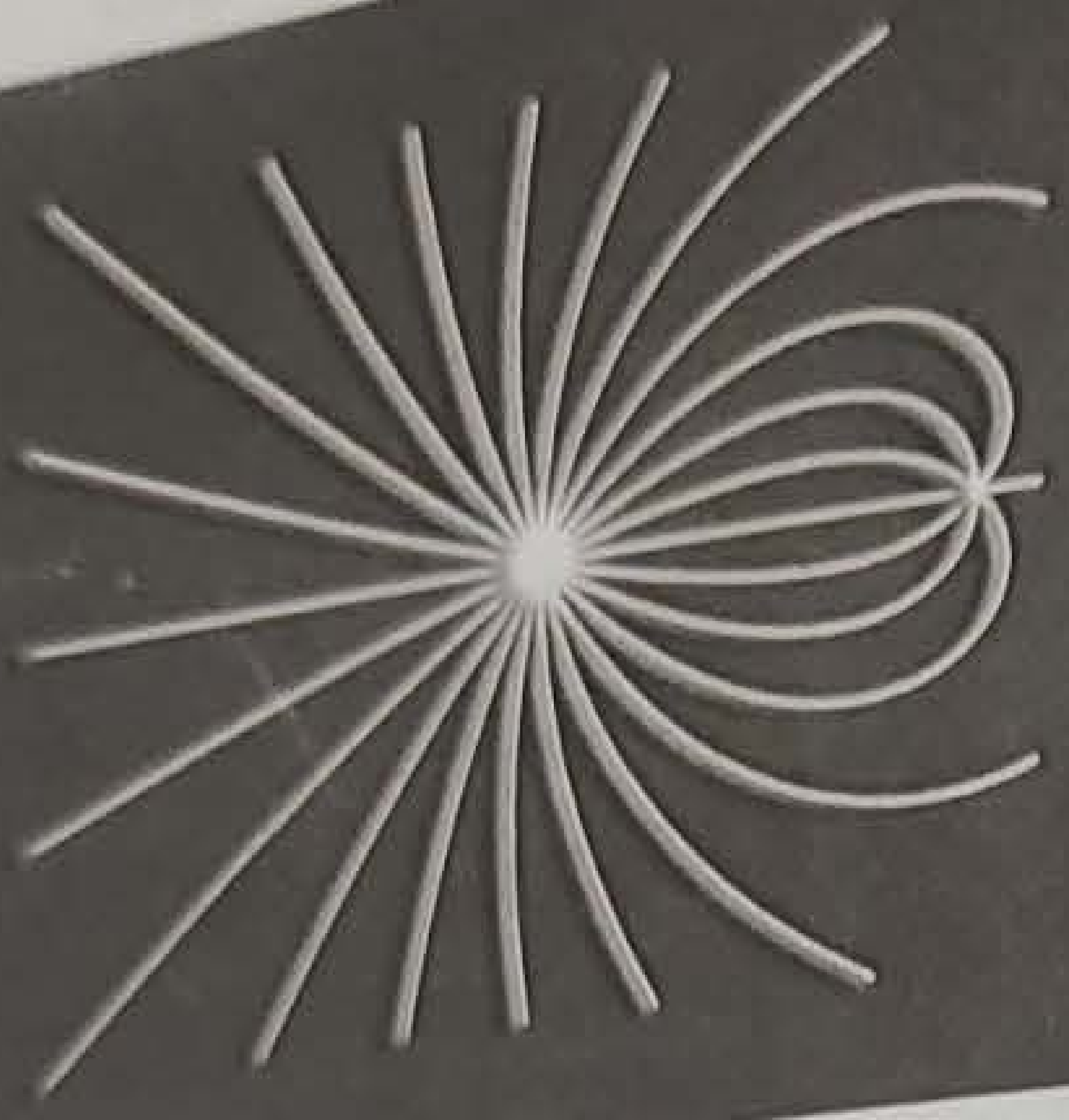


۱۰
میدانهای متغیر با زمان

۱-۱۰ emf القایی

هرگاه شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقه با زمان تغییر کند، در آن حلقه emf القا می‌شود. طبق قانون فارادی این emf عبارت است از

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (۱-۱۰)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \qquad (۲-۱۰)$$

طبق قضیهٔ استوکس می‌توان انتگرال روی مسیر بسته را به انتگرال سطح تبدیل کرد، یعنی

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

و چون مشتقگیری سمت راست معادلهٔ (۱۰-۱) نسبت به زمان است، می‌توان آن را داخل انتگرال برد و به دست آورد $\text{emf} = -\int (\partial \mathbf{B} / \partial t) \cdot d\mathbf{s}$. به این ترتیب شکل نقطه‌ای قانون فارادی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۳-۱۰)$$

۲-۱۰ emf حرکتی

اگر یک رشتهٔ هادی در میدان الکتریکی حرکت کند، روی آن میدان الکتریکی القا می‌شود. این میدان برابر است با

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (۴-۱۰)$$

emf القا شده در اثر این حرکت emf حرکتی نام دارد

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \qquad (۵-۱۰)$$

۱۰-۳ emf الکترومغناطیسی

مکانیسمهای القای emf در مدارها عبارت اند از :

۱. تغییر شار گذرنده از یک حلقهٔ ثابت به خاطر تغییر زمانی میدان

۲. تغییر شار گذرنده از یک حلقهٔ متحرک در میدان مغناطیسی ثابت

۳. جاروکردن شار به خاطر تغییر ابعاد حلقه‌ای واقع در میدان ثابت **B**، این emf را یا از معادلهٔ (۱۰-۲) به دست می‌آوریم، به شرطی که به جای Φ آن شار جارو شده را بگذاریم، یا از معادلهٔ (۱۰-۵).

۴. ترکیب خطی حالتهای ۱ و ۲ یا ۱ و ۳. در این وضعیت می‌توان نتیجهٔ به دست آمده از معادلات (۱۰-۲) و (۱۰-۵) را با هم جمع کرد، یا شار کل گذرنده از حلقه را به دست آورد و emf کل را به کمک معادلهٔ (۱۰-۱) به دست آورد.

۱۰-۴ جریان جابجایی

در میدانهای متغیر با زمان قانون آمپر به صورت $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ به تناقض می‌انجامد، و باید جملهٔ دیگری به صورت زیر به آن افزوده شود

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (۱۰-۶)$$

جملهٔ $\partial \mathbf{D} / \partial t$ **چگالی جریان جابجایی** و انتگرال آن روی سطح **جریان جابجایی** نام دارد

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = I_d$$

شکل انتگرالی معادلهٔ (۱۰-۶) به صورت زیرست

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + I_d \qquad (۱۰-۷)$$

۱۰-۵ معادلات مکسول

مجموعهٔ معادلات حاکم بر رفتارهای الکترومغناطیسی معادلات مکسول نام دارند و عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (۱۰-۸)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (۱۰-۹)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (۱۰-۱۰)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (۱۰-۱۱)$$

شکل انتگرالی این معادلات به صورت زیرند

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \qquad (۱۰-۱۲)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad (۱۰-۱۳)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \qquad (۱۰-۱۳)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \qquad (۱۰-۱۴)$$

۱۰-۶ شرایط مرزی برای میدانهای متغیر با زمان

اعمال شکل انتگرالی معادلات مکسول به مرز بین دو محیط به دست می‌دهد

مولفهٔ قائم میدان مغناطیسی $B_{n1} = B_{n2}$ (۱۰-۱۵)

مولفهٔ قائم میدان الکتریکی $D_{n1} - D_{n2} = 0$ (۱۰-۱۶)

مولفهٔ مماسی میدان مغناطیسی $H_{t1} - H_{t2} = K$ (۱۰-۱۷)

مولفهٔ مماسی میدان الکتریکی $E_{t1} = E_{t2}$ (۱۰-۱۸)

معادلهٔ (۱۰-۱۷) برای پرهیز از هرگونه ابهام بهترست به صورت برداری بیان شود

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \qquad (۱۰\text{-}۱۹)$$

اینها دقیقاً شرایط مرزی میدانهای ساکن (الکتروستاتیک و مغناطیس ساکن) هستند.

۱۰-۷ توابع پتانسیل در میدانهای متغیر با زمان

در حالت متغیر با زمان توابع پتانسیل به صورت زیر به دست می‌آیند

$$V(t) = \int \frac{\rho(t - R/u)}{4\pi\varepsilon R}\, dv \qquad (۱۰\text{-}۲۰)$$

$$\mathbf{A}(t) = \int \frac{\mu\, \mathbf{J}(t - R/u)}{4\pi R}\, dv \qquad (۱۰\text{-}۲۱)$$

که در آنها u برابر $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ است، که سرعت حرکت نور در محیط را به دست می‌دهد. به بیان غیر ریاضی اثر منبعی که در زمان t در $\mathbf{r}'$ قرار دارد پس از گذشت زمان R/u به نقطهٔ مشاهده $\mathbf{r}$ می‌رسد (و طبق معمول $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$). پس از یافتن توابع پتانسیل می‌توان میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را به صورت زیر یافت

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۱۰\text{-}۲۲)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (۱۰\text{-}۲۳)$$

حل مسئله

یکی از مشکلات اصلی مسائل مربوط به یافتن emf تشخیص القایی یا حرکتی بودن آن است. در مواردی که هر دو نوع emf وجود دارند باید بسیار دقت کرد.

مثال ۱

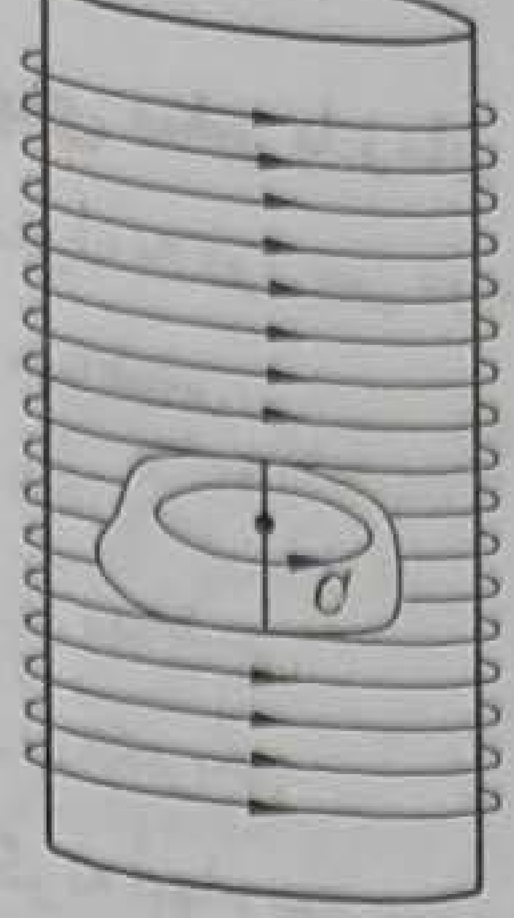
از سیملوله‌ای به شعاع R و طول l ($l >> R$) جریان متغیر با زمان i می‌گذرد. اگر تعداد دور در واحد طول n باشد، میدان الکتریکی داخل و خارج سیملوله را بیابید.

حل

میدان داخل سیملوله $\mathbf{B} = \mu_0 n i \hat{\mathbf{z}}$ است، به شرطی که محور استوانه را محور z بنامیم. در شکل ۱۰-۱ مسیر دایروی C_1 را به نحوی برگزیده‌ایم که محور آن بر محور استوانه منطبق باشد. طبق قانون فارادی

$$\oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 n i \pi \rho^2)$$

که در آن ρ شعاع دایرهٔ C_1 است. همچنین داریم



شکل ۱۰-۱ مسیری در داخل سیملوله.

$$\oint_{C_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_{C_1} \mathbf{E}\cdot \rho\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}} = \int_0^{2\pi} E_\phi \rho\, d\phi = 2\pi\rho E_\phi$$

زیرا E_ϕ به خاطر تقارن مستقل از ϕ است. پس

$$2\pi\rho E_\phi = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 n i \pi \rho^2)$$

که نتیجه می‌دهد

$$E_\phi = -\frac{\mu_0 n \rho}{2}\frac{\partial i}{\partial t} \qquad \rho < R$$

اگر مسیر بسته دایروی خارج سیملوله باشد (یعنی $\rho > R$) کل شاری که از داخل مسیر می‌گذرد $(\mu_0 n i)(\pi R^2)$ است، چراکه میدان مغناطیسی بیرون سیملوله صفرست. پس

