ بار خطی با چگالی 3λ C/m در نقطهٔ A و بار خطی با چگالی $-\lambda$ C/m در نقطهٔ B (هر دو عمود به صفحهٔ کاغذ) قرار دارند و میدان در نقطهٔ C صفرست. ثابت کنید خط نیرویی که از C می‌گذرد خط AB را با زاویهٔ 90° قطع می‌کند و از A با زاویهٔ $\alpha = 60^\circ$ نسبت به خط AB جدا می‌شود.



شکل ۱۱-۲

۳-۱۱ کدام یک از پتانسیلهای زیر می‌توانند در ناحیهٔ خالی از بار $y > 0$ وجود داشته باشند؟ در هر مورد ممکن چگالی بار سطحی روی صفحهٔ xz را بیابید. $y < 0$ نیز فضایی خالی از بارست.

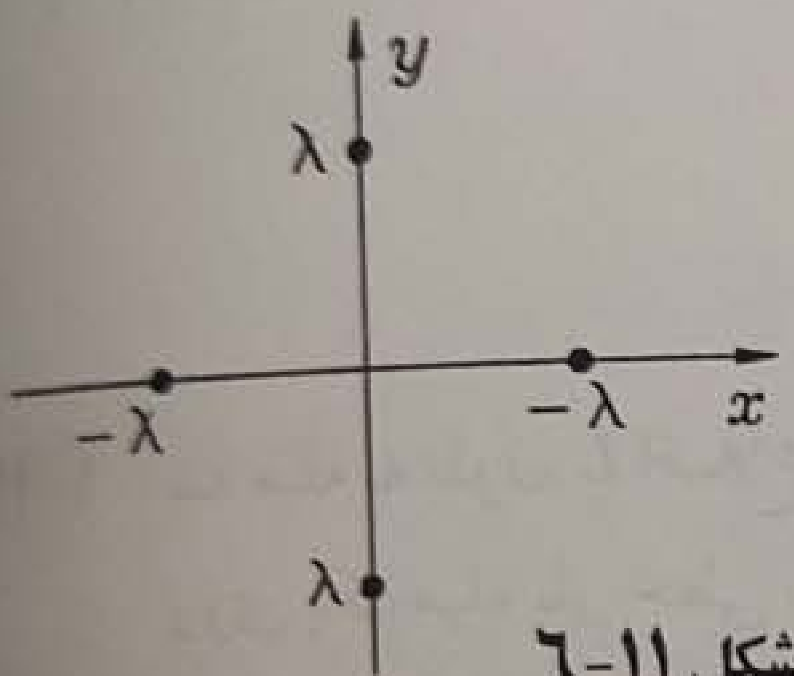
(الف) $e^{-y} \cosh x$ (ب) $e^{-y} \cos x$ (ج) $e^{-y} \cos x \sin x$ (د) $\sin x \sin y \sin z$



شکل ۱۱-۴

۱۱-۴ ورقه‌ای به ابعاد $a \times b$ از جنسی با رسانایی ویژهٔ σ در اختیار داریم. بین دو لبهٔ این ورقه به صورت نشان داده شده در شکل ۱۱-۴ اختلاف پتانسیل $V_۰$ را ایجاد کرده‌ایم. چگالی جریان داخل ورقه را بیابید. ضخامت ورقه را d فرض کنید.

۱۱-۵ چنبره‌ای با سطح مقطع مربع و شعاع متوسط R در نظر بگیرید. ضخامت چنبره t است و $R \gg t$. سیم پیچ روی چنبره N دور است و از آن جریان I می‌گذرد. سیمها نازک‌اند و تنگ هم پیچیده شده‌اند. پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ را روی محور چنبره به دست آورید.



شکل ۱۱-۶

۱۱-۶ بارهای خطی با چگالیهای λ و $-\lambda$ مطابق شکل در نقاط (۱، ۰)، (۰، ۱)، (۰، ۱-)، و (۱-، ۰) به موازات محور z قرار دارند. معادلات خطوط همپتانسیل را در صفحهٔ xy به دست آورید.

۱۱-۷ بار نقطه‌ای q روی محور دایره‌ای به شعاع a و به فاصلهٔ h از مرکز دایره قرار دارد. شاری راکه از دایره می‌گذرد به دست آورید.

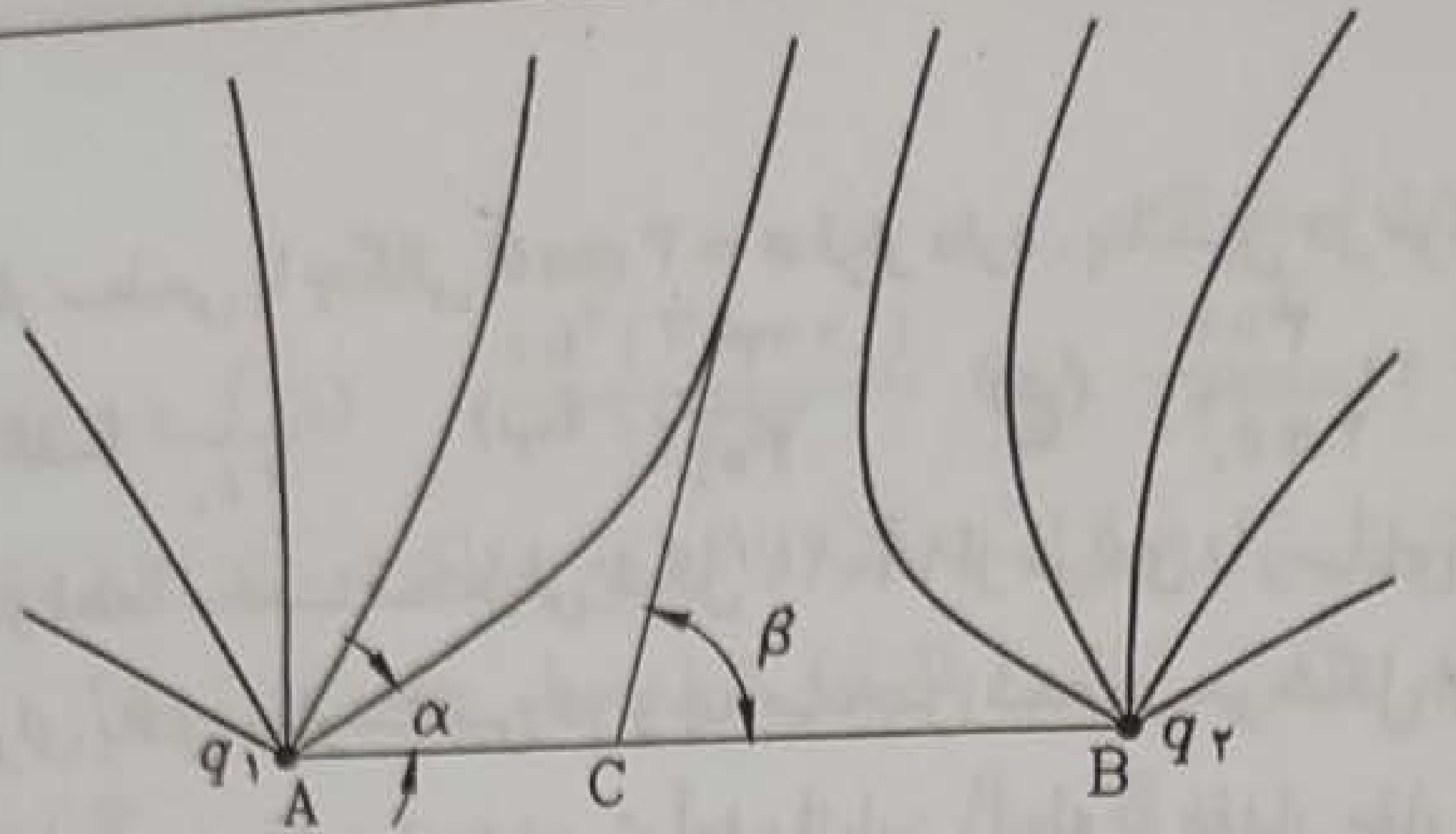
۱۱-۸ یک کرهٔ هادی به شعاع a، یک پوستهٔ کروی هادی به شعاع داخلی b و شعاع خارجی d و یک پوستهٔ کروی هادی به شعاع داخلی c به صورت هم مرکز قرار دارند. پوستهٔ کروی میانی دو نیمه است، یعنی از دو نیمکره تشکیل شده است. کرهٔ داخلی و پوستهٔ کروی بیرونی را به پتانسیل صفر (زمین) وصل کرده، بار Q را روی پوستهٔ کروی میانی قرار می‌دهیم. نشان دهید برای این که دو نیمکره از هم جدا نشوند باید داشته باشیم

$$۲ac > bc + da$$

۱۱-۹ اگر در مسئلهٔ ۱۱-۲ به جای بارهای خطی بارهای نقطه‌ای $۳q$ و $-q$ قرار داشته باشند، خط نیرویی که بر خط AB عمود است، با چه زاویه‌ای از بار $۳q$ خارج می‌شود؟

۱۱-۱۰ در مسئلهٔ ۱۱-۹ خط نیرویی که به طور عمود بر خط AB بر بار $-q$ وارد می‌شود، به چه زاویه‌ای از بار $۳q$ جدا می‌شود؟

۱۱-۱۱ دو بار نقطه‌ای مثبت $q_۱$ و $q_۲$ در نقاط A و B قرار دارند. یک خط نیرو که از بار $q_۱$ خارج می‌شود با خط AB زاویهٔ حادهٔ α می‌سازد. این خط به سمت بینهایت می‌رود و مجانب آن با خط AB زاویهٔ β

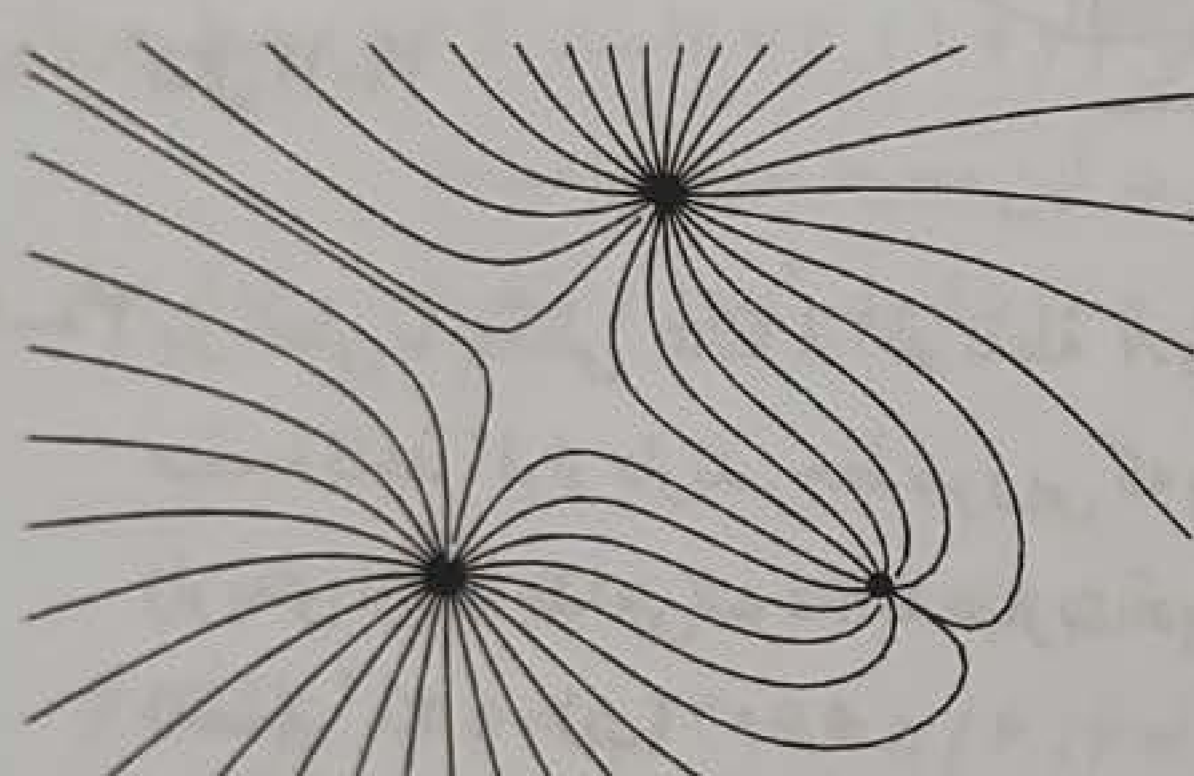


شکل ۱۱-۱۱

می‌سازد. (شکل ۱۱-۱۱ را ببینید.) نشان دهید که بین این زوایا رابطهٔ زیر برقرار است؟

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{q_1}{q_1+q_2}}\,\sin\frac{\alpha}{2}$$

۱۱-۱۲ سه بار خطی موازی با چگالیهای λ، λ، و $-\lambda'$ به نحوی قرار دارند که محل برخوردشان با یک صفحه عمودی (نقاط A، B، C) رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید که اگر یک خط نیرو با زاویه‌ای بزرگتر از $\pi(2\lambda+\lambda')/6\lambda$ و $\pi(2\lambda-5\lambda')/6\lambda$ نسبت به خط AC از نقطهٔ A جدا شود به نقطهٔ C منتهی نمی‌شود. داریم $\lambda' < 2\lambda$.



شکل ۱۱-۱۲ سه بار خطی عمود بر صفحهٔ کاغذ و خطوط میدان ناشی از آنها. نقطهٔ بالایی (A) و نقطهٔ سمت چپ (B) محل برخورد بارهای خطی با چگالی λ هستند. این شکل به ازای $\lambda=2$ و $\lambda'=1$ رسم شده است.

۱۱-۱۳ یک کرهٔ هادی در یک میدان یکنواخت قرار می‌گیرد. گشتاور دو قطبی القا شده در آن چقدر است؟

۱۱-۱۴ سه کرهٔ هم مرکز به شعاعهای a، b، و c ($c > b > a$) در نظر بگیرید. کرهٔ داخلی و کرهٔ بیرونی به پتانسیل صفر وصل شده، و پتانسیل کرهٔ میانی (کرهٔ به شعاع b) برابر V است. چگالی بار روی کرهٔ میانی را بیابید.

۱۱-۱۵ روی کره‌ای به شعاع R و رسانایی σ پتانسیل $V_\circ \cos\theta$ را ایجاد کرده‌ایم، مرکز کره مبدا مختصات است. چگالی جریان داخل کره را بیابید.

۱۱-۱۶ حلقه‌ای که بار خطی با چگالی λ C/m روی آن قرار دارد در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد، به نحوی که میدان بر سطح حلقه عمود است. اگر میدان قوی تر شود برای حلقه چه اتفاقی می‌افتد؟

۱۱-۱۷ روی یک پوستهٔ کروی هادی باری با چگالی یکنواخت σ C/m^2 وجود دارد. سوراخ کوچکی در این پوسته ایجاد می‌کنیم. با فرض این که ایجاد این سوراخ توزیع بار را به هم نمی‌زند، شدت میدان الکتریکی را در محل سوراخ به دست آورید.

۱۱-۱۸ نیمکره‌ای به شعاع a در فضای $z > 0$ قرار دارد و مرکز آن در مبدا مختصات است. روی این نیمکره

بار سطحی با چگالی $\sigma = ۳\cos\theta$ قرار دارد. پتانسیل در مرکز نیمکره چقدرست؟

(الف) $\frac{۱}{۴\varepsilon_۰}$ (ب) $\frac{۳}{۴\varepsilon_۰}$ (ج) $\frac{۳}{۴\pi\varepsilon_۰}$ (د) $\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}$

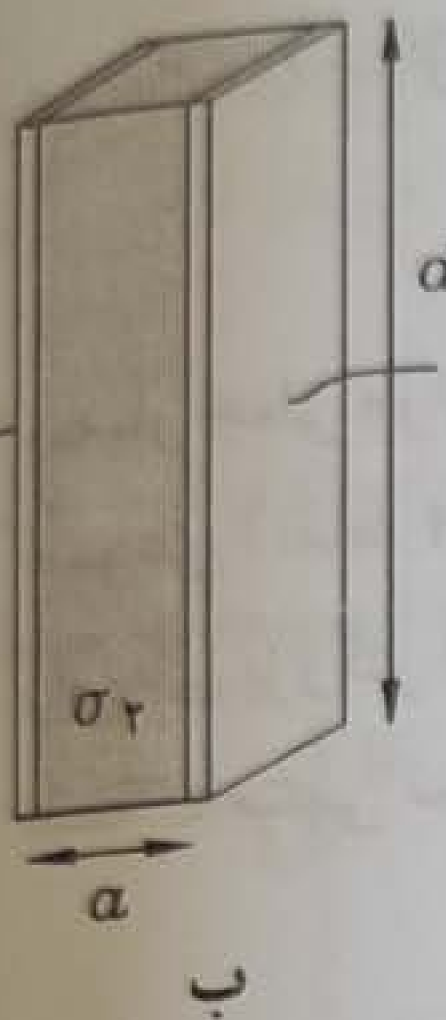
۱۱-۱۹ دو قطعهٔ مکعب مستطیلی شکل ۱۱-۱۹ از موادی با رسانای ویژهٔ $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ ساخته شده‌اند و $d \gg a$. برای یافتن مقاومت بین دو وجه مشخص شده در هر شکل از رابطهٔ $R = l/\sigma A$ استفاده کرده‌ایم. در کدام مورد مقاومت به دست آمده از این رابطه به مقدار مقاومت واقعی نزدیکترست؟

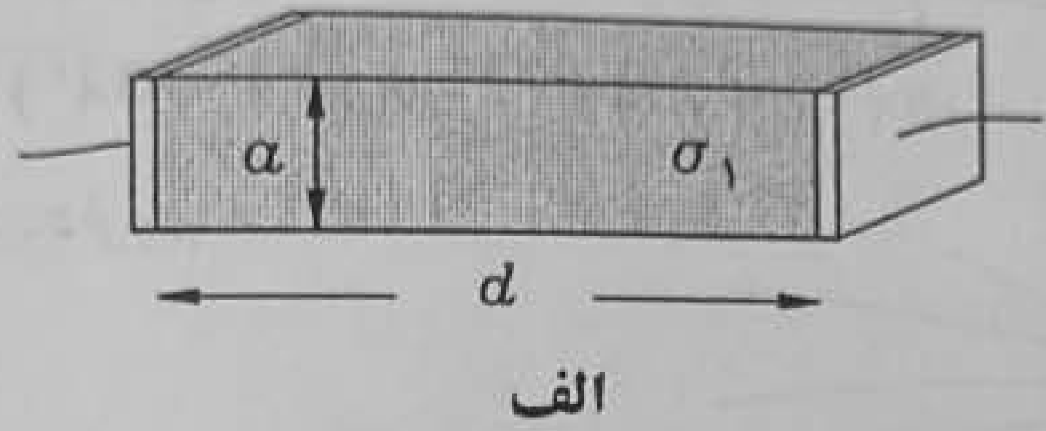
(الف) در هر دو مورد جواب دقیق است.

(ب) در مورد شکل ب زیرا اثرات لبه‌ای قابل اغماض است.

(ج) در مورد شکل الف

(د) پاسخ به بزرگی نسبی $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ بستگی دارد.



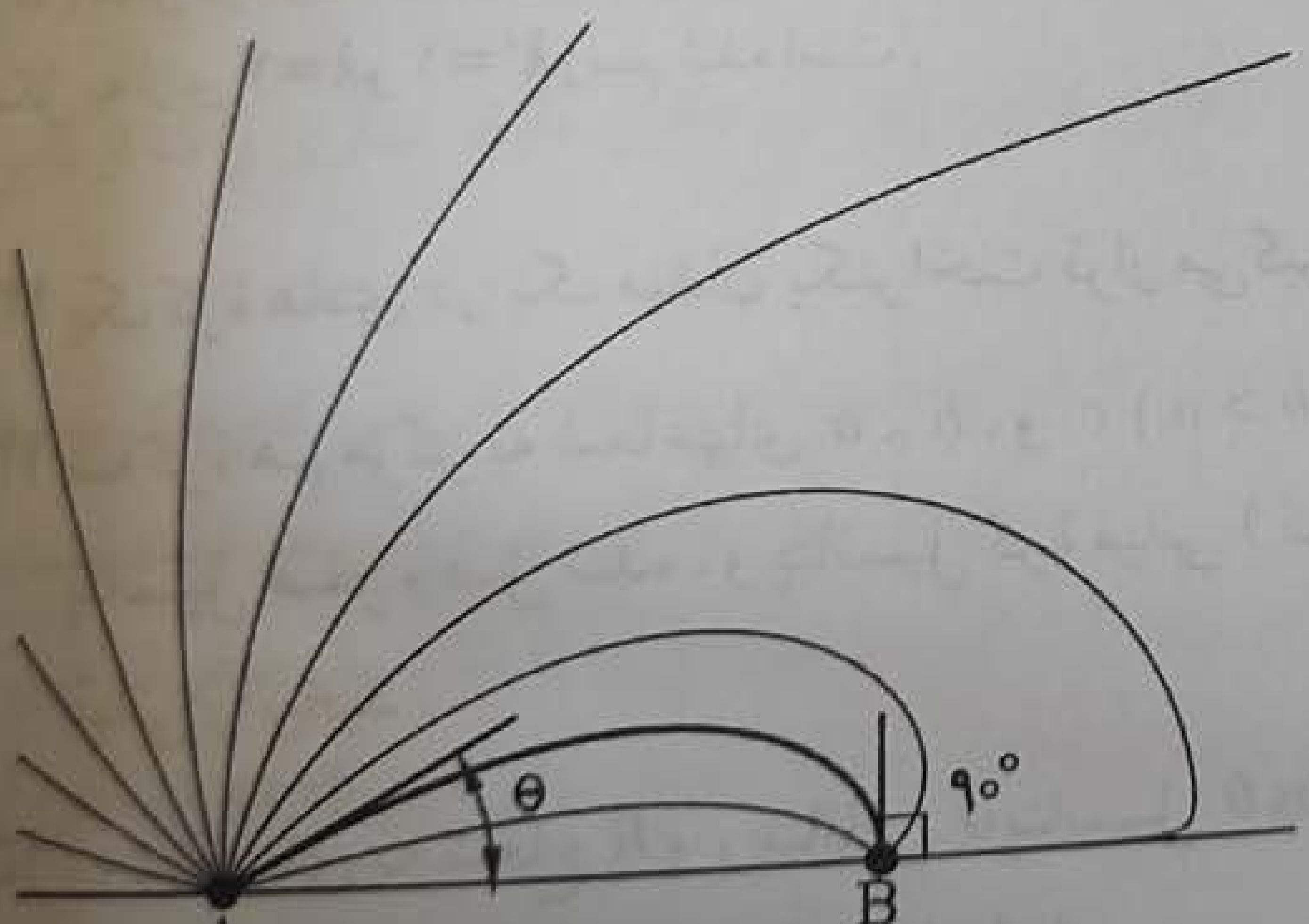


شکل ۱۱-۱۹

۱۱-۲۰ بار خطی با چگالی ۳λ C/m در نقطهٔ A و بار خطی با چگالی $-\lambda$ C/m در نقطهٔ B (هر دو عمود به صفحهٔ کاغذ) قرار دارند. خط نیرویی که با زاویهٔ ۹۰° نسبت به خط AB به نقطهٔ B وارد می‌شود با چه زاویه‌ای از A جدا می‌شود؟ به عبارت دیگر θ شکل ۱۱-۲۰ چقدرست؟

(الف) ۳۰° (ب) ۶۰°

(ج) ۹۰° (د) ۴۵°



شکل ۱۱-۲۰

۱۱-۲۱ کرهٔ کوچکی از هادی کامل به شعاع R هم مرکز با مبدا مختصات قرار دارد و گذردهی محیط اطرافش به صورت $\varepsilon = \varepsilon_۰(۱ + a/r)$ است. اگر بار Q روی کره قرار داشته باشد، V در اطراف آن عبارت است از

(الف) $V = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ a}\ln\frac{K(a+r)}{r(a+K)}$

(ب) $V = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r(a+r)}$

(ج) $V = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}$

(د) $V = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ a}\ln\frac{(a+r)}{r}$

۱۱-۲۲ کرهٔ عایقی با گذردهی ε دارای باری با چگالی $\rho = kr$ است. کره در فضای آزاد قرار دارد و شعاع آن

a است. پتانسیل مرکز کره عبارت است از :

(الف) صفر (ب) $\frac{ka^3}{12\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon+3\varepsilon_0)$ (ج) $\frac{ka^3(3\varepsilon+\varepsilon_0)}{12\varepsilon\varepsilon_0}$ (د) $\frac{ka^3}{4\varepsilon\varepsilon_0}(\varepsilon+\varepsilon_0)$

۱۱-۲۳ یک کرهٔ هادی به شعاع R به پتانسیل V_0 وصل است. کره را از منبع جدا کرده، آن را با پوسته‌ای هادی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b می‌پوشانیم. پتانسیل کرهٔ وسطی چقدر می‌شود؟

(الف) $V_0\left(1+\frac{R}{b}-\frac{R}{a}\right)$ (ب) $V_0\left(1-\frac{R}{b}+\frac{R}{a}\right)$ (ج) V_0 (د) $V_0\frac{R}{a+b+R}$

۱۱-۲۴ در ناحیهٔ $z<0$، $\varepsilon_2=2\varepsilon_0$ و در ناحیهٔ $z>0$، $\varepsilon_2=\varepsilon_0$ (فضای آزاد). در مرز دو ناحیه بار سطحی با چگالی $\sigma=10^4\ \mathrm{C/m^2}$ وجود دارد. اگر در فضای آزاد داشته باشیم $\mathbf{E}_1=10^2(\hat{\mathbf{x}}-2\hat{\mathbf{y}}+5\hat{\mathbf{z}})$ V/m، میدان در $z<0$ چقدر است؟

(الف) $\mathbf{E}_2=10^4(2\hat{\mathbf{x}}-4\hat{\mathbf{y}}+5\hat{\mathbf{z}})$ V/m (ب) $\mathbf{E}_2=10\hat{\mathbf{x}}-2\times10^2\hat{\mathbf{y}}+2\times10^2\hat{\mathbf{z}}$ V/m

(ج) $\mathbf{E}_2=10^4(\hat{\mathbf{x}}-2\hat{\mathbf{y}}+3\hat{\mathbf{z}})$ V/m (د) هیچکدام

۱۱-۲۵ در ناحیهٔ $z>0$ رسانایی ویژه $\sigma=10y$ و گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_0(1+y)$ است. از این محیط جریانی با چگالی $\mathbf{J}=e^{-z}\hat{\mathbf{y}}$ می‌گذرد. چگالی بار الکتریکی در این محیط عبارت است از

(الف) $2\varepsilon_0(1+y)e^{-z}$ (ب) $-\varepsilon_0 e^{-z}/(1+y)$ (ج) $-\varepsilon_0 e^{-z}/10y^2$ (د) صفر

۱۱-۲۶ میدان الکتریکی زیر داده شده است

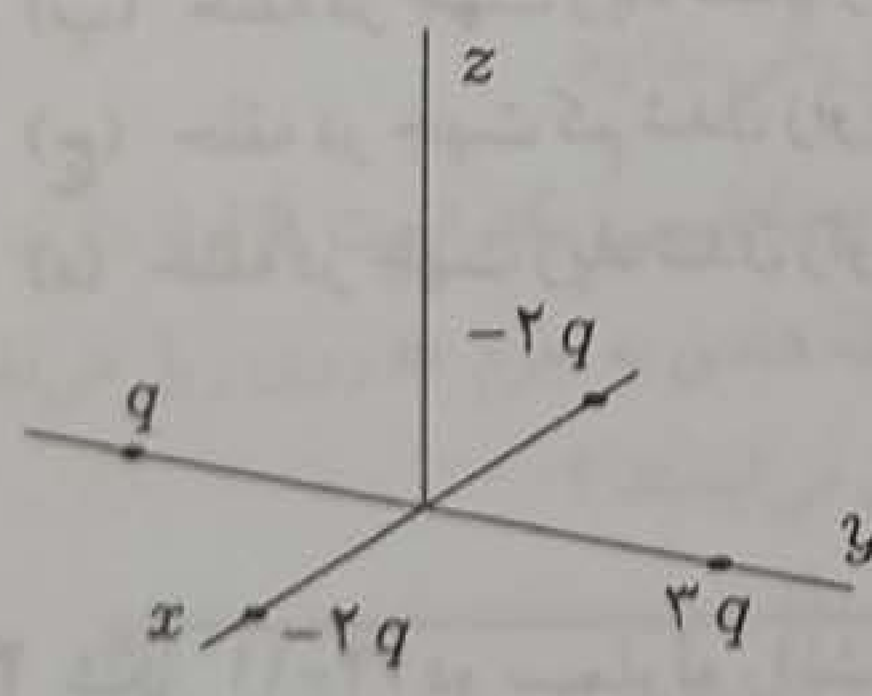
$$\mathbf{E}=2r\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}}+r\cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}-r\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

اگر مبدا را مرجع پتانسیل بگیریم، V در نقطهٔ $r=2$، $\theta=\pi/6$، $\phi=\pi/3$ عبارت است از

(الف) $-\sqrt{3}$ V (ب) -1 V (ج) $1-\sqrt{3}$ V (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ V

۱۱-۲۷ چهار بار نقطه‌ای با مقادیر q، $-2q$، $3q$، و $-2q$ مطابق شکل ۱۱-۲۷ روی محورهای x و y قرار دارند و فاصله‌شان تا مبدا برابر d است. روی محور z و در فاصله‌ای بسیار دور از این بارها کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(الف) $E_z=\frac{K_1}{z^2}$ (ب) $E_z=\frac{K_2}{z}$ (ج) $V=\frac{K_3}{z^2}$ (د) $V=\frac{K_4}{z}$



شکل ۱۱-۲۷

۱۱-۲۸ روی نیمکرهٔ $r=A$، $0\le\theta\le\pi/2$، $0<\phi\le2\pi$ باری با چگالی $\sigma=\sigma_0\sin\phi$ وجود دارد. شدت میدان الکتریکی در مرکز نیمکره عبارت است از :

(الف) 0 (ب) $-\frac{\sigma_0\pi}{8\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$ (ج) $\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$ (د) $-\frac{\sigma_0\pi}{16\varepsilon_0}\hat{\mathbf{y}}$

۱۱-۲۹ استوانهٔ عایقی به طول l به صورت هم محور با محور z قرار دارد و بردار قطبش آن $\mathbf{p}=P_0\hat{\mathbf{z}}$ است. در مرکز استوانه کدام یک از گزینه‌های زیر درست است :

(الف) $V=0$ و $\mathbf{E}$ در جهت $-\hat{\mathbf{z}}$ است؟ (ب) $V=0$ و $\mathbf{E}$ در جهت $+\hat{\mathbf{z}}$ است؟

(ج) $\mathbf{E}=0$ و $V>0$؟ (د) $\mathbf{E}=0$ و $V<0$؟

۱۱-۳۰ صفحهٔ $z=0$ هادی کامل است و حلقه‌ای به شعاع a در صفحهٔ $z=d$ قرار دارد. روی حلقه باری با چگالی ثابت λ قرار دارد و پتانسیل صفحهٔ هادی صفرست. شدت میدان الکتریکی در مرکز حلقه عبارت است از

(الف) $-\dfrac{4\lambda a^2 d}{\varepsilon_0 (a^2+2d^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{z}}$ (ب) $-\dfrac{4\lambda a d}{\varepsilon_0 (a^2+2d^2)^{\frac{1}{2}}}\hat{\mathbf{z}}$

(ج) $-\dfrac{\lambda a d}{\varepsilon_0 (a^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{z}}$ (د) $\dfrac{4\lambda a d}{\varepsilon_0 (a^2+2d^2)^{\frac{1}{2}}}\hat{\mathbf{z}}$

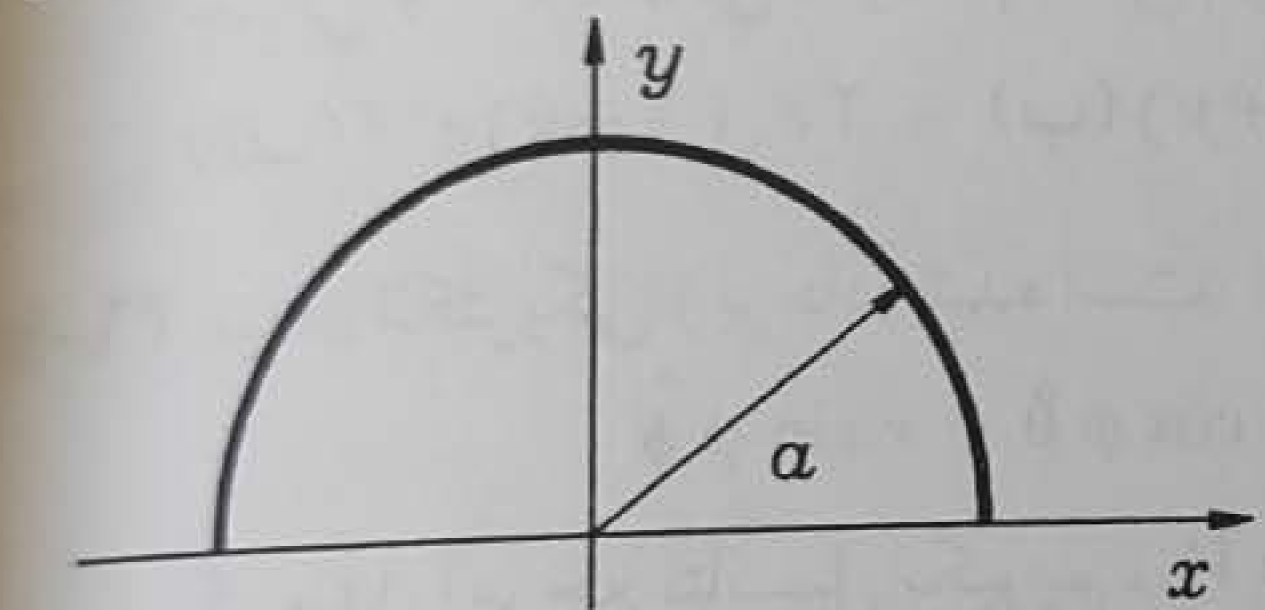
۱۱-۳۱ روی بخش مثبت محور x باری با چگالی λ_1 و روی بخش منفی آن باری با چگالی λ_2 قرار دارد. مولفهٔ y میدان $\mathbf{E}$ در نقطهٔ A واقع بر محور y و به فاصلهٔ r از محور x چقدرست؟

(الف) $\dfrac{\sqrt{2}(\lambda_1+\lambda_2)}{2\pi\varepsilon_0 r}$ (ب) $\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$ (ج) $\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 r}$ (د) $\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

۱۱-۳۲ روی نیمدایرهٔ $\rho=a$، $0\le\phi\le\pi$ باری با چگالی $\lambda=\rho_0 x^2$ قرار دارد. اندازهٔ شدت میدان الکتریکی در مبدا چقدرست؟

(الف) $\dfrac{\rho_0}{6\pi\varepsilon_0 a}$ (ب) $\dfrac{6a\rho_0}{\pi\varepsilon_0}$

(ج) $\dfrac{a\rho_0}{6\pi\varepsilon_0}$ (د) $\dfrac{\pi\varepsilon_0}{6a\rho_0}$



شکل ۱۱-۳۲

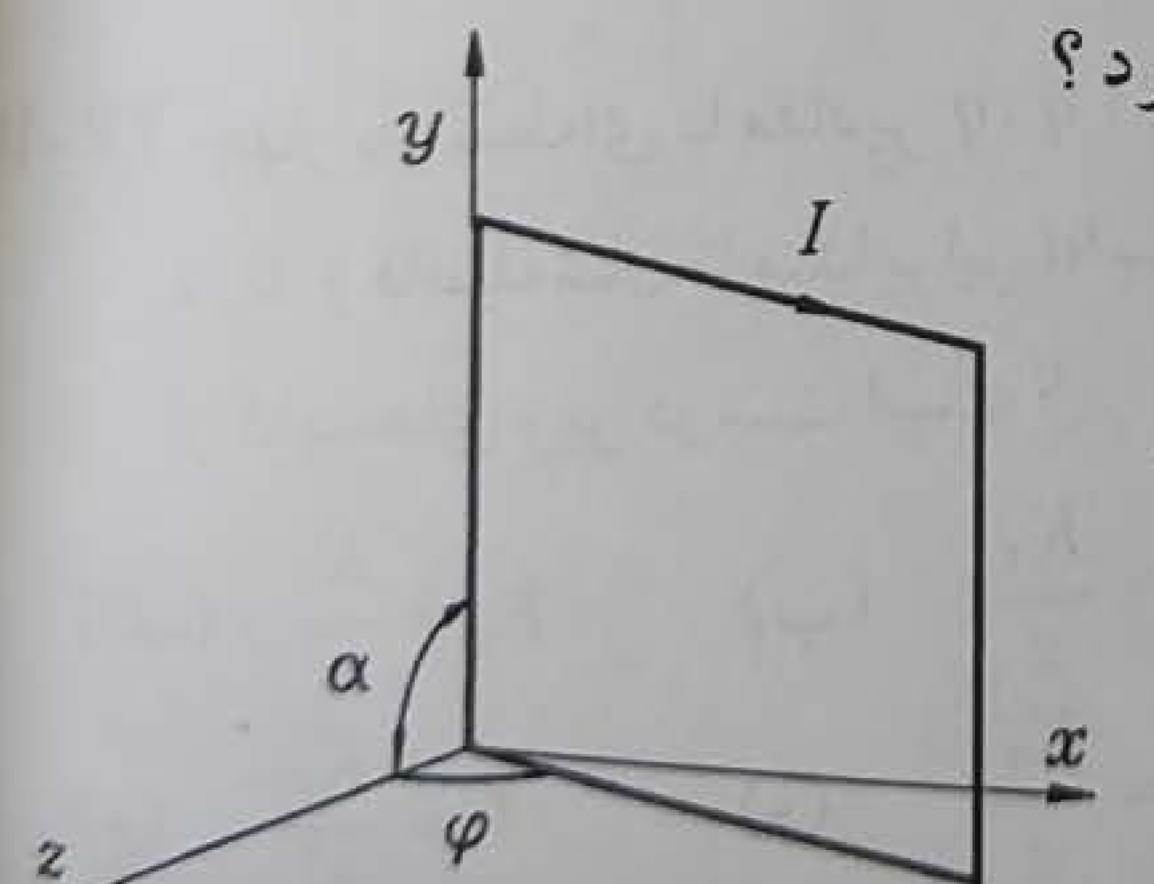
۱۱-۳۳ طول اضلاع حلقهٔ مربعی شکل ۱۱-۳۳ برابر a است. اگر در فضای اطراف حلقه میدان $\mathbf{B}=B_0\hat{\mathbf{x}}$ وجود داشته باشد حلقه به چه صورتی حرکت خواهد کرد؟

(الف) حلقه در جهت کم شدن زاویهٔ ϕ می‌چرخد.

(ب) حلقه در جهت زیاد شدن زاویهٔ ϕ می‌چرخد.

(ج) حلقه در جهت کم شدن زاویهٔ α می‌چرخد.

(د) حلقه در جهت زیاد شدن زاویهٔ α می‌چرخد.



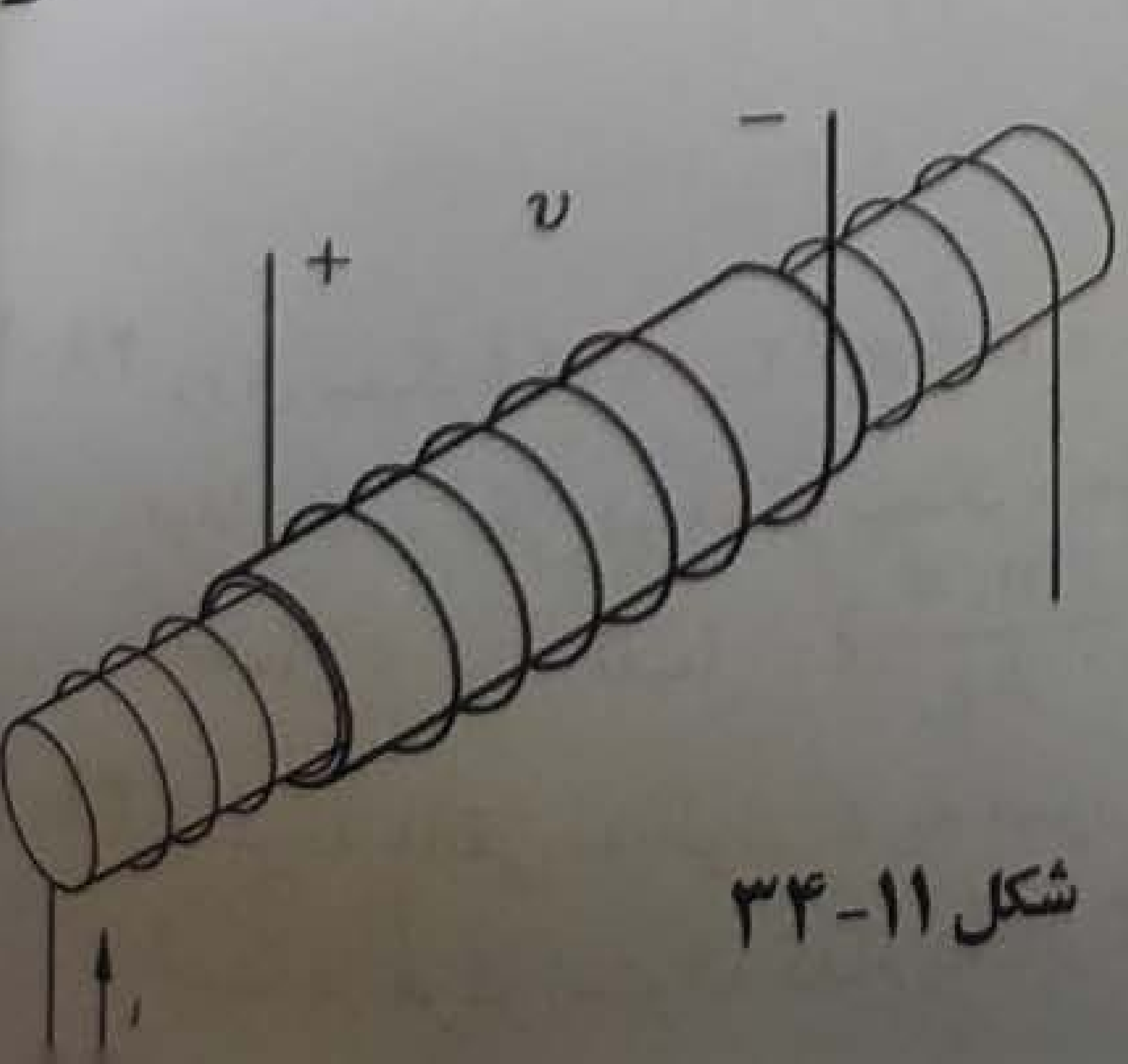
شکل ۱۱-۳۳

۱۱-۳۴ شکل ۱۱-۳۴ دو سیملوله را نشان می‌دهد که روی هم قرار دارند. اگر جریان i به طور خطی زیاد شود در مورد ولتاژ v چه می‌توان گفت؟

(الف) v مثبت و ثابت است.

(ب) v مثبت است و به طور خطی زیاد می‌شود.

(ج) v منفی و ثابت است.



شکل ۱۱-۳۴

(د) v منفی است و به طور خطی کم می‌شود.

۱۱-۳۵ مرز بین دو محیط ۱ و ۲ به موازات محور x است و محورهای y و z را در نقاط A (۰،۴،۰) و B (۰،۰،۳) قطع می‌کند. میدان مغناطیسی در دو ناحیه به ترتیب عبارت است از

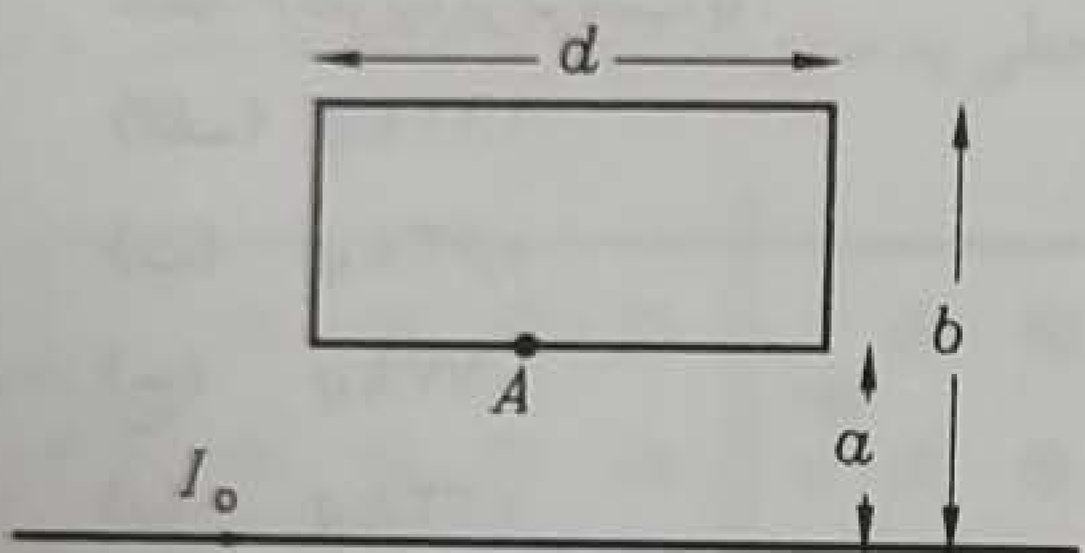
$$\mathbf{H}_۲ = -۵\hat{\mathbf{x}} + ۴\hat{\mathbf{y}} + ۲\hat{\mathbf{z}} \quad , \quad \mathbf{H}_۱ = ۵\hat{\mathbf{x}} + ۴\hat{\mathbf{y}} - ۳\hat{\mathbf{z}}$$

جریان سطحی روی مرز چقدر است؟

(الف) $۳\hat{\mathbf{x}} - ۵٫۶\hat{\mathbf{y}} + ۴٫۲\hat{\mathbf{z}}$ (ب) $۳\hat{\mathbf{x}} + ۴٫۹\hat{\mathbf{y}} - ۳٫۶\hat{\mathbf{z}}$

(ج) $-۳٫۲\hat{\mathbf{x}} - ۷٫۲\hat{\mathbf{y}} - ۸٫۴\hat{\mathbf{z}}$ (د) $۴\hat{\mathbf{x}} - ۲٫۵\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$

۱۱-۳۶ سیم طویل و حلقهٔ مستطیل نشان داده شده در شکل ۱۱-۳۶ در یک صفحه هستند. جریان سیم از مقدار اولیهٔ $I_۰$ به صفر می‌رسد. چه مقدار بار از نقطهٔ A مشخص شده بر روی حلقه می‌گذرد؟ مقاومت حلقهٔ مستطیلی ۱ mΩ است، $d = ۱$ m، $b = ۲a = ۲$ m و $I_۰ = ۱$ A.



شکل ۱۱-۳۶

(الف) ۱۰۰ μC

(ب) ۱۴۰ μC

(ج) ۲۲۰ μC

(د) به چگونگی تغییرات زمانی جریان از $I_۰$ به صفر بستگی دارد.

۱۱-۳۷ $\mathbf{A}$ پتانسیل مغناطیسی برداری است. انتگرال $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ چه کمیت فیزیکی را نشان می‌دهد؟

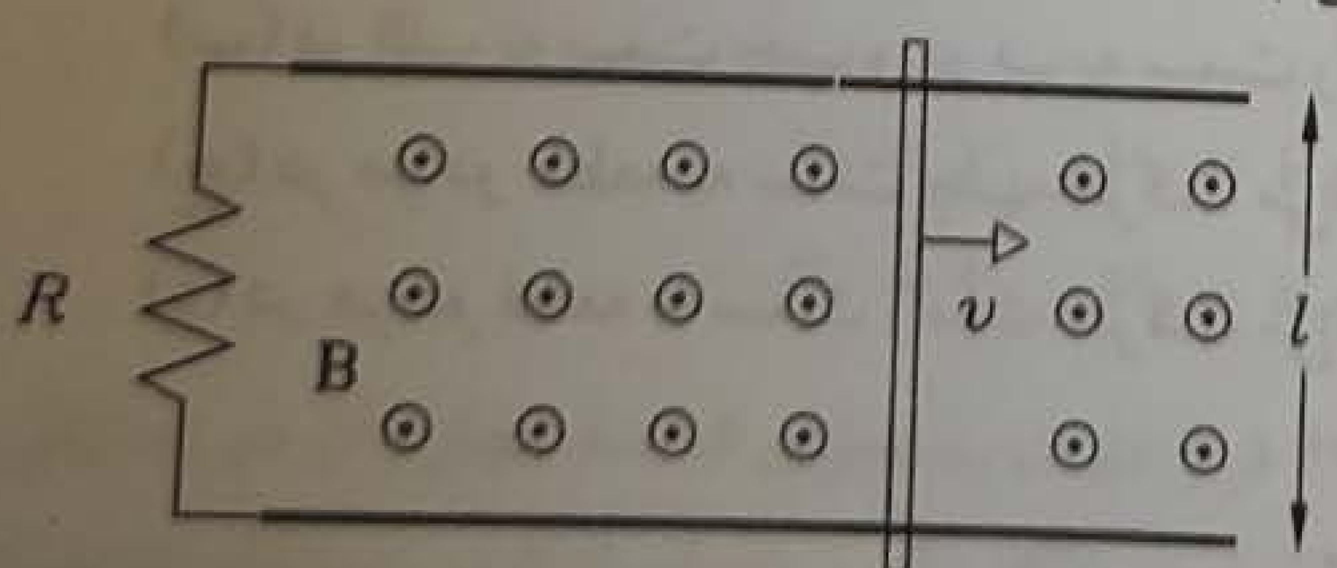
(الف) کار لازم برای حرکت دادن بار مغناطیسی فرضی بر روی مسیر بستهٔ C.

(ب) شار مغناطیسی که از داخل مسیر C می‌گذرد.

(ج) این انتگرال همیشه صفر است، زیرا خطوط میدان مغناطیسی خطوط بسته‌ای هستند.

(د) هیچ کمیت فیزیکی را نشان نمی‌دهد زیرا $\mathbf{A}$ معنی فیزیکی ندارد.

۱۱-۳۸ دو ریل موازی هادی به فاصلهٔ l از یکدیگر، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ قرار دارند. دو انتهای ریل توسط مقاومت R به هم متصل شده‌اند و یک میلهٔ هادی به جرم m روی ریل می‌لغزد. اگر سرعت اولیهٔ میله $v_۰$ باشد، میله پس از طی چه فاصله‌ای می‌ایستد؟



شکل ۱۱-۳۸

(الف) ∞ (ب) $\dfrac{۲v_۰ m}{B^۲ l}$

(ج) $\dfrac{v_۰^۲ mR}{\mu_۰ B^۲ l^۲}$ (د) $\dfrac{v_۰ mR}{B^۲ l^۲}$

۱۱-۳۹ ورقهٔ بزرگی به ضخامت t عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت B با سرعت $v_۰$ سقوط می‌کند. این ورق از جنسی با رسانایی ویژهٔ σ ساخته شده است. نیروی وارد بر واحد سطح این ورقه عبارت

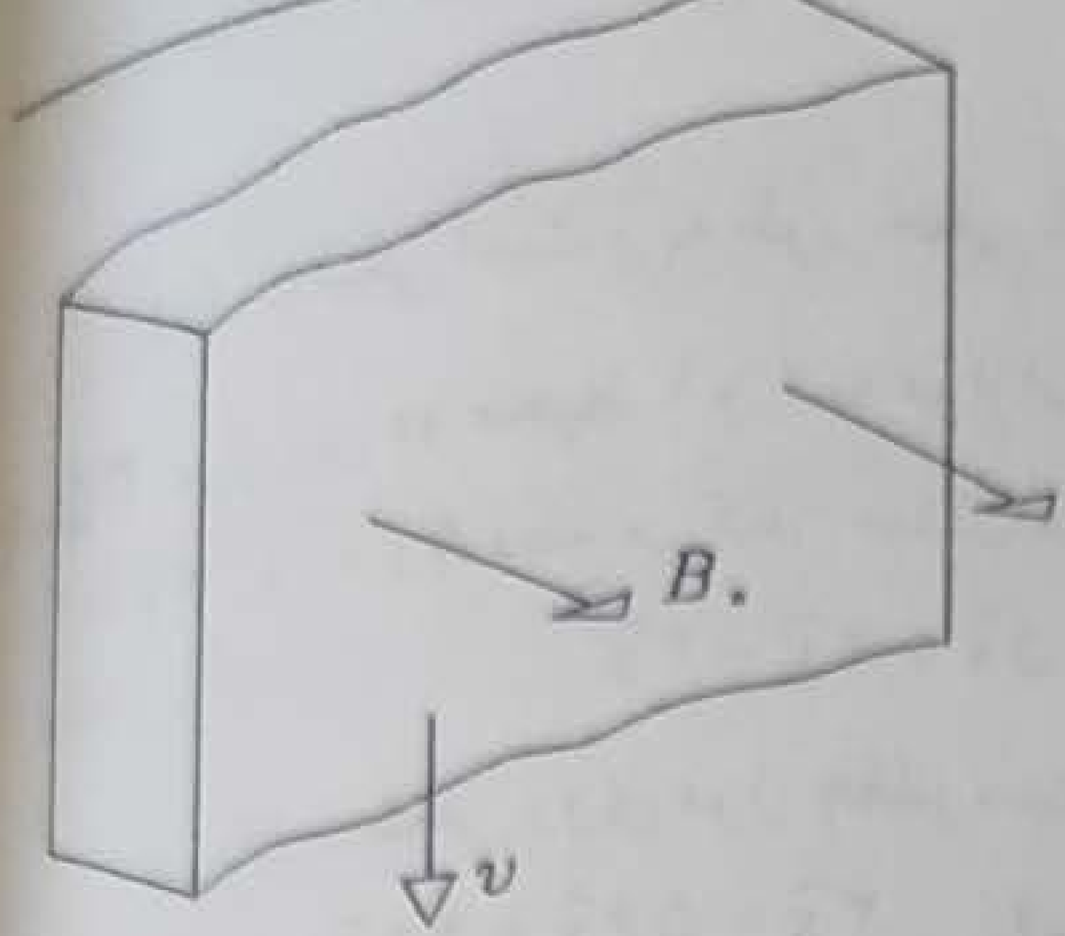
است از :

(الف) $l\sigma v_0 B_0^2$

(ب) $l\sigma^2 v_0 B_0^2$

(ج) $l\sigma v_0^2 B_0^2$

(د) $l\sigma^2 v_0 B_0$

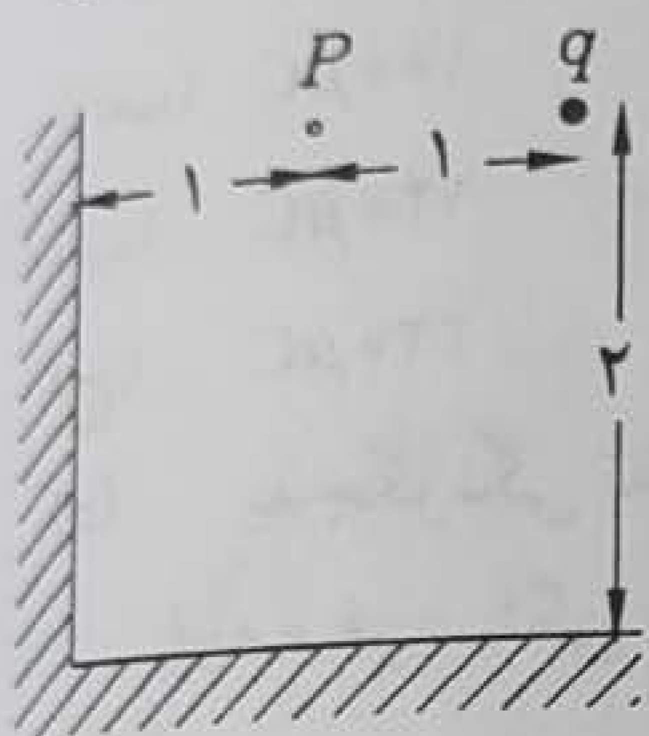


شکل ۱۱-۳۹

۱۱-۴۰ پتانسیل $V = 2000x + 4000y$ در فضای آزاد وجود دارد. انرژی ذخیره شده در مکعبی به ضلع $10\ m$، که مرکزش در مبدا و اضلاعش به موازات محورهای مختصات هستند چقدر است؟

(الف) $\frac{5}{18\pi}$ (ب) $\frac{10}{9\pi}$ (ج) $\frac{36}{\pi}$ (د) $2{,}5\pi$

۱۱-۴۱ بار q به صورت نشان داده شده در شکل ۱۱-۴۱ در کنار دو سطح هادی عمود بر هم قرار دارد. V در نقطهٔ P تقریباً برابر است با:



شکل ۱۱-۴۱

(الف) $1{,}22kq$

(ب) $0{,}63kq$

(ج) $0{,}77kq$

(د) $0{,}33kq$

در گزینه‌های داده شده $k = 1/4\pi\varepsilon_0$.

۱۱-۴۲ دو صفحهٔ هادی بزرگ در $x = 0$ و $x = 1$ قرار دارند و پتانسیل آنها به ترتیب ۰ و ۱۰۰ V است. محیط بین دو صفحه عایقی غیر همگن با گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + x^2)$ است. تابع پتانسیل بین صفحات عبارت است از:

(الف) $100 \sin\frac{\pi x}{2}$ (ب) $100x$ (ج) $100(1 + x^2) - 100x$ (د) $\frac{400}{\pi}\tan^{-1} x$

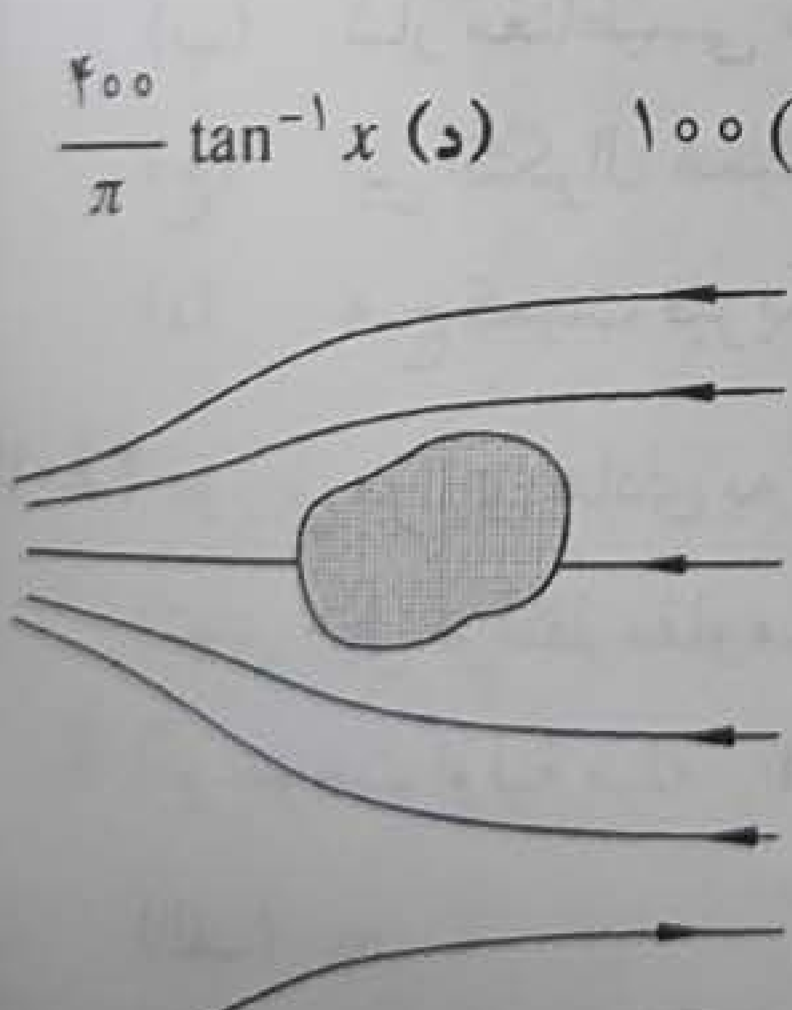
۱۱-۴۳ در شکلهای ۱۱-۴۳ الف و ب یک قطعه هادی در میدان الکتریکی غیر یکنواختی نشان داده شده است. کدام یک از جملات زیر در مورد جهت حرکت قطعه درست است؟

(الف) در الف به سمت راست و در ب به سمت چپ

(ب) در الف به سمت چپ و در ب به سمت راست

(ج) در هر دو قطعه به سمت چپ حرکت می‌کند.

(د) در هر دو قطعه به سمت راست حرکت می‌کند.



الف

ب

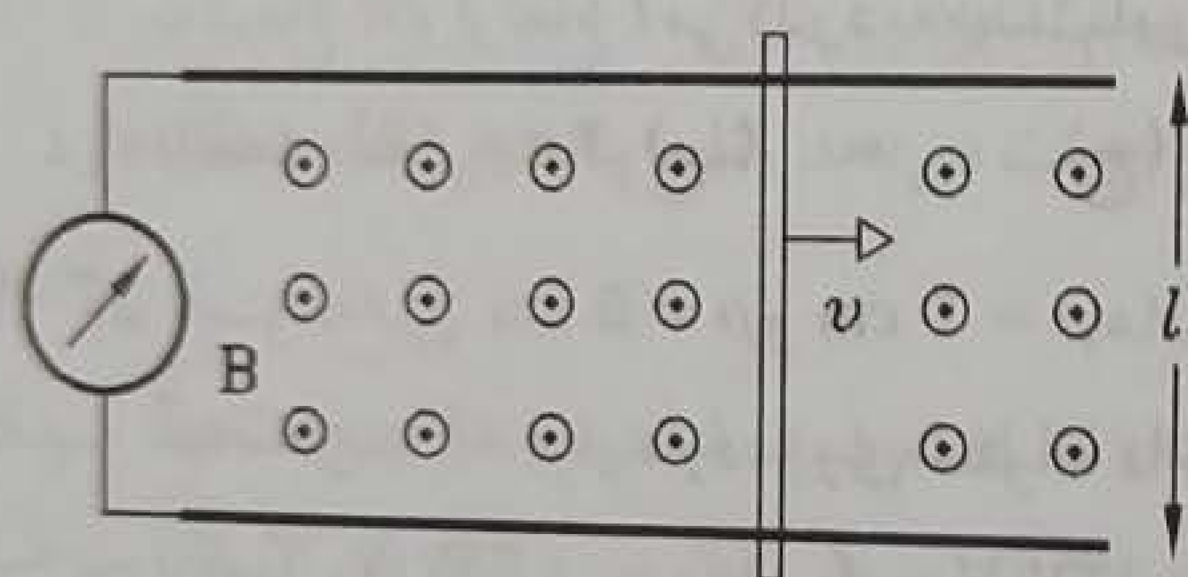
شکل ۱۱-۴۳

۱۱-۴۴ معادلهٔ سطح همپتانسیلی را که از نقطهٔ P می‌گذرد می‌دانیم. در مورد میدان الکتریکی در نقطهٔ P، $\mathbf{E}(P)$، کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) می‌توانیم $\mathbf{E}(P)$ را به طور کامل تعیین کنیم.
(ب) تنها می‌توانیم راستای $\mathbf{E}(P)$ را تعیین کنیم. (ج) تنها می‌توانیم جهت $\mathbf{E}(P)$ را بیابیم.
(د) برای یافتن هرگونه اطلاعی راجع به $\mathbf{E}(P)$ دانستن تابع پتانسیل لازم است، نه معادلهٔ سطح همپتانسیل.