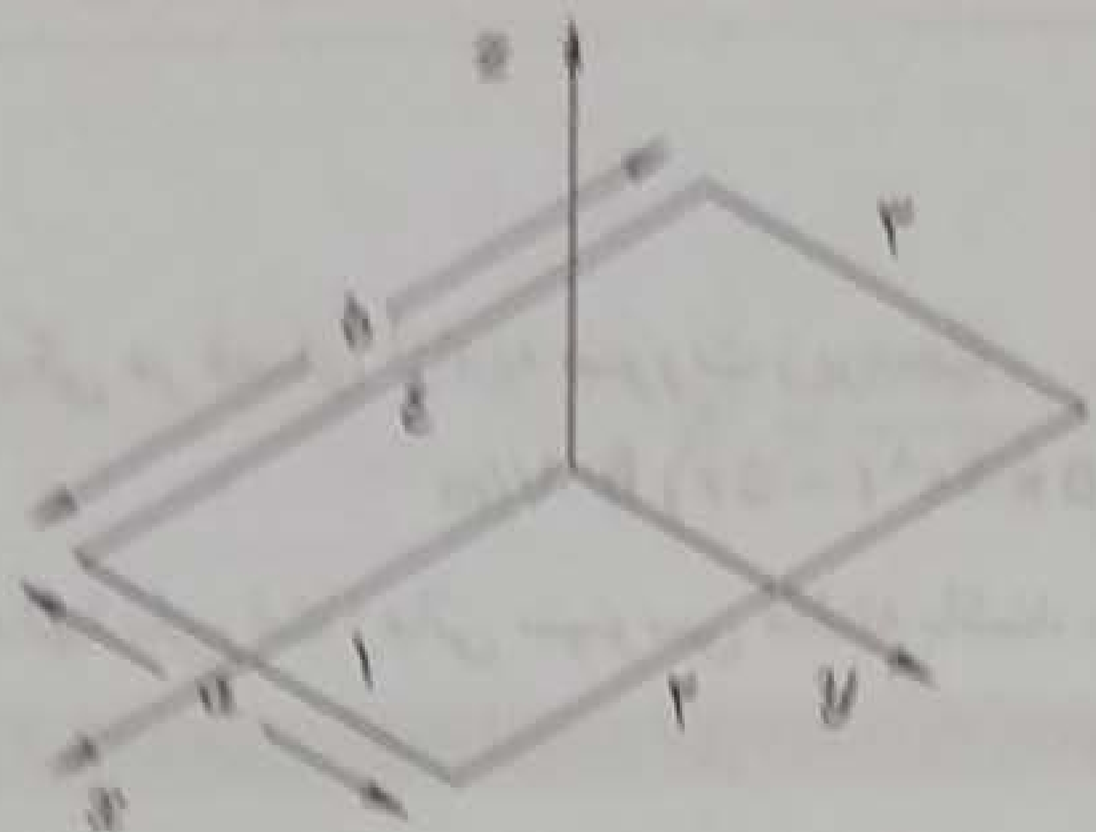
$$2\pi\rho E_\phi = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 n i \pi R^2)$$

$$E_\phi = -\frac{\mu_0 n R^2}{2\rho}\frac{\partial i}{\partial t} \qquad \rho > R$$

ولی چطور می‌توان در خارج استوانه یک میدان الکتریکی متغیر با زمان داشت، حال آن که میدان مغناطیسی صفرست؟ این بر خلاف قوانین مکسول است، زیرا هر گاه میدان الکتریکی (مغناطیسی) متغیر با زمانی وجود داشته باشد، به همراه آن میدان مغناطیسی (الکتریکی) متغیر با زمانی نیز وجود دارد. اشکال از این جا ناشی شده که از سیملوله جریان متغیر با زمان می‌گذرد، ولی ما در حل مسئله میدان سیملولهٔ دارای جریان ثابت (dc) را به کار برده‌ایم. البته اگر تغییرات زمانی جریان خیلی شدید نباشد جوابهای بالا تقریباً درست اند. این را تقریب **شبه ایستا** می‌نامند.

مثال ۲

حلقه‌ای مستطیل شکل در میدان $\mathbf{B}=B_0(t)\hat{\mathbf{z}}$ قرار دارد. حلقه در $t=0$ در صفحهٔ xy و مرکز آن در مبدا است. حلقه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور x می‌چرخد. (شکل ۱۰-۲ را ببینید.) emf القا شده حول حلقه را به صورت بر هم نهش emf القایی و حرکتی به دست آورید.



شکل ۱۰-۲ حلقهٔ چرخان در میدان مغناطیسی

حل

میدان الکتریکی القاشده روی اضلاع عبارت اند از

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega\rho\,(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{z}} - \sin\omega t\,\hat{\mathbf{y}}) \times B_{\circ}(t)\,\hat{\mathbf{z}}$$
$$= -\omega\rho\sin\omega t\,B_{\circ}(t)\,\hat{\mathbf{x}}$$

پس $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ تنها روی اضلاع ۲ و ۴ مقدار دارد. روی ضلع ۲

$$\int_{2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{a}{2}\omega\sin\omega t\,B_{\circ}(t)\,dx = \frac{a\,b}{2}\omega\sin\omega t\,B_{\circ}(t)$$

انتگرال روی ضلع ۴ همین مقدار را دارد، پس

$$\text{emf} = a\,b\,\omega\sin\omega t\,B_{\circ}(t)$$

برای یافتن emf القایی داریم

$$\text{emf} = -\int\frac{\partial B}{\partial t}\cdot d\mathbf{s} = -\int B_{\circ}{}'(t)\cdot d\mathbf{s}$$

که در آن پریم مشتق نسبت به زمان را نشان می‌دهد. در لحظهٔ t حلقه با صفحهٔ xy زاویهٔ $\alpha = \omega t$ می‌سازد و

$$\text{emf} = -B_{\circ}{}'(t)\,a\,b\cos\omega t$$

emf کل مجموع emfهای حرکتی و القایی است.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

مثال ۳

emf کل القا شده حول حلقهٔ مثال ۲ را بدون تجزیه به emf حرکتی و القایی به دست آورید.

حل

شاری که از حلقه می‌گذرد برابر است با

$$\Phi = B_{\circ}(t)\,\hat{\mathbf{z}}\cdot a\,b\,\hat{\mathbf{n}}$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر سطح حلقه است. زاویهٔ بین $\hat{\mathbf{n}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ به زمان بستگی دارد و برابر زاویهٔ بین حلقه و صفحهٔ xy است، پس

$$\Phi = B_{\circ}(t)\,a\,b\cos\omega t$$

emf کل عبارت است از

$$\text{emf} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -a\,b\cos\omega t\,\frac{\partial B_{\circ}(t)}{\partial t} + a\,b\,B_{\circ}(t)\,\omega\sin\omega t$$

که با مقدار به دست آمده در مثال ۲ برابر است.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

مثال ۴

میدان الکتریکی در فضای آزاد به صورت زیر ست

$$\mathbf{E} = \frac{0/1 \sin\theta}{r} \sin(15\times10^8 t - 5r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \ \text{V/m}$$

اگر تمام میدانها تغییرات زمانی سینوسی داشته باشند، میدان $\mathbf{H}$ را بیابید.

حل

از معادلهٔ (۱۰-۱۰) استفاده می‌کنیم. ابتدا کرل $\mathbf{E}$ را می‌یابیم

$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{0/5}{r}\sin\theta\cos(15\times10^8 t - 5r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

که باید با $(\mu_0\,\partial\mathbf{H}/\partial t)$ – برابر باشد، پس

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \frac{0/5}{\mu_0 r}\sin\theta\cos(15\times10^8 t - 5r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

بنابراین با انتگرالگیری نسبت به زمان به دست می‌آوریم

$$\mathbf{H} = \frac{0/5}{15\times10^8\mu_0 r}\sin\theta\sin(15\times10^8 t - 5r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

توجه کنید که چون گفته شده است که تمام میدانها به صورت سینوسی تغییر می‌کنند، انتگرال مقدار ثابت ندارد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۵

در یک خط هم محور (کواکسیال) با شعاع داخلی $a = 1$ mm و شعاع خارجی $b = 4$ mm، محیط بین دو هادی دارای گذردهی نسبی $\varepsilon_R = 2/25$ و تراوایی نسبی $\mu_R = 1$ است. شدت میدان الکتریکی در فضای بین دو هادی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{100}{\rho}\cos(10^8 t - \beta z)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\ \text{V/m}$$

β چقدرست؟ $\mathbf{H}$ را بیابید.

حل

با توجه به معادلهٔ کرل میدان الکتریکی داریم

$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial E_\rho}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{100\beta}{\rho}\sin(10^8 t - \beta z)\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

با انتگرالگیری نسبت به زمان به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = \frac{10^{-6}\beta}{\rho}\cos(10^8 t - \beta z)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

و چون $\mu = \mu_0$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{2/5\beta}{\pi\rho}\cos(10^8 t - \beta z)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

حال باید داشته باشیم $\nabla\times\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t$ و $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = 2/25\varepsilon_0\mathbf{E}$؛ پس

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{2/5\times10^{-8}\beta^2}{\pi\rho}\cos(10^8 t - \beta z)\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{2/25\varepsilon_0\times100}{\rho}\cos(10^8 t - \beta z)\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

که برابر قرار دادن آنها نتیجه می‌دهد

$$\beta^{۲} = \frac{۲/۲۵\,\varepsilon_{\circ} \times ۱۰۰ \times \pi}{۲/۵ \times ۱۰^{-۸}} = ۰/۲۵$$

یا $\beta = ۰/۵$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

مثال ۶

منبع کوچکی به یک حلقه دایروی کوچک اعمال شده است، به نحوی که جریان متغیر با زمان زیر در حلقه ایجاد شود

$$I = I_{\circ}\cos\omega t$$

شعاع حلقه a است. میدان الکتریکی را در صفحهٔ حلقه و در فاصلهٔ $r = ۱۰۰\,a$ از مرکز حلقه بیابید.

حل

در اینجا یک دو قطبی مغناطیسی داریم که میدان دور آن مورد نظر است. میدان دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_{\circ}}{۴\pi}\,\frac{m\sin\theta}{r^{۲}}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

به شرطی که جریان ثابت باشد. در حالی که جریان متغیر است، طبق معادلهٔ (۱۰–۲۱) داریم

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu_{\circ}}{۴\pi}\,\frac{\pi a^{۲}\,i(t-R/u)\sin\theta}{R^{۲}}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

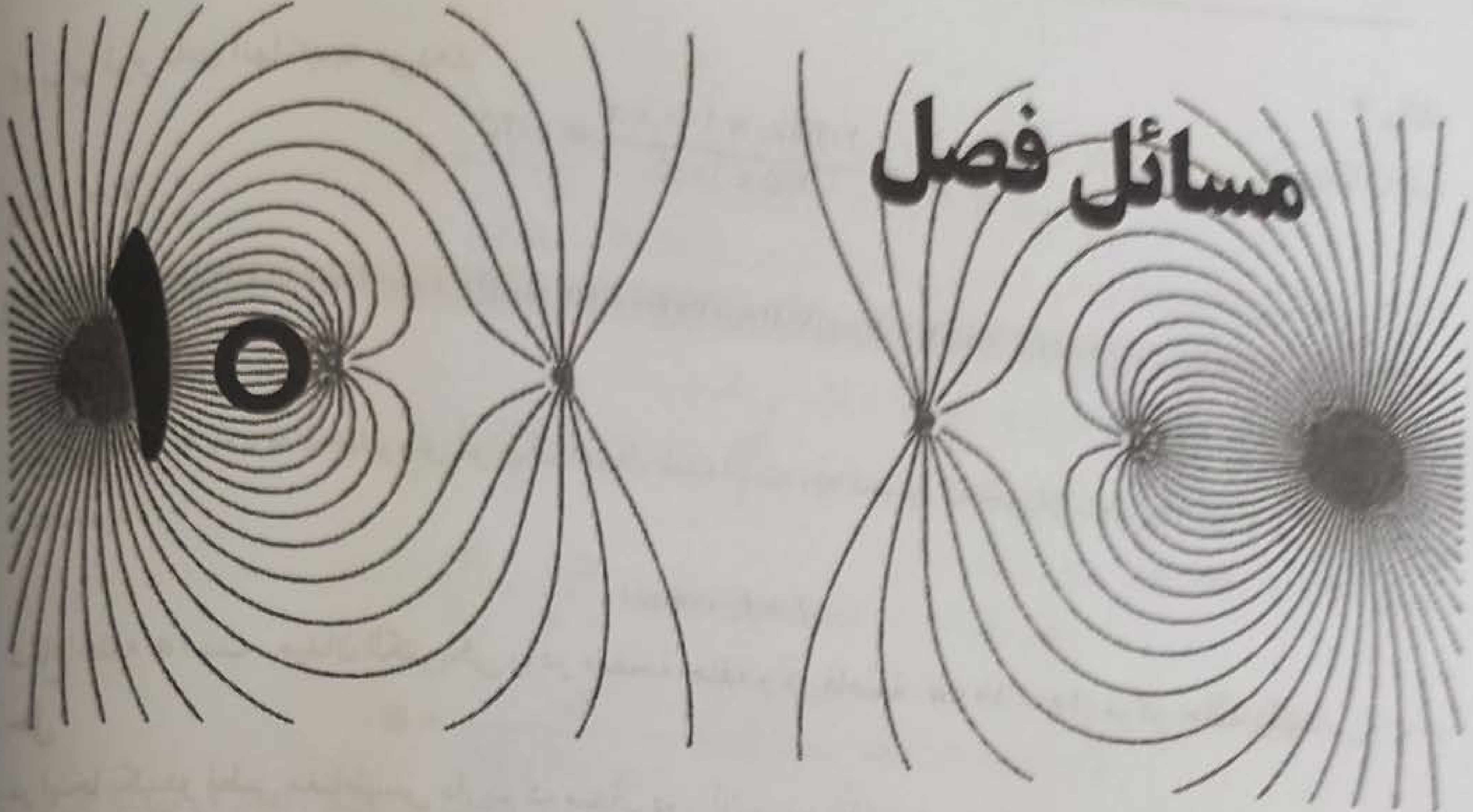
که در آن $i(t-R/u) = I_{\circ}\cos\omega(t-R/u)$. حال با توجه به معادلهٔ (۱۰–۲۳) داریم

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_{\circ}\pi a^{۲}}{۴\pi r^{۲}}\sin\theta\;\omega\,I_{\circ}\sin\omega\left(t-\frac{R}{u}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