۱۱-۴۵ دو کره در محیطی با رسانایی ویژهٔ $\sigma = 2 \times 10^5$ S/m و گذردهی $\varepsilon = 100$ pF/m قرار دارند. مقاومت بین هادیها $100\ \Omega$ است. ظرفیت خازن تشکیل شده از این دو کره چقدرست؟
(الف) ۲ pF (ب) ۳٫۵ pF (ج) ۰٫۱ pF (د) ۰٫۵ pF

۱۱-۴۶ دو ریل موازی هادی به فاصلهٔ l از یکدیگر، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ قرار دارند. دو انتهای ریل توسط ولتمتری به هم متصل شده‌اند و یک میلهٔ هادی روی ریل می‌لغزد. در $t = 0$ فاصلهٔ میله از انتهایی که ولتمتر به آن متصل است برابر a می‌باشد. در این لحظه میله با سرعت v_0 شروع به حرکت به سمت راست می‌کند. اگر میدان تغییراتی خطی به صورت $B = B_0 t$ داشته باشد، ولتاژ روی ولتمتر عبارت است از:
(الف) $lv_0 B_0 t$
(ب) $lB_0(a + 2v_0 t)$
(ج) $lB_0(a + v_0 t)$
(د) $2lB_0(a + v_0 t)$

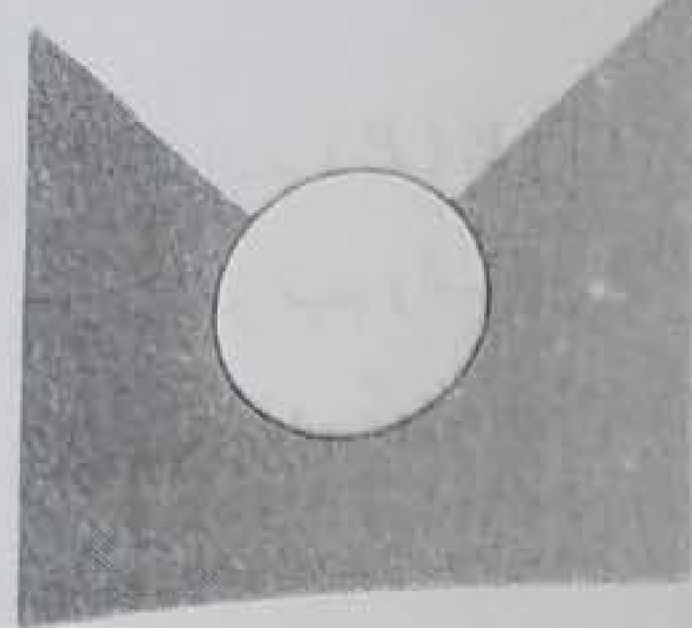


شکل ۱۱-۴۶

۱۱-۴۷ یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b از مادهٔ عایق ناهمگنی با گذردهی $\varepsilon = \frac{5\varepsilon_0}{r^2}$ ساخته شده است. اگر بار نقطه‌ای Q در مرکز این پوسته قرار گیرد، چگالی بار مقید روی سطح خارجی پوسته چه مقداری می‌شود؟
(الف) $\frac{Q(5 - b^2)}{20\pi b^2}$ (ب) $\frac{5Q(a^2 - b^2)}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$ (ج) $\frac{Q}{4\pi b^2}$ (د) $\frac{4}{3}\pi Q(b^2 - a^2)$

۱۱-۴۸ یک کرهٔ هادی به شعاع a و یک پوستهٔ کروی هادی به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c به طور هم مرکز قرار گرفته‌اند. بار Q را روی کرهٔ وسطی قرار می‌دهیم، به این ترتیب پتانسیل کره V_1 و پتانسیل پوسته V_2 می‌شود. اگر بار Q را روی پوستهٔ کروی قرار دهیم، پتانسیل کره V_3 و پتانسیل پوسته V_4 می‌شود. کدام گزاره درست است؟
(الف) $V_1 = V_4$ و $V_2 = V_3$ (ب) $V_3 = V_4$ و $V_2 = V_1$
(ج) $V_2 = V_3 = V_4$ (د) $V_1 = V_3$ و $V_2 = V_4$

۱۱-۴۹ یک کرهٔ هادی به شعاع a مطابق شکل ۱۱-۴۹ قرار دارد، به نحوی که سه چهارم آن در محیطی با گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 3$ فرو رفته است. مرز محیط دی الکتریک و فضای آزاد در دستگاه مختصات کروی، با تابع $\theta = \pi/4$ توصیف می‌شود. اگر پتانسیل کره V_0 باشد، چه مقدار بار روی آن قرار دارد؟



شکل ۱۱-۴۹

(الف) $۴\pi\varepsilon_{\circ} a V_{\circ}$

(ب) $\frac{۳}{۴}\pi\varepsilon_{\circ} a V_{\circ}$

(ج) $۹\pi\varepsilon_{\circ} a V_{\circ}$

(د) $۱۰\pi\varepsilon_{\circ} a V_{\circ}$

۱۱-۵۰ جریان $I_۲$ روی محور y و در جهت افزایش y قرار دارد، و از حلقه‌ای به شعاع a واقع در صفحهٔ xy و به مرکز مبدا جریان $I_۱\hat{\boldsymbol{\phi}}$ می‌گذرد. نیروی وارد بر حلقهٔ عبارت است از

(الف) $-\mu_{\circ} I_۱ I_۲ \hat{\mathbf{z}}$ (ب) $\mu_{\circ} I_۱ I_۲ \hat{\mathbf{y}}$ (ج) $-\mu_{\circ} I_۱ I_۲ \hat{\mathbf{x}}$ (د) صفر

۱۱-۵۱ شرایط مرزی برای پتانسیل مغناطیسی برداری عبارت است از:

(الف) $A_{n۱} = A_{n۲}\ ,\ \mu_۱ A_{t۱} = \mu_۲ A_{t۲}$ (ب) $A_{n۱} = A_{n۲}\ ,\ A_{t۱} = A_{t۲}$

(ج) $A_{t۱} = A_{t۲}\ ,\ \mu_۱ A_{n۱} = \mu_۲ A_{n۲}$ (د) $A_{n۱} = A_{n۲}\ ,\ \mu_۲ A_{t۱} = \mu_۱ A_{t۲}$

۱۱-۵۲ در محیطی میدان الکتریکی به صورت $\mathbf{E} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ داده شده است. شاری راکه از استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع l می‌گذرد به دست آورید. استوانه هم محور با محور z و مرکزش در مبدا است.

(الف) $۲\pi\varepsilon_{\circ} l R^۲$ (ب) $\circ$ (ج) $-\pi\varepsilon_{\circ} l R^۲$ (د) $۳\pi\varepsilon_{\circ} l R^۲$

۱۱-۵۳ استوانه‌های $\rho = ۵$ cm و $\rho = ۲$ cm هادی هستند و در فضای بین آنها توزیع باری با چگالی $-۴۰۰\,\varepsilon_{\circ}\ \text{C/m}^۳$ قرار دارد. روی استوانهٔ داخلی $V = \circ$ و $E_\rho = \circ$. V روی استوانهٔ بیرونی برابر است با:

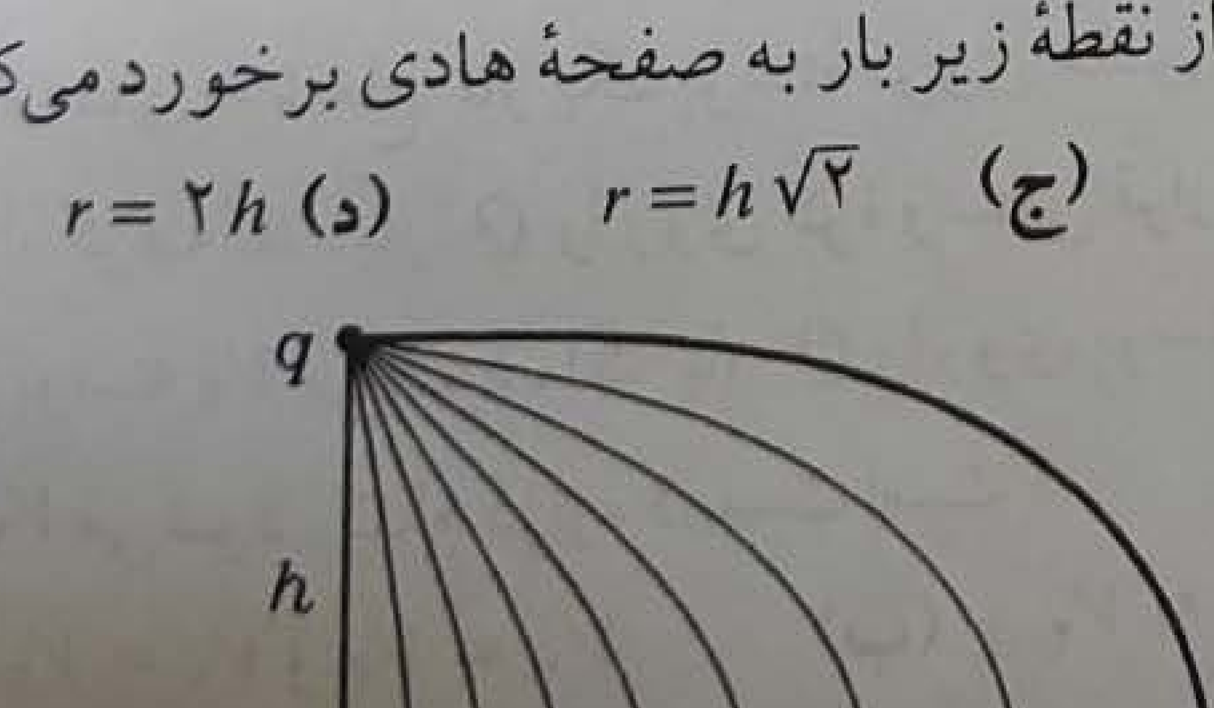
(الف) $\circ{,}۳۸۷$ V (ب) $\circ{,}۱۳۷$ V (ج) $\circ{,}۶۵۳$ V (د) $\circ{,}۷\circ۸$ V

۱۱-۵۴ روی سطح نیمکرهٔ $r = R$، $\circ < \theta < \pi / ۲$، $\circ < \phi < ۲\pi$، و قاعدهٔ آن بار سطحی با چگالی σ قرار دارد. پتانسیل در مرکز کرهٔ (مرکز قاعده) چقدر است؟

(الف) $۲\sigma R / \varepsilon_{\circ}$ (ب) $-\sigma R / \varepsilon_{\circ}$ (ج) صفر (د) $\sigma R / \varepsilon_{\circ}$

۱۱-۵۵ بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ h از یک صفحهٔ هادی کامل قرار دارد. خط میدانی که به موازات صفحهٔ هادی از بار جدا می‌شود در چه فاصلهٔ شعاعی از نقطهٔ زیر بار به صفحهٔ هادی برخورد می‌کند؟

(الف) $r = h$ (ب) $r = \sqrt{۳}\,h$ (ج) $r = h\sqrt{۲}$ (د) $r = ۲h$



شکل ۱۱-۵۵

۱۱-۵۶ برای میدان $\mathbf{E}$ سطوح همپتانسیل با معادلهٔ $y^۲ = xy + c$ بیان شده است و در نقطهٔ $(۲,۵,\circ)$ داریم $E_x = ۲۲\circ$ V/m. میدان الکتریکی در این نقطه عبارت است از:

(الف) $\mathbf{E} = ۴y\hat{\mathbf{x}} + (۴x - ۸y)\hat{\mathbf{y}}$ V/m (ب) $\mathbf{E} = ۲\circ\hat{\mathbf{x}} + -۵\circ\hat{\mathbf{y}}$ V/m

(ج) $\mathbf{E} = (۱\circ\circ y - ۵\circ)^{\frac{۱}{۲}}\ \hat{\mathbf{x}}$ V/m (د) $\mathbf{E} = (۶y - ۵x)\hat{\mathbf{x}} + ۸y^۲\hat{\mathbf{y}}$ V/m

۱۱-۵۷ از حلقه‌ای به شعاع ۱، واقع در صفحهٔ xy و به مرکز مبدا جریان $I = I_\circ \sin\phi \cos\omega t\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ عبور می‌کند. بردار پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ در نقطهٔ (۰ ، ۰ ، ۱) عبارت است از:

(الف) $\mathbf{A} = \dfrac{-\mu_\circ I_\circ}{4\sqrt{2}} \cos\omega t\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ (ب) $\mathbf{A} = \dfrac{\mu_\circ I_\circ}{4\pi} \sin\phi \cos\omega\left(t - \dfrac{\sqrt{2}}{c}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$

(ج) $\mathbf{A} = \dfrac{\mu_\circ I_\circ}{2\pi} \cos\omega\left(t - \dfrac{\sqrt{2}}{c}\right)\hat{\mathbf{r}}$ (د) $\mathbf{A} = \dfrac{-\mu_\circ I_\circ}{4\sqrt{2}} \sin\phi \cos\omega\left(t - \dfrac{\sqrt{2}}{c}\right)\hat{\mathbf{x}}$

۱۱-۵۸ استوانه‌های $\rho = 5$ و $\rho = 3$ هادی هستند و بین آنها عایق ناهمگنی با $\varepsilon_r = 1/\rho^2$ قرار دارد. پتانسیل دو استوانه به ترتیب ۲۰ V و ۱۰۰ V است. تابع پتانسیل بین دو استوانه عبارت است از

(الف) $V = 145 - 5\rho^2$ (ب) $V = 272 - 156/6 \ln\rho$

(ج) $V = 220 - 40\rho$ (د) $V = k_1\rho + k_2 \ln\rho$

۱۱-۵۹ بخشی از فضا فاقد هر گونه بار الکتریکی است. در این فضا:

(الف) در نقاطی که شدت میدان الکتریکی صفرست، تابع پتانسیل می‌نیمم یا ماکزیمم است.

(ب) در چنین فضایی پتانسیل می‌نیمم یا ماکزیمم ندارد.

(ج) در نقاطی که شدت میدان الکتریکی تغییر جهت می‌دهد، تابع پتانسیل نقطه عطف دارد.

(د) ب و ج

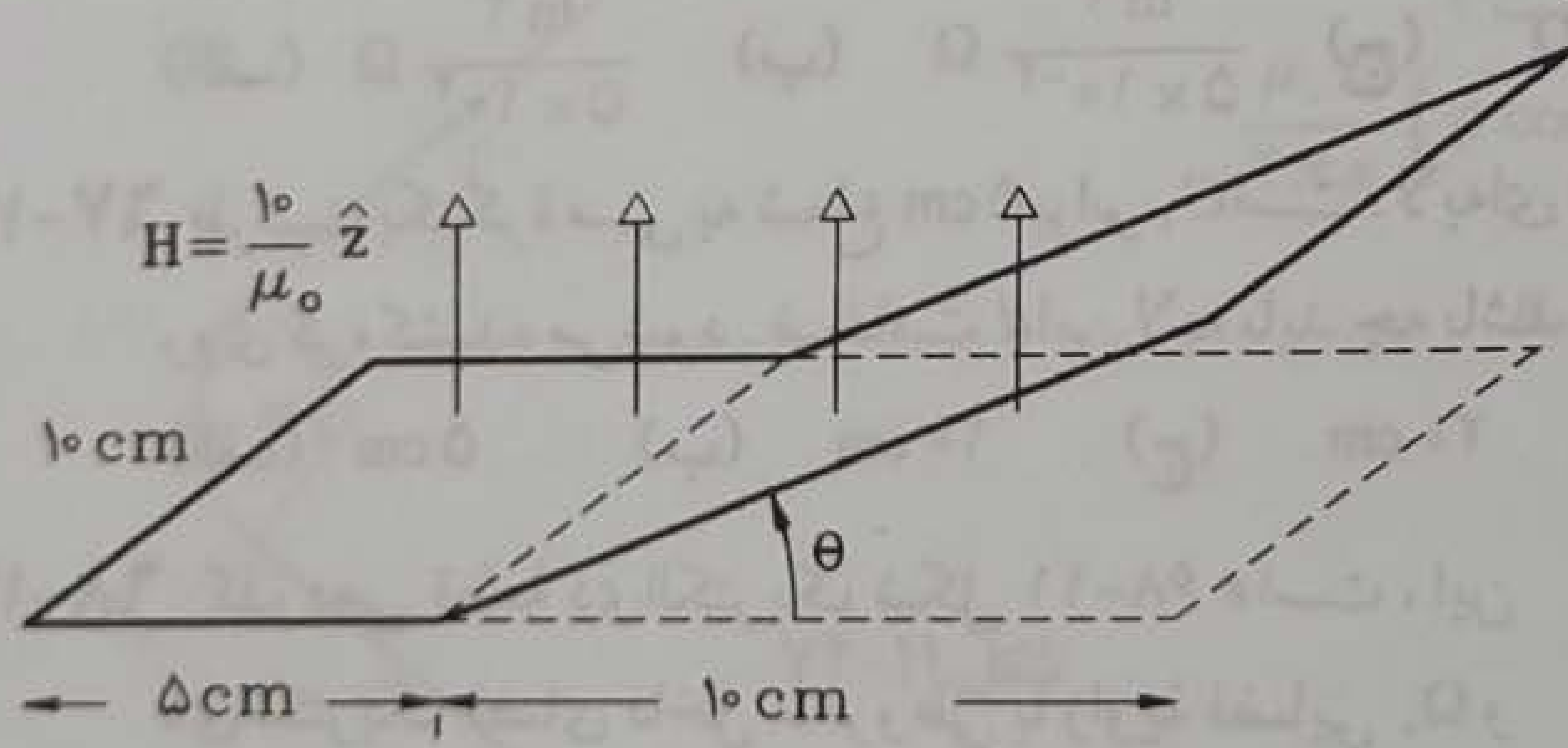
۱۱-۶۰ قاب شکل ۱۱-۶۰ از سیمی با مقاومت ۱۰ Ω/m ساخته شده است، و در این محیط میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = \dfrac{1}{\mu_\circ}\hat{\mathbf{z}}$ وجود دارد. بخش سمت راست را از محل نقطه چین تا کرده، آن را با سرعت زاویه‌ای ۵۰ دور بر ثانیه تا زاویهٔ $\theta = 90°$ برده، آن را با همان سرعت برمی‌گردانیم. ماکزیمم جریان القا شده در این حلقه چقدرست؟

(الف) 2π A

(ب) π A

(ج) ۲ A

(د) هیچکدام



شکل ۱۱-۶۰

۱۱-۶۱ میدان یکنواخت و غیر متغیر با زمان $\mathbf{E}_i = E_\circ(\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}})$ در فضایی وجود دارد؛ تیغهٔ بسیار بزرگی به ضخامت d و گذردهی ε عمود بر محور x قرار داده می‌شود. $\mathbf{P}$ و $\mathbf{E}$ را در داخل و خارج تیغه بیابید.

(الف) خارج تیغه $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i$ ، $\mathbf{P} = 0$ ، داخل تیغه $\mathbf{E} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_\circ}\mathbf{E}_i$ ، $\mathbf{P} = \varepsilon(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}_i$

(ب) خارج تیغه $\mathbf{E} = \dfrac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon}\mathbf{E}_i$ ، $\mathbf{P} = 0$ ، داخل تیغه $\mathbf{E} = E_\circ\left(\dfrac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon}\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}\right)$ ، $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_\circ)\mathbf{E}_i$

(ج) خارج تیغه $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i$ ، $\mathbf{P} = 0$ ، داخل تیغه $\mathbf{E} = E_\circ\left(\dfrac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon}\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}\right)$ ، $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_\circ)\mathbf{E}_i$

(د) خارج تیغه $\mathbf{E} = \dfrac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon}\mathbf{E}_i$ ، $\mathbf{P} = 0$ ، داخل تیغه $\mathbf{E} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_\circ}\mathbf{E}_i$ ، $\mathbf{P} = \varepsilon_\circ(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}_i$

۶۲-۱۱ از سیملوله‌ای با تعداد دور N دور بر واحد طول جریان I می‌گذرد. یک میله با تراوایی μ و سطح مقطع S به صورت هم محور با سیملوله داخل آن شده است. نیروی وارد بر میله عبارت است از:

(الف) $\frac{1}{4}(\mu-\mu_0)NI^2S$ (ب) $\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)N^2I^2S$

(ج) $\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)NI^2S$ (د) $\frac{1}{4}(\mu-\mu_0)N^2I^2S$

۶۳-۱۱ تابع پتانسیل در فضا به صورت $V = 2x + 4y$ داده شده است. کل انرژی ذخیره شده در این فضا و چگالی انرژی عبارت‌اند از:

(الف) $10\varepsilon_0 , \infty$ (ب) $0 , \infty$ (ج) ∞ , ∞ (د) $10\varepsilon_0 , 200$

۶۴-۱۱ ناحیهٔ $z > 0$ دارای رسانایی $\sigma = 1 + y$ و گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_0(1+y)$ است و جریانی با چگالی $J = e^{-z}\hat{y}$ در آن وجود دارد. چگالی بار الکتریکی در این محیط عبارت است از:

(الف) $2\varepsilon_0(1+y)e^{-z}$ (ب) $-\varepsilon_0 e^{-z}/(1+y)$ (ج) $-\varepsilon_0 e^{-z}$ (د) 0

۶۵-۱۱ گذردهی بین صفحات هادی $z = 0$ و $z = 0.01$ به صورت $\varepsilon_0 e^{-\alpha z}$، و پتانسیل این دو صفحه به ترتیب ۰ و ۱۰ V است. تابع پتانسیل بین صفحات عبارت است از:

(الف) $V = 1000z$ (ب) $V = 10 \sin \frac{\pi z}{2 \times 0.01}$

(ج) $V = 10 \sin \frac{10[e^{\alpha z} - 1]}{e^{0.01\alpha} - 1}$ (د) $V = 10 \sin \frac{10[e^{-\alpha z} - 1]}{e^{0.01\alpha} - 1}$

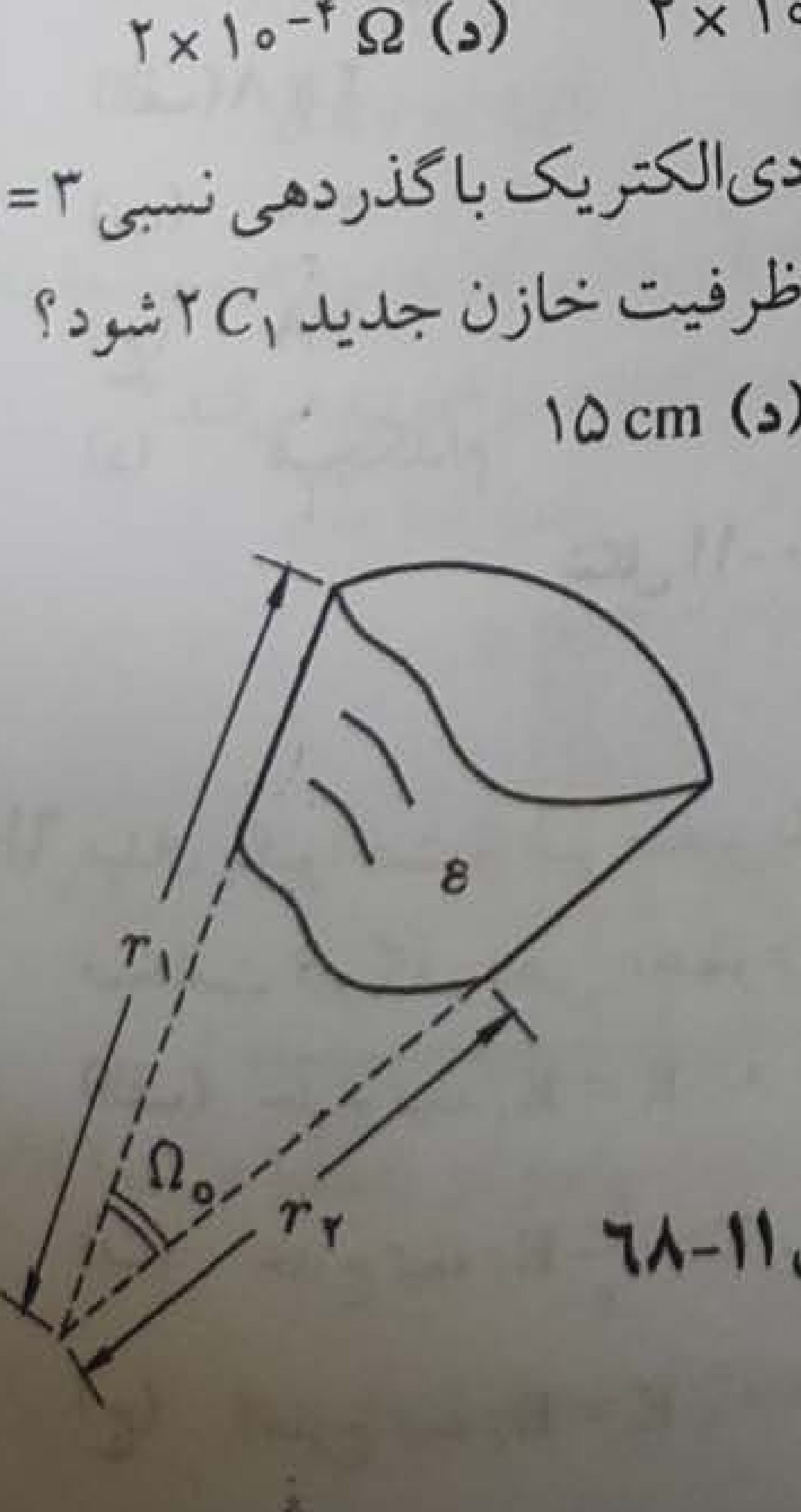
۶۶-۱۱ مقاومت بین سطوح استوانه‌ایِ گوه‌ای با رسانایی ویژهٔ $\sigma = 10$ S/m چقدر است؟ این گوه با معادلات $2\,\text{m} < \rho < 4\,\text{m}$، $0 < \phi < 0.1$ rad، $0 < z < 0.05$ m در دستگاه مختصات استوانه‌ای توصیف می‌شود.

(الف) $\frac{\ln 2}{5 \times 10^{4}}\,\Omega$ (ب) $\frac{\ln 2}{5 \times 10^{-4}}\,\Omega$ (ج) $2 \times 10^{4}\,\Omega$ (د) $2 \times 10^{-4}\,\Omega$

۶۷-۱۱ ظرفیت یک کرهٔ مسی به شعاع ۵ cm برابر C_1 است. لایه‌ای از دی‌الکتریک با گذردهی نسبی $\varepsilon_r = 3$ روی کره کشیده می‌شود. ضخامت d این لایه باید چه باشد تا ظرفیت خازن جدید $2C_1$ شود؟

(الف) ۵ cm (ب) ۱۰ cm (ج) ۲۰ cm (د) ۱۵ cm

۶۸-۱۱ گذردهی قطعهٔ دی‌الکتریک شکل ۱۱-۶۸ ε است، این دی‌الکتریک فضای داخل مخروطی با زاویهٔ فضایی Ω_0 و سطوح کروی $r = r_1$ و $r = r_2$ را پر کرده است. اگر سطوح کروی فلزی باشند ظرفیت خازن حاصل چقدر است؟ از اثرهای لبه‌ای چشم بپوشید.



شکل ۱۱-۶۸

(الف) $\frac{1}{\Omega_0 \varepsilon}\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$ (ب) $\Omega_0 \varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$

(ج) $\frac{1}{\Omega_0 \varepsilon}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$ (د) $\frac{\Omega_0}{\varepsilon}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$

۱۱-۶۹ گذردهی عایق ناهمگن یک خازن مسطح از کنار یک جوشن تا کنار جوشن دیگر به طور خطی از ε_1 به ε_2 تغییر می‌کند. اگر فاصلهٔ صفحات d، مساحت صفحات S، و بار روی هر صفحه Q باشد، و محور x عمود بر صفحات باشند، چگالی بارهای حجمی مقید داخل عایق عبارت است از:

(الف) $\dfrac{Q\varepsilon_0}{Sd}$ (ب) $\dfrac{-Q\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{Sd[\varepsilon_1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)x/d]^2}$

(ج) $\dfrac{-Q\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{Sd[\varepsilon_1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)x/d]^2}$ (د) $\dfrac{-Q\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{Sd[\varepsilon_0+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)x/d]^2}$

۱۱-۷۰ یک پوستهٔ استوانه‌ای به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c حول سیم بسیار بلندی که از آن جریان I می‌گذرد، به صورت هم محور قرار دارد. تراوایی پوسته μ، و شعاع سیم a است. بردار مغناطش $\mathbf{M}$ در این پوسته چقدر است؟

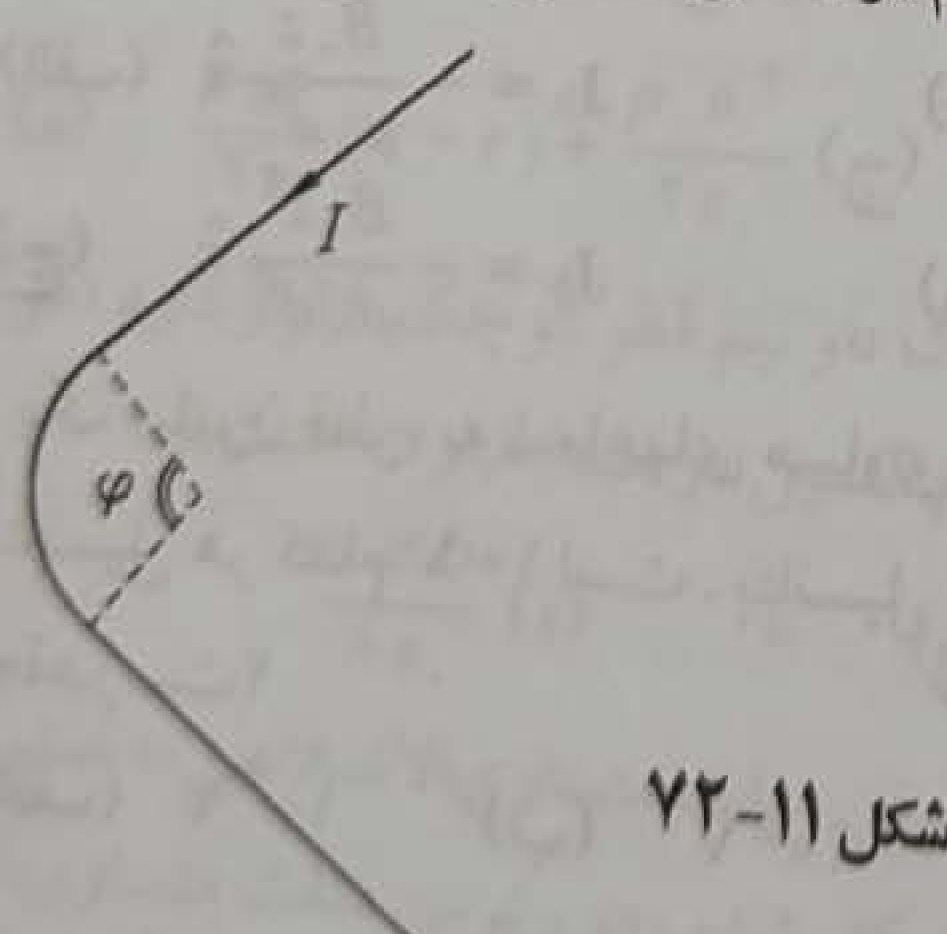
(الف) 0 (ب) $\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1\right)\dfrac{I}{2\pi\rho}$ (ج) $\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1\right)\dfrac{I\rho^2}{2\pi a}$ (د) $\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1\right)\dfrac{I\rho^2}{2\pi a^2}$

۱۱-۷۱ جریان $I\hat{\mathbf{z}}$ روی محور z می‌گذرد. ناحیهٔ $x>0$ فضای آزاد است و ناحیهٔ $x<0$ از ماده‌ای با تراوایی μ پر شده است. میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را در دو ناحیه بیابید.

(الف) در هر دو ناحیه $\dfrac{I}{\pi\rho}\dfrac{\mu\mu_0}{(\mu+\mu_0)}$ (ب) در ناحیه $x>0$، $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ و در ناحیه $x<0$، $\dfrac{\mu I}{2\pi\rho}$

(ج) در هر دو ناحیه $\dfrac{I}{2\pi\rho}\dfrac{\mu+\mu_0}{2}$ (د) در ناحیه $x>0$، $\dfrac{\mu_0 I}{\pi\rho}$ و در ناحیه $x<0$، $\dfrac{\mu I}{\pi\rho}$

۱۱-۷۲ سیم بلندی مطابق شکل ۱۱-۷۲ تا شده است و جریان I از آن می‌گذرد. بخش منحنی کمانی از دایره به زاویهٔ مرکزی ϕ است، و دو بخش مستقیم سیم بر بخش منحنی مماس‌اند. چگالی شار مغناطیسی در مرکز کمان چقدرست؟



شکل ۱۱-۷۲

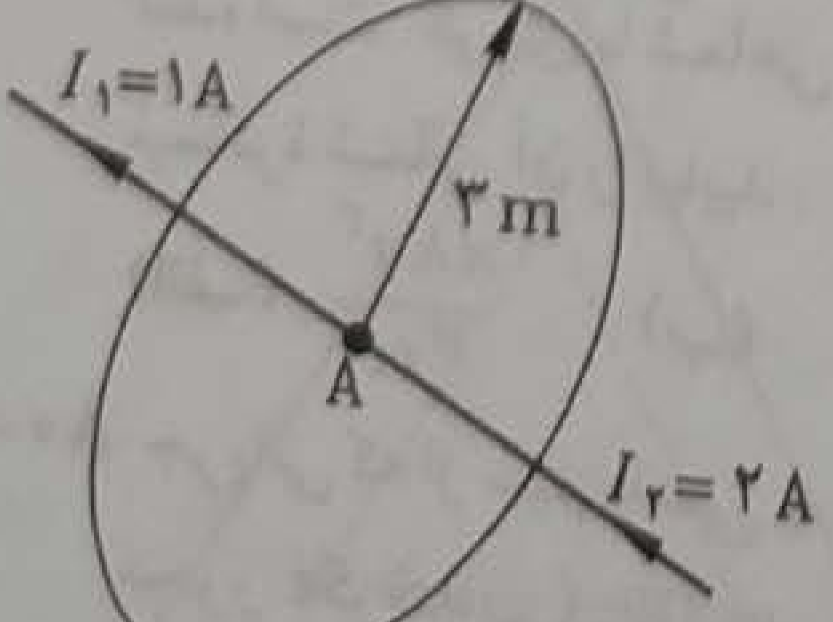
(الف) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(\phi\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}}+\phi\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}+\dfrac{\hat{\mathbf{z}}}{4}\right)$

(ب) $\mu_0 I\left(\dfrac{1}{2\pi a}+\dfrac{\phi}{4\pi a}\right)\hat{\mathbf{z}}$

(ج) $\mu_0 I\left(\dfrac{1}{\pi a^2}+\dfrac{1}{\phi a}\right)\hat{\mathbf{z}}$

(د) $\mu_0\dfrac{I\phi}{4\pi a}\hat{\mathbf{z}}$

۱۱-۷۳ روی سیم بینهایت بلند نشان داده شده در شکل ۱۱-۷۳ نقطهٔ A دارای قابلیت ذخیره سازی بار است جریان ۲A به این نقطه وارد، و جریان ۱A از آن خارج می‌شود. مقدار انتگرال $\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$ روی مسیر نشان داده شده در شکل، که دایره‌ای واقع در صفحهٔ عمود بر سیم در نقطهٔ A است، عبارت است از



شکل ۱۱-۷۳

(الف) $1.5\,A$ (ب) $3\,A$ (ج) $4.5\,A$ (د) $4\,A$

۱۱-۷۴ شعاع داخلی و خارجی یک خط هم محور به ترتیب a و b است. به ازای b ثابت (یعنی کابلی با اندازهٔ مشخص) نسبت b/a باید چه باشد تا بتوان ماکزیمم ولتاژ را به این خط اعمال کرد؟

(الف) ۱ (ب) ۲٫۳ (ج) ۱٫۸ (د) ۲٫۷

۱۱-۷۵ یک جسم هادی مطابق شکل ۱۱-۶۸ از تقاطع زاویهٔ فضایی Ω_0 و سطوح کروی $r=a$ و $r=b$ به وجود آمده، و رسانایی ویژهٔ آن σ است. مقاومت الکتریکی بین دو سطح کروی عبارت است از:

(الف) $\dfrac{1}{\sigma\Omega_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$ (ب) $\dfrac{1}{2\pi\sigma\Omega_0}\ln\dfrac{b}{a}$

(ج) $\dfrac{1}{4\pi\sigma\Omega_0}(b-a)$ (د) $\dfrac{1}{4\pi\sigma\Omega_0}\left(1-\dfrac{b}{a}\right)$

۱۱-۷۶ کرهٔ عایقی به شعاع a هم مرکز با مبدا قرار دارد و بردار قطبش در آن $\mathbf{P}=P_0\,\hat{\mathbf{z}}$ است. کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد میدان در مرکز کره درست است؟

(الف) پتانسیل صفر و شدت میدان الکتریکی در جهت $-\hat{\mathbf{z}}$ است.