و چون $R = ۱۰۰\,a$ و $\theta = \pi/۲$

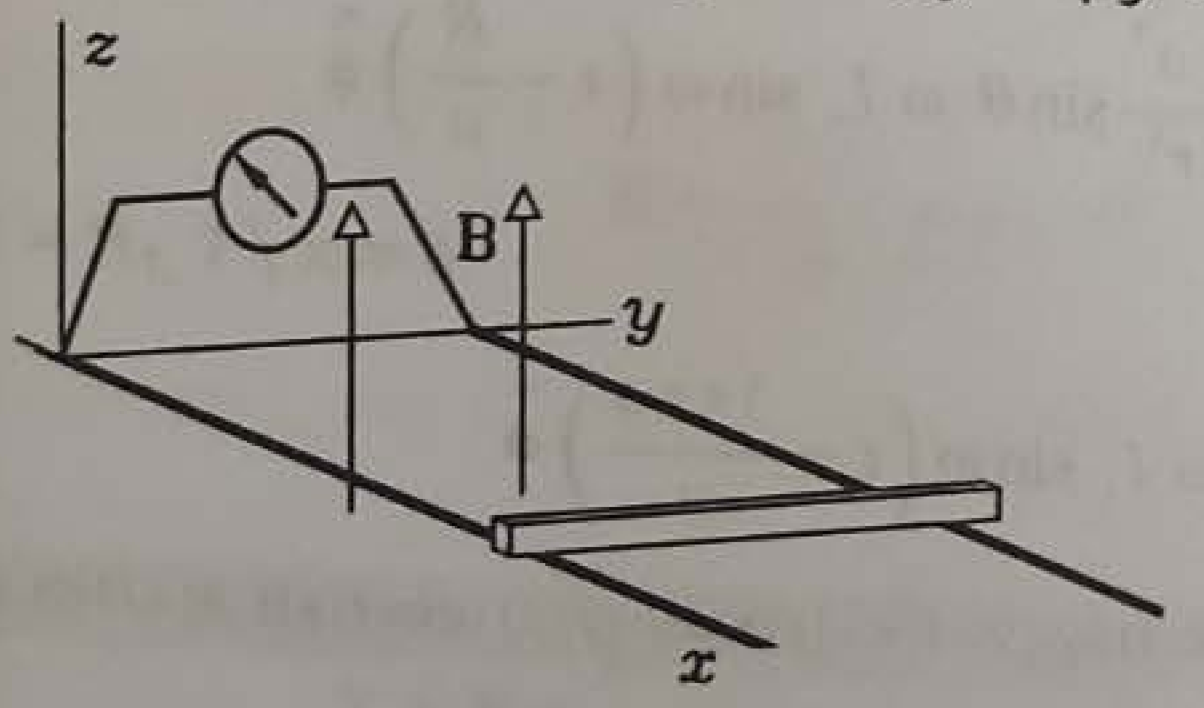
$$\mathbf{E} = ۱۰^{-۱۱}\,\omega\,I_{\circ}\sin\omega\left(t-\frac{۱۰۰\,a}{u}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$



مسائل فصل ۱۰

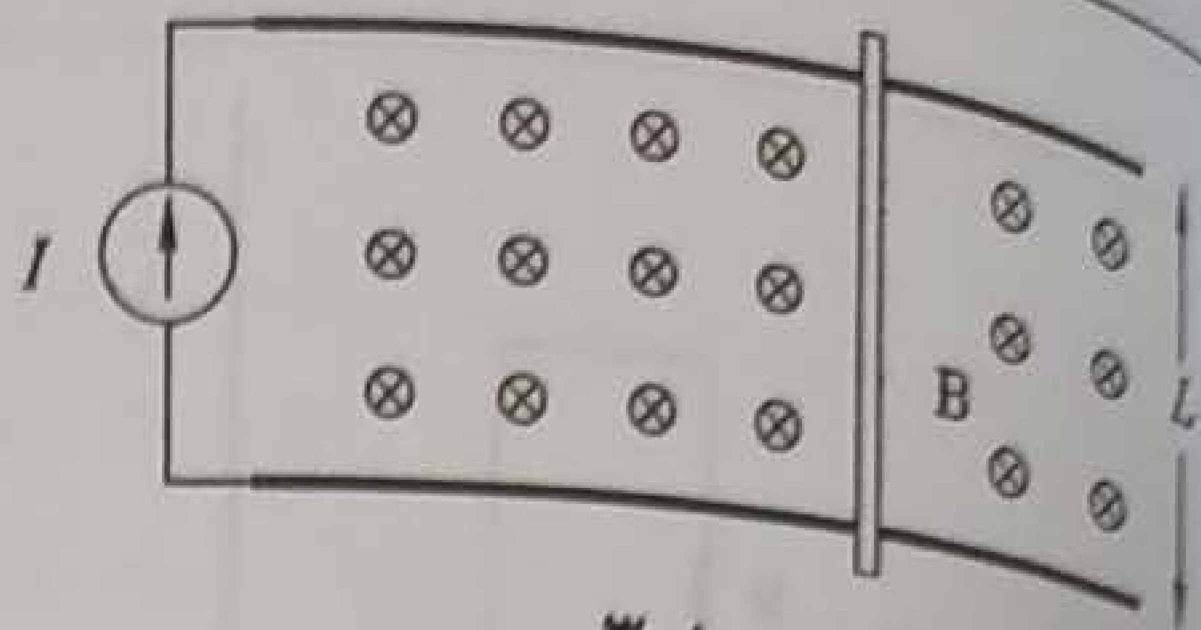
۱۰-۱ ریل نشان داده شده در شکل ۱۰-۱ از ماده‌ای که مقاومت هر متر آن ۲ Ω است ساخته شده، و فاصلهٔ بین دو ریل ۰/۳ m است. میدان یکنواخت $B = ۰/۷$ T عمود بر صفحه ریل وجود دارد و میله‌ای با مقاومت ۱ Ω با سرعت ۱۰ m/s روی ریل می‌لغزد. اگر $t = ۰$ را لحظه‌ای که میله در منتهی‌الیه سمت چپ قرار دارد فرض کنیم، جریان I میله را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.



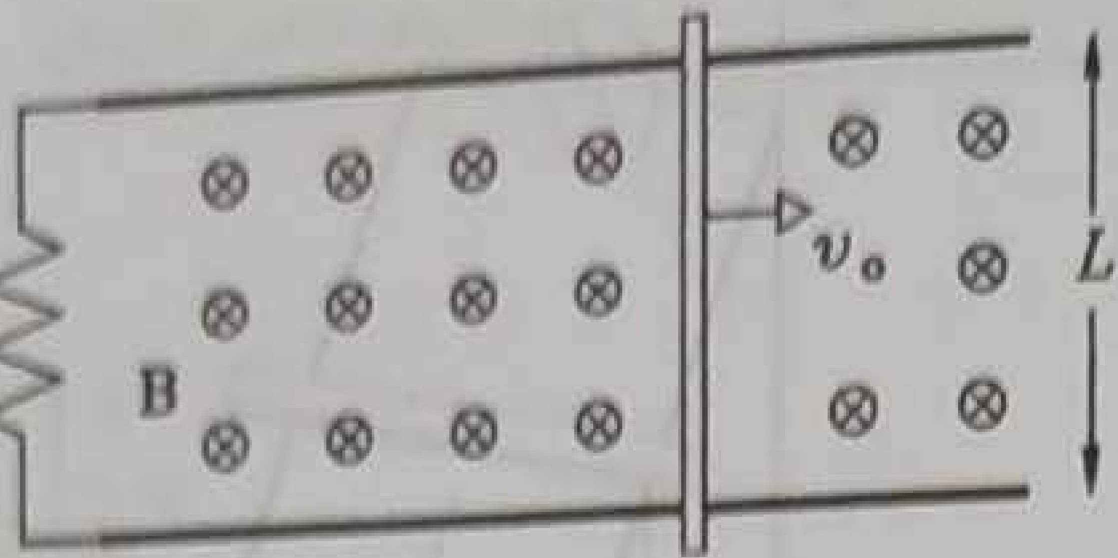
شکل ۱۰-۱

۱۰-۲ فاصله ریلهای موازی شکل ۱۰-۱ که اکنون هادی فرض می‌شوند ۵ cm است. اگر میدان مغناطیسی به صورت $B = ۰/۴\, x\, \hat{z}$ و محل میله لغزان به صورت $x = ۵/۴\, t - ۳\, t^{۲}$ m باشد، قرائت ولتمتر را در لحظه‌ای که میله از $x = ۱$ m می‌گذرد به دست آورید.

۱۰-۳ دستگاهی جریان ثابتی را از دو میله موازی که میله دیگری بر روی آن (به طور عمودی) قرار دارد می‌گذراند. فاصله بین دو میله L است، شکل ۱۰-۳ را ببینید. میدان مغناطیسی یکنواختی عمود بر صفحه دو میله وجود دارد. میله در چه جهتی حرکت می‌کند؟ اگر سرعت میله در $t = ۰$ صفر باشد سرعت آن را برحسب زمان بیابید. اگر ضریب اصطکاک ایستا μ_r باشد، B لازم برای به حرکت در آوردن میله را حساب کنید. جرم میله M است.



شکل ۱۰-۳



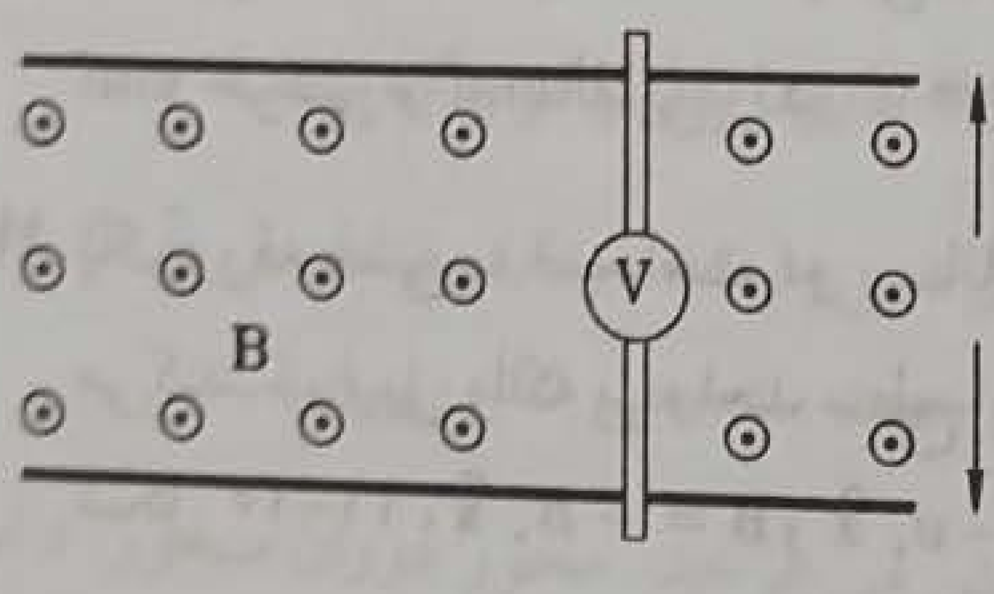
شکل ۱۰-۴

۱۰-۴ میله‌ای به جرم m روی دو ریل هادی که به فاصله l از هم قرار دارند و مطابق شکل ۱۰-۴ به مقاومت R وصل شده‌اند حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی ثابت B عمود بر صفحه دو ریل قرار دارد. اگر سرعت اولیه میله v_0 باشد، پس از طی چه مسافتی متوقف می‌شود؟

۱۰-۵ در مسئله ۱۰-۴ نشان دهید انرژی تلف شده در مقاومت باانرژی جنبشی اولیه میله برابرست.

۱۰-۶ می‌خواهیم میله شکل ۱۰-۴ را با سرعت ثابت v به سمت راست حرکت دهیم. برای این کار چه نیرویی لازم است؟ نشان دهید توان صرف شده برای این حرکت در مقاومت تلف می‌شود؟

۱۰-۷ میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 عمود بر ریلهای نشان داده شده در شکل مقابل وجود دارد. وسط میله لغزان روی ریلها یک ولتمتر با مقاومت داخلی بسیار بزرگ (ولی نه بی‌نهایت) وجود دارد. میله با سرعت v به سمت راست می‌رود. قرائت ولتمتر در حالتی که **(الف)** دو طرف ریل مدار باز است **(ب)** دو طرف ریل اتصال کوتاه است **(ج)** چپ اتصال کوتاه و طرف راست مدار باز است، به ترتیب عبارت است از