(ب) پتانسیل صفر و شدت میدان الکتریکی در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ است.

(ج) پتانسیل و شدت میدان الکتریکی صفرند.

(د) شدت میدان الکتریکی برابر صفر و پتانسیل مثبت است.

۱۱-۷۷ ناحیهٔ $0<z<d$ ماده‌ای با تراوایی $\mu=\mu_0(1+z/d)^2$، و خارج آن فضای آزادست، میدان $\mathbf{B}=B_0\,\hat{\mathbf{y}}$ اعمال می‌شود. چگالی جریان مقید در داخل این ناحیه عبارت است از

(الف) $\mathbf{J}_b=-\dfrac{B_0 z}{\mu_0 d^2}\hat{\mathbf{x}}$ (ب) $\mathbf{J}_b=-(1+z/d)^2\dfrac{B_0}{\mu_0 d}\hat{\mathbf{x}}$

(ج) $\mathbf{J}_b=-\dfrac{B_0 z^2}{\mu_0 d^3}\hat{\mathbf{x}}$ (د) $\mathbf{J}_b=-2(1+z/d)\dfrac{B_0}{\mu_0 d}\hat{\mathbf{x}}$

۱۱-۷۸ یک میلیون قطره به شعاعهای مساوی r و به فاصلهٔ خیلی دور از هم قرار دارند. قطره‌ها هادی‌اند و پتانسیل هر کدام $10\,V$ است. پتانسیل قطره‌ای که از به هم پیوستن این قطرات ایجاد می‌شود چقدرست؟

(الف) $10^6\,V$ (ب) $10^5\,V$ (ج) $10^7\,V$ (د) $10^3\,V$

۱۱-۷۹ روی قرصی به شعاع a واقع در صفحهٔ xy و هم مرکز با مبدا باری با چگالی $\sigma=k\rho\ \mathrm{C/m^2}$ توزیع شده است. کره‌ای با شعاعی بزرگتر از a هم مرکز با مبدا تصور کرده، شار الکتریکی خارج شده از نیمکرهٔ شمالی آن را بیابید.

(الف) $\dfrac{\pi k a^3}{3\varepsilon_0}$ (ب) $\dfrac{2\pi k a^3}{3\varepsilon_0}$ (ج) $\dfrac{4\pi k a^3}{3\varepsilon_0}$ (د) $\dfrac{\pi k a^3}{\varepsilon_0}$

۱۱-۸۰ جریانی که از سیم راستی به شعاع a می‌گذرد، دارای توزیع حجمی $\mathbf{J}=J_0\rho\,\hat{\mathbf{z}}$ است (محور سیم را محور z گرفته‌ایم). القاکنایی داخلی در واحد طول این سیم چقدرست؟

(الف) $0.5\times 10^{7}\ \mathrm{H/m}$ (ب) $3\times 10^{7}\ \mathrm{H/m}$ (ج) $2\times 10^{7}\ \mathrm{H/m}$ (د) $\frac{1}{3}\times 10^{7}\ \mathrm{H/m}$

۱۱-۸۱ اگر چگالی شار مغناطیسی در ماده‌ای با تراوایی نسبی $\mu_R = 3$ برابر $Ax\,\hat{\mathbf{z}}$ است. چگالی جریان در این محیط عبارت است از

(الف) $\frac{2A}{3\mu_0}\hat{\mathbf{y}}$ (ب) $\frac{-2A}{\mu_0}\hat{\mathbf{y}}$ (ج) $\frac{-A}{3\mu_0}\hat{\mathbf{y}}$ (د) $\frac{-2A}{3\mu_0}\hat{\mathbf{y}}$

۱۱-۸۲ دو کرهٔ فلزی به شعاعهای b_1 و b_2 ($b_2 > b_1$) توسط سیمی نازک به هم متصل‌اند. فاصلهٔ دو کره از شعاع کره‌ها بسیار بزرگتر است، به طوری که می‌توان توزیع بار روی آنها را یکنواخت فرض کرد. اگر مجموع بار کره‌ها Q باشد رابطهٔ بین میدانهای الکتریکی سطح کره‌ها چقدر است؟

(الف) $\frac{E_{b1}}{E_{b2}}=\frac{b_2}{b_1}$ (ب) $\frac{E_{b1}}{E_{b2}}=\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2$ (ج) $\frac{E_{b1}}{E_{b2}}=\frac{b_1}{b_2}$ (د) $E_{b1}=E_{b2}$

۱۱-۸۳ خط هم‌محوری به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b هم محور با محور z قرار دارد. از هادی داخلی جریانی با چگالی $a\rho\,\hat{\mathbf{z}}\ \mathrm{A/m^2}$ می‌گذرد. محیط بین دو هادی داری تراوایی نسبی $\mu_r = 1/\rho$ است. جریان مقید سطحی روی هادی داخلی عبارت است از:

(الف) $\mathbf{K}_b = 0$ (ب) $\mathbf{K}_b=\frac{a^2}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\hat{\mathbf{z}}$

(ج) $\mathbf{K}_b=\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{a}-1\right)\hat{\mathbf{z}}$ (د) $\mathbf{K}_b=\frac{a}{3}\left(\frac{1}{a}-1\right)\hat{\mathbf{z}}$

۱۱-۸۴ یک کرهٔ عایق با گذردهی ε و شعاع a در فضای آزاد قرار دارد و چگالی بار حجمی آن $\rho=\rho_0 a/r$ است (مرکز کره را مبدا مختصات گرفته‌ایم). انرژی این توزیع بار عبارت است از:

(الف) $\frac{2\pi\rho_0^2 a^5\pi}{3\varepsilon_0}$ (ب) $\frac{\rho_0 a^5\pi}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho_0 a^5\pi}{6\varepsilon}$ (ج) $\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon}(a-r)+\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}$ (د) $\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon}$

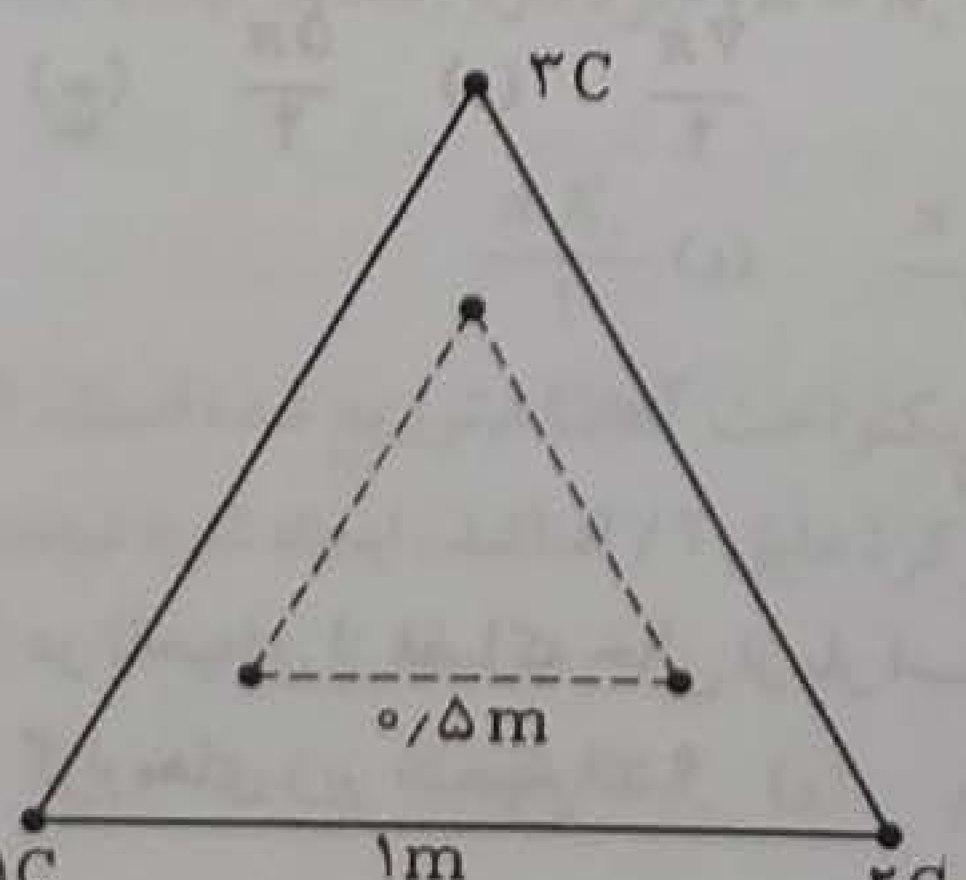
۱۱-۸۵ بار سطحی $\sigma=\alpha\rho$ روی یک بیضی با نیم قطر بزرگ a و نیم قطر کوچک b قرار دارد؛ مرکز بیضی در مبدا مختصات قرار دارد و ρ فاصله تا مبدا است. پتانسیل در مبدا عبارت است از:

(الف) $\frac{\alpha(a^2+b^2)}{4\varepsilon_0}$ (ب) $\frac{\alpha ab}{4\varepsilon_0}$ (ج) 0 (د) $\frac{\alpha ab}{8\varepsilon_0}$

۱۱-۸۶ سه بار نقطه‌ای با اندازه‌های ۱C ، ۲C ، و ۳C در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ m قرار دارند. چه مقدار انرژی لازم است تا بارها به هم نزدیکتر شده، در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۰٫۵ m قرار گیرند؟

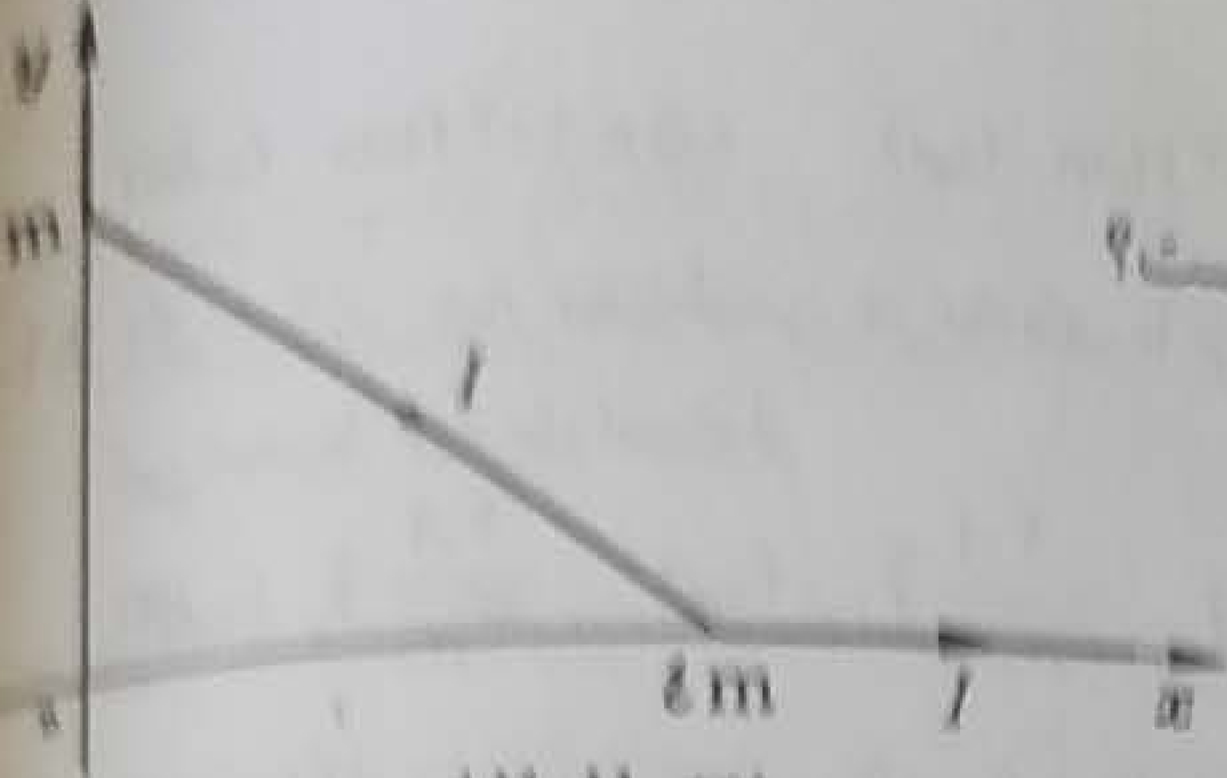
(الف) $\frac{22}{\pi\varepsilon_0}$ (ب) $\frac{11}{\pi\varepsilon_0}$

(ج) $\frac{11}{2\pi\varepsilon_0}$ (د) $\frac{11}{4\pi\varepsilon_0}$



شکل ۱۱-۸۶

۱۱-۸۷ از سیم شکل ۱۱-۸۷ جریان ثابت I می‌گذرد.
چگالی شار مغناطیسی در مبدأ مختصات چقدر است؟



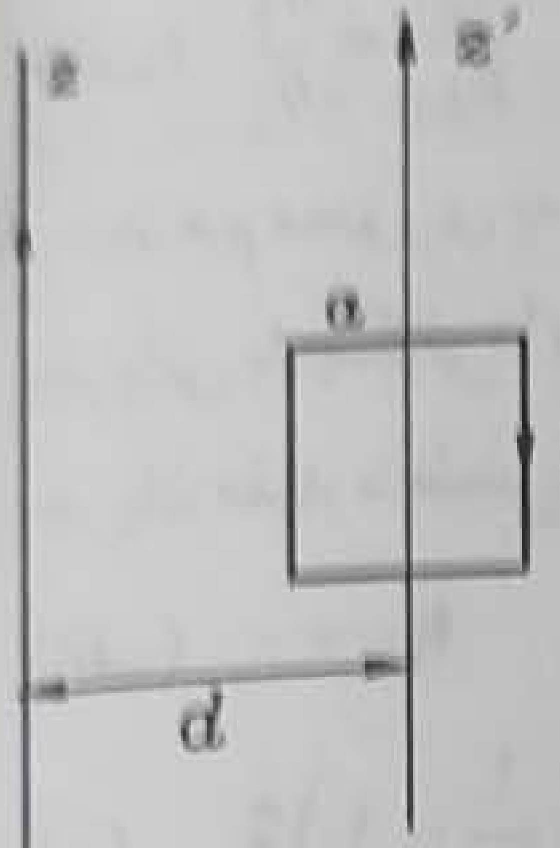
شکل ۱۱-۸۷

(الف) $-\frac{7\mu_0 I}{48\pi}\hat{z}$

(ب) $\frac{\mu_0 I}{48\pi}\hat{z}$

(ج) $-\frac{\mu_0 I}{36\pi}\hat{z}$ (د) $-\frac{5\mu_0 I}{24\pi}\hat{z}$

۱۱-۸۸ اگر حلقهٔ شکل ۱۱-۸۸ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z' بچرخد، مقدار emf القا شده در آن چقدر است؟



شکل ۱۱-۸۸

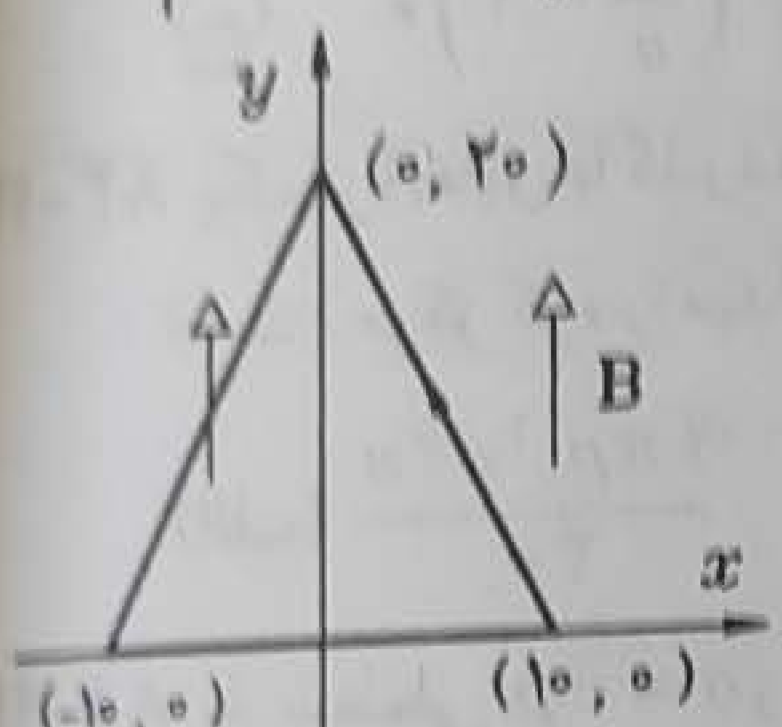
(الف) $\frac{\mu_0 I d^2 a\omega \sin\omega t}{d^2 - 4a^2\cos^2\omega t}$

(ب) $\frac{\mu_0 I a^2 d\omega \sin\omega t}{2\pi(d^2 - a^2\cos^2\omega t)^2}$

(ج) $\frac{\mu_0 I d^2 a^2 \omega \sin\omega t}{4d^2 - a^2\cos^2\omega t}$

(د) $\frac{4\mu_0 I d^2 a^2 \sin^2\omega t}{4d^2 - a^2\cos^2\omega t}$

۱۱-۸۹ از حلقهٔ مثلثی نشان داده شده در شکل ۱۱-۸۹ جریان ۱۰ A می‌گذرد. اگر میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = 0{,}5\,\hat{y}$ T باشد، گشتاور وارد بر حلقه چقدر است؟ ابعاد بر حسب سانتیمتر است.



شکل ۱۱-۸۹

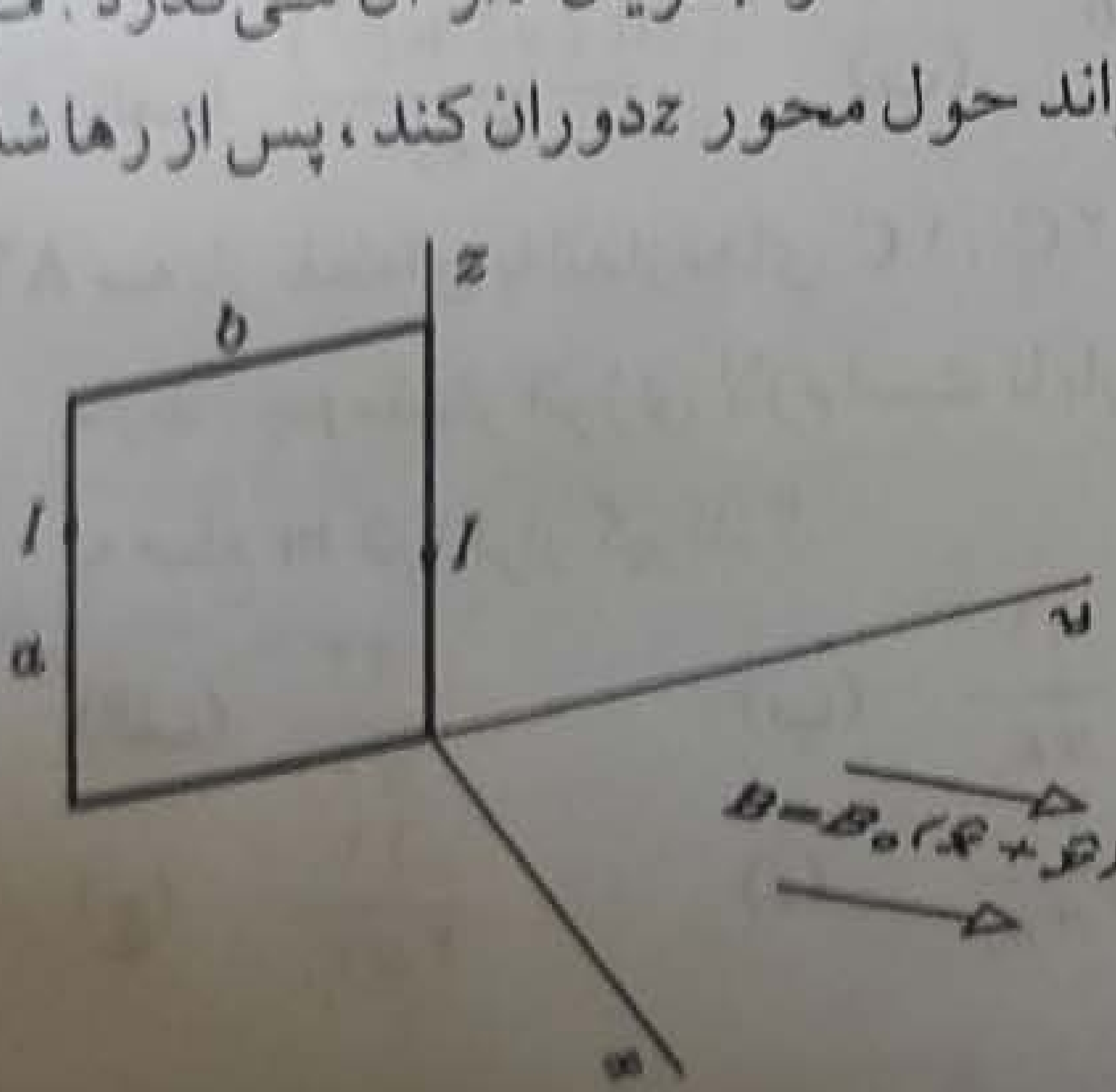
(الف) $0{,}1\,\hat{z}$ Nm (ب) $-0{,}1\,\hat{z}$ Nm

(ج) $0{,}1\,\hat{x}$ Nm (د) $-0{,}1\,\hat{x}$ Nm

۱۱-۹۰ قاب مستطیلی شکل ۱۱-۹۰ از N دور سیم نازک ساخته شده و جریان I از آن می‌گذرد. میدان مغناطیسی محیط $\mathbf{B} = B_0(\hat{x} + \hat{y})$ است. اگر قاب بتواند حول محور z دوران کند، پس از رها شدن و قبل از ایستادن چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

(الف) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{3\pi}{4}$

(ج) $\frac{5\pi}{4}$ (د) $\frac{7\pi}{4}$



شکل ۱۱-۹۰

۱۱-۹۱ در ناحیه‌ای از فضا که خالی از بار است، میدان الکتریکی تنها در جهت x مولفه دارد. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح اند؟

۱۱-۹۹ بار Q روی ربع دایره‌ای به شعاع a و بار $Q-$ نیز روی ربع دایره‌ای به شعاع a توزیع شده‌است، مرکز دو نیمدایره مبدا است و هر دو در صفحهٔ $z = ۰$ قرار دارند، اولی در ربع صفحهٔ دوم و دومی در ربع صفحهٔ اول. شدت میدان الکتریکی در مبدا عبارت است از:

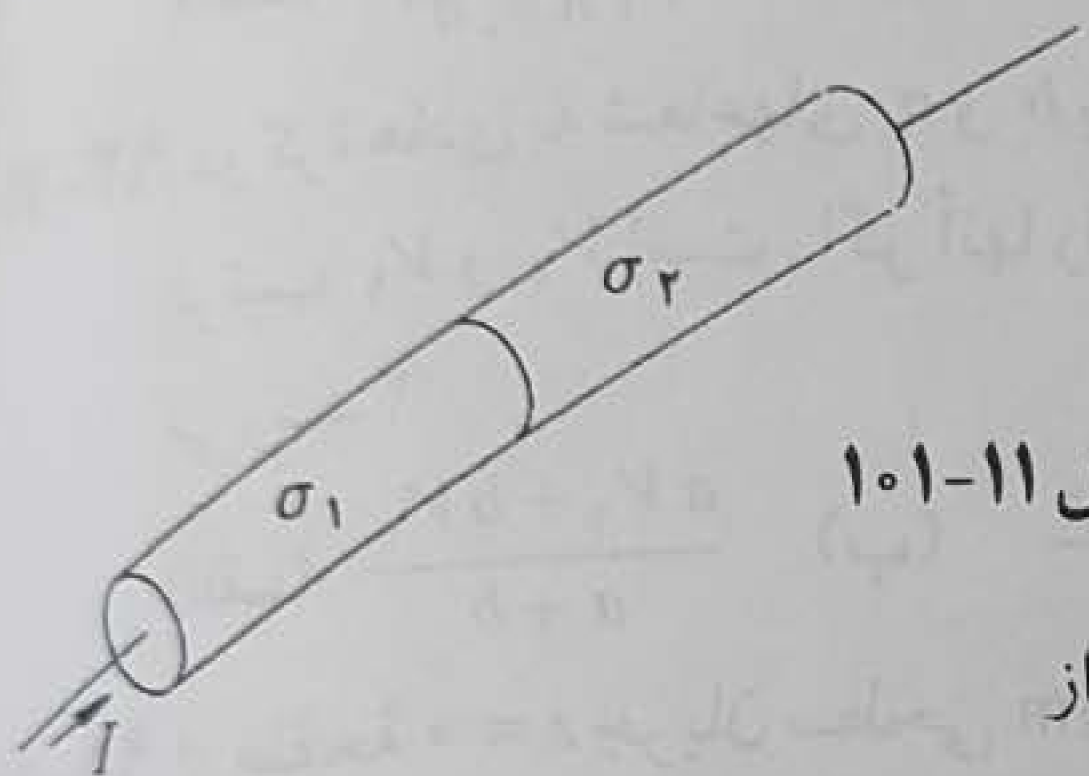
(الف) $Q/(۴\pi\varepsilon_۰\pi^۲a^۲)$ (ب) $Q/(۴\pi\varepsilon_۰\pi a)$

(ج) $Q/(۲\pi\varepsilon_۰\pi a^۲)$ (د) $Q/(\varepsilon_۰\pi^۲a^۲)$

۱۱-۱۰۰ برای یافتن میدان پتانسیل الکتریکی بین دو صفحهٔ هادی که با یکدیگر زاویهٔ ۶۰° می‌سازند و بینشان یک بار نقطه‌ای وجود دارد به چند بار تصویر نیاز داریم؟

(الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۱۱ (د) ۱۲

۱۱-۱۰۱ از دو استوانهٔ هم محور و هم شعاع با رسانایی‌های ویژهٔ $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ جریان I با چگالی یکنواخت عبور می‌کند. کل بار روی سطح مشترک دو استوانه چقدرست؟



شکل ۱۱-۱۰۱

(الف) صفر

(ب) $\varepsilon_۰ I^۲(\sigma_۲-\sigma_۱)$

(ج) $\varepsilon_۰ I[(۱/\sigma_۱)-(۱/\sigma_۲)]$

(د) $\varepsilon_۰ I[(۱/\sigma_۱)+(۱/\sigma_۱)]$

۱۱-۱۰۲ میدان الکتریکی در اطراف بار نقطه‌ای q عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}e^{-r/\lambda}$$

محیط همگن و یکسانگرد (ایزوتروپیک) است. بردار قطبش در این ناحیه عبارت است از:

(الف) $\mathbf{P} = ۰$ (ب) $\mathbf{P} = \frac{q}{۴\pi r^۲}(۱-e^{-r/\lambda})\hat{\mathbf{r}}$

(ج) $\mathbf{P} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}(۱-e^{-r/\lambda})\hat{\mathbf{r}}$ (د) $\mathbf{P} = \frac{q}{۴\pi r^۲}e^{-r/\lambda}\hat{\mathbf{r}}$

۱۱-۱۰۳ در ناحیهٔ $|z| < ۱$ باری با توزیع $\rho_۰ z^۲$ وجود دارد. میدان الکتریکی در این محیط عبارت است از:

(الف) $(\rho_۰/۳\varepsilon_۰)z^۳\hat{\mathbf{z}}$ (ب) $(\rho_۰/۳\varepsilon_۰)z^۳\hat{\mathbf{x}}$ (ج) $(\rho_۰/۳\varepsilon_۰)z^۲y\hat{\mathbf{z}}$

(د) $(\rho_۰/۳\varepsilon_۰)z^۲x\hat{\mathbf{z}}$

۱۱-۱۰۴ بار Q_i داخل یک محیط رسانای بسته وجود دارد و بار Q_o در خارج آن قرار دارد. کدام یک از جملات زیر درست است:

(الف) ناظر داخل محیط رسانا تنها اثر بار Q_i را مشاهده می‌کند و ناظر بیرونی اثر هر دو بار را.

(ب) ناظر داخل محیط رسانا اثر هر دو بار را مشاهده می‌کند و ناظر بیرونی تنها اثر بار Q_o را.

(ج) ناظر داخل محیط رسانا تنها اثر بار Q_i، و ناظر بیرونی تنها اثر بار Q_o را مشاهده می‌کند.

(د) هر دو ناظر اثر هر دو بار را مشاهده می‌کنند.

۱۱-۱۰۵ کدام یک از عبارتهای زیر معرف نیروی محرکهٔ الکتریکی mmf است؟

(الف) $-\dfrac{d}{dt}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ (ب) $\dfrac{d}{dt}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ (ج) $-\dfrac{d}{dt}\oint (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{l}$

(د) $\dfrac{d}{dt}\oint (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{l}$

۱۱-۱۰۶ در یک ناحیهٔ کروی به شعاع R چگالی بار به نحوی است که میدان الکتریکی در داخل عبارت است از $\mathbf{E} = (Ar/R^2)\,\hat{\mathbf{r}}$. چگالی بار در این ناحیه عبارت است از:

(الف) $3\varepsilon_0 Ar/R^2$ (ب) $3\varepsilon_0 A/R^2$ (ج) $3\varepsilon_0 Ar^2/R^2$ (د) $3\varepsilon_0 A/r^2R^2$

۱۱-۱۰۷ بار نقطه‌ای Q در مبدا مختصات قرار دارد. شار گذرنده از سطح کروی واقع در $\alpha \le \theta \le \beta$ چقدر است؟

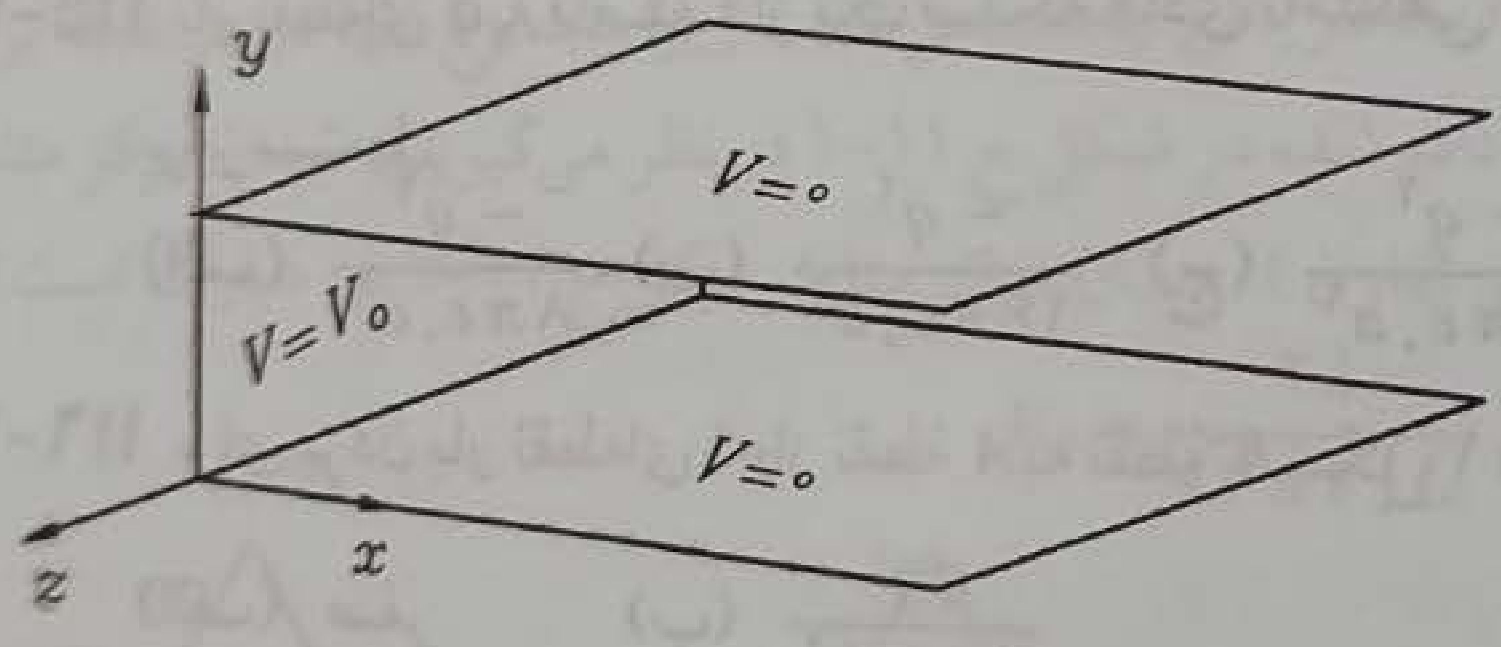
(الف) $(Q/2\varepsilon_0)(\cos\beta - \cos\alpha)$ (ب) $(Q/2\varepsilon_0)(\cos\alpha - \cos\beta)$

(ج) $(Q/\varepsilon_0)(\cos\beta - \cos\alpha)$ (د) $(Q/\varepsilon_0)(\cos\alpha - \cos\beta)$

۱۱-۱۰۸ دو نیم صفحه هادی در $y=0$ و $y=b$ $(x\ge 0)$ قرار دارند و پتانسیل آنها صفر است. نوار واقع در $x=0$ در پتانسیل V_0 قرار دارد. شکل مناسب پتانسیل در بین این سطوح عبارت است از:

(الف) $C_n \exp\left(\dfrac{-n\pi x}{b}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$ (ب) $C_n \exp\left(\dfrac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$

(ج) $C_n \exp\left(\dfrac{-n\pi x}{b}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$ (د) $C_n \exp\left(\dfrac{n\pi x}{b}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$



شکل ۱۱-۱۰۸

۱۱-۱۰۹ مرز بین دو محیط دی‌الکتریک با گذردهی های ε_1 و ε_2 یک صفحه است و بار q_1 در محیط اول قرار دارد. اندازهٔ بار تصویر عبارت است از

(الف) $\dfrac{2q\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ (ب) $q\,\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ (ج) $\dfrac{2q\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ (د) $\dfrac{2q\varepsilon_1}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$

۱۱-۱۱۰ برای القاکنایی متقابل بین دو القاگر L_1 و L_2 چه رابطه‌ای صادق است؟

(الف) $L_1L_2 \ge M^2$ (ب) $L_1L_2 \le M^2$ (ج) $L_1L_2 > M^2$ (د) $L_1L_2 < M^2$

۱۱-۱۱۱ کرهٔ بارداری به شعاع a و با چگالی بار سطحی σ با سرعت زاویه‌ای ω به دور یکی از قطرهایش می‌چرخد. اگر محور دوران را محور z بگیریم، گشتاور دو قطبی کره عبارت است از:

(الف) $\frac{4}{3}\pi a^3\omega\sigma\hat{\mathbf{z}}$ (ب) $\frac{4}{3}\pi a^4\omega\sigma\hat{\mathbf{z}}$ (ج) $\frac{4}{3\pi}a^4\omega\sigma\hat{\mathbf{z}}$ (د) $\frac{3}{4}\pi a^4\omega\sigma\hat{\mathbf{z}}$

۱۱-۱۱۲ کدام یک از معادلات زیر درست‌اند؟

(الف) $\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ (ب) $\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ (ج) $\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

(د) $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

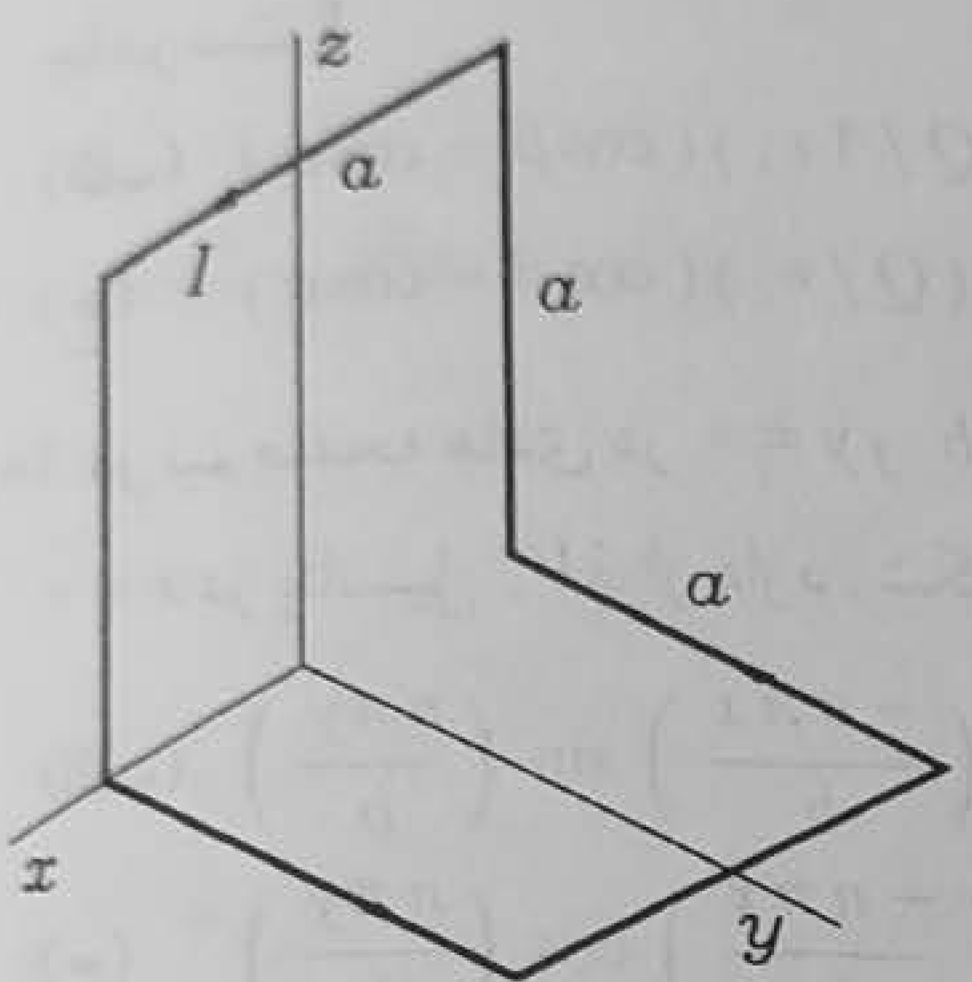
۱۱-۱۱۳ بار Q + در کنار یک هادی دلخواه قرار دارد. مقدار بار منفی القا شده روی هادی ... است.

شکل ۱۱-۱۱۳

(الف) صفر
(ب) کمتر از Q +
(ج) برابر با Q +
(د) بیشتر از Q +

۱۱-۱۱۴ طول هر یک از اضلاع مدار بستهٔ شکل ۱۱-۱۱۴ برابر aاست. گشتاور دو قطبی این مدار چقدرست؟

(الف) Ia^2
(ب) $2\sqrt{2}\, Ia^2$
(ج) $\sqrt{2}\, Ia^2$
(د) $2\, Ia^2$

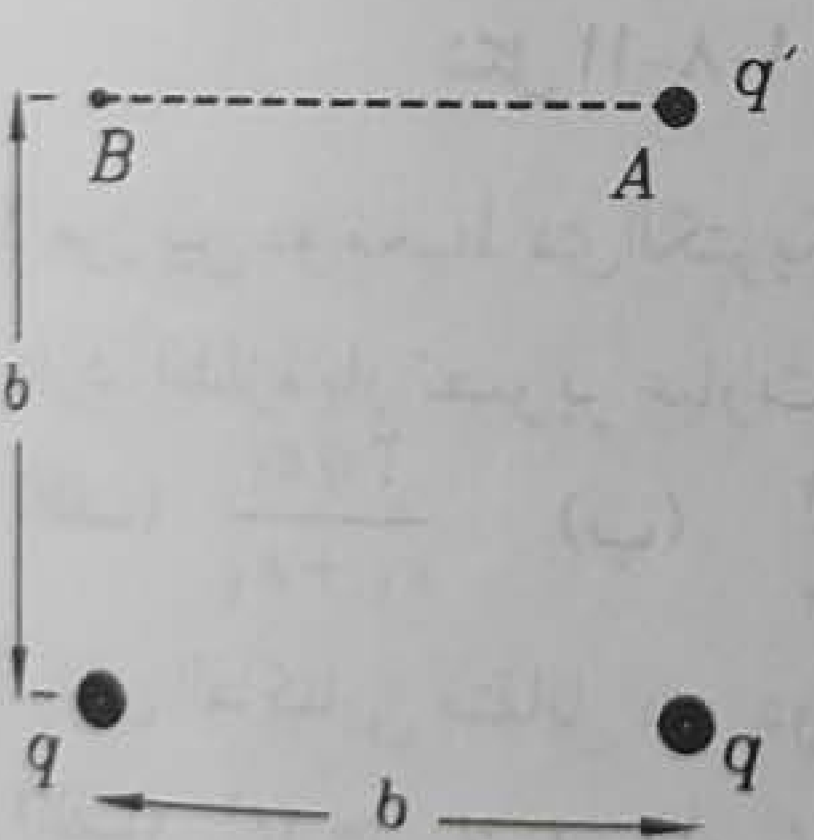


شکل ۱۱-۱۱۴

۱۱-۱۱۵ بار نقطه‌ای qبه فاصلهٔ aاز یک صفحهٔ هادی نامتناهی قرار دارد. انرژی الکتروستاتیکی این سیستم برابرست با:

(الف) $\dfrac{-q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$ (ب) $\dfrac{-q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$ (ج) $\dfrac{-q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$ (د) $\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$

۱۱-۱۱۶ برای بردن بار نقطه‌ای q'از نقطهٔ Aبه نقطهٔ Bشکل ۱۱-۱۱۶ چقدر کار لازم است؟



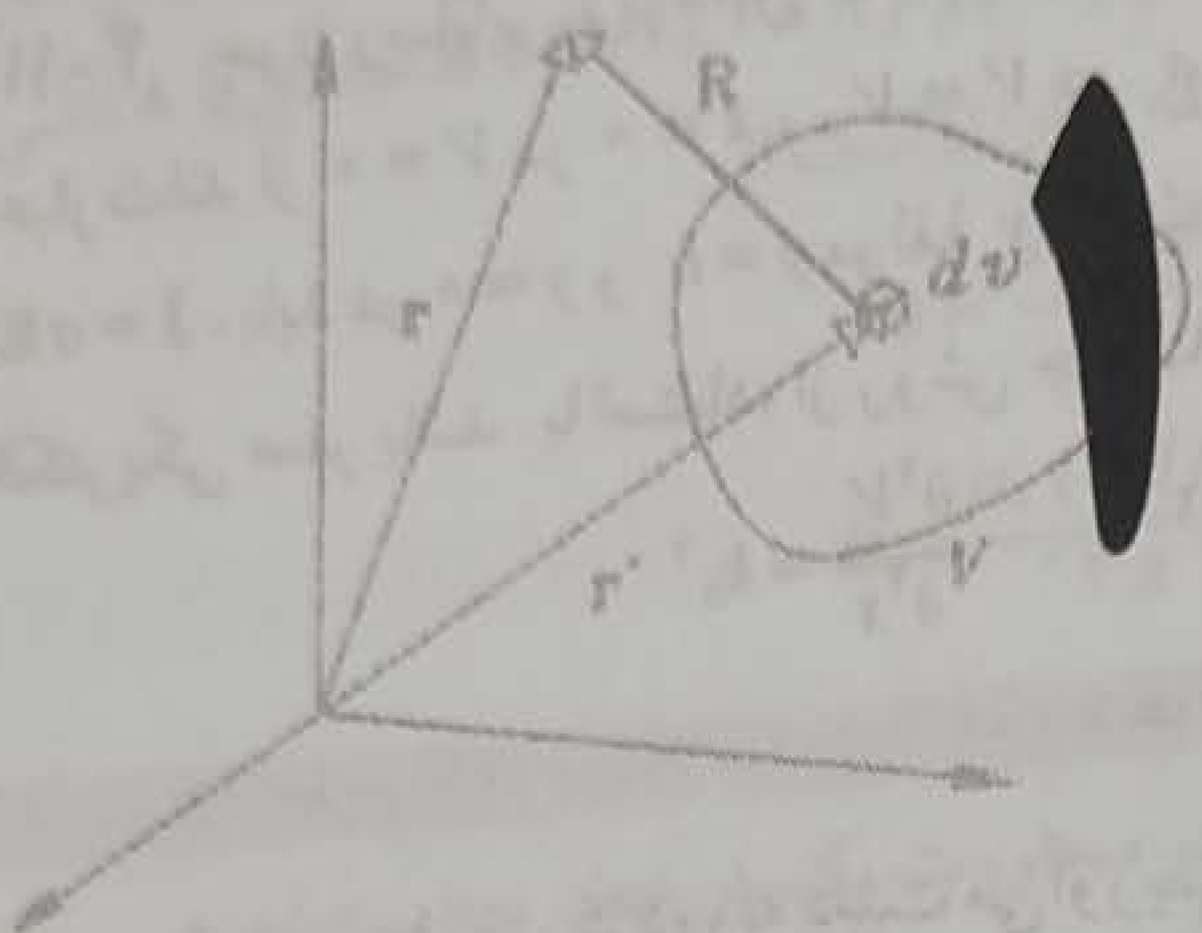
(الف) صفر (ب) $\dfrac{qq'}{2\pi\varepsilon_0 b^2}$
(ج) $\dfrac{qq'}{8\pi\varepsilon_0 b^2}$ (د) $\dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$

شکل ۱۱-۱۱۶

۱۱-۱۱۷ در کره‌ای به شعاع Rباری با چگالی $\rho = C/r$توزیع شده است. میدان الکتریکی در داخل کره عبارت است از:

(الف) $\mathbf{E} = \dfrac{C}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}$ (ب) $\mathbf{E} = \dfrac{Cr}{2\varepsilon_0 R}\hat{\mathbf{r}}$ (ج) $\mathbf{E} = \dfrac{CR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$ (د) $\mathbf{E} = \dfrac{CR}{2\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$

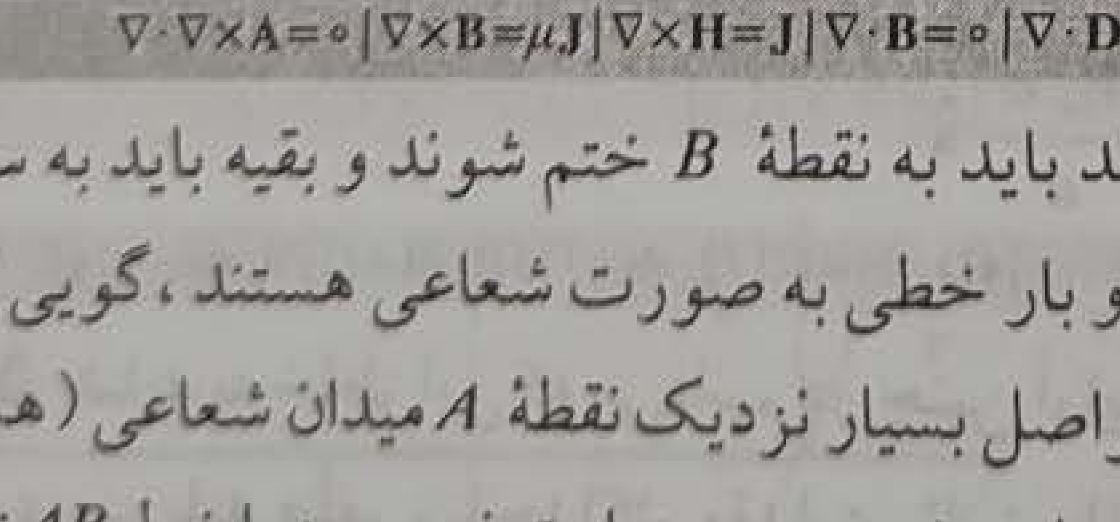
حل مسایل فصل ۱۱



۱۱-۱ دو میلهٔ باردار یکی با چگالی $-\lambda$ C/m و یکی با چگالی λ C/m را روی ضلع متفاوت با دو ضلع دیگر قرار می‌دهیم. این بارها هیچ تغییری در میدان الکتریکی ایجاد نمی‌کنند، زیرا مجموع آنها در هر نقطه برابر صفر می‌شود. ولی بارها را به صورت نشان داده شده در شکل ح ۱۱-۱ در نظر می‌گیریم، میدان مرکز مثلث شکل ح ۱۱-۱ الف برابر صفرست (به خاطر تقارن). میدان مرکز مثلث شکل ح ۱۱-۱ ب عبارت است از

$$E_۲ = \frac{۲\lambda}{\sqrt{۳}\,\pi\varepsilon_{\circ} L}$$

که میدان خواسته شده است.



شکل ح ۱۱-۱

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۲ یک سوم خطوط نیرویی که از A خارج می‌شوند باید به نقطهٔ B ختم شوند و بقیه باید به سمت بینهایت بروند (خطوط میدان در فواصل بسیار دور از دو بار خطی به صورت شعاعی هستند، گویی که از خط باری با چگالی ۲λ C/m ناشی می‌شوند.) چون در فواصل بسیار نزدیک نقطهٔ A میدان شعاعی (همانند میدان یک بار خطی است) آخرین خطی که از نقطهٔ B جدا می‌شود و به بینهایت نمی‌رود با خط AB زاویهٔ ۶۰° می‌سازند.

میدان روی خط AB افقی است و مولفه‌ای عمود بر این خط ندارد. پس دو خط نیرویی که بر خط AB عمودند تنها در نقطهٔ C که میدان صفرست می‌توانند این خط را قطع کنند.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۳ در فضای خالی از بار $\nabla^2 V = 0$. تنها لاپلاسین دو پتانسیل الف و ب صفرست. برای یافتن چگالی بار باید مولفهٔ عمودی میدان را روی سطح هادی بیابیم. روی صفحهٔ xz مولفهٔ عمودی، مولفهٔ y است که به صورت $E_y = -\partial V / \partial y$ به دست می آید.

۱۱-۴ چون رسانایی ویژهٔ این محیط ثابت است، معادلهٔ لاپلاس در آن صادق است. شرایط مرزی عبارت‌اند از $V = 0$ در $x = 0$، $V = V_0$ در $x = a$. چون مولفهٔ عمود بر مرز چگالی جریان صفرست و $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$، باید در $y = 0$ و $y = b$ مولفهٔ y شدت میدان الکتریکی، و در $z = 0$ و $z = d$ مولفهٔ z شدت میدان الکتریکی صفر باشد. با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادلات زیر را برای پتانسیل می‌یابیم

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} = k_x^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} = k_y^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} = k_z^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

هر سه k را صفر فرض کرده، به دست می‌آوریم

$$V = (A_1 x + B_1)(A_2 y + B_2)(A_3 z + B_3)$$

مولفه‌های y و z شدت میدان الکتریکی عبارت‌اند از

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -A_2 (A_1 x + B_1)(A_3 z + B_3)$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -A_3 (A_1 x + B_1)(A_2 y + B_2)$$

در $y = 0$ و $y = b$، $E_y = 0$ لازم می‌دارد که $A_2 = 0$. به نحوی مشابه صفر بودن E_z در $z = 0$ و $z = d$ صفر بودن A_3 را نتیجه می‌دهد و

$$V = B_2 B_3 (A_1 x + B_1) = K_1 x + K_2$$

با اعمال دو شرط مرزی دیگر به دست می‌آوریم $K_2 = 0$ و $K_1 = V_0 / a$. پس

$$V = \frac{V_0}{a} x$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} = -\frac{V_0}{a}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\frac{V_0 \sigma}{a}\hat{\mathbf{x}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 | \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} | \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} | \nabla\cdot\mathbf{B}=0 | \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho | \nabla\times\mathbf{E}=0 | \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q | \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I | \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I | \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 | \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۵ شاید به خاطر این که می‌دانیم در چنین آرایشی میدان خارج چنبره صفرست، تصور کنیم که پتانسیل برداری نیز باید صفر، یا حداکثر مقداری ثابت باشد. ولی چنین نیست، توابع زیادی وجود دارند که کرلی برابر صفر دارند. میدان داخل چنبره را می‌توان با استفاده از قانون آمپر به صورت زیر یافت (مسئلهٔ ۷-۲۶ را ببینید)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (1)$$

A باید به نحوی باشد که داشته باشیم $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$. یعنی کرل **A** در داخل چنبره باید مقدار **B** بالا را داشته و در

خارج آن صفر باشد. اگر یک حلقهٔ جریان به شعاع $R_\circ$ و جریان $I_\circ$ داشته باشیم، میدانی تولید می‌کند که برای آن رابطهٔ زیر صادق است

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_\circ \mathbf{J}$$

(۲)

یعنی کرل میدان در داخل حلقه چگالی جریان $I_\circ / S$ (که S مساحت سطح مقطع حلقه است) و در خارج مقدار ۰ را به دست می‌دهد. پس اگر به جای $\mathbf{J}$ معادلهٔ (۲) قرار دهیم $(NI/2\pi R)$، $\mathbf{B}$ حاصل با $\mathbf{A}$ ناشی از چنبره برابر است. و اما میدان حلقه جریان روی محور حلقه عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ (JS)}{2} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/5}} \hat{\mathbf{z}}$$

پس

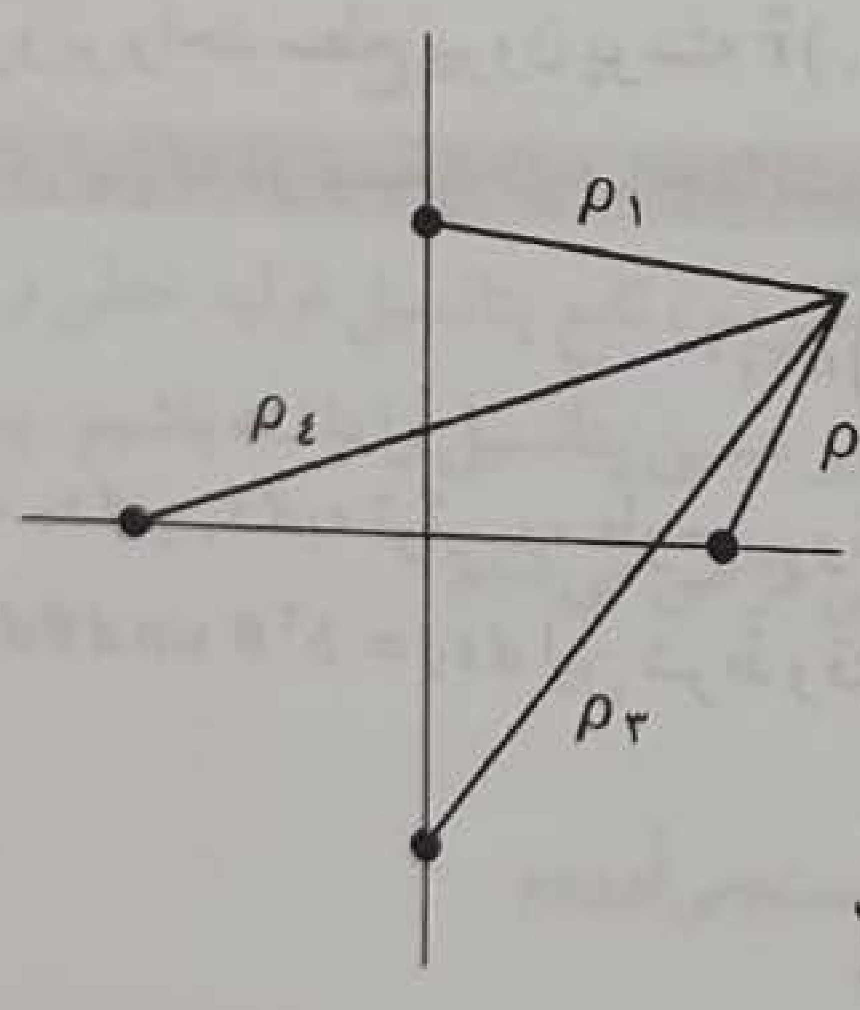
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ (NIt^2)}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/5}} \hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۶ در مسئلهٔ ۲-۵۶ اختلاف پتانسیل بین دو نقطه را در مجاورت یک بار خطی به دست آوردیم. مبدا از هر چهار خط بار به فاصلهٔ ۱ قرار دارد. اگر مبدا را به عنوان پتانسیل صفر بگیریم، داریم

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ}(\ln\rho_2 - \ln\rho_1 + \ln\rho_4 - \ln\rho_3) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ} \ln\frac{\rho_2\rho_4}{\rho_1\rho_3}$$

که ρ_1، ρ_2، ρ_3، و ρ_4 در شکل ح ۱۱-۶ تعریف شده‌اند. برای ثابت بودن پتانسیل باید داشته باشیم



شکل ح ۱۱-۶

$$\frac{\rho_2\rho_4}{\rho_1\rho_3} = K$$

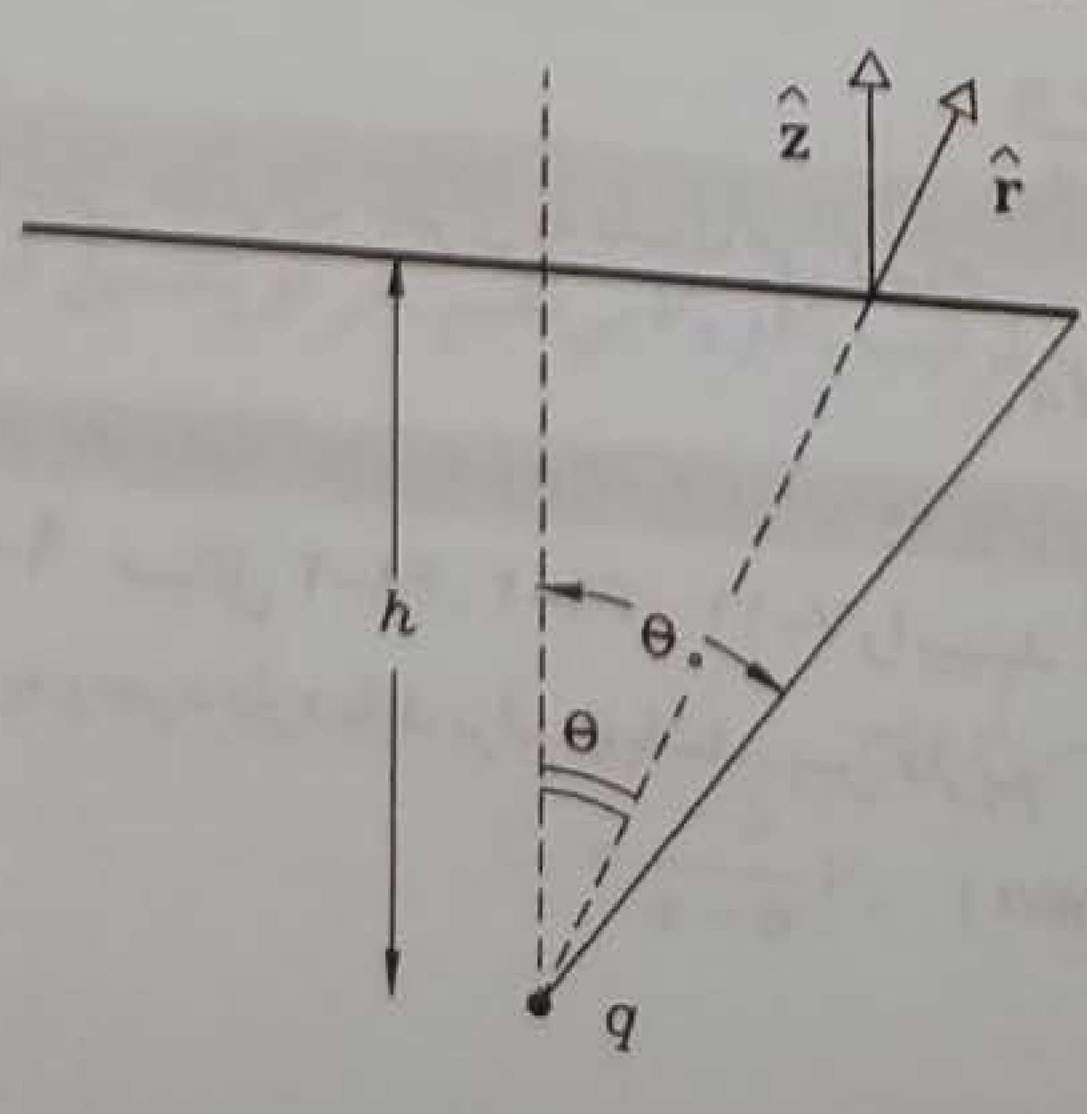
در صفحهٔ xy داریم $\rho_1^2 = x^2 + (y-1)^2$، $\rho_2^2 = y^2 + (x-1)^2$، $\rho_3^2 = x^2 + (y+1)^2$، و سرانجام $\rho_4^2 = y^2 + (x+1)^2$.

پس از مقداری عملیات جبری به دست می‌آوریم

$$\frac{y^4 + 2y^2(x^2+1) + (x^2-1)^2}{x^4 + 2x^2(y^2+1) + (y^2-1)^2} = K$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۷ اگر بار را در مبدا فرض کنیم $\mathbf{D} = (q/4\pi r^2)\hat{\mathbf{r}}$. عنصر سطح دایره عبارت است از $d\mathbf{s} = \rho\, d\rho\, d\varphi\, \hat{\mathbf{z}}$. پس (شکل ح ۱۱-۷ را ببینید)



شکل ح ۱۱-۷

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=\frac{q}{4\pi r^2}\rho\, d\rho\, d\varphi(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}})$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=\cos\theta$ و $\cos\theta=h/r$. همچنین $r^2=h^2+\rho^2$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=\frac{q}{4\pi r^2}\rho\, d\rho\, d\varphi\cos\theta=\frac{qh\rho\, d\rho\, d\varphi}{4\pi(h^2+\rho^2)^{1/5}}$$

حال شار را می‌یابیم

$$\Psi=\int\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=\frac{qh}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{\rho\, d\rho}{(h^2+\rho^2)^{1/5}}$$
$$=\frac{qh}{2}\frac{-1}{\sqrt{h^2+\rho^2}}\Bigg|_0^a=\frac{q}{2}\left[1-\frac{h}{\sqrt{h^2+\rho^2}}\right]$$
$$=\frac{q}{2}(1-\cos\theta_0)$$

که در آن θ_0 زاویه‌ای است که لبهٔ دایره از محل بار دیده می‌شود.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=0$

۸-۱۱ تابع پتانسیل بین پوسته‌های کروی را به سادگی می‌توان به دست آورد. سپس می‌توان چگالی بار سطحی بیرون و درون پوستهٔ کروی میانی را یافت و نسبت آنها را به صورت زیر به دست آورد

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{cb(b-a)}{ad(c-d)}$$

نیرو بر واحد سطح بیرون پوسته $\hat{\mathbf{r}}(\sigma_2^2/2\varepsilon_0)$ و نیرو بر واحد سطح داخل پوسته $-(\sigma_1^2/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{r}}$ است.