(۱) vBl ، vBl ، vBl

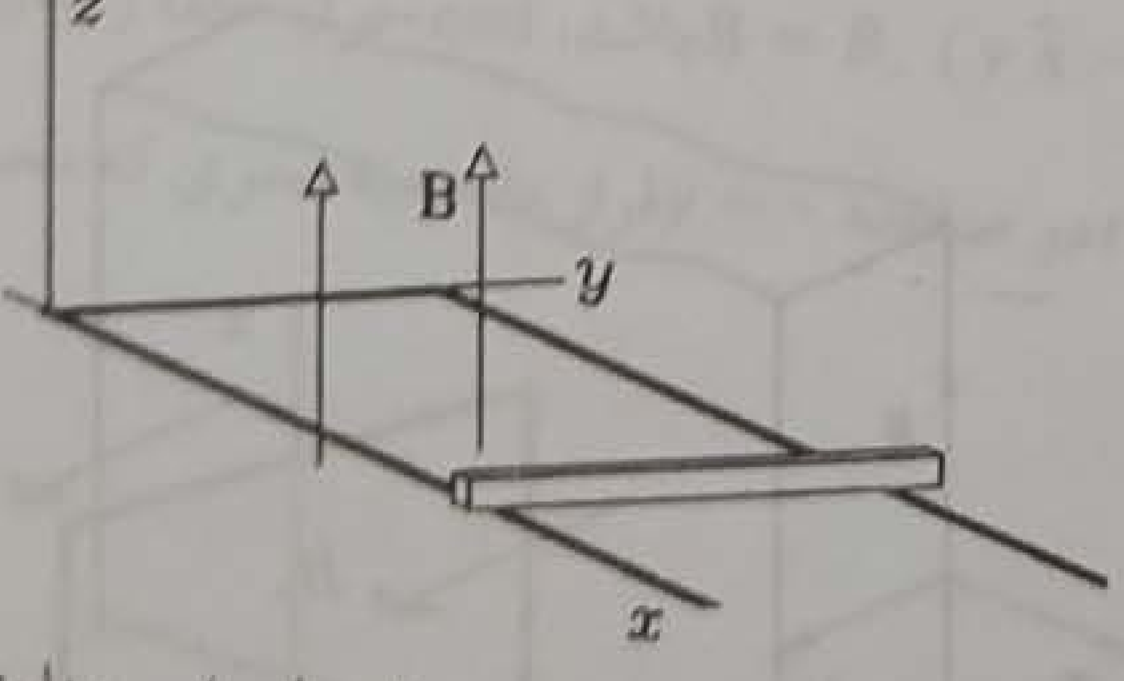
(۲) ۰ ، vBl ، $2vBl$

(۳) ۰ ، vBl ، ۰

(۴) ۰ ، vBl ، vBl

شکل ۱۰-۷

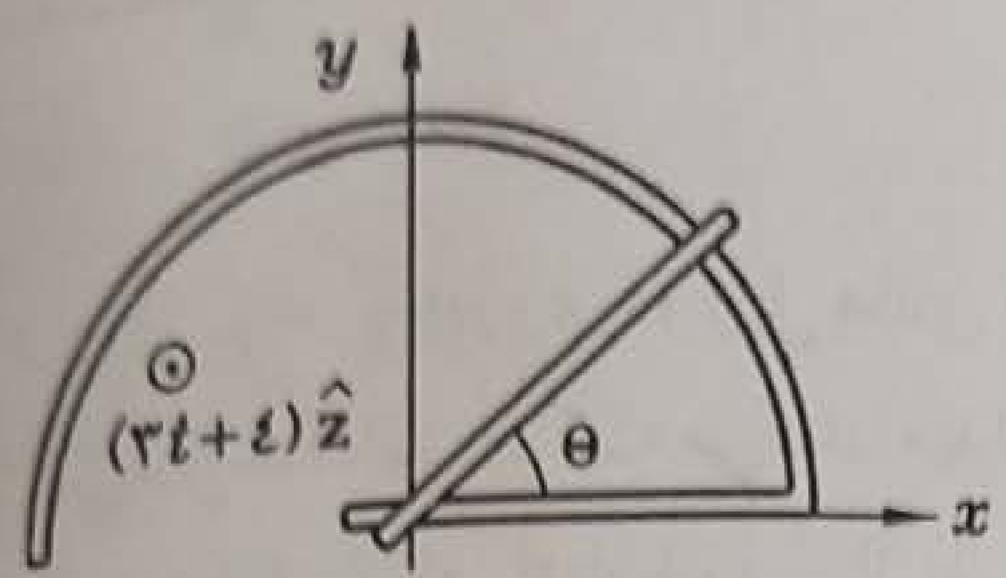
۱۰-۸ میله لغزان شکل ۱۰-۸ با سرعت $\mathbf{v} = V_m \cos\omega t\,\hat{\mathbf{x}}$ نوسان، و میدان $\mathbf{B}$ به صورت $B_m \cos\omega t\,\hat{\mathbf{z}}$ تغییر می‌کند. emf القا شده در حلقه را بیابید.



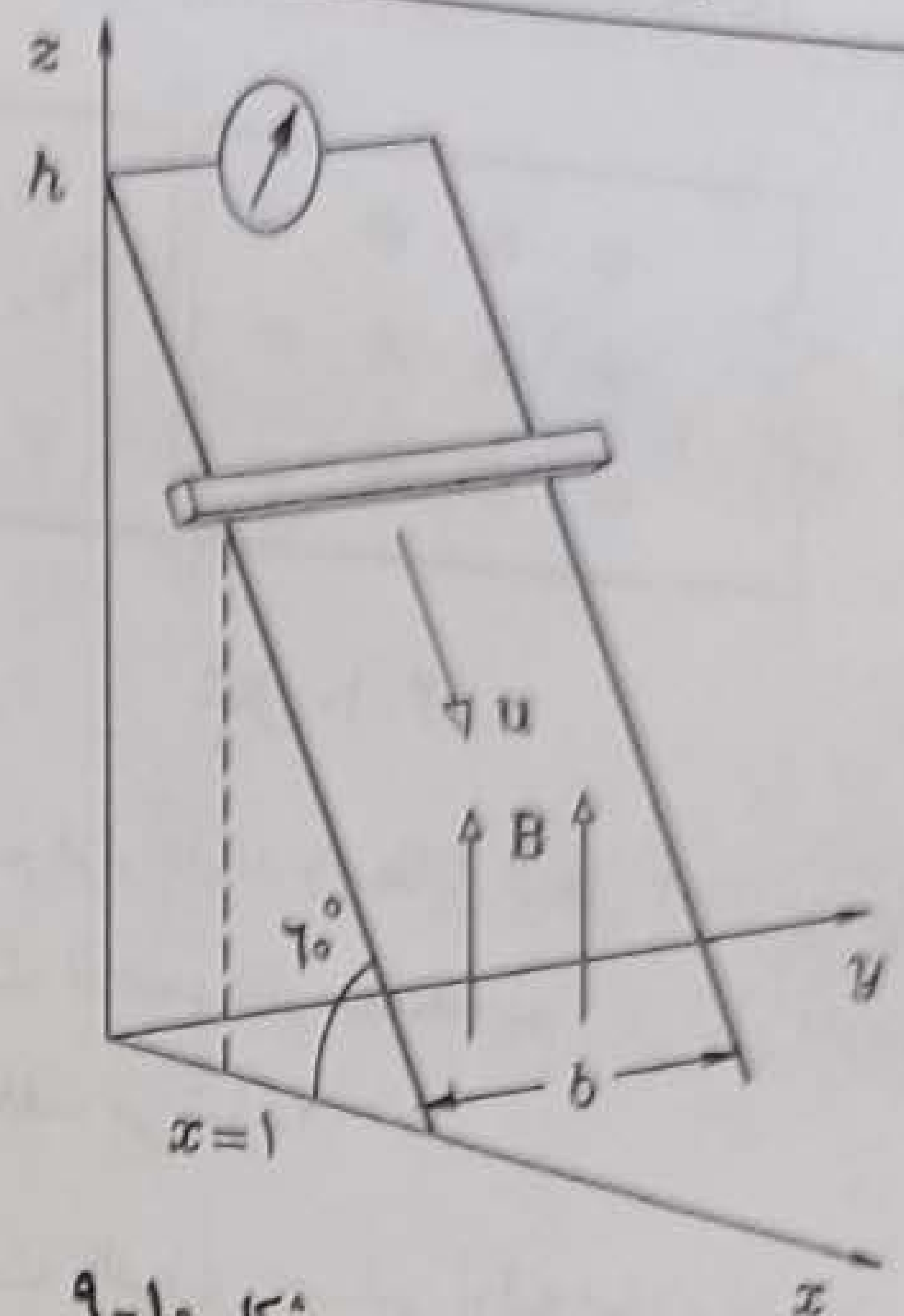
شکل ۱۰-۸

۱۰-۹ یک میله فلزی روی ریل موازی به فاصله b از هم، که به صورت شکل ۱۰-۹ سطح شیب داری با زاویه °۶۰ می‌سازند، با سرعت

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} x \left(\hat{\mathbf{x}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{z}} \right)$$



شکل ۱۰-۱۰



شکل ۱۰-۹

پایین می‌آید. میدان مغناطیسی در این فضا بارابطه زیر بیان شده است

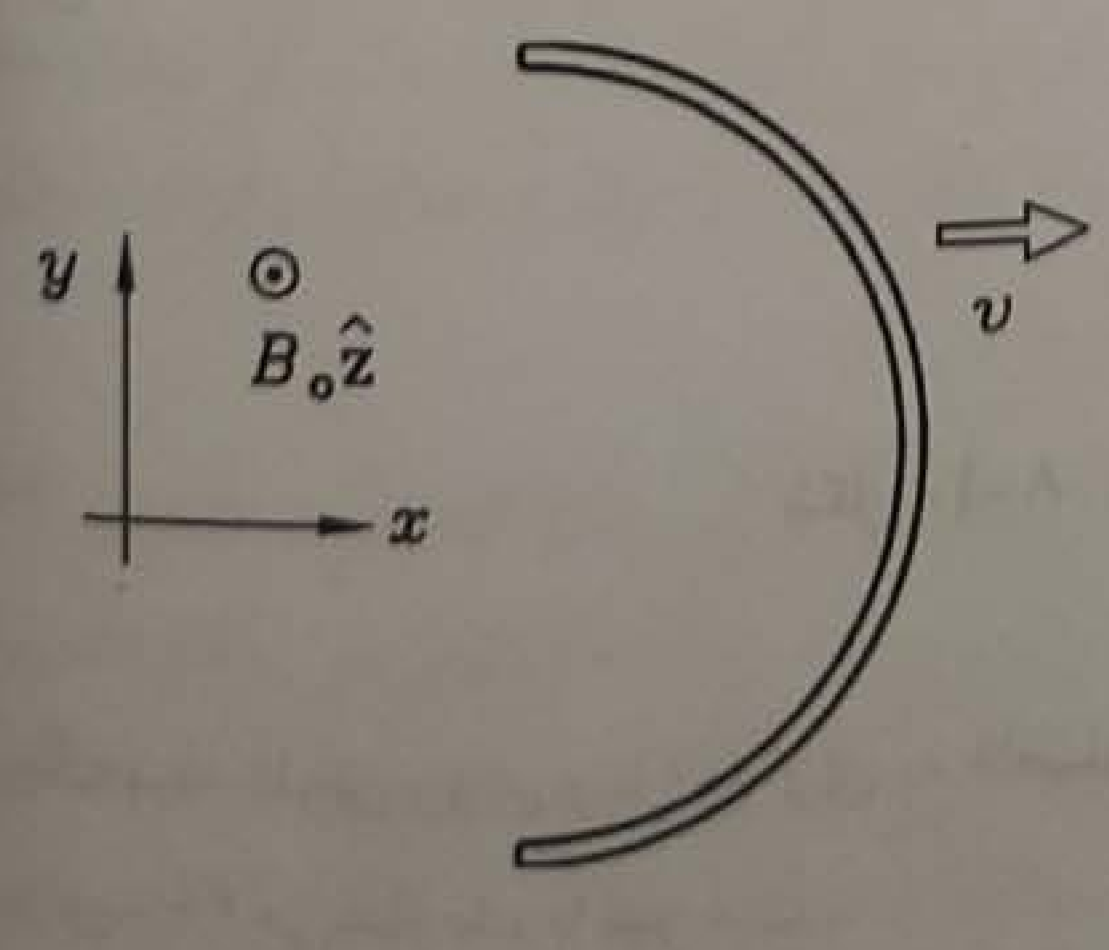
$$\mathbf{B} = B_{\circ}\, y\, e^{kt}\, \hat{\mathbf{z}}$$

ولتاژی راکه ولتمتر نشان می‌دهد به صورت مجموع ولتاژهای القایی و حرکتی به دست آورید. در $t = \circ$ میله در $x = \text{۱}$ قرار دارد.

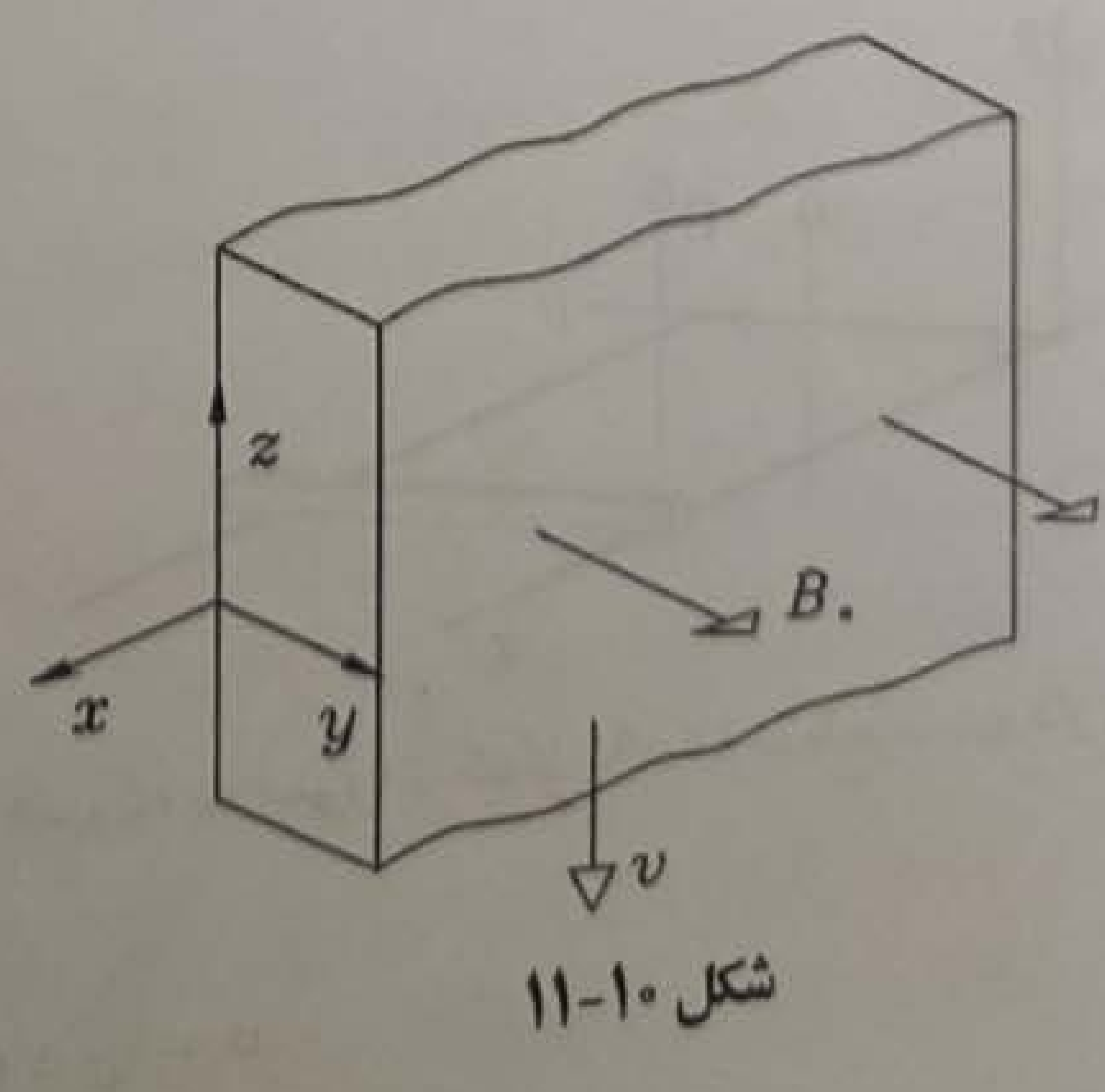
۱۰-۱۰ یک بازوی فلزی با سرعت $\omega = \text{۳}$ rad/s روی سیم نیمدایره‌ای شکل ۱۰-۱۰ ، می‌چرخد. شعاع نیمدایره R است. میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = (\text{۳}t + \text{۴})\,\hat{\mathbf{z}}$ در فضا وجود دارد. اگر در $t = \text{۳}$ s، $\theta = \text{۱۲۰}^{\circ}$، emf حرکتی و emf القایی را در $t = \text{۳}$ بیابید.

۱۰-۱۱ یک ورقه مسی به ضخامت t و رسانایی ویژه σ با سرعت v عمود بر میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ حرکت می‌کند. نیرویی راکه بر واحد سطح این ورقه وارد می‌شود بیابید. (با توجه به دستگاه مختصات شکل ۱۰-۱۱، $\mathbf{B} = -B_{\circ}\,\hat{\mathbf{x}}$ و $\mathbf{v} = -v_{\circ}\,\hat{\mathbf{z}}$).

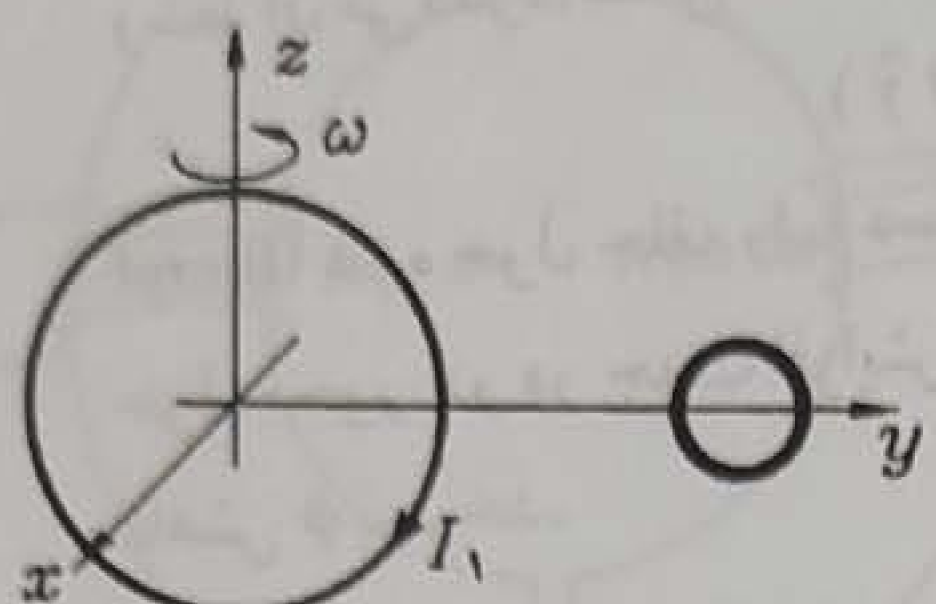
۱۰-۱۲ سیمی به شکل نیمدایره‌ای با شعاع R با سرعت ثابت $\mathbf{v} = v_{\circ}\,\hat{\mathbf{x}}$ در میدان ثابت $\mathbf{B} = B_{\circ}\,\hat{\mathbf{z}}$ حرکت می‌کند. emf القا شده بین دو سر سیم را بیابید.



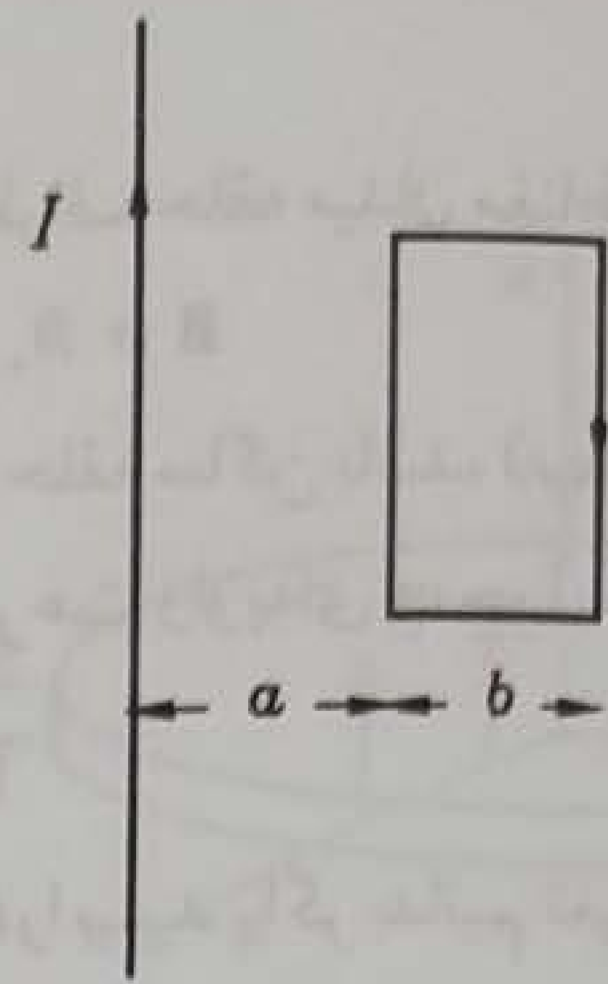
شکل ۱۰-۱۲



شکل ۱۰-۱۱



شکل ۱۰-۱۵



شکل ۱۰-۱۳

۱۰-۱۳ یک حلقه مستطیلی به اضلاع $b \times c$ در کنار سیمی قرار گرفته است. فاصله حلقه تا سیم a است و از سیم جریان $I(t)$ می‌گذرد. emf القا شده حول حلقه را در جهت نشان داده شده به دست آورید.

۱۰-۱۴ شعاع یک حلقه رسانا با سرعت v زیاد می‌شود. میدان $B = B_0 t$ عمود بر صفحه حلقه وجود دارد. emf القایی و emf حرکتی و emf کل را بیابید.

۱۰-۱۵ حلقه‌ای به مساحت A_1 در $t = 0$ در صفحه zy قرار دارد و جریان I_1 در جهت نشان داده شده از آن می‌گذرد. حلقه کوچک دیگری به مساحت A_2 روی محور y در $y = r$ قرار دارد. حلقه اولی با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد. emf القا شده حول حلقه دوم را در حالتی که ω کوچک است بیابید.

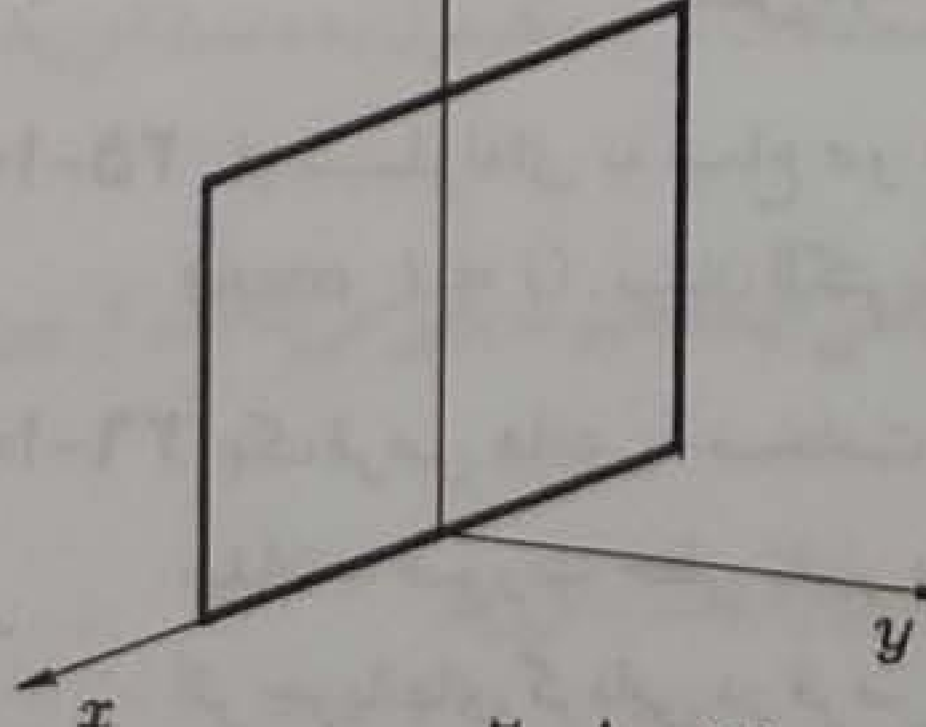
۱۰-۱۶ چرا در مسئله قبل لازم است قید کنیم ω کوچک است؟ ω باید چقدر کوچک باشد؟

۱۰-۱۷ حلقه شکل ۱۰-۱۷ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد. میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{y}}$ در اطراف حلقه وجود دارد. emf القا شده حول حلقه، در جهت مشخص شده را بیابید.

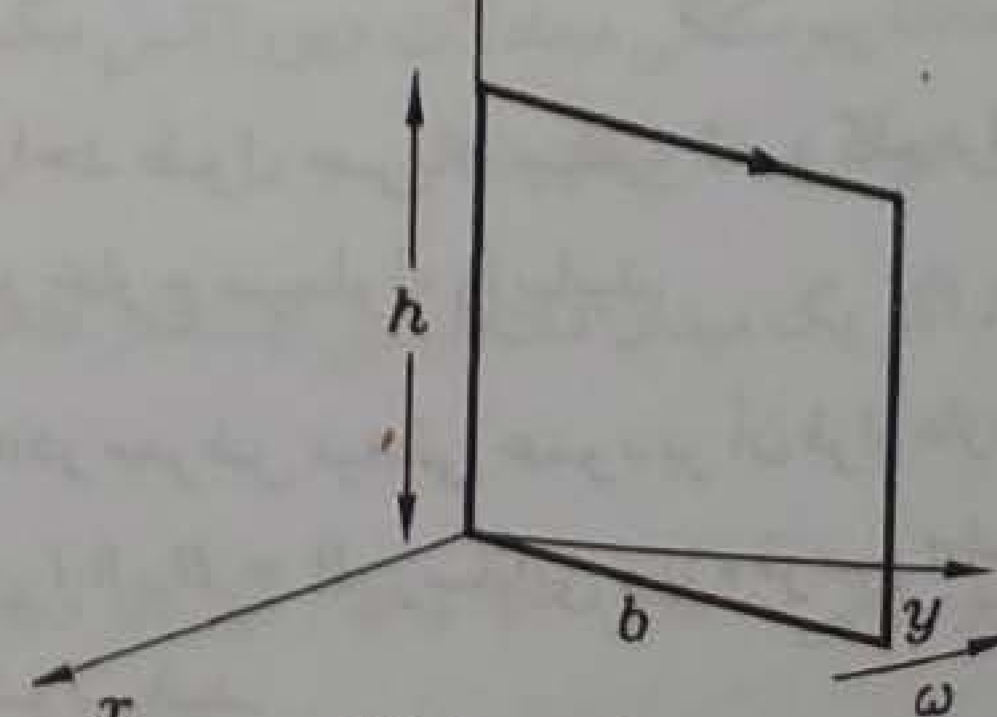
۱۰-۱۸ حلقه‌ای به شعاع a با سرعت زاویه‌ای ω حول قطرش می‌چرخد. محور دوران محور z است، صفحه حلقه در $t = 0$ در صفحه $x = 0$ و مرکز حلقه همواره در مبدا مختصات قرار دارد. اگر میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B_0 (\cos\alpha\, \hat{\mathbf{x}} + \sin\alpha\, \hat{\mathbf{y}})$ در فضا وجود داشته باشد، emf حول حلقه را بیابید.

۱۰-۱۹ اگر در مسئلهٔ ۱۰-۱۷ میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B_0 (y\, \hat{\mathbf{x}} - x\, \hat{\mathbf{y}})$ باشد، emf حول حلقه را بیابید.