برای این که دو نیمکره از هم جدا نشوند باید داشته باشیم

$$\int_{S_1}\left(\frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}\right)ds_1>\int_{S_2}\left(\frac{\sigma_2^2}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}\right)ds_2$$

که ds_2 و ds_1 به ترتیب سطوح بیرونی و درونی پوستهٔ میانی هستند. چون $ds_2=d^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ و $ds_1=b^2\theta\sin d\theta\, d\varphi$ این شرط وقتی ارضا می‌شود که داشته باشیم

$$\sigma_2^2d^2<\sigma_1^2b^2$$

یا

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=\left(\frac{cb(b-a)}{ad(c-d)}\right)^2<\frac{b^2}{d^2}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{c}{c-d}<\frac{a}{b-a}$$

و با کمی عملیات جبری به دست می‌آوریم

$$2ac>bc+da$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=0$

۹-۱۱ مسائل ۲-۶۸، ۲-۶۹ و ۱۱-۷ را ببینید. اگر زاویهٔ خواسته شده را α بنامیم، شاری که در داخل این زاویه وجود دارد باید برابر q باشد. پس داریم

$$q=\frac{3q}{2}(1-\cos\alpha)$$

با حل این معادله به دست می‌آوریم

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{۱}{۳} = ۷۰٫۵^\circ$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰ گر زاویهٔ خواسته شده را β بنامیم، شاری که در داخل این زاویه وجود دارد باید برابر q / ۲ باشد. پس داریم

$$\frac{q}{۲} = \frac{۳q}{۲}(۱ - \cos\alpha)$$

با حل این معادله به دست می‌آوریم

$$\beta = \cos^{-1}\frac{۳}{۴} = ۴۱٫۴^\circ$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۱ همانند مسائل ۲-۶۸، ۲-۶۹، ۱۱-۱۰ و ۱۱-۱۱ حل می‌شود. میدان در فواصل دور شبیه میدان یک بار نقطه‌ای با اندازهٔ $q_۱ + q_۲$ است. شاری که در مخروطی به راس C و زاویهٔ β وجود دارد، باید با مجموع $q_۲$ و بخشی از شاری که در مخروطی به راس A و زاویهٔ α وجود دارد، برابر باشد، یعنی

$$\frac{q_۱ + q_۲}{۲}(۱ - \cos\beta) = q_۲ + \frac{q_۱}{۲}(۱ - \cos\alpha)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$\cos\theta = ۱ - \sin^۲\frac{\theta}{۲}$$

و کمی عملیات جبری به رابطهٔ داده شده می‌رسیم.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۳ اگر میدان یکنواخت اولیه را به صورت $\mathbf{E}_i = E_\circ\,\hat{\mathbf{z}}$ در نظر بگیریم، تابع پتانسیل اولیه خطی و به صورت $V_i = -E_\circ z$ است، و پس از گذاشتن کره نیز باید در فواصل دور همین پتانسیل را داشته باشیم. پس از گذاشتن کره پتانسیل را مجموع پتانسیل اولیه و یک پتانسیل دو قطبی فرض می‌کنیم

$$V = -E_\circ z + \frac{K\cos\theta}{r^۲}$$

با توجه به این که پتانسیل روی کره باید صفر باشد و $z = r\cos\theta$ به دست می‌آوریم

$$K = E_\circ R^۳$$

که R شعاع کره است. با مقایسهٔ جملهٔ دو قطبی و پتانسیل یک دو قطبی با گشتاور p به دست می‌آوریم

$$p = ۴\pi\varepsilon_\circ E_\circ R^۳$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۴ پتانسیل در فاصلهٔ $a < r < b$ و در فاصلهٔ $b < r < c$ را به ترتیب $V_۱$ و $V_۲$ می‌نامیم. هر دو پتانسیل شکل تابعی زیر را دارند

$$V = \frac{K}{r} + C$$

با اعمال شرایط مرزی بیان شده در صورت مسئله به دست می‌آوریم

$$C_۱ = \frac{-b}{a-b}V_\circ \quad , \quad K_۱ = \frac{ba}{a-b}V_\circ \quad , \quad V_۱ = \frac{K_۱}{r} + C_۱$$

$$C_2 = \frac{b}{b-c}V_0 \quad , \quad K_2 = \frac{bc}{c-b}V_0 \quad , \quad V_2 = \frac{K_2}{r} + C_2$$

شدت میدان الکتریکی در دو محیط به صورت زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2 = \frac{K_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{E}_1 = -\nabla V_1 = \frac{K_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

هر دو میدان به سطح کرهٔ میانی عمودند، و با توجه به شرایط مرزی

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} = \frac{\varepsilon_0}{b^2}(K_2 - K_1)$$
$$= \frac{\varepsilon_0 (a-c)}{(c-b)(a-b)}V_0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=0|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=0|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۵ ابتدا پتانسیل داخل کره را می‌یابیم. به خاطر ثابت بودن رسانایی در داخل کره معادلهٔ لاپلاس صادق است، و چون پتانسیل مستقل از φ است می‌توان نوشت

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

جملات دیگر به خاطر وجود مبدا و محور z در ناحیهٔ جواب حذف شده‌اند. در $r = R$

$$V_0 \cos\theta = A_1 R \cos\theta + \cdots$$

پس $A_1 = V_0 / R$، و بقیهٔ A_nها صفرند. بنابراین

$$V = \frac{V_0}{R} r\cos\theta = \frac{V_0}{R} z$$

زیرا $z = r\cos\theta$. حال به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{R}\hat{\mathbf{z}}$$
$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\frac{\sigma V_0}{R}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=0|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=0|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۶ قویتر شدن میدان باعث ایجاد یک میدان الکتریکی می‌شود. این میدان روی حلقه مولفه‌ای در جهت مماس بر حلقه دارد و این مولفه بر روی تمام حلقه ثابت است. بنابراین حلقه می‌چرخد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=0|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=0|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۷ برای شبیه سازی این وضعیت، کرهٔ اولیه را به همراه یک دایرهٔ کوچک دارای توزیع بار $-\sigma\ \mathrm{C/m^2}$ در محل سوراخ در نظر می‌گیریم. پس میدان کرهٔ سوراخ دار مجموع میدان کرهٔ بدون سوراخ و میدان دایرهٔ کوچک دارای توزیع بار $-\sigma\ \mathrm{C/m^2}$ است. میدان الکتریکی کرهٔ هادی باردار σ/ε_0 است. هر چند دایرهٔ دارای توزیع بار $-\sigma\ \mathrm{C/m^2}$ کوچک است، ولی میدان در نقاط بسیار نزدیک به این دایره برابر $-\sigma/2\varepsilon_0$ است (مسئلهٔ ۲-۱۶ را ببینید.) پس در محل سوراخ

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=0|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=0|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۸ (ب). چون فاصلهٔ تمام بارها تا مرکز کره a است، می‌توانیم پتانسیل را از معادلهٔ $V = q/4\pi\varepsilon_0 R$،

با قرار دادن شعاع کره به جای R و کل بار روی کره به جای Q به دست آوریم. کل بار روی کره عبارت است از

$$Q = \int 3\cos\theta\,(a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi) = 3a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$
$$= 3a^2 \frac{1}{2} 2 = 3\pi a^2$$

با گذاشتن این مقدار در معادلهٔ پتانسیل گزینهٔ (ب) به دست می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times \mathbf{B}=\mu \mathbf{J}\,|\,\nabla\times \mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot \mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot \mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times \mathbf{E}=0\,|\,\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۹ **الف** در مسئلهٔ ۱۱-۴ دیدیم که میدان داخل چنین محیطی یکنواخت است و حل به دست آمده به ابعاد و رسانایی ویژه بستگی ندارد. رابطهٔ مقاومت به‌کار رفته با فرض یکنواخت بودن میدان داخل محیط به دست می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times \mathbf{B}=\mu \mathbf{J}\,|\,\nabla\times \mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot \mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot \mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times \mathbf{E}=0\,|\,\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۲۰ **(الف)**. در مسئلهٔ ۱۱-۲ دیدیم که یک سوم خطوط نیرویی که از A خارج می‌شوند باید به نقطهٔ B ختم شوند یعنی خطوطی که با زاویهٔ کوچکتر از 60° از A خارج می‌شوند به B ختم می‌شوند. در نزدیک نقطهٔ B خطوط میدان شعاعی است، پس نیمی از خطوطی که به نقطهٔ B وارد می‌شوند به سمت چپ بار خطی وارد می‌شوند. آخرین خط خطی است که با زاویهٔ 30° از A جدا می‌شود.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times \mathbf{B}=\mu \mathbf{J}\,|\,\nabla\times \mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot \mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot \mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times \mathbf{E}=0\,|\,\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۲۱ **(د)**. با استفاده از قانون گوس میدان $\mathbf{D}$ اطراف کره را به صورت زیر می‌یابیم

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

و چون $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi r(a+r)}\hat{\mathbf{r}}$$

سرانجام

$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r(a+r)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln\frac{(a+r)}{r}$$

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times \mathbf{B}=\mu \mathbf{J}\,|\,\nabla\times \mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot \mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot \mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times \mathbf{E}=0\,|\,\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۲۲ **(ج)** میدان الکتریکی داخل و خارج کره را با استفاده از قانون گوس می‌یابیم

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{kr^2}{4\varepsilon} & \rho < a \\[2ex] \dfrac{ka^4}{4\varepsilon r^2} & \rho > a \end{cases}$$

میدان خارج کره همانند میدان کره‌ای با بار ka^4 است، پس پتانسیل در خارج کره همانند پتانسیل چنین کره‌ای است، و در سطح کره

$$V(a) = \frac{ka^3}{4\varepsilon_0}$$

اختلاف پتانسیل بین مرکز و سطح کره را به صورت زیر می‌یابیم

$$V(0) - V(a) = -\int_a^0 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{k}{4\varepsilon}\int_a^0 r^2\,dr = \frac{ka^3}{12\varepsilon}$$

پس

$$V(\circ) = \frac{ka^{\text{۳}}}{\text{۱۲}\varepsilon} + \frac{ka^{\text{۳}}}{\text{۴}\varepsilon_\circ} = \frac{ka^{\text{۳}}(\text{۳}\varepsilon + \varepsilon_\circ)}{\text{۱۲}\varepsilon\varepsilon_\circ}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=\circ|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۲۳ (الف) بار $Q = \text{۴}\pi\varepsilon_\circ RV_\circ$ روی کره قرار دارد. پس میدان اطراف عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\text{۴}\pi\varepsilon_\circ r^{\text{۲}}}\hat{\mathbf{r}}$$

توجه کنید که وجود پوستهٔ کروی تقارن و میدان را تغییر نمی‌دهد.

$$V(a) = -\int_\infty^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} - \int_a^R \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$= \frac{Q}{\text{۴}\pi\varepsilon_\circ b} + \frac{Q}{\text{۴}\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\text{۱}}{R} - \frac{\text{۱}}{a}\right)$$

با گذاشتن $Q = \text{۴}\pi\varepsilon_\circ RV_\circ$ در رابطهٔ بالا جواب الف به دست می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=\circ|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۲۴ (د) مولفهٔ مماسی میدان $\mathbf{E}_{t\text{۱}} = \text{۱۰}^{\text{۴}}(\hat{\mathbf{x}} - \text{۲}\hat{\mathbf{y}})$ V/m و مولفهٔ عمودی آن $\mathbf{E}_{n\text{۱}} = \text{۵}\times\text{۱۰}^{\text{۴}}\hat{\mathbf{z}}$ V/m است. مولفهٔ مماسی میدان $\mathbf{E}$ در مرز پیوسته است. پس $\mathbf{E}_{t\text{۲}} = \mathbf{E}_{t\text{۱}} = \text{۱۰}^{\text{۴}}(\hat{\mathbf{x}} - \text{۲}\hat{\mathbf{y}})$ V/m. مولفهٔ عمودی میدان $\mathbf{D}$ در مرز به مقدار σ ناپیوسته است، $D_{n\text{۱}} - D_{n\text{۲}} = \sigma$، یا $\varepsilon_\text{۱}E_{n\text{۱}} - \varepsilon_\text{۲}E_{n\text{۲}} = \text{۱۰}^{\text{۴}}$. مولفهٔ عمودی مولفهٔ در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ است. پس

$$E_{n\text{۲}} = \text{۱۰}^{\text{۴}}\left(\frac{\text{۵}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}\varepsilon_\circ}\right)$$

سرانجام

$$\mathbf{E}_\text{۲} = \text{۱۰}^{\text{۴}}(\hat{\mathbf{x}} - \text{۲}\hat{\mathbf{y}}) + \text{۱۰}^{\text{۴}}\left(\frac{\text{۵}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}\varepsilon_\circ}\right)\hat{\mathbf{z}}\ \text{V/m}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=\circ|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۲۵ (ج) شدت میدان الکتریکی را از رابطهٔ $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ و جابجایی الکتریکی را از رابطهٔ $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\mathbf{J} = \frac{\varepsilon_\circ(\text{۱}+y)}{\text{۱۰}y}e^{-z}\hat{\mathbf{y}}$$

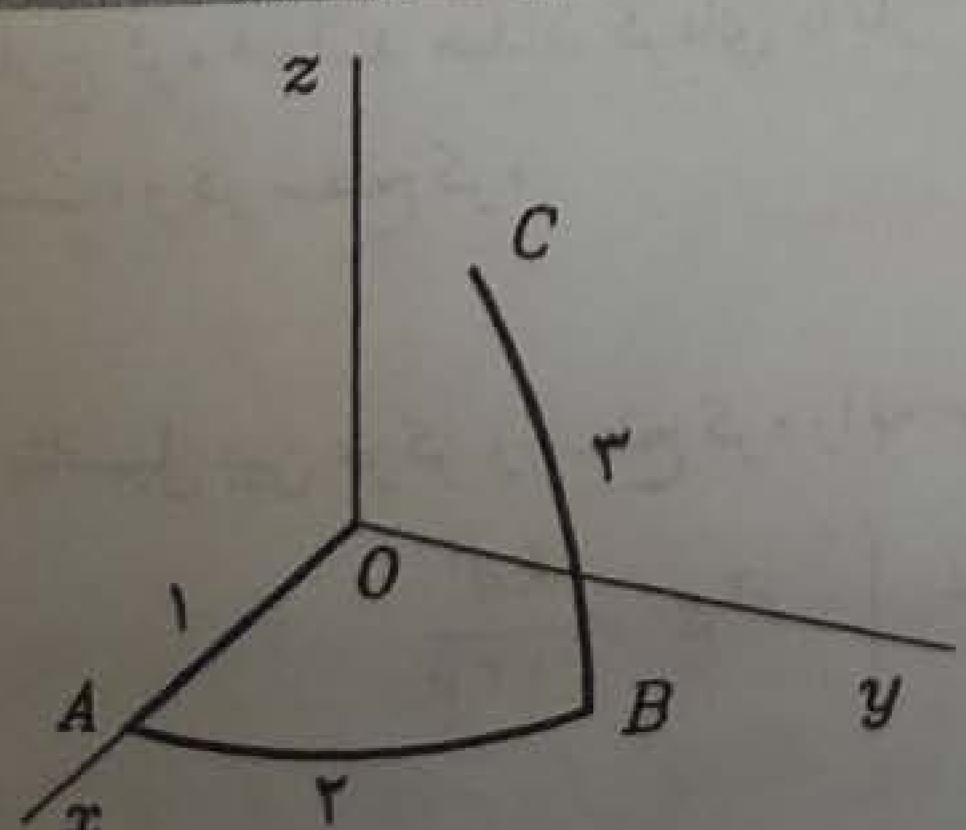
چگالی بار الکتریکی عبارت است از $\rho = \nabla\cdot\mathbf{D}$، پس

$$\rho = \nabla\cdot\mathbf{D} = \frac{\partial D_y}{\partial y} = -\varepsilon_\circ e^{-z}/\text{۱۰}y^{\text{۲}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=\circ|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۲۶ (ب) در دستگاه مختصات کروی داریم

$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$، پس



شکل ح ۱۱-۲۶

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = ۲\,r\sin\theta\cos\varphi\,dr + r^{۲}\cos\theta\cos\varphi\,d\theta - r^{۲}\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi$$

باید از $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ – بین مرجع تا نقطهٔ مورد نظر انتگرال بگیریم. مسیر سه بخشی شکل ح ۱۱-۲۶ را برمی‌گزینیم تا محاسبات ساده‌تر شود. روی بخش ۱ داریم $d\varphi=۰$، $d\theta=۰$؛ روی بخش ۲ داریم $dr=۰$، $d\theta=۰$؛ و روی بخش ۳ داریم $dr=۰$، $d\varphi=۰$. پس

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$
$$= -\int_{۰}^{۲} ۲\,r\sin\theta\cos\varphi\,dr - \int_{\pi/۲}^{\pi/۶} r^{۲}\cos\theta\cos\varphi\,d\theta + \int_{۰}^{\pi/۳} r^{۲}\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi$$

در مسیر ۱، $\theta=\pi/۲$ و $\varphi=۰$؛ در مسیر ۲، $\theta=\pi/۲$؛ و روی مسیر ۳، $\varphi=\pi/۳$ و $r=۲$

$$V = -\int_{۰}^{۲} ۲\,r\,dr - \int_{\pi/۲}^{\pi/۶} ۲\cos\theta\,d\theta + \int_{۰}^{\pi/۳} ۴\sin\varphi\,d\varphi$$
$$= -r^{۲}\Big|_{۰}^{۲} - ۲\sin\theta\Big|_{\pi/۲}^{\pi/۶} - ۴\cos\varphi\Big|_{۰}^{\pi/۳}$$
$$= -(۴-۰) - ۲(\tfrac{۱}{۲}-۱) - ۴(\tfrac{۱}{۲}-۱) = -۱$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱۱-۲۷ **(ج)** چون مجموع بارها صفرست، پتانسیل مربوط به این بارها نمی‌تواند در فواصل بسیار دور جمله‌ای متناسب با $z/۱$ داشته باشد، به همین دلیل شدت میدان الکتریکی نیز نمی‌تواند با $z^{۲}/۱$ متناسب باشد؛ پس گزینه‌های الف و د نمی‌توانند درست باشند. میدان متناسب با $z/۱$ به توزیع بار خطی بینهایت مربوط می‌شود، بنابراین گزینهٔ ب نیز نمی‌تواند درست باشد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱۱-۲۸ **(د)** برای این توزیع بار $\mathbf{R}=-A\hat{\mathbf{r}}$، $ds=A^{۲}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$. پس

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int \frac{\sigma\,ds}{R^{۳}}\mathbf{R} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int \frac{(\sigma_۰\sin\varphi)(A^{۲}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi)}{A^{۳}}(-A\hat{\mathbf{r}})$$
$$= \frac{\sigma_۰}{۴\pi\varepsilon_۰}\int \sin\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi(-\hat{\mathbf{r}})$$

برای محاسبهٔ این انتگرال باید بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{r}}$ را به مختصات قائم ببریم

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int \sin\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi(-\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} - \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}})$$

چون انتگرال سینوس و کسینوس روی یک دورهٔ تناوب صفرست، مولفه‌های x و z صفرست، پس

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma_۰}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_{۰}^{۲\pi}\sin^{۲}\theta\,d\theta\int_{۰}^{\pi/۲}\sin^{۲}\varphi\,d\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$$
$$= -\frac{\sigma_۰}{۴\pi\varepsilon_۰}\times\frac{\pi}{۴}\times\pi\,\hat{\mathbf{y}} = -\frac{\sigma_۰\pi}{۱۶\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{y}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱۱-۲۹ **(الف)** بارهای مقید روی سطح جانبی استوانه صفرست و

$$\sigma_b = \begin{cases} P_\circ & \text{قاعدهٔ بالا} \\ -P_\circ & \text{قاعدهٔ پایین} \end{cases}$$

پس میدان $\mathbf{E}$ در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ - است و پتانسیلی که بارهای قاعدهٔ بالایی ایجاد می‌کنند توسط بارهای منفی قاعدهٔ پایینی حذف می‌شود.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۳۰ **(ج)** این آرایش یک حلقهٔ تصویر با بار λ - در صفحهٔ $z=-d$ دارد و میدان خواسته شده میدان ناشی از خود حلقه و حلقهٔ تصویر است. حلقهٔ واقعی به خاطر تقارن در مرکز حلقه میدانی ایجاد نمی‌کند. میدان ناشی از حلقهٔ تصویر، با توجه به معادلهٔ (۲-۲۲) عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda a}{۲\varepsilon_\circ}\frac{۲d}{\varepsilon_\circ(a^۲+۴d^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۳۱ **(د)** حل مسئلهٔ ۲-۵ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۳۲ **(ج)** داریم $dl = a\,d\varphi$ و $\mathbf{R} = -a\hat{\boldsymbol{\rho}}$

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int \frac{\rho_\circ x^۲ a\,d\varphi(-a\hat{\boldsymbol{\rho}})}{a^۳}$$

برای محاسبهٔ این انتگرال باید بردارها را در دستگاه قائم بیان کنیم. $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$. همچنین داریم $x = a\cos\varphi$، پس

$$\mathbf{E} = \frac{-\rho_\circ}{۴\pi\varepsilon_\circ a}\int x^۲ d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{-\rho_\circ a}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^\pi \cos^۲\varphi\,(\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}})\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

انتگرال $\cos^۳\varphi$ در فاصلهٔ ۰ تا π برابر صفرست، این مطلب را می‌توان با توجه به نمودار این تابع نشان داد. همچنین داریم

$$\int_\circ^\pi \cos^۳\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi = \frac{۲}{۳}$$

پس

$$\mathbf{E} = -\frac{a\rho_\circ}{۶\pi\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{y}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۳۳ **(الف)** چون میدان یکنواخت است حلقه حرکت جابجایی ندارد. گشتاور دو قطبی حلقه عبارت است از

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} = Ia^۲\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

گشتاور وارد بر حلقه عبارت است از

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B} = Ia^۲\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times B_\circ\hat{\mathbf{x}}$$
$$= -Ia^۲B_\circ\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$$

پس حلقه حول محور y و در جهت کم شدن مقدار φ می‌چرخد.

۱۱-۳۴ (ج) میدان داخل سیملوله با جریان متناسب است، بنابراین میدان به طور خطی زیاد می‌شود. ولتاژ القا شده با مشتق میدان متناسب است، پس یک ولتاژ ثابت می‌باشد. علامت ولتاژ با توجه به قانون لنز تعیین می‌شود. چون میدان در سیملولهٔ داخلی از چپ به راست و در حال زیاد شدن است، ولتاژ القایی باید میدانی در جهت راست به چپ ایجاد کند، یعنی در صورت عبور جریان از سیملولهٔ بیرونی باید جهت آن در سر مشخص شده با علامت + به سمت داخل سیملوله باشد. یعنی اگر مقاومت به سیملوله وصل شود باید جریانی در جهت راست به چپ از آن بگذرد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۳۵ (الف) بردار عمود بر مرز $-3\hat{\mathbf{y}} - 4\hat{\mathbf{z}}$ است؛ بنابراین بردار یکهٔ عمود بر مرز $\hat{\mathbf{n}} = -0.6\hat{\mathbf{y}} - 0.8\hat{\mathbf{z}}$ است. جریان سطحی از رابطهٔ $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)$ به دست می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۳۶ (ب) میدان ناشی از جریان عبارت است از

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

که x فاصله از سیم است. پس شار گذرنده از حلقه عبارت است از

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{d\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

emf القا شده حول حلقه $d\Phi/dt$ است و اگر مقاومت حلقه R باشد، جریان i_1 از آن می‌گذرد

$$i_1 = \frac{d\mu_0}{2\pi R}\ln\frac{b}{a}\frac{di}{dt}$$

باری که از نقطهٔ A می‌گذرد برابر است با

$$Q = \int i_1\, dt = \frac{d\mu_0}{2\pi R}\ln\frac{b}{a}\int \frac{di}{dt}\,dt = \frac{d\mu_0}{2\pi R}\ln\frac{b}{a}\,I_0$$

به ازای مقادیر داده شده

$$Q = \frac{1\times 4\pi\times 10^{-7}}{2\pi\times 10^{-3}}\ln 2\times 1 = 138.6\,\mu C$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۳۷ (ب) طبق قضیهٔ استوکس این انتگرال را می‌توان به انتگرال کرل $\mathbf{A}$ روی سطح C تبدیل کرد. چون کرل $\mathbf{A}$ چگالی شار مغناطیسی است، انتگرال سطح آن شار مغناطیسی را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۳۸ (د) روی میله نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathrm{emf} = Blv$ القا می‌شود و از مدار متشکل از میله–ریل–مقاومت R جریان $i = \mathrm{emf}/R = Blv/R$ می‌گذرد. توجه کنید که چون v متغیر است، این جریان نیز با زمان تغییر می‌کند. نیروی وارد بر میله عبارت است از

$$F = Bli = \frac{B^2 l^2}{R}v$$

قانون دوم نیوتن می‌گوید $F = \partial v/\partial t$ پس

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{B^2 l^2}{R} v$$

علامت منفی از قانون لنز نتیجه می‌شود، زیرا emf القا شده به نحوی است که جریان ناشی از آن با ادامهٔ حرکت مخالفت می‌کند. حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول بالا سرعت را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$v = v_0 e^{-t/\tau}$$

که در آن $\tau = mR / B^2 l^2$. کل مسافت طی شده را می‌توان با انتگرالگیری از سرعت به دست آورد

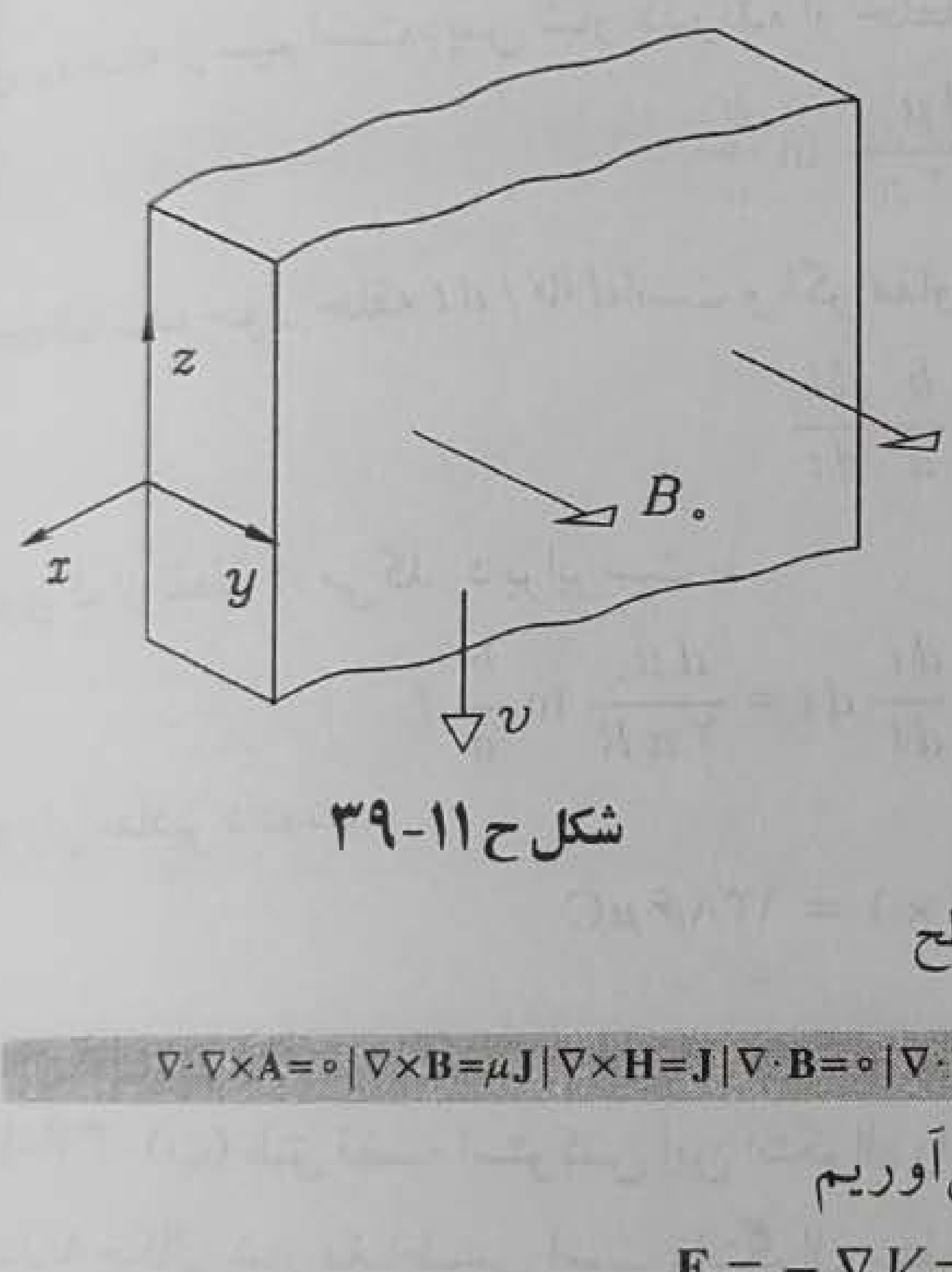
$$d = \int_0^\infty v\,dt = -v_0 \tau e^{-t/\tau} \Big|_0^\infty = v_0 \tau$$

و با گذاشتن مقدار τ به دست می‌آوریم $d = v_0 mR / B^2 l^2$.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 | \nabla\times B=\mu J | \nabla\times H=J | \nabla\cdot B=0 | \nabla\cdot D=\rho | \nabla\times E=0 | \oint D\cdot ds=Q | \int J\cdot ds=I | \oint H\cdot dl=I | \oint B\cdot ds=0 | \oint E\cdot dl=0$

۱۱-۳۹ (الف) برای یافتن پاسخ صحیح می‌توان گزینه‌ها را از لحاظ بعد بررسی کرد، گزینهٔ صحیح باید دارای بعد نیوتن بر مترمربع باشد. ولی در اینجا به حل مسئله می‌پردازیم. با انتخاب دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل ح ۱۱-۳۹ داریم $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}}$ و $v = -v_0 \hat{\mathbf{z}}$. پس

$$\mathbf{E} = \mathbf{v}\times\mathbf{B} = v_0 B\hat{\mathbf{x}}$$



شکل ح ۱۱-۳۹

این میدان القا شده باعث می‌شود جریانی با چگالی $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \sigma v_0 \hat{\mathbf{x}} B$ در ورقه ایجاد شود. این جریان در میدان مغناطیسی قرار دارد، پس نیرویی به آن وارد می‌شود که اندازهٔ آن بر واحد حجم عبارت است از

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}\times\mathbf{B} = \sigma v_0 B^2 \hat{\mathbf{z}}$$

یک متر مربع ورقه حجمی برابر t دارد. نیروی وارد بر این حجم عبارت است از

$$\text{نیروی وارد بر واحد سطح} = Ft = t\sigma v_0 B^2$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 | \nabla\times B=\mu J | \nabla\times H=J | \nabla\cdot B=0 | \nabla\cdot D=\rho | \nabla\times E=0 | \oint D\cdot ds=Q | \int J\cdot ds=I | \oint H\cdot dl=I | \oint B\cdot ds=0 | \oint E\cdot dl=0$

۱۱-۴۰ (الف) ابتدا شدت میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -2000\,\hat{\mathbf{x}} - 4000\,\hat{\mathbf{y}}$$

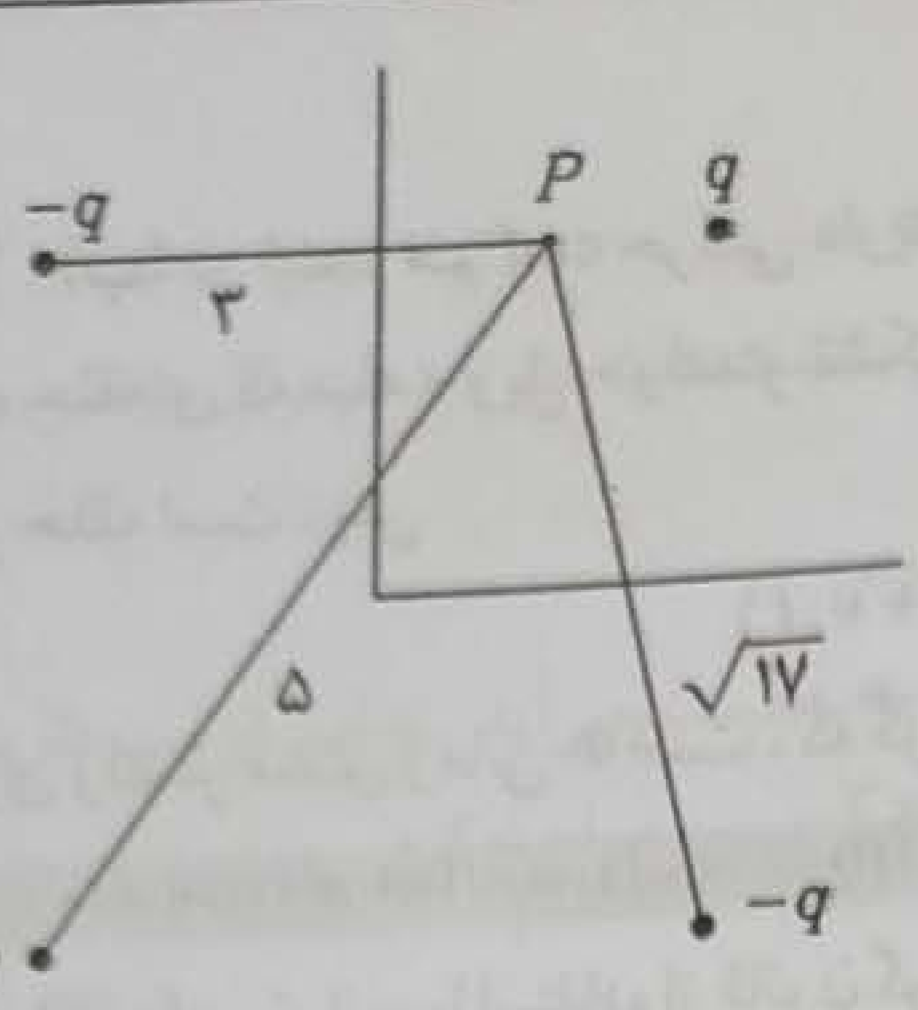
چگالی انرژی عبارت است از

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2}\times\frac{10^{-9}}{36\pi}\times(4\times10^6 + 16\times10^6) = \frac{0.01}{36\pi}$$

چون چگالی انرژی ثابت است، برای یافتن انرژی ذخیره شده در مکعب حجم مکعب ($10^3\,\mathrm{m}^3$) را در چگالی انرژی ضرب می‌کنیم.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 | \nabla\times B=\mu J | \nabla\times H=J | \nabla\cdot B=0 | \nabla\cdot D=\rho | \nabla\times E=0 | \oint D\cdot ds=Q | \int J\cdot ds=I | \oint H\cdot dl=I | \oint B\cdot ds=0 | \oint E\cdot dl=0$

۱۱-۴۱ (ب) شکل ح ۱۱-۴۱ تصاویر بار q را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل



$$V(P)=kq-\frac{kq}{۳}+\frac{kq}{\sqrt{۵}}-\frac{kq}{\sqrt{۱۷}}$$
$$=kq\,(۱-۰/۳۳+۰/۲-۰/۲۴۲)\approx ۰/۶۳kq$$

شکل ح ۱۱-۴۱

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۴۲ (د) چون محیط همگن نیست، معادلهٔ لاپلاس برقرار نیست. میدان $\mathbf{D}$ مستقل از محیط است و با استفاده از تقارن مسئله در امتداد y و z به دست می‌آوریم $\mathbf{D}=D_{\circ}\,\hat{\mathbf{x}}$ که در آن $D_{\circ}$ مقداری ثابت دارد. پس