۱۰-۲۰ حلقه مستطیل شکلی به مساحت A در $t = 0$ در صفحه $y = 0$ قرار دارد، به نحوی که محور z از



شکل ۱۰-۲۰



شکل ۱۰-۱۷

وسط آن می‌گذرد. شکل ۱۰–۲۰ را ببینید. در فضای اطراف حلقه میدان مغناطیسی زیر وجود دارد

$$\mathbf{B} = B_\circ\ (\ \sin \omega t\ \hat{\mathbf{x}} + \cos \omega t\ \hat{\mathbf{y}}\ )$$

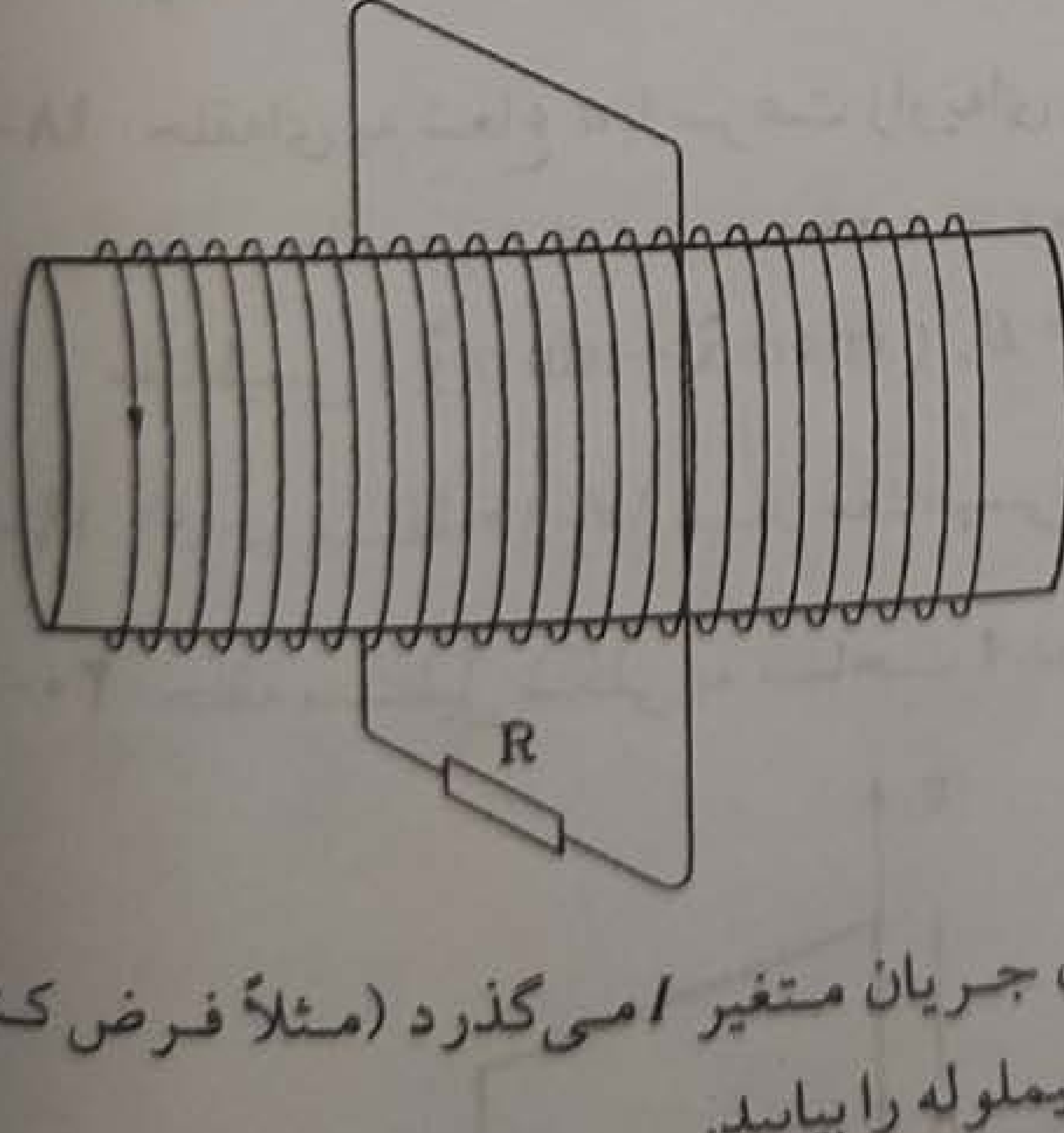
emf القا شده حول حلقه را به دست آورید. اگر **(الف)** حلقه ساکن باشد، **(ب)** با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z و در جهت افزایش ϕ بچرخد، **(ج)** با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z و در جهت کاهش ϕ بچرخد.

۱۰-۲۱ در فضای آزاد میدان $\mathbf{E} = ۲۰۰\ e^{۲x-kt}\ \hat{\mathbf{y}}$ وجود دارد. k را بیابید. اگر بدانیم تغییرات زمانی میدان $\mathbf{H}$ هم به صورت e^{-kt} است، $\mathbf{H}$ را بیابید.

۱۰-۲۲ نشان دهید نمی‌توان در فضای آزاد میدانی به صورت $\mathbf{B} = \cos\ ۱۲۰\pi t\ \hat{\mathbf{x}}$ داشت. در رابطه $\mathbf{B} = \cos\ (\ ۱۲۰\pi t - ky\ )\ \hat{\mathbf{x}}$ مقدار k را به نحوی تعیین کنید که این میدان بتواند در فضای آزاد وجود داشته باشد. هیچ کدام از میدانها مقدار ثابت ندارند.

۱۰-۲۳ یک حلقه مربعی به ضلع S به فاصله S از سیم راستی قرار دارد و مقاومت آن R است. اگر سیم راست بریده شود، از حلقه در چه جهتی جریان می‌گذرد؟ کل باری را که از یک نقطه حلقه می‌گذرد بیابید. اگر قطع ناگهانی جریان برایتان مشکل ایجاد می‌کند فرض کنید جریان از مقدار I طی فاصلهٔ زمانی a به صفر می‌رسد، سپس a را به صفر میل دهید.

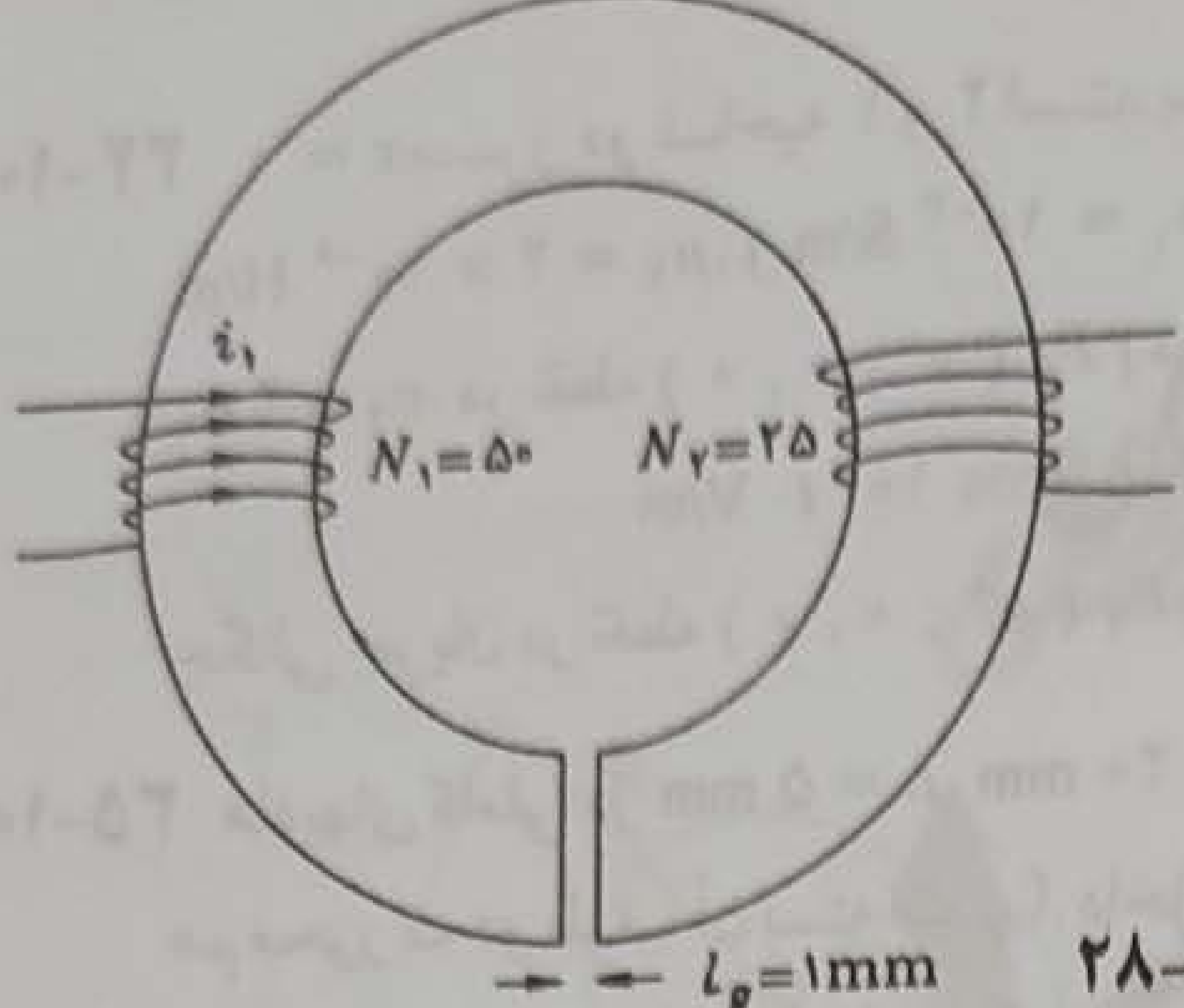
۱۰-۲۴ از سیملوله‌ای به شعاع a و n دور در واحد طول جریان I می‌گذرد. اگر جریان سیملوله به طور یکنواخت افزایش یابد (یعنی $dI\ /\ dt = k$) چه جریانی و در چه جهتی از مقاومت R می‌گذرد؟ اگر جریان سیملوله از I به صفر و سپس به I - برسد کل باری که از R می‌گذرد چقدرست؟ آیا نحوه تغییر جریان بین این دو مقدار مهم است؟



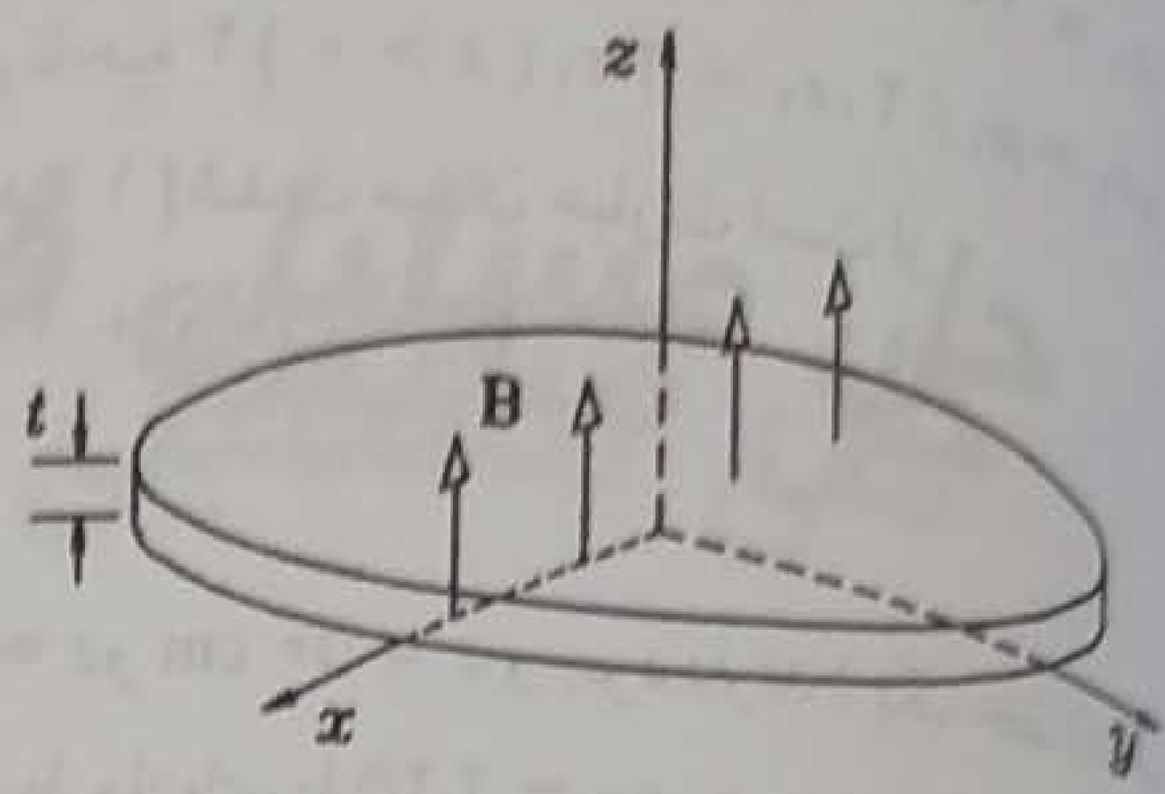
شکل ۱۰-۲۴

۱۰-۲۵ از سیملوله‌ای به شعاع a و n دور در واحد طول جریان متغیر I می‌گذرد (مثلاً فرض کنید $i = I_\circ\ \cos \omega t$). میدان الکتریکی داخل و خارج سیملوله را بیابید.

۱۰-۲۶ یک قرص هادی به ضخامت t و شعاع a در معرض میدانی عمود بر آن قرار دارد (شکل ۱۰-۲۶). میدان به صورت خطی تغییر می‌کند یعنی $B = B_\circ\ k\ t$. رسانایی ویژه قرص σ است. توانی را که در اثر جریانهای گردابی در قرص تلف می‌شود بیابید.



شکل ۱۰-۲۸



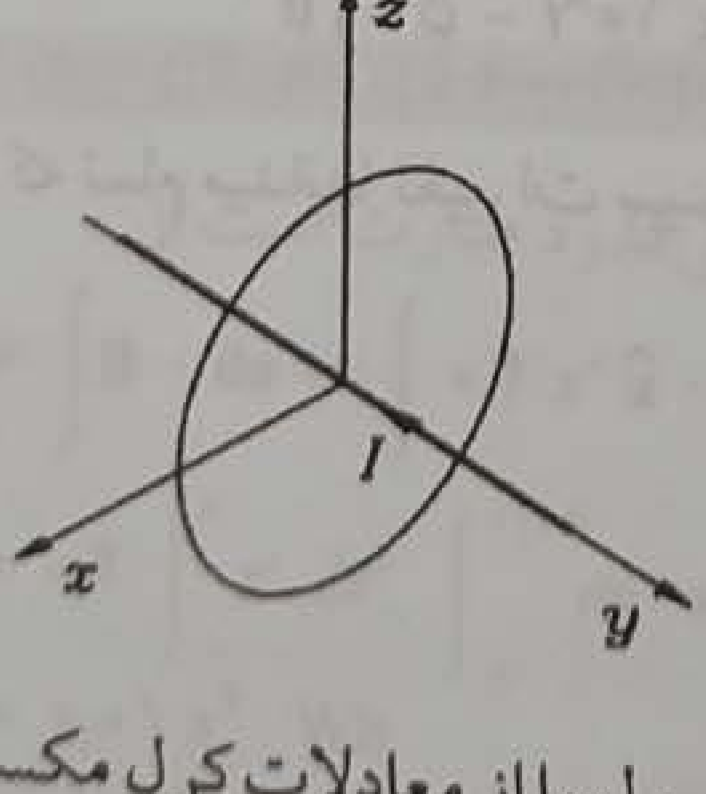
شکل ۱۰-۲۶

۱۰-۲۷ در یک لوله دراز هادی آهنربایی را رها می‌کنیم. ثابت کنید سرعت آهنربا پس از گذشت مدتی به یک سرعت حد می‌رسد و سقوطش را با آن سرعت ادامه می‌دهد.