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}=\frac{D_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}(۱+x^{۲})}\hat{\mathbf{x}}$$

برای یافتن V از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم

$$V=-\int_{\circ}^{x}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{D_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{x}\frac{dx}{۱+x^{۲}}=-\frac{D_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}}\tan^{-۱}x$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم

$$-\frac{D_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}}=\frac{۴۰۰}{\pi}$$

که پتانسیل بیان شده در گزینهٔ د را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۴۳ (ج) هر جسمی، چه هادی و چه غیر هادی، در میدان الکتریکی غیر یکنواخت به سمت محلی که میدان قویترست حرکت می‌کند.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۴۴ (ب) چون میدان الکتریکی بر سطح همپتانسیل عمودست، با گرفتن گرادیان می‌توان راستای میدان را تعیین کرد، ولی یافتن اندازهٔ و جهت میدان ممکن نیست.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۴۵ (د) اگر میدان بین دو هادی $\mathbf{E}$ باشد، و سطح بسته S را دور یکی از هادیها فرض کنیم، بار روی هادی داخل سطح عبارت است از $Q=\varepsilon\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. همچنین چگالی جریان در محیط بین دو هادی $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ است و جریانی که از هادی خارج می‌شود برابرست با

$$I=\oint\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=\sigma\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\frac{\sigma Q}{\varepsilon}$$

اکنون می‌توانیم به دست آوریم

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\varepsilon I}{\sigma V}=\frac{\varepsilon}{\sigma R}=\frac{۱۰۰\times۱۰^{-۱۲}}{۲\times۱۰^{۵}\times۱۰^{-۳}}$$

که $۰/۵\ \mathrm{pF}$ است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۴۶ (ب) در اینجا هم emf حرکتی داریم و هم emf القایی. هر دو emf را یکجا به دست می‌آوریم. مساحت حلقه‌ای که میله - ریل - ولتمتر تشکیل می‌دهند عبارت است از: $l\,(a+v_\circ t)$. میدان یکنواخت و عمود بر حلقه است، پس

$$\Phi = B\,S = B_\circ t\, l\,(a+v_\circ t)$$

ولتاژ روی ولتمتر مشتق زمانی Φ است، که گزینهٔ ب را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۴۷ (الف) می‌توانیم با استفاده از قانون گوس جابجایی الکتریکی (نه شدت میدان الکتریکی) را بیابیم. نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

حال با داشتن گذردهی می‌توانیم شدت میدان الکتریکی را بیابیم

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{20\,\pi\,\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{r}}$$

داریم $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_\circ \mathbf{E}$؛ پس

$$\mathbf{P} = \left(\frac{Q}{4\pi r^2} - \frac{Q}{20\,\pi}\right)\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{5}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

چگالی بار مقید سطحی عبارت است از $\sigma_b = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}$. روی سطح بیرونی $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ و $r=b$

$$\sigma_b = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{Q\,(5-b^2)}{20\,\pi\, b^2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۴۸ (ج) گر چه هر چهار پتانسیل بالا را می‌توان حساب کرد، ولی چنین محاسبه‌ای راه سخت پاسخ به این مسئله است. طبق قضیهٔ همپاسخی چون گذاشتن بار Q روی کرهٔ باعث می‌شود که پتانسیل پوسته V_2 شود، گذاشتن آن روی پوسته باعث V_2 شدن پتانسیل کره می‌شود؛ بنابراین $V_2 = V_3$. در این حالت میدان داخل پوسته صفر، و تمام نقاط داخل آن همپتانسیل‌اند، پس $V_3 = V_4$.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۴۹ (د) تابع پتانسیل در هر دو محیط عبارت است از

$$V = \frac{a\,V_\circ}{r}$$

یعنی همان تابعی که در صورت نبودن دی‌الکتریک وجود می‌داشت. علت این امر لزوم پیوستگی مولفهٔ مماسی میدان الکتریکی در روی مرز است. شدت میدان الکتریکی به صورت زیر است

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{a\,V_\circ}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

که میدانی شعاعی است، و پیوستگی مولفهٔ مماسی روی مرز $\theta = \pi/4$ تنها با یکسان بودن میدان در دو محیط میسر می‌شود. به هر حال تابع پتانسیل مفروض هم معادلهٔ لاپلاس و هم شرایط مرزی را ارضا می‌کند، پس طبق اصل یکتایی جواب تنها جواب ممکن است. چگالی شار الکتریکی عبارت است از $\mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E}$. چگالی بار سطحی روی کره با مولفهٔ عمودی $\mathbf{D}$ روی سطح کره برابر است. پس در بخش فضای آزاد

$$\sigma_1 = D_n = \frac{V_\circ \varepsilon_\circ}{a}$$

کل بار روی این بخش با ضرب یک چهارم مساحت کره در σ_1 به دست می‌آید. برای بخش واقع در دی‌الکتریک

$$\sigma_2 = D_n = \frac{3V_\circ \varepsilon_\circ}{a}$$

و کل بار روی این بخش با ضرب سه چهارم مساحت کره در σ_2 به دست می‌آید. به این ترتیب داریم

$$Q = \frac{\text{مساحت کره}}{4}\sigma_1 + \frac{3\times\text{مساحت کره}}{4}\sigma_2 = \pi\varepsilon_\circ a V_\circ + 9\pi\varepsilon_\circ a V_\circ$$

که مقدار بیان شده در گزینهٔ د را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۵۰ (ج) روی صفحهٔ xy در $x > 0$ میدان مغناطیسی عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I_2}{2\pi x}(-\hat{\mathbf{z}})$$

و در $x < 0$ میدان مغناطیسی منفی مقدار بالاست. نیروی وارد بر نیمهٔ واقع در $x > 0$ عبارت است از

$$\mathbf{F} = \int (I_1\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\mathbf{B})\,a\,d\varphi = -\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\int \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{z}}}{x}\,a\,d\varphi$$

و با استفاده از $x = a\cos\varphi$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\hat{\mathbf{x}} + \tan\varphi\,\hat{\mathbf{y}})\,d\varphi$$

به همین ترتیب برای نیمهٔ واقع در $x < 0$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\hat{\mathbf{x}} + \tan\varphi\,\hat{\mathbf{y}})\,d\varphi$$

علت باقی ماندن منفی این است که در جایگذاری $x = a\cos\varphi$ باید یک علامت منفی به کار بریم، زیرا x باید فاصله تا جریان را بیان کند و باید مثبت باشد.

چون $\tan\alpha = \tan(\pi+\alpha)$ می‌توانیم حدود انتگرال اول را برای مولفهٔ y از $\pi/2$ تا $3\pi/2$ بنویسیم، تا در جمع دو نیرو این مولفه حذف شود. پس

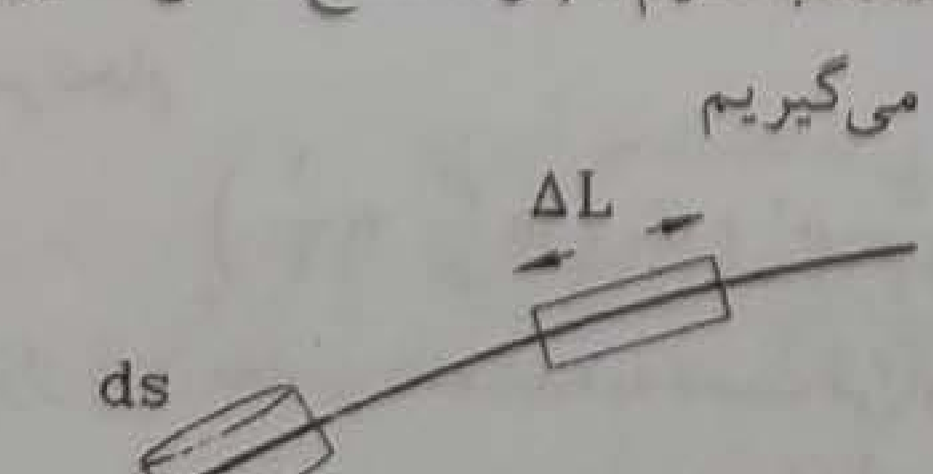
$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\hat{\mathbf{x}}\,d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{\mathbf{x}}\,d\varphi\right)$$

که مقدار $-\mu_\circ I_1 I_2\hat{\mathbf{x}}$ را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۵۱ (ب) همانطور که در مسئلهٔ ۱۱-۳۷ دیدیم $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ با شار مغناطیسی گذرنده از داخل مسیر C برابر است. اگر این انتگرال را برای مسیر کوچک شکل ح ۱۱-۵۱ محاسبه کنیم، چون سطح داخل مسیر به صفر میل می‌کند، شار گذرنده از داخل مسیر نیز صفر است و نتیجه می‌گیریم

$$A_{t1}\Delta L - A_{t2}\Delta L = 0$$



شکل ح ۱۱-۵۱

که حذف ΔL از آن شرط مرزی برای مولفهٔ مماسی را به دست می‌دهد.

همچنین چون $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ با استفاده از قضیهٔ دیورژانس به دست می‌آوریم $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$. با اعمال این معادله به حجم بسیار کوچک شکل ح ۱۱-۵۰ به دست می‌آوریم

$$A_{n1}\Delta S - A_{n2}\Delta S = 0$$

که با حذف ΔS از آن شرط مرزی برای مولفهٔ عمودی به دست می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۵۲ (الف) بردار عمود بر سطح جانبی استوانه $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$ است. پس

$$\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = \varepsilon_0 \mathbf{E}\cdot R\,dz\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \varepsilon_0 E_0 R\,(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\,dz\,d\varphi$$

با جایگذاری $x = R\cos\varphi$ و $y = R\sin\varphi$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = \varepsilon_0 E_0 R^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi \int_{-l/2}^{l/2} dz = 2\pi\varepsilon_0 l R^2$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۵۳ (ب) باید معادلهٔ پواسون را حل کنیم. به خاطر تقارن در جهتهای z و φ مشتق پتانسیل نسبت به z و φ صفر است. پس

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = -\frac{k}{\varepsilon_0}$$

که در آن k چگالی بار، و مقداری ثابت است. ضرب دو طرف در ρ و یک بار انتگرالگیری از این معادله به دست می‌دهد

$$\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{k}{2\varepsilon_0}\rho^2 + C_1 \qquad (1)$$

دو طرف را بر ρ تقسیم می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{k}{2\varepsilon_0}\rho + \frac{C_1}{\rho} \qquad (2)$$

توجه کنید که $-\partial V/\partial\rho$ شدت میدان الکتریکی است، که باید در $\rho = a$ (a شعاع استوانهٔ داخلی است) صفر باشد. با اعمال این شرط به دست می‌آوریم

$$C_1 = \frac{k a^2}{2\varepsilon_0}$$

اکنون یک بار دیگر از معادلهٔ (۲) انتگرال می‌گیریم

$$V = -\frac{k}{4\varepsilon_0}\rho^2 + C_1\ln\rho + C_2$$

پتانسیل در $\rho = a$ باید صفر باشد. اعمال این شرط مرزی به دست می‌دهد

$$C_2 = \frac{k a^2}{4\varepsilon_0} - C_1\ln a = \frac{C_1}{2} - C_1\ln a$$

و سرانجام

$$V = -\frac{k}{4\varepsilon_0}\rho^2 + C_1\ln\rho + \frac{C_1}{2} - C_1\ln a = -\frac{k}{4\varepsilon_0}\rho^2 + C_1\left(\ln\frac{\rho}{a} + \frac{1}{2}\right)$$

با قرار دادن مقادیر داده شده به دست می‌آوریم

$$V = 100\rho^2 - 0.08\left(\ln\frac{\rho}{a} + \frac{1}{2}\right)$$

در $\rho = 5\ \text{cm}$ به دست می‌آوریم $V = ۰{,}۱۳۷۷\ V$.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۵۴ **(د)** مسئلهٔ ۲-۴۸ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۵۵ **(ب)** در مسئلهٔ ۳-۱۰ چگالی بار القا شده روی سطح هادی را به صورت زیر به دست آوردیم

$$\sigma = -\frac{qh}{2\pi(h^2+\rho^2)^{1.5}}$$

خطوط میدانی که از زیر بار نقطه‌ای شروع می‌شوند نیمی از خطوط شار را تشکیل می‌دهند، پس باید به سطحی برخورد کنند که بار روی آن $-q/2$ باشد. بنابراین باید شعاع دایره‌ای را بیابیم که کل بار القا شده روی آن برابر $-q/2$ باشد

$$-\frac{q}{2} = \int \sigma\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{-qh}{2\pi(h^2+\rho^2)^{1.5}}\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= -qh\int_0^{r}\frac{\rho\, d\rho}{(h^2+\rho^2)^{1.5}} = -qh\,\frac{-1}{(h^2+\rho^2)^{0.5}}\Bigg|_0^{r}$$

$$= -qh\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{(h^2+r^2)^{0.5}}\right] = -q + \frac{hq}{(h^2+r^2)^{0.5}}$$

پس باید داشته باشیم $r = h\sqrt{3}$.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۵۶ **(الف)** برای یافتن امتداد میدان گرادیان سطح همپتانسیل را به دست می‌آوریم $\pm\hat{\mathbf{e}} = \nabla V/|\nabla V|$، که $\hat{\mathbf{e}}$ بردار یکه‌ای در امتداد میدان الکتریکی است. میدان الکتریکی ضریبی از بردار زیر است

$$\nabla(y^2 - xy - c) = -y\hat{\mathbf{x}} + (2y - x)\hat{\mathbf{y}}$$

برای این که مولفه x میدان در نقطهٔ مورد نظر برابر $20\ \text{V/m}$ باشد، میدان الکتریکی باید ۴- برابر بردار به دست آمده در بالا باشد. پس

$$\mathbf{E} = 4y\hat{\mathbf{x}} - 4(2y - x)\hat{\mathbf{y}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۵۷ **(د)** برای یافتن پتانسیل برداری مغناطیسی باید از رابطهٔ زیر استفاده کنیم

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_0\, i(t - R/c)\, d\mathbf{l}}{4\pi R}$$

در این رابطه $R = \sqrt{2}$، $d\mathbf{l} = d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$، و c سرعت نور است. با جایگذاری به دست می‌آوریم

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_0 \sin\varphi\cos\omega(t - \sqrt{2}/c)\, d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{4\pi\sqrt{2}} = \frac{\mu_0\cos\omega(t-\sqrt{2}/c)}{4\pi\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\, d\varphi$$

و با استفاده از انتگرال زیر به جواب درست می‌رسیم

$$\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} \sin\varphi\,(-\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}})\,d\varphi = -\pi\hat{\mathbf{x}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۵۸ **(الف)** با استفاده از قانون گوس می‌توانیم جابجایی الکتریکی را بیابیم

$$\mathbf{D} = \frac{K}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

که در آن K مقداری ثابت است. حال داریم

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = K\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$V = -\frac{K}{\text{۲}}\rho^{\text{۲}} + M$$

K و M را با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۵۹ **(د)** مسئلهٔ ۵-۲ را ببینید. توجه کنید که در نقاط عطف تمام مشتقهای اول تابع پتانسیل (یعنی تمام مولفه‌های میدان الکتریکی) صفرند، بنابراین در این نقاط شدت میدان الکتریکی هم صفرست. به عنوان نمونه در بین دو بار اندازهٔ شدت میدان صفرست، میدان تغییر جهت می‌دهد و پتانسیل نقطهٔ عطف دارد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۰ **(الف)** داریم $\mathbf{B} = \text{۱۰}\,\hat{\mathbf{z}}$، و چون زاویه‌ای که بخش متحرک قاب در هر لحظه با صفحهٔ xy می‌سازد $\theta = \omega t$ است، شاری که از قاب می‌گذرد حاصلضرب مساحت بخش متحرک قاب در اندازهٔ میدان و کسینوس این زاویه است. شاری که از بخش غیر متحرک می‌گذرد ثابت است، بنابراین در emf القایی تاثیری ندارد. پس

$$\Phi = \text{۱۰} \times \text{۰٫۰۱} \times \cos\omega t = \text{۰٫۱} \times \cos\omega t$$

emf القا شده در حلقه مشتق Φ است، و به ازای $\theta = \pi/\text{۲}$ ماکزیمم می‌شود. کل مقاومت حلقه $\text{۵}\Omega$ است، پس

$$I_{max} = \frac{\text{۰٫۱}\,\omega}{\text{۵}\,\Omega} = \frac{\text{۰٫۱}\times\text{۲}\pi f}{\text{۵}\,\Omega} = \text{۲}\pi\ \mathrm{A}$$

البته تحلیل فوق کاملاً درست نیست (مسائل ۱۰-۱۶ و ۱۰-۳۷ را ببینید) زیرا جریان متغیر حلقه، میدانی متغیر با زمان ایجاد می‌کند و شار این میدان نیز باید در نظر گرفته شود.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۱ **(ج)** در خارج عایق $\mathbf{P} = \circ$. در داخل عایق به خاطر پیوسته بودن مولفهٔ مماسی میدان الکتریکی باید داشته باشیم $E_y = \text{۲}E_\circ$. برای مولفهٔ عمودی داریم $E_x = E_\circ/\varepsilon_r$. پس

$$\mathbf{E} = E_\circ\left(\frac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon}\hat{\mathbf{x}} + \text{۲}\hat{\mathbf{y}}\right)$$

همچنین داریم $\mathbf{P} = \varepsilon_\circ\chi_e\mathbf{E} = \varepsilon_\circ(\varepsilon_r - \text{۱})\mathbf{E}_i$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۲ **(ب)** شدت میدان مغناطیسی داخل سیملوله و میله برابر NI است. اگر میله به اندازهٔ dx جابجا شود، نیروی وارد بر آن کاری به اندازهٔ $F\,dx$ انجام می‌دهد. این کار با تغییر انرژی سیستم $d\,W$ برابرست. فضای

جدیدی که میله گرفته $S\,dx$ است، قبلاً در این فضا تراوایی $\mu_\circ$ بوده و اکنون به μ تغییر یافته است. بنابراین dW عبارت است از

$$dW = \frac{1}{2}(\mu - \mu_\circ)H^2 S\,dx = \frac{1}{2}(\mu - \mu_\circ)N^2 I^2 S\,dx$$

با تقسیم dW بر dx نیرو به دست می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۳ (الف) چون میدان یکنواخت است، چگالی انرژی یکنواختی دارد و کل انرژی ذخیره شده در تمام فضا ∞ است. چگالی انرژی را همانند مسئلهٔ ۱۱-۴۰ به دست می‌آوریم.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۴ (د) شدت میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{e^{-z}\hat{\mathbf{y}}}{1+y}$$

چگالی شار الکتریکی $\mathbf{D}$ را به صورت $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$ به دست می‌آوریم، چگالی بار الکتریکی دیورژانس $\mathbf{D}$ است

$$\rho = \nabla\cdot\mathbf{D} = \nabla\cdot(\varepsilon_\circ e^{-z}\hat{\mathbf{y}}) = \circ$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۵ (د) همانند مسئلهٔ ۱۱-۵۸ حل می‌شود. در داخل خازن با استفاده از قانون گوس به دست می‌آوریم $\mathbf{D} = K_1\hat{\mathbf{y}}$ که در آن K_1 مقداری ثابت است. پس

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{K_1 e^{\alpha z}}{\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{y}} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{y}}$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$V = \frac{K_1 e^{\alpha z}}{\alpha\,\varepsilon_\circ} + K_2$$

با اعمال شرایط مرزی می‌توان K_1 و K_2 را تعیین کرد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۶ (الف) مثال ۱ فصل ۵ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۷ (د) ظرفیت اضافه شده ظرفیت خازنی کروی با گذردهی $3\varepsilon_\circ$، شعاع داخلی $a = 5$ cm، و شعاع خارجی $h = a + d$ است. برای چنین خازنی ظرفیت برابر است با (مثال ۲ فصل ۵ را ببینید)

$$\frac{4\pi\varepsilon a h}{h-a} = \frac{4\pi(3\varepsilon_\circ)ah}{d} = \frac{12\pi\varepsilon_\circ ah}{d}$$

این ظرفیت باید با ظرفیت کره مسی برابر باشد یعنی باید داشته باشیم

$$\frac{12\pi\varepsilon_\circ ah}{d} = 4\pi\varepsilon_\circ a$$

که به دست می‌دهد $d = 3h$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۶۸ (ب) چون گزینه‌های داده شده ابعاد مختلفی دارند، با بررسی ابعادی می‌توان گزینه‌ای را که دارای بعد ظرفیت است به عنوان گزینهٔ صحیح تعیین کرد. برای حل مسئله، در صورت چشم پوشی از اثرهای

لبه‌ای میدان با عکس مجذور فاصله متناسب است، یعنی $\mathbf{E} = (K_1 / r^2)\hat{\mathbf{r}}$. پس اختلاف پتانسیل عبارت است از

$$V_\circ = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = K_1\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

چگالی شار الکتریکی $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ است، و

$$Q = \int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = \varepsilon K_1 \int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot d\mathbf{s} = \varepsilon K_1 \Omega_\circ$$

پس

$$C = \frac{Q}{V_\circ} = \varepsilon\,\Omega_\circ \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶۹-۱۱ (ج) میدان جابجایی الکتریکی طبق قانون گوس عبارت است از

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{S}\hat{\mathbf{x}} = \sigma\hat{\mathbf{x}}$$

با توجه به صورت مسئله اگر مبدا محور x را روی صفحه‌ای برگزینیم که گذردهی در کنار آن برابر ε_1 است، تغییرات گذردهی در داخل عایق به صورت زیرست

$$\varepsilon = \varepsilon_\circ + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x$$

اکنون شدت میدان الکتریکی را با توجه به رابطهٔ $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$ به دست می‌آوریم. سپس قطبش را با توجه به تعریف آن یعنی $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_\circ\mathbf{E}$ به دست می‌آوریم. چگالی بارهای مقید، دیورژانس قطبش است. انجام این مراحل ما را به جواب (ج) می‌رساند.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷۰-۱۱ (ب) ابتدا بردار $\mathbf{H}$ را با استفاده از قانون آمپر به دست می‌آوریم. وجود پوسته تقارن استوانه‌ای را به هم نمی‌زند و

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

در پوسته $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ و طبق تعریف $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_\circ - \mathbf{H}$ که جواب ب را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷۱-۱۱ (الف) پیوستگی مولفهٔ قائم $\mathbf{B}$ بر روی مرز لازم می‌دارد که این میدان در دو ناحیه یکسان باشد، زیرا مولفه φ مولفهٔ عمود بر مرزست؛ پس $B_2 = B_1$. انتگرال میدان $\mathbf{H}$ روی مسیری بسته حول سیم باید برابر I باشد. اگر میدان در ناحیهٔ $x > 0$ را $\mathbf{H}_1$ و میدان در ناحیهٔ $x < 0$ را $\mathbf{H}_2$ بنامیم، باید حول دایره‌ای به مرکز سیم داشته باشیم

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \pi\rho H_1 + \pi\rho H_2 = \pi\rho\frac{B_1}{\mu_\circ} + \pi\rho\frac{B_2}{\mu} = I$$

با گذاشتن $B_2 = B_1$ در رابطهٔ بالا و حل آن برای یافتن B به جواب گزینهٔ الف می‌رسیم.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷۲-۱۱ (ب) مسائل ۷-۱ و ۷-۲ را ببینید. میدان هر سه بخش در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ است.

۱۱-۷۳ این مسئله از مسائل کنکور کارشناسی ارشد سال ۷۲-۷۱ است و گزینهٔ الف برای آن به عنوان جواب درست عنوان شده است. در این وضعیت ما با یک مسئلهٔ متغیر با زمان سروکار داریم، زیرا تغییر بار در نقطهٔ A میدان الکتریکی متغیر با زمانی ایجاد می‌کند که میدان مغناطیسی ناشی از آن باید در محاسبهٔ خواسته شده در نظر گرفته شود. مسئلهٔ ۱۰-۳۰ را ببینید.

۱۱-۷۴ (د) باید نسبت b/a به نحوی باشد که به ازای یک ولتاژ ثابت، میدان الکتریکی می‌نیمم شود. میدان الکتریکی داخل خط هم محور به صورت شعاعی است

$$\mathbf{E}=\frac{V_0}{r\ln(b/a)}\hat{\mathbf{r}}$$

که در آن V_0 ولتاژ اعمال شده به خط است. ماکزیمم مقدار میدان روی هادی داخلی (به ازای $r=a$) است. برای یافتن نسبت $x=b/a$ می‌نیمم کنندهٔ شدت میدان بر روی هادی داخلی از میدان نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{V_0}{a\ln x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{xV_0}{b\ln x}$$
$$=\frac{V_0}{b}\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

با برابر صفر قرار دادن مشتق بالا به دست می‌آوریم $\ln x=1$ یا $x=e^1\approx 2.7$.

۱۱-۷۵ (الف) مثال ۱ فصل ۵ را ببینید. تابع پتانسیل به صورت $V=(A/r)+B$ است. پس اختلاف پتانسیل بین دو سطح عبارت است از

$$V_0=A\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E}=-\nabla V=\frac{A}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

پس $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}=(A/r^2)\hat{\mathbf{r}}$. جریانی که از سطح $r=a$ می‌گذرد عبارت است از $I=JS=S(\sigma A/a^2)$، زیرا روی این سطح چگالی جریان مقدار ثابت $(\sigma A/a^2)$ را دارد و بر سطح عمود است. و اما S/a^2 طبق تعریف با زاویهٔ فضایی Ω_0 برابر است. پس $I=\Omega_0\sigma A$، و

$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{1}{\sigma\Omega_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

۱۱-۷۶ (الف) برای پاسخ به این سوال لازم نیست پتانسیل و میدان را به دست آوریم. بارهای مقید حجمی صفر، و بار مقید سطحی تابعی از $\cos\theta$ است، که بارهایی مثبت بر روی نیمکرهٔ بالایی و بارهایی منفی روی نیمکرهٔ پایین را نشان می‌دهند. پس جهت میدان باید از پایین به بالا باشد، و چون به ازای هر بار مثبت، باری منفی و هم اندازه در طرف مقابل آن وجود دارد، پتانسیل ناشی از این بارها هم را خنثی می‌کنند و پتانسیل مرکز کره صفر می‌شود.

۱۱-۷۷ (د) در تمام فضا $\mathbf{H} = (B_\circ/\mu_\circ)\hat{\mathbf{y}}$. در داخل ناحیهٔ $d > z > \circ$ داریم

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = B_\circ(1+z/d)^2\hat{\mathbf{y}}$$

بردار مغناطش به صورت $\mathbf{M} = (\mathbf{B}/\mu_\circ) - \mathbf{H}$ تعریف می‌شود، پس

$$\mathbf{M} = \frac{B_\circ}{\mu_\circ}(1+z/d)^2\hat{\mathbf{y}} - \frac{B_\circ}{\mu_\circ}\hat{\mathbf{y}} = \frac{B_\circ}{\mu_\circ}\left(2\frac{z}{d}+\frac{z^2}{d^2}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

و سرانجام

$$\mathbf{J}_b = \nabla\times\mathbf{M} = -\frac{\partial M_y}{\partial z}\hat{\mathbf{x}} = -2\left(1+\frac{z}{d}\right)\frac{B_\circ}{\mu_\circ d}\hat{\mathbf{x}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۷۸ (ب) پتانسیل کرهٔ هادی با بار روی آن به صورت $Q = 4\pi RV$ به هم مرتبط‌اند، پس روی هر کره باری برابر $40\pi r$ وجود دارد. شعاع کرهٔ حاصل از به هم پیوستن قطرات $100r$ است، زیرا حجم کرهٔ حاصل 10^6 برابر حجم قطرات اولیه است. پس پتانسیل کرهٔ حاصل عبارت است از

$$V = \frac{10^6\times 40\pi r}{4\pi(100r)} = 10^5\,\mathrm{V}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۷۹ (الف) به خاطر تقارن شاری که از نیمکرهٔ بالایی می‌گذرد با شاری که از نیمکرهٔ پایینی می‌گذرد برابرست. مجموع این دو شار با حاصل تقسیم کل بار روی قرص بر $\varepsilon_\circ$ برابرست. کل بار روی قرص عبارت است از

$$Q = \int\sigma\,ds = \int(k\rho)(\rho\,d\rho\,d\varphi) = k\int_\circ^a\rho^2 d\rho\int_\circ^{2\pi}d\varphi$$
$$= k\frac{a^3}{3}(2\pi) = \frac{2k\pi a^3}{3}$$

شار خواسته شده نصف حاصل تقسیم بار بالا بر $\varepsilon_\circ$ است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۸۰ (د) میدان داخل سیم را با استفاده از قانون آمپر به دست می‌آوریم

$$2\pi\rho H = \int_\circ^\rho J_\circ\rho(\rho\,d\rho\,d\varphi) = J_\circ 2\pi\frac{\rho^3}{3} \qquad (1)$$

پس

$$\mathbf{H} = \frac{J_\circ\rho^2}{3}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

همچنین کل جریانی که از سیم می‌گذرد با گذاشتن a به جای ρ در طرف راست معادلهٔ (۱) به دست می‌آید و برابر $J_\circ(2\pi a^3/3)$ است.

انرژی ذخیره شده در سیم را به دست می‌آوریم

$$W = \int\frac{1}{2}\mu_\circ H^2 = \frac{1}{2}\mu_\circ\frac{J_\circ^2}{9}\int_\circ^a\rho^4(\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz)$$
$$= \frac{\mu_\circ J_\circ^2}{18}\times 2\pi\times 1\times\frac{a^6}{6}$$

اکنون القاکنایی را با استفاده از رابطهٔ انرژی $L = 2W/I^2$ به دست می‌آوریم، که در آن I کل جریان سیم است

$$L = \frac{۲W}{I^{۲}} = \frac{\mu_{\circ}}{۱۲\pi} = \frac{۴\pi \times ۱۰^{-۷}}{۱۲\pi} = \frac{۱}{۳} \times ۱۰^{-۷}\ \text{H/m}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۸۱ (ج)

$$\mathbf{J} = \frac{\nabla\times\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\nabla\times\mathbf{B}}{۳\mu_{\circ}} = \frac{۱}{۳\mu_{\circ}}\frac{\partial B_z}{\partial x}(-\hat{\mathbf{y}}) = \frac{-A}{۳\mu_{\circ}}\hat{\mathbf{y}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۸۲ **(الف)** شدت میدان الکتریکی روی کرهٔ هادی با چگالی بار سطحی روی آن متناسب است، پس

$$\frac{E_{b۱}}{E_{b۲}} = \frac{\sigma_۱}{\sigma_۲} = \frac{Q_۱/(۴\pi b_۱^{۲})}{Q_۲/(۴\pi b_۲^{۲})} = \frac{Q_۱}{Q_۲}\left(\frac{b_۲}{b_۱}\right)^{۲}$$

دو کره همپتانسیل هستند، یعنی $V = Q_۱/(۴\pi b_۱) = Q_۲/(۴\pi b_۲)$ که نتیجه می‌دهد

$$\frac{Q_۱}{Q_۲} = \frac{b_۱}{b_۲}$$

پس

$$\frac{E_{b۱}}{E_{b۲}} = \frac{b_۱}{b_۲}\left(\frac{b_۲}{b_۱}\right)^{۲} = \frac{b_۲}{b_۱}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۸۳ (ج) میدان مغناطیسی را می‌توان با استفاده از قانون آمپر به دست آورد. کل جریانی که از هادی داخلی می‌گذرد (با توجه به حل مسئلهٔ ۱۱-۸۰) عبارت است از $(۲\pi a^{۴}/۳)$. پس در بین دو هادی

$$\mathbf{H} = \frac{I}{۲\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{a^{۴}}{۳\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

و با ضرب در μ داریم

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H} = \frac{\mu_{\circ} a^{۴}}{۳\rho^{۲}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_{\circ}} - \mathbf{H} = \left(\frac{a^{۴}}{۳\rho^{۲}} - \frac{a^{۴}}{۳\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

و سرانجام

$$\mathbf{K}_{u} = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{M}\times\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\hat{\mathbf{z}}\left(\frac{a^{۴}}{۳a^{۲}} - \frac{a^{۴}}{۳a}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۱-۸۴ **(الف)** پتانسیل داخل کره را با استفاده از رابطهٔ بیان شده در مسئلهٔ ۲-۴۴ به دست می‌آوریم

$$V = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ} r}\int_{\circ}^{r}\frac{\rho_{\circ} a}{r} r^{۲}\,dr + \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}}\int_{r}^{a}\frac{\rho_{\circ} a}{r} r\,dr$$
$$= \frac{\rho_{\circ} a}{\varepsilon_{\circ}}\left(a - \frac{r}{۲}\right)$$

حال انرژی این توزیع بار را می‌یابیم

$$W = \frac{۱}{۲}\int \rho V\,dv = \frac{۱}{۲}\int \frac{\rho_{\circ}^{۲} a^{۲}}{\varepsilon_{\circ} r}\left(a - \frac{r}{۲}\right)(r^{۲}dr)\,(\sin\theta\,d\theta\,d\varphi)$$
$$= \frac{\rho_{\circ}^{۲} a^{۲}}{۲\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{a}\left(ar - \frac{r^{۲}}{۲}\right)dr \int_{\circ}^{\pi}\sin\theta\,d\theta \int_{\circ}^{۲\pi}d\varphi = \frac{۲\pi\rho_{\circ}^{۲} a^{۵}\pi}{۳\varepsilon_{\circ}}$$

۱۱-۸۵ (ب) پتانسیل عبارت است از

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1}\frac{\alpha\rho^2\,d\rho\,d\varphi}{\rho}=\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_1}\rho\,d\rho$$

که در آن r_1 با توجه به معادلهٔ بیضی در مختصات قطبی باید مطابق رابطهٔ زیر باشد

$$r_1^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$

پس به دست می‌آوریم

$$V=\frac{\alpha}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\rho^2\right]\Big|_0^{r_1}=\frac{\alpha}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

سرانجام به کمک جدول انتگرال به دست می‌آوریم

$$V=\frac{\alpha ab}{8\pi\varepsilon_0}\quad\tan^{-1}\left(\frac{a\tan\varphi}{b}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\alpha ab}{4\varepsilon_0}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۸۶ (د) انرژی سه بار ۱C ، ۲C ، و ۳C واقع در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a به صورت زیر به دست می‌آورید

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}(q_1V_1+q_2V_2+q_3V_3)\\&=\frac{1}{2}\left(1\times\frac{2+3}{4\pi\varepsilon_0 a}+2\times\frac{1+3}{4\pi\varepsilon_0 a}+3\times\frac{1+2}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)\\&=\frac{11}{4\pi\varepsilon_0 a}\end{aligned}$$

پس انرژی اولیهٔ ($11/4\pi\varepsilon_0$) و انرژی در حالت دوم ($22/4\pi\varepsilon_0$) است، بنابراین برای این تغییر آرایش باید ($11/4\pi\varepsilon_0$) انرژی صرف شود.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۸۷ (الف) از حل مسئلهٔ ۷-۱ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که دو سیم نیم بینهایت میدانی در مبدا ایجاد نمی‌کنند. نتیجه مسئلهٔ ۷-۱ را با مقادیر زیر به کار می‌بریم

$$b=\frac{12}{5}\quad,\quad\sin\theta_2=\frac{4}{5}\quad,\quad\sin\theta_1=-\frac{3}{5}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)=\frac{7\mu_0 I}{48\pi}$$

جهت میدان با استفاده از قانون دست راست به دست می‌آید.