۱۰-۲۸ هسته شکل ۱۰-۲۸ از ماده‌ای با تراوایی نسبی ۲۰۰ ساخته شده است. طول متوسط آن ۲۰ cm، و سطح مقطع آن ۲ cm^2 است. به ازای $i_1 = \cos t$ ولتاژ القا شده روی دو سر پیچک N_2 را بیابید.

۱۰-۲۹ اگر در مسئله ۱۰-۲۸ یک مقاومت Ω - ۱ به پیچک دوم وصل شود، چه جریانی از آن می‌گذرد؟

۱۰-۳۰ از یک قطعه سیم به طول $2a$ جریان ثابت I می‌گذرد. تقارن نشان می‌دهد که در صفحه عمود منصف این سیم میدان تنها در جهت ϕ مولفه دارد و اندازه میدان تابعی از ϕ نیست. پس قانون آمپر $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ میدان روی این صفحه را برابر $\mu_0 I / 2\pi\rho$ به دست می‌دهد که میدان ناشی از یک سیم بی‌نهایت است! چه اشکالی در استفاده از قوانین وجود دارد و به چه نحوی رفع می‌شود؟
راهنمایی: مسلماً وجود چنین قطعه جریانی، با توجه به اصل پیوستگی جریان، شرایط دیگری را نیز لازم می‌دارد.



شکل ۱۰-۳۰

۱۰-۳۱ با فرض معادلهٔ پیوستگی معادلات دیورژانس مکسول را از معادلات کرل مکسول به دست آورید. چه فرضهای دیگری لازم دارید؟

۱۰-۳۲ ثابت کنید اگر یک میدان مغناطیسی ایستا در داخل هادی کاملی ایجاد شود، باقی می‌ماند و از بین نمی‌رود.

۱۰-۳۳ معادلهٔ پیوستگی $\partial\rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ را از معادلات مکسول به دست آورید.

۳۴-۱۰ $x = 0$ مرز دو ناحیه ۱ و ۲ است. برای ناحیه ۱ ($x < 0$) داریم $\varepsilon_1 = 10^{-11}$ F/m، $\mu_1 = 4 \times 10^{-6}$ H/m و $\sigma_1 = 10^{-3}$ S/m، و برای ناحیه ۲ ($x > 0$) $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$، $\mu_2 = \mu_1 / 2$ و $\sigma_2 = 4\sigma_1$. در نقطه $P_1(0^-, 0, 0)$ [مبدا در ناحیه ۱] شدت میدان عبارت است از

$$\mathbf{E}_1 = (10\,\hat{\mathbf{x}} + 20\,\hat{\mathbf{y}} + 30\,\hat{\mathbf{z}}) \cos 10^9 t \quad \text{V/m}$$

چگالی جریان در نقطه $P_2(0^+, 0, 0)$ را بیابید.

۳۵-۱۰ هادیهای کاملی در $\rho = 5$ mm، $\rho = 20$ mm، $z = 0$ و $z = 50$ cm وجود دارند (یک خط انتقال هم محور که دو طرف آن بسته است). داخل این محیط ماده‌ای با $\varepsilon_R = 2{,}25$، $\sigma = 0$ و $\mu = \mu_0$ قرار دارد. اگر در این محیط $\mathbf{H} = (2/\rho) \cos 2\pi z \cos 4\pi \times 10^8 t\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$، چگالی جریان سطحی در سطوح هادی‌ها را بیابید.

۳۶-۱۰ در مسئله ۱۰-۳۵، $\mathbf{E}$ را یافته، چگالی جریان جابجایی را در محیط الکتریک حساب کنید.

۳۷-۱۰ جریان $i = I_0 \cos \omega t$ از یک کابل هم محور می‌گذرد (از هادی داخلی می‌رود و از هادی بیرونی برمی‌گردد) میدان E در فضای بین دو هادی را بیابید. ω را کوچک فرض کنید (معیار کوچکی را نیز تعیین کنید).

۳۸-۱۰ شدت میدان الکتریکی در فضای آزاد با رابطه زیر داده شده است

$$\mathbf{E} = E_0 \cos[\omega(t - z/c)]\,\hat{\mathbf{x}}$$

که در آن ω و E_0 مقادیر ثابتی هستند و $c = 3 \times 10^8$ m/s. $\mathbf{H}$ را یافته نسبت دامنه میدان الکتریکی به دامنه میدان مغناطیسی را بیابید.

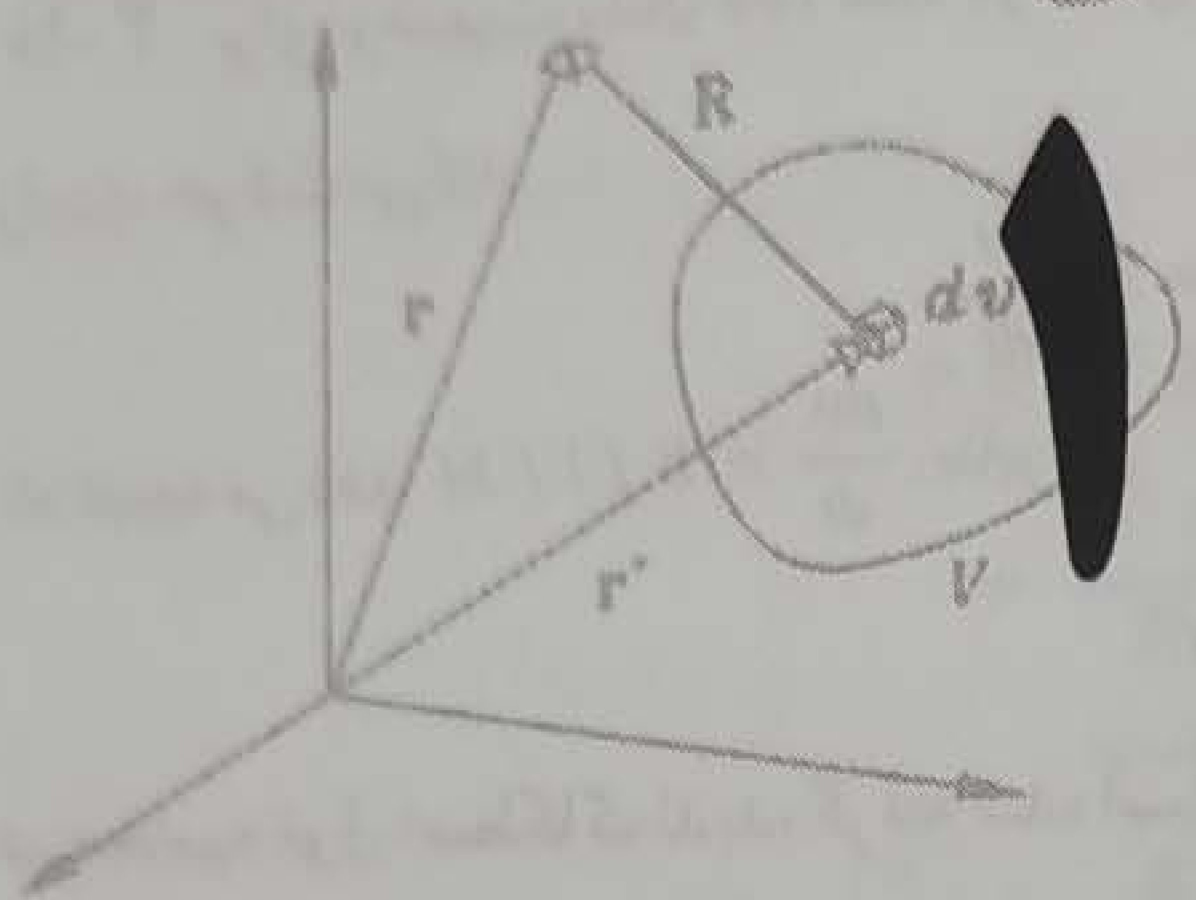
۳۹-۱۰ میدان الکتریکی زیر در فضای آزاد وجود دارد (مختصات کروی)

$$\mathbf{E} = \frac{0{,}1}{r} \sin\theta \sin(15 \times 10^8 t - 5r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

با فرض این که تمام میدانها تغییرات سینوسی و با فرکانس $\omega = 15 \times 10^8$ دارند، میدان $\mathbf{H}$ را بیابید.

حل مسایل فصل

حل مسایل فصل



۱۰

۱-۱۰ اندازه ولتاژ القا شده روی میله برابر است با

$$|\text{emf}| = B\,V\,L = ۰٫۷ \times ۱۰ \times ۰٫۳ = ۲٫۱\text{V}$$

مقاومتی که در مسیر جریان وجود دارد عبارت است از

$$۲\,x \times (\,۲\;\Omega / m\,) + ۱\;\Omega = ۴\,x + ۱ \quad \Omega$$

$$x = ۱۰\,t \qquad \text{و} \qquad R = ۴۰\,t + ۱$$

$$I = \frac{۲٫۱}{۴۰\,t + ۱}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۱۰ شاری که از حلقه متشکل از ریلها و میله لغزان می‌گذرد عبارت است از

$$\phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int ۰٫۴\,x'\,\hat{\mathbf{z}}\cdot dx'\,dy'\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$= ۰٫۴\int_{۰}^{x} x'\,dx' \int_{۰}^{۰/۰۵} dy' = ۰٫۴ \times \frac{۱}{۲}\,x^{۲} \times ۰٫۰۵$$

$$= ۰٫۰۱\,x^{۲}\;\text{Wb}$$

$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = -\,۰٫۰۱\,\frac{d}{dt}(\,x^{۲}\,) = -\,۰٫۰۱ \times ۲\,x\,\frac{dx}{dt} = ۰٫۰۲\,\frac{dx}{dt}\,\Big|_{\,x\,=\,۱}$$

$$\frac{dx}{dt} = ۵٫۴ - ۶\,t$$

ولی باید زمانی را بیابیم که در آن میله به $x = ۱$ می‌رسد

$$۵٫۴\,t_{۱} - ۳\,t_{۱}^{\,۲} = ۱ \Rightarrow t_{۱} = ۰٫۲۱\;\text{s}$$

در این زمان سرعت میله برابر است با

$$\frac{dx}{dt} = ۵٫۴ - ۱٫۲۶ = ۴٫۱۴$$

و سرانجام

$$\text{emf} = -\ ۸۲٫۸\ \text{mV}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=۰\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=۰\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=۰\,|\,\oint E\cdot dl=۰$

۱۰-۳ برای وضعیت نشان داده شده در شکل ۱۰-۳ که جریان به سمت داخل کاغذ است، میله به سمت راست حرکت می‌کند.

$$F = B\,I\,l = M\,a = M\frac{dv}{dt}$$

که نتیجه می‌دهد $\frac{dv}{dt} = B\,I\,l\,/\,M$. بنابراین

$$v = \frac{B\,I\,l}{M}\,t$$

در محاسبه فوق اصطکاک ندیده گرفته شده است. نیروی اصطکاک ایستا برابر است با

$$F_{\text{r}} = M\,g\,\mu_{\text{r}}$$

برای به حرکت درآمدن میله باید داشته باشیم $\mu_{\text{r}}\,M\,g = B\,I\,l$ که نتیجه می‌دهد

$$B = \frac{\mu_{\text{r}}\,M\,g}{I\,l}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=۰\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=۰\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=۰\,|\,\oint E\cdot dl=۰$

۱۰-۴ emf القا شده حول مسیر برابر است با $v\,B\,l$، پس جریان زیر از میله می‌گذرد

$$I = \frac{v\,B\,l}{R}$$

اکنون نیروی مغناطیسی F_{m} به میله وارد می‌شود

$$F_{\text{m}} = I\,B\,l = \frac{v\,B^{۲}\,l^{۲}}{R}$$

طبق قانون دوم نیوتن داریم

$$-\,F_{\text{m}} = m\,a = m\frac{dv}{dt}$$

زیرا نیرو در خلاف جهت سرعت است. پس

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{B^{۲}\,l^{۲}}{R}\,v = ۰$$

حل معادله دیفرانسیل بالا به ازای سرعت اولیه $v\,(\,t = ۰\,) = v_{\circ}$ عبارت است از

$$v = v_{\circ}\,e^{-t/\tau}$$

که در آن $\tau = \frac{m\,R}{B^{۲}\,l^{۲}}$. اگر امتداد ریل را جهت x بنامیم داریم $v = dx\,/\,dt$. پس

$$\frac{dx}{dt} = v_{\circ}\,e^{-t/\tau}$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$x = -\,\tau\,v_{\circ}\,e^{-t/\tau} + C$$

اگر محل ابتدای حرکت را $x = ۰$ فرض کنیم، خواهیم داشت $C = \tau\,v_{\circ}$ و

$$x = \tau v_\circ (1 - e^{-t/\tau})$$

در $t \to \infty$ داریم $x = \tau v_\circ$، پس کل مسافت طی شده برابر است با

$$d = \frac{m R}{B^2 l^2} v_\circ$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=\circ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=\circ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=\circ \mid \oint E\cdot dl=\circ$

۱۰-۵ جریان مقاومت عبارت است از

$$I = \frac{v B l}{R}$$

و توان تلف شده در آن عبارت است از

$$P = I^2 R = \frac{1}{R} v^2 B^2 l^2$$
$$= \frac{B^2 l^2}{R} v_\circ^2 e^{-2t/\tau}$$

انرژی تلف شده در مقاومت انتگرال توان تلف شده در آن است

$$W = \int_\circ^\infty P\, dt = \frac{B^2 l^2 v_\circ^2}{R} \int_\circ^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{\tau}{2} \frac{B^2 l^2 v_\circ^2}{R}$$
$$= \frac{1}{2} m v_\circ^2$$

که انرژی جنبشی اولیه میله است.