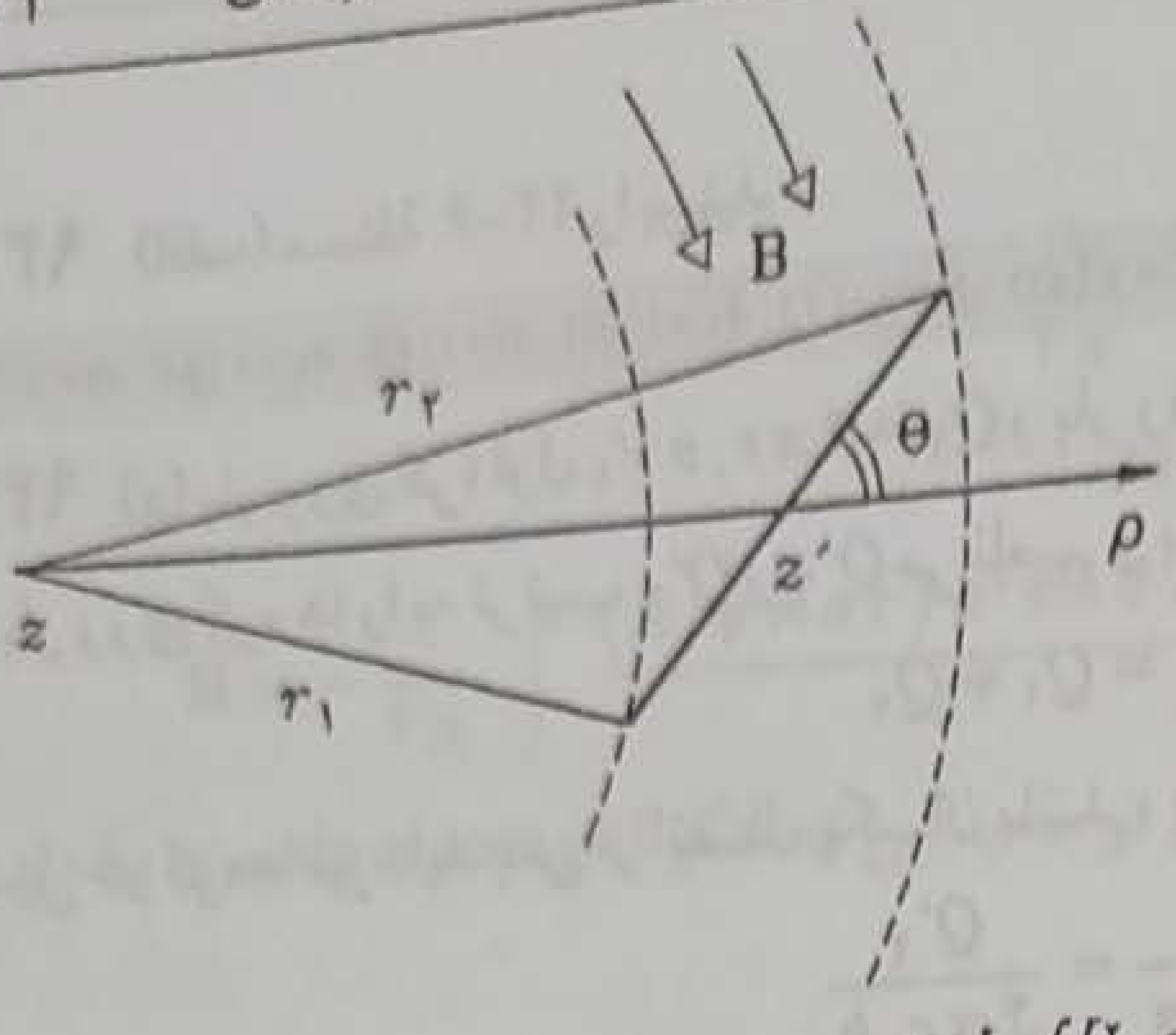
$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۱۱-۸۸ (ب) با توجه به شکل ح ۱۱-۸۸ شار گذرنده از حلقه در هر لحظه با شاری که در فاصلهٔ r_1 تا r_2 می‌گذرد برابرست. داریم

$$r_1^2=d^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2d\left(\frac{a}{2}\right)\cos\theta$$

$$r_2^2=d^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+2d\left(\frac{a}{2}\right)\cos\theta$$

و



شکل ح ۱۱-۸۸ برش شکل ۱۱-۸۸ در جهت عمود بر جریان I. حلقه در زمان t با محور ρ زاویهٔ $\theta = \omega t$ می‌سازد.

$$\Phi = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi} \int_{r_۱}^{r_۲} \frac{dr}{r} \int_\circ^{a} dz = \frac{\mu_\circ I a}{۲\pi} \ln \frac{r_۲}{r_۱}$$

$$= \frac{\mu_\circ I a}{۴\pi} \ln \frac{a^۲ + ۴d^۲ + ۴ad\cos\omega t}{a^۲ + ۴d^۲ - ۴ad\cos\omega t}$$

که در آن از $\theta = \omega t$ استفاده شده است. با مشتقگیری نسبت به زمان جواب را به دست می‌آوریم.

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۱۱-۸۹ (د) چون اندازهٔ گشتاورهای داده شده یکسان است، تعیین جهت گشتاور می‌تواند ما را به جواب درست رهنمون شود. با توجه به رابطهٔ $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$، و این که میدان در جهت $\hat{\mathbf{y}}$ و گشتاور دو قطبی حلقه در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ است، گشتاور در جهت $\hat{\mathbf{x}}$ - است.

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۱۱-۹۰ (الف) گشتاور وارد بر حلقه آن را آنقدر می‌چرخاند تا گشتاور دو قطبی آن با میدان همراستا شود.

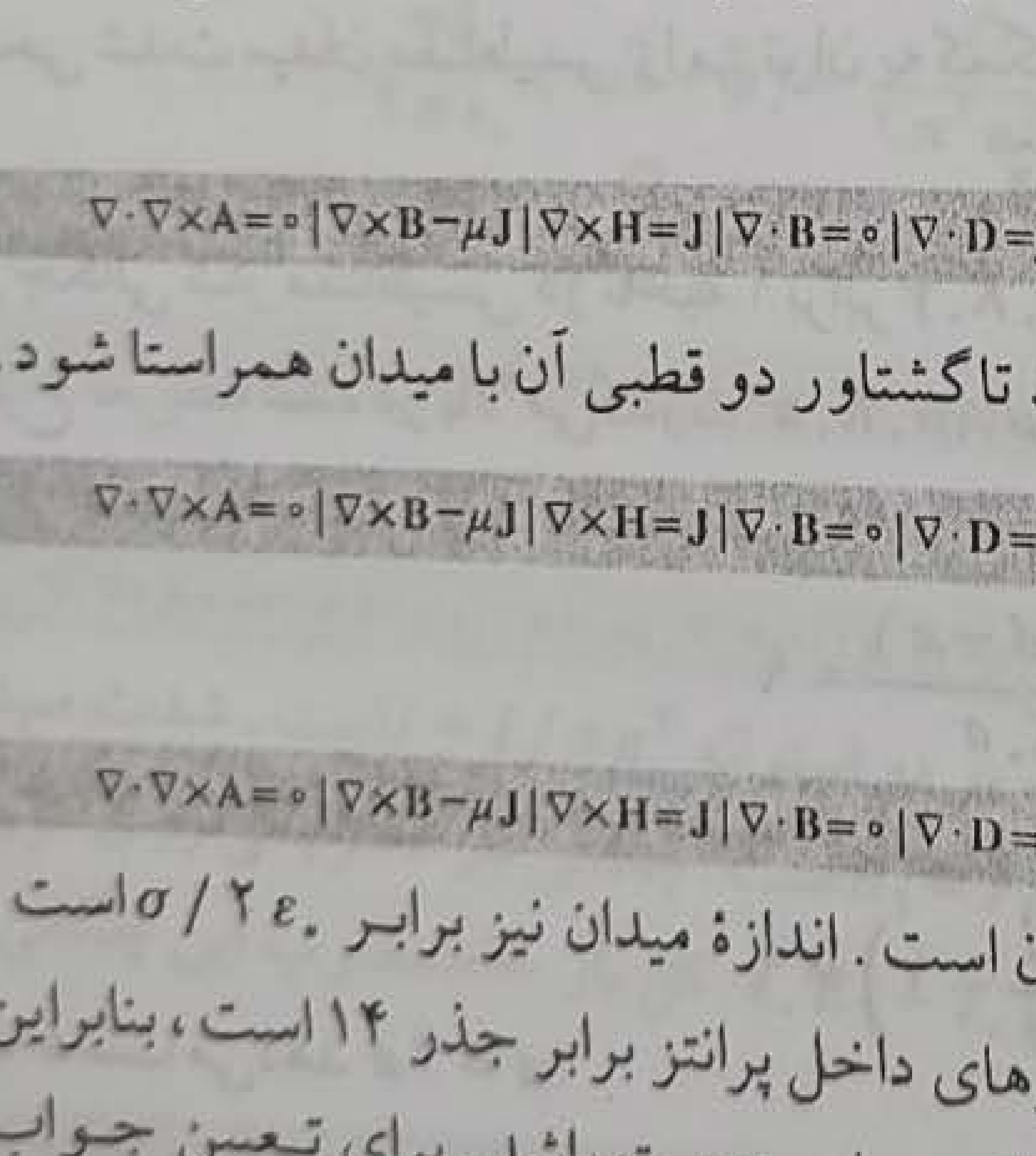
∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۱۱-۹۱ (ج) مسئلهٔ ۲-۶۶ را ببینید.

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۱۱-۹۲ (ج) میدان عمود بر صفحهٔ هادی و رو به خارج آن است. اندازهٔ میدان نیز برابر $\sigma / ۲\varepsilon_\circ$ است، بنابراین اندازهٔ میدان برابر ۶ است. توجه کنید که اندازهٔ بردارهای داخل پرانتز برابر جذر ۱۴ است، بنابراین با توجه به اندازهٔ تعیین شده برای میدان گزینهٔ ب یا ج می‌تواند جواب درست باشد. برای تعیین جواب درست به شکل ح ۱۱-۹۲ توجه کنید.

این شکل محل برخورد صفحهٔ باردار و محورها را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل می‌بینیم که بردار عمود بر سطح در طرفی که مبدا وجود دارد، دارای مولفهٔ z منفی است. بنابراین گزینهٔ ج درست است.



شکل ح ۱۱-۹۲

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۱۱-۹۳ (الف) مسئلهٔ ۶-۲۲ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۹۴ (د) بار روی کرهٔ اول $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 a V_1$ و بار روی کرهٔ دوم $Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 b V_2$ است. پس از اتصال دو کره بار روی کره ها را به ترتیب Q'_1 و Q'_2 می‌نامیم و باید داشته باشیم

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 \qquad (1)$$

پتانسیل دو کره‌ها نیز باید پس از اتصال یکسان باشد، یعنی باید داشته باشیم

$$V = \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q'_2}{4\pi\varepsilon_0 b} \qquad (2)$$

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲) به دست می‌آوریم

$$4\pi\varepsilon_0 a V_1 + 4\pi\varepsilon_0 b V_2 = 4\pi\varepsilon_0 a V + 4\pi\varepsilon_0 b V$$

که حذف $4\pi\varepsilon_0$ از دو طرف آن گزینهٔ (د) را به عنوان پتانسیل به ما می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۹۵ (ج) تنها در صورتی می‌توان از شار صحبت کرد که سطحی برای محاسبهٔ آن مشخص شود، کاری که در صورت مسئله نشده است. قرائن نشان می‌دهد که منظور شاری است که از سطحی به طول مثلاً ۱ متر و عرض a برای ناحیهٔ $a > z > 0$ و به عرض $d - a$ برای ناحیهٔ $d > z > a$ می‌گذرد. در فضای بین جریانهای سطحی شدت میدان مغناطیسی را می‌توان به کمک قانون آمپر یافت. نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{H} = K_0 \hat{\mathbf{x}}$$

پس چگالی شار مغناطیسی در ناحیهٔ ۱ برابر $\mu_{r1}\mu_0 K_0 \hat{\mathbf{y}}$ و در ناحیهٔ ۲ برابر $\mu_{r2}\mu_0 K_0 \hat{\mathbf{y}}$ است. شارهایی که از سطوح تعریف شده در بالا می‌گذرند $\Psi_1 = \mu_{r1}\mu_0 K_0 a$ و $\Psi_2 = \mu_{r2}\mu_0 K_0 (d-a)$ است. برای این که ۰٫۱ شار از محیط ۱ بگذرد باید داشته باشیم $\Psi_1 / \Psi_2 = 1/9$ یا $\Psi_2 = 9\Psi_1$. پس

$$\frac{\Psi_2}{\Psi_1} = \frac{\mu_{r2}\mu_0 K_0 (d-a)}{\mu_{r1}\mu_0 K_0 a} = 9$$

با توجه به این که $\mu_{r2} = 3\mu_{r1}$ به دست می‌آوریم

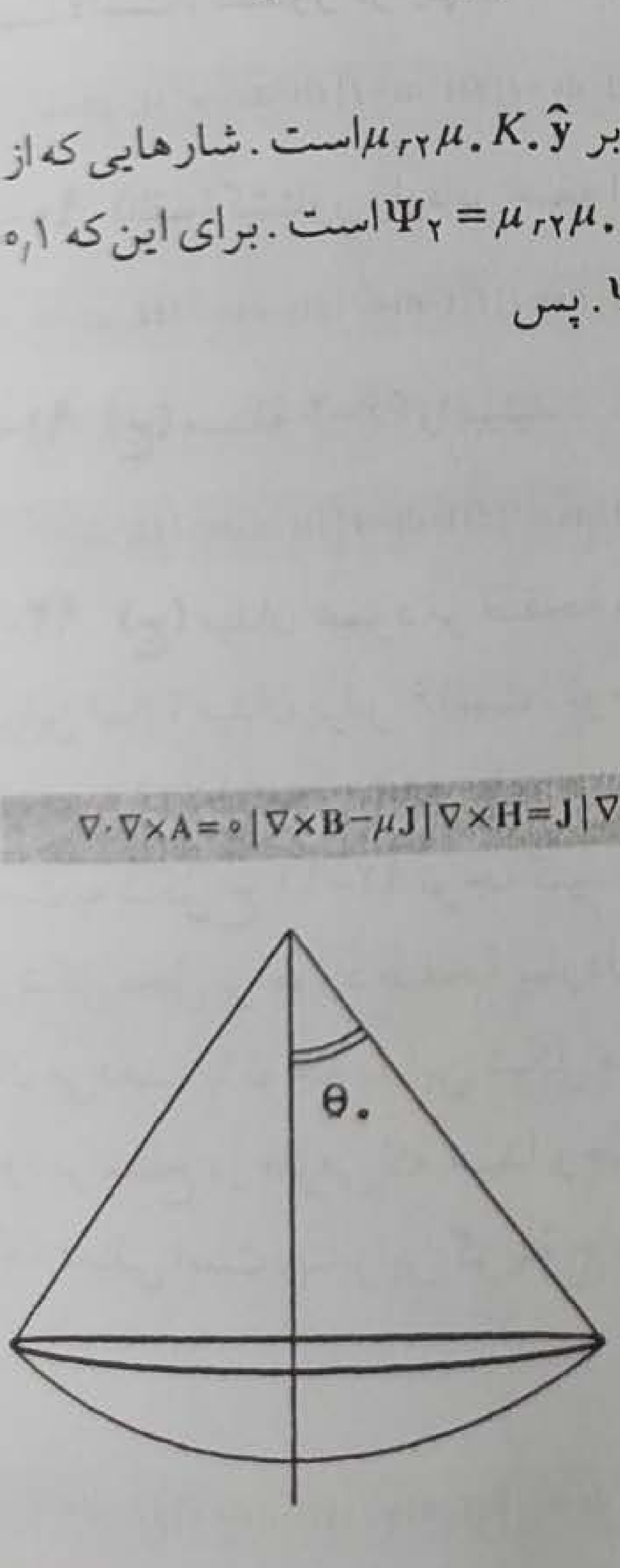
$$\frac{3(d-a)}{a} = 3\left(\frac{d}{a} - 1\right) = 9$$

که به دست می‌دهد $d = 4a$.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۹۶ (الف) مسئلهٔ ۸-۶ را ببینید. زاویهٔ فضایی که با آن یک دایره از نقطه‌ای واقع بر محورش دیده می‌شود برابر است با $2\pi(1-\cos\theta_0)$، که در آن θ_0 زاویه‌ای است که در شکل ح ۱۱-۹۶ نشان داده شده است. پس

$$V_m = -\frac{I\,2\pi}{4\pi}(1-\cos\theta_0) = -\frac{I}{2}\left(1 - \frac{2z}{\sqrt{a^2+4z^2}}\right)$$



شکل ح ۱۱-۹۶

۱۱-۹۷ (ج) از معادلهٔ زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{K}\times\mathbf{R}\,ds}{R^3}$$

که در آن $\mathbf{K}=K_0\hat{\boldsymbol{\varphi}}$، $\mathbf{R}=-a\hat{\mathbf{r}}$، و $ds=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$.

$$\mathbf{H}=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{(K_0\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times a\hat{\mathbf{r}})\,a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{a^3}=-\frac{K_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

با گذاشتن $\hat{\boldsymbol{\theta}}=\cos\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}}+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}-\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}$ و توجه به این که انتگرال $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ روی یک دورهٔ تناوب صفر است به دست می‌آوریم

$$\mathbf{H}=\hat{\mathbf{z}}\frac{K_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\pi K_0}{4}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۹۸ (ج) مسئلهٔ ۲-۳۴ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۹۹ (د) برای بخش دارای بار منفی داریم ($\lambda=2Q/\pi a$)

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{-\lambda a\hat{\boldsymbol{\rho}}}{a^2}\,a\,d\varphi=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}-(\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}}+\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}})\,d\varphi$$

$$=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}(-\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}})=\frac{Q}{2\pi^2a^2\varepsilon_0}(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$$

برای بخش دارای بار مثبت نیز داریم $\mathbf{E}=\frac{Q}{2\pi^2a^2\varepsilon_0}(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}})$. پس $\mathbf{E}=\frac{Q}{\pi^2a^2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰۰ (الف) مسئلهٔ ۵-۱۱ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰۱ (ج) اگر شعاع استوانه‌ها a باشد، چگالی جریان در دو استوانه $J=I/\pi a^2$ است. شدت میدان الکتریکی در استوانهٔ اول $E_1=J/\sigma_1$ و در استوانهٔ دوم $E_2=J/\sigma_2$ است. چگالی بار الکتریکی روی مرز دو استوانه عبارت است از $\varepsilon_0E_1-\varepsilon_0E_2=\varepsilon_0[(J/\sigma_1)-(J/\sigma_2)]$. کل بار حاصلضرب این چگالی در مساحت سطح مشترک دو استوانه است، پس

$$Q=\varepsilon_0I[(1/\sigma_1)-(1/\sigma_2)]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰۲ (ب) چون محیط همگن و یکسانگرد است، با استفاده از قانون گوس به دست می‌آوریم $\mathbf{D}=(q/4\pi r^2)\hat{\mathbf{r}}$. حال داریم

$$\mathbf{P}=\mathbf{D}-\varepsilon_0\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}-\frac{q}{4\pi}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}e^{-r/\lambda}=\frac{q}{4\pi r^2}(1-e^{-r/\lambda})\hat{\mathbf{r}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰۳ (الف) باید داشته باشیم $\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$.

۱۱-۱۰۴ (الف) هیچ باری نمی‌تواند در داخل یک رسانای بسته میدان تولید کند، ولی بار داخل چنین محیطی در خارج نیز میدان تولید می‌کند.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰۵ (الف)

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰۶ (ب)

$$\rho = \varepsilon_0\,\nabla\cdot\mathbf{D} = \frac{\varepsilon_0}{r^2}\left(\frac{3Ar^2}{R^2}\right) = \frac{3\varepsilon_0 A}{R^2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰۷ (ب) روی سطح مورد نظر $d\mathbf{s}=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{E}=Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)\,\hat{\mathbf{r}}$، پس

$$\Psi = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_\beta^\alpha \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\int_\beta^\alpha \sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{Q}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۰۸ (الف)

۱۱-۱۰۹ (ب) مسئلهٔ ۳-۴۲ را ببینید.

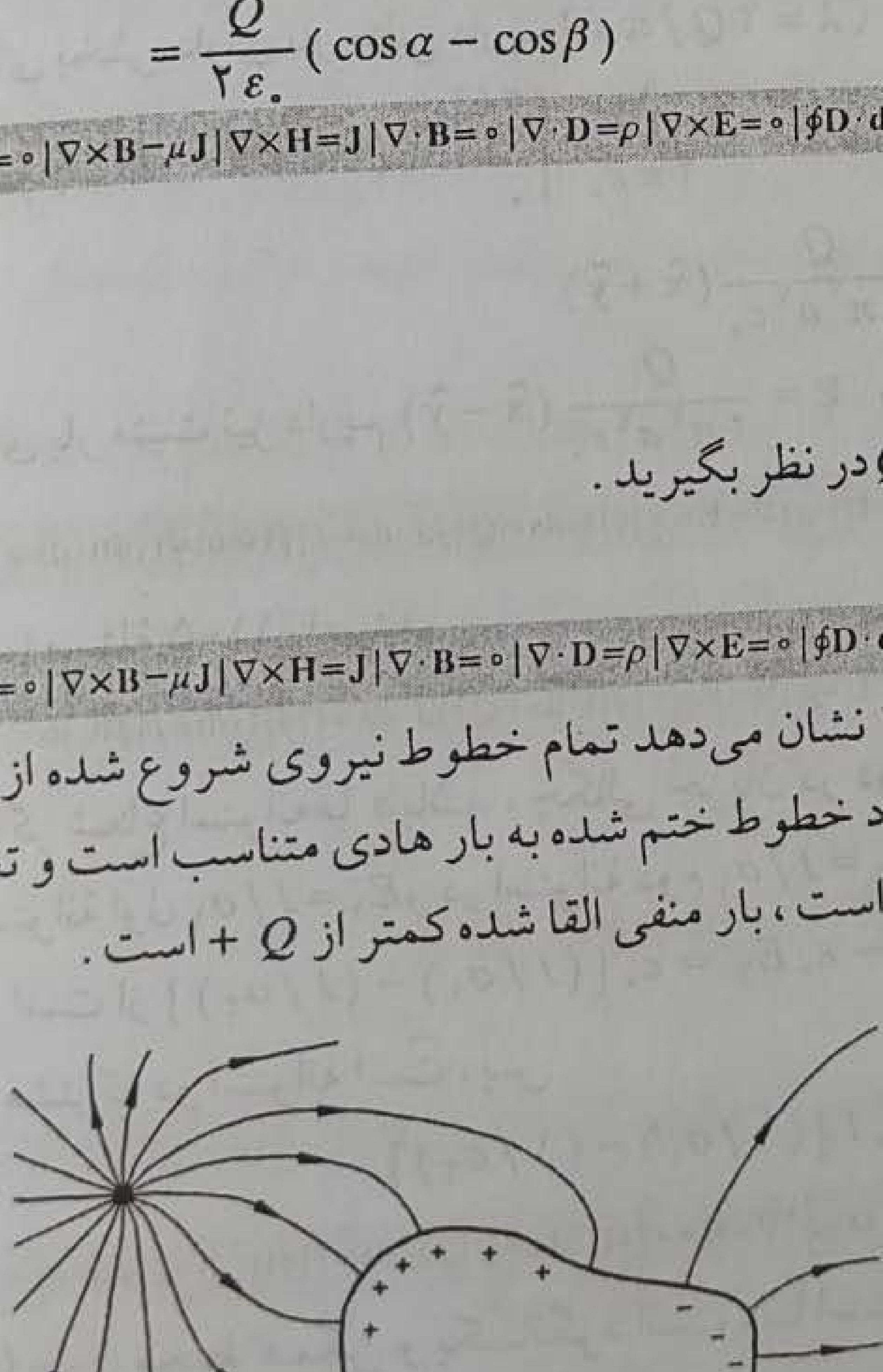
۱۱-۱۱۰ (الف)

۱۱-۱۱۱ (ب) مسئلهٔ ۸-۴۱ را با $Q=4\pi a^2\sigma$ در نظر بگیرید.

۱۱-۱۱۲ (الف)

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۱۳ (ب) همانطور که شکل ح ۱۱-۱۱۳ نشان می‌دهد تمام خطوط نیروی شروع شده از بار به هادی ختم نمی‌شوند، و چون مقدار بار منفی با تعداد خطوط ختم شده به بار هادی متناسب است و تعداد خطوط شروع شده از بار نقطه‌ای نیز با $+Q$ متناسب است، بار منفی القا شده کمتر از $+Q$ است.



شکل ح ۱۱-۱۱۳

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}-\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۱۱۴ (ج) فرض می‌کنیم روی محور x، در فاصلهٔ $-a/۲ \le y \le a/۲$، دو جریان برابر I موجود است، یکی در جهت مثبت x و یکی بر خلاف آن. در این صورت دو حلقهٔ مسطح به دست می‌آوریم که اندازهٔ گشتاور دو قطبی هر کدام $Ia^۲$ است؛ جهت یکی از گشتاورها $\hat{\mathbf{z}}$ و دیگری $\hat{\mathbf{y}}$ است. مجموع این دو بردار اندازه‌ای برابر $\sqrt{۲}\, Ia^۲$ دارد.

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ\,|\,\nabla\times B-\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=\circ\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=\circ\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=\circ\,|\,\oint E\cdot dl=\circ$

۱۱-۱۱۵ (ج) میدان چنین سیستمی با میدان دو بار نقطه‌ای q و $-q$ که به فاصلهٔ $۲a$ از هم قرار دارند برابر است. انرژی چنین سیستمی برابر $-q^۲/[۴\pi\varepsilon_\circ(۲a)^۲]$ است. البته در سیستم اصلی میدان تنها در نیمی از فضا وجود دارد، بنابراین انرژی آن نصف انرژی سیستم دو باری است.

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ\,|\,\nabla\times B-\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=\circ\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=\circ\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=\circ\,|\,\oint E\cdot dl=\circ$

۱۱-۱۱۶ (الف) نقاط A و B همپتانسیل هستند.

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ\,|\,\nabla\times B-\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=\circ\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=\circ\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=\circ\,|\,\oint E\cdot dl=\circ$

۱۱-۱۱۷ (الف) از قانون گوس استفاده می‌کنیم

$$۴\pi\varepsilon_\circ r^۲ E_r = ۴\pi \int_\circ^r r^۲ \frac{C}{r}\, dr = ۲\pi C r^۲$$

که جواب الف را به دست می‌دهد.

پیوست

مشتقهای برداری

دستگاه مختصات قائم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^۲ f = \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{۱}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \left[\frac{۱}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{۱}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^۲ f = \frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{۱}{\rho^۲}\frac{\partial^۲ f}{\partial \varphi^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$$

دستگاه مختصات کروی

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{۱}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲ F_r) + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{۱}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta H_\varphi) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{۱}{r}\left[\frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$+ \frac{۱}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla^۲ f = \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{۱}{r^۲\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{۱}{r^۲\sin^۲\theta}\frac{\partial^۲ f}{\partial \varphi^۲}$$

مشتقهای برداری در دستگاههای مختصات منحنی‌الخط

u، v، و w متغیرهای دستگاه مختصات هستند. h_u، h_v، و h_w ضرائب مقیاس‌اند و در معادلهٔ (۴۱) فصل ۱ تعریف شده است.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_v h_w D_u) + \frac{\partial}{\partial w}(h_w h_u D_v) + \frac{\partial}{\partial u}(h_u h_v D_w)\right]$$

$$\nabla V = \frac{1}{h_u}\frac{\partial V}{\partial u}\mathbf{a}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial V}{\partial v}\mathbf{a}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial V}{\partial w}\mathbf{a}_w$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{a}_u}{h_v h_w} & \dfrac{\mathbf{a}_v}{h_w h_u} & \dfrac{\mathbf{a}_w}{h_u h_v} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u H_u & h_v H_v & h_w H_w \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right]$$

اتحادهای برداری

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \equiv (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} \equiv (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} \qquad (1)$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \equiv \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \qquad (3)$$

$$\nabla(V+W) \equiv \nabla V + \nabla W \qquad (4)$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \equiv \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \qquad (5)$$

$$\nabla\cdot(V\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}\cdot\nabla V + V\nabla\cdot\mathbf{A} \qquad (6)$$

$$\nabla(VW) \equiv V\nabla W + W\nabla V \qquad (7)$$

$$\nabla\times(V\mathbf{A}) \equiv \nabla V\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A} \qquad (8)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \qquad (9)$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \qquad (10)$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}\,\nabla\cdot\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\nabla\cdot\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \qquad (11)$$

$$\nabla\cdot\nabla V \equiv \nabla^2 V \qquad (12)$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} \equiv 0 \qquad (13)$$

$$\nabla\times\nabla V \equiv 0 \qquad (14)$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \qquad (15)$$

انتگرالهای مفید

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a}\coth\frac{u}{a} \quad , \; u^2>a^2$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right) = \frac{1}{a}\tanh\frac{u}{a} \quad , \; u^2<a^2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right|$$

$$\int \frac{du}{au+b} = \frac{1}{a}\ln(au+b)$$

$$\int \frac{u\,du}{au+b} = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(au+b)$$

$$\int \frac{u^2\,du}{au+b} = \frac{(au+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(au+b)}{a^3} + \frac{b}{a^3}\ln(au+b)$$

$$\int \frac{du}{u(au+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{u}{au+b}\right)$$

$$\int \frac{du}{u^2(au+b)} = -\frac{1}{bu} + \frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{au+b}{u}\right)$$

$$\int \frac{du}{(au+b)^2} = \frac{-1}{a(au+b)}$$

$$\int \frac{u\,du}{(au+b)^2} = \frac{b}{a^2(au+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(au+b)$$

$$\int \frac{u^2\,du}{(au+b)^2} = \frac{au+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(au+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln(au+b)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{au+b}} = \frac{2\sqrt{au+b}}{a}$$

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{au+b}} = \frac{2(au-2b)}{3a^2}\sqrt{au+b}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sqrt{u^2+a^2}$$

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{u\sqrt{u^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{du}{(u^{2}+a^{2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{u}{a^{2}\sqrt{u^{2}+a^{2}}}$$

$$\int \frac{u\,du}{(u^{2}+a^{2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}$$

$$\int \frac{u^{2}du}{(u^{2}+a^{2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{-u}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}+\ln\left(u+\sqrt{u^{2}+a^{2}}\right)$$

$$\int \frac{u^{3}du}{(u^{2}+a^{2})^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{u^{2}+a^{2}}+\frac{a^{2}}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}$$

انتگرال توانهای سینوس و کسینوس در فواصل مختلف

	$0,\frac{\pi}{2}$	$0,\pi$	$0,2\pi$	$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$		$0,\frac{\pi}{2}$	$0,\pi$	$0,2\pi$	$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	1	2	0	0	$\cos x$	1	0	0	2
$\sin^{2}x$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\cos^{2}x$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
$\sin^{3}x$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\cos^{3}x$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
$\sin^{4}x$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\cos^{4}x$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$