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=\circ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=\circ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=\circ \mid \oint E\cdot dl=\circ$

۱۰-۶ با حرکت میله emf زیر روی مقاومت القا می‌شود

$$\text{emf} = v B l$$

پس جریانی برابر $v B l / R$ از مقاومت و میله می‌گذرد و میدان مغناطیسی نیروی زیر را به میله وارد می‌کند

$$F_m = I B l = \frac{v B^2 l^2}{R}$$

پس نیرویی برابر F_m و در خلاف جهت آن برای حرکت دادن میله با سرعت ثابت لازم است. توان مصرف شده برای حرکت میله عبارت است از

$$p = F_m v = \frac{v^2 B^2 l^2}{R}$$

که با $I^2 R$، یعنی توان تلف شده در مقاومت، برابر است.

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=\circ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=\circ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=\circ \mid \oint E\cdot dl=\circ$

۱۰-۷ جواب درست جواب ۴ است. در حالت اول جریانی نمی‌گذرد، بنابراین ولتمتر مقدار صفر را نشان می‌دهد و در دو حالت دیگر emf القا شده روی میله تغییر نمی‌کند

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=\circ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=\circ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=\circ \mid \oint E\cdot dl=\circ$

۱۰-۸ مکان میله را به صورت زیر می‌یابیم

$$x(t) = \int v\, dt = x_\circ + \frac{V_m}{\omega} \sin \omega t$$

شار گذرنده از حلقه عبارت است از

$$\phi = B\, l\, x = l\, B_m \cos \omega t\, (x_\circ + \frac{V_m}{\omega} \sin \omega t)$$

و سرانجام

$$\text{emf} = - \frac{d\phi}{dt} = l\, B_m\, x_\circ\, \omega \sin \omega t - l\, B_m\, V_m \cos ۲\omega t$$

توجه کنید که emf حرکتی و القایی را همزمان به دست آورده‌ایم

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۰-۹ ابتدا emf حرکتی را می‌یابیم

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = - \frac{۱}{۲} x\, B_\circ\, y\, e^{kt}\, \hat{\mathbf{y}}$$

$$e_۱ = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{۱}{۲} x\, B_\circ\, e^{kt} \int_\circ^b y\, dy = - \frac{۱}{۴} x\, B_\circ\, b^۲ e^{kt}$$

حال emf القایی را می‌یابیم

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = k\, B_\circ\, y\, e^{kt}\, \hat{\mathbf{z}}$$

$$d\mathbf{s} = (۳\,\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})\, dx\, dy$$

$$e_۲ = - \int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = - \int_\circ^b \int_\circ^x k\, B_\circ\, y\, e^{kt}\, dx\, dy$$

$$= - \frac{b^۲}{۲} x\, B_\circ\, k\, e^{kt}$$

در مقادیر به دست آمده x و t به هم وابسته‌اند. در صورتی که بخواهیم emf را به صورت تابعی از t بنویسیم باید x را بر حسب t بیابیم. مولفه سرعت در جهت x برابر $\frac{۱}{۲}x$ است، پس

$$\frac{dx}{dt} = \frac{۱}{۲} x \qquad \text{یا} \qquad \frac{dx}{x} = \frac{۱}{۲}\, dt$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم $\ln x = \frac{۱}{۲} t + C$ و باتوجه به مقدار x در $t = \circ$ به دست می‌آوریم $C = \circ$، یا

$$x = e^{\frac{t}{۲}}$$

$$\text{emf} = e_۱ + e_۲ = - \frac{۱}{۴} B_\circ\, b^۲\, e^{kt} (x + ۲\, k\, x)$$

$$= - \frac{b^۲ B_\circ}{۴} (۲ k + ۱)\, e^{kt}\, e^{\frac{t}{۲}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۰-۱۰ ابتدا emf حرکتی را می‌یابیم

$$e_۱ = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int (r\, \omega\, \hat{\boldsymbol{\phi}} \times B\, \hat{\mathbf{z}}) \cdot dr\, \hat{\mathbf{r}} = \int_\circ^R r\, \omega\, B\, dr = \omega\, B \frac{R^۲}{۲}$$

در $t = 3$، $B = 13$، پس $e_1 = \frac{39}{2} R^2$.

حال emf القایی را می‌یابیم

$$e_2 = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{ds} = -3 \int \hat{\mathbf{z}} \cdot r\, dr\, d\theta\, (-\hat{\mathbf{z}})$$

$$= 3 \int_0^R r\, dr \int_0^\theta d\theta = 3\, \frac{R^2}{2}\, \frac{2\pi}{3} = \pi R^2$$

جهت ds با توجه به جهتی که قبلا برای یافتن e_1 به کار برده‌ایم انتخاب شده است تا بتوانیم برای یافتن emf کل e_1 و e_2 را با هم جمع کنیم.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=0$

۱۰-۱۱ میدان الکتریکی القا شده عبارت است از

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B} = \upsilon_0 B_0\, \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma E = \sigma \upsilon_0 B_0\, \hat{\mathbf{y}}$$

نیروی وارد شده بر عنصر حجم $dv = t\, ds$ عبارت است از

$$\mathbf{dF} = \mathbf{J}\, dv \times \mathbf{B} = \sigma \upsilon_0 B_0^2\, t\, ds\, [\, \hat{\mathbf{y}} \times (-\hat{\mathbf{x}})\,]$$

و چون $\hat{\mathbf{y}} \times (-\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{dF} / ds = \sigma \upsilon_0 B_0^2\, t\, \hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=0$

۱۰-۱۲ emf حرکتی عبارت است از

$$\text{emf} = \int (\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{dl}$$

$$= \int -\upsilon_0 B_0\, \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{dl}$$

چون $\mathbf{dl} = R\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ و $\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \cos\phi$

$$\text{emf} = -\upsilon_0 B_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos\phi\, d\phi = -2 R \upsilon_0 B_0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=0$

۱۰-۱۳ اگر سیم را روی محور z فرض کنیم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

با توجه به جهت نشان داده شده برای مسیر

$$\mathbf{ds} = d\rho\, dz\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

و

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^c dz$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\, c \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}\, \frac{dI}{dt}$$

۱۴-۱۰ حلقه را در صفحه $z = \circ$ در نظر می‌گیریم. پس $\mathbf{B} = B_\circ t \hat{\mathbf{z}}$ و

$$\text{emf}_{\text{حرکتی}} = \int (v \hat{\boldsymbol{\rho}} \times B_\circ t \hat{\mathbf{z}}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_\circ^{۲\pi} -v B_\circ t \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot r\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}} = -v B_\circ t r ۲\pi = -۲\pi r v B$$

$$\text{emf}_{\text{القایی}} = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds = -\int B_\circ\, ds = -B_\circ \pi r^۲$$

emf کل جمع دو emf فوق است. emf کل را می‌توان با در نظر گرفتن همزمان تغییرات زمانی میدان و تغییرات مکانی به دست آورد.

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_\circ t \pi r^۲ = B_\circ t \pi (v t)^۲$$

$$\text{emf} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\pi v^۲ B_\circ t^۳) = -۳ t^۲ \pi v^۲ B_\circ$$

نشان دهید که جمع دو emf فوق با مقدار به دست آمده در بالا برابرست.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۵-۱۰ بردار دو قطبی حلقه اول را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{m} = -A_۱ I_۱ (\cos\omega t\, \hat{\mathbf{x}} + \sin\omega t\, \hat{\mathbf{y}})$$

میدان ناشی از این دو قطبی در محل دو قطبی دوم عبارت است از (مسئلهٔ ۶-۱۰ را ببینید)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi r^۳}[۳(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{m}]$$

$$= \frac{\mu_\circ}{۴\pi r^۳}[-۲A_۱ I_۱ \sin\omega t\, \hat{\mathbf{y}} + A_۱ I_۱ \cos\omega t\, \hat{\mathbf{x}}]$$

با کوچک فرض کردن $A_۲$ می‌توان شار گذرنده از آن را به صورت زیر یافت

$$\phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} \approx \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B}\cdot A_۲ \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi r^۳} A_۱ A_۲ I_۱ \cos\omega t$$

و سرانجام

$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi r^۳} A_۱ A_۲ I_۱ \sin\omega t$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۶-۱۰ به علت متغیر بودن میدان **B** و منبع آن نمی‌توان از روابط میدان مغناطیس ساکن استفاده کرد. در صورتی حل مسئله قبل درست است که این تغییرات کند باشد، به نحوی که میدانهای ناشی از تغییرات زمانی **B** کوچک باشد. تغییر میدان ناشی از تغییرمکان حلقه با سرعت c به نقاط مختلف منتقل می‌شود. بنابراین زمانی که طول می‌کشد تا این اثر به محل حلقه دوم برسد $\frac{r}{c}$ است. طی این مدت نباید وضعیت مسئله تغییر زیادی بکند، یعنی باید داشته باشیم

$$\omega \frac{r}{c} << ۱$$

یا

$$\omega << \frac{c}{r}$$

۱۰-۱۷ چون میدان در جهت $\hat{\mathbf{y}}$ است، شاری که از حلقه می‌گذرد حاصلضرب $B_\circ$ در مساحت تصویر حلقه در صفحه $\circ =$ است، یعنی

$$\phi = B_\circ h b \cos\phi$$

و چون $\phi = \omega t$

$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = -B_\circ h b \frac{d}{dt}\cos\omega t$$
$$= B_\circ h b \omega \sin\omega t$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۰-۱۸ چون میدان مغناطیسی یکنواخت است، شاری که از حلقه می‌گذرد برابر $\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}$ است که در آن S بردار سطح حلقه است، و برابر با

$$\mathbf{S} = \pi a^{\text{۲}} (\cos\omega t\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{y}})$$

پس

$$\phi = \mathbf{S}\cdot\mathbf{B} = \pi a^{\text{۲}} B_\circ (\cos\omega t\cos\alpha + \sin\omega t\sin\alpha)$$
$$= \pi a^{\text{۲}} B_\circ \cos(\omega t - \alpha)$$
$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = \pi a^{\text{۲}} B_\circ \omega \sin(\omega t - \alpha)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۰-۱۹ یافتن شار گذرنده از حلقه با کار در دستگاه مختصات استوانه‌ای ساده‌تر است. پس $\mathbf{B}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان می‌کنیم

$$y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}} = \rho\sin\phi(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}) - \rho\cos\phi(\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}})$$
$$= -\rho\sin^{\text{۲}}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} - \rho\cos^{\text{۲}}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\rho\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$
$$\mathbf{B} = -B_\circ\rho\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$
$$\phi = \int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int\mathbf{B}\cdot d\rho\,dz\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = -B_\circ\int_\circ^h dz\int_\circ^b \rho\,d\rho = -B_\circ h\frac{b^{\text{۲}}}{\text{۲}}$$

یعنی همواره شار ثابتی از حلقه می‌گذرد و $\text{emf} = \circ$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۰-۲۰ (الف) شاری که از سطح می‌گذرد برابر است با

$$\phi = \int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B}\cdot A\,\hat{\mathbf{y}} = A B_\circ \cos\omega t$$
$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = \omega A B_\circ \sin\omega t$$

(ب) در این حالت بردار عمود بر سطح عبارت است از

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} = \cos\omega t\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\omega t\,\hat{\mathbf{x}}$$

پس

$$\phi = \mathbf{B}\cdot A\,\hat{\mathbf{n}} = A B_\circ(\cos^{\text{۲}}\omega t - \sin^{\text{۲}}\omega t)$$
$$= A B_\circ \cos\text{۲}\omega t$$

$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = ۲\,\omega\,A\,B_{۰}\,\sin ۲\omega t$$

(ج) در این حالت بردار عمود بر سطح عبارت است از

$$\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} = -\sin\omega t\,\hat{\mathbf{x}} - \cos\omega t\,\hat{\mathbf{y}}$$

زیرا در این حالت $\phi = -\omega t$. پس

$$\phi = \mathbf{B}\cdot A\,\hat{\mathbf{n}} = -B_{۰}A$$

$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = ۰$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲۱-۱۰ از معادلات مکسول استفاده می‌کنیم

$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\hat{\mathbf{z}} = ۸۰۰\,e^{۴x-kt}\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس میدان $\mathbf{H}$ تنها در جهت z مولفه دارد

$$\mathbf{B} = B(x, y, z)\,e^{-kt}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -k\,B(x, y, z)\,e^{-kt}\,\hat{\mathbf{z}}$$

و چون $\nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$

$$\mathbf{B} = \frac{۸۰۰}{k}\,e^{۴x-kt}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$ و چون در فضای آزاد $\mathbf{J} = ۰$، $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_{۰}$ و $\mathbf{D} = \varepsilon_{۰}\,\mathbf{E}$

$$\nabla\times\mathbf{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{-۳۲۰۰}{\mu_{۰}\,k}\,e^{۴x-kt}\,\hat{\mathbf{y}} = \varepsilon_{۰}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{t}}$$

$$= -۲۰۰\,\varepsilon_{۰}\,k\,e^{۴x-kt}\,\hat{\mathbf{y}}$$

پس

$$\frac{-۳۲۰۰}{\mu_{۰}\,k} = -۲۰۰\,\varepsilon_{۰}\,k$$

$$k^{۲} = \frac{۳۲۰۰}{۲۰۰\,\mu_{۰}\,\varepsilon_{۰}} = \frac{۱۶}{\mu_{۰}\,\varepsilon_{۰}}$$

$$k = \frac{۴}{\sqrt{\mu_{۰}\,\varepsilon_{۰}}} = ۱۲\times۱۰^{۸}\quad ۱/\text{s}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲۲-۱۰ چون $\mathbf{B}$ تغییرات مکانی ندارد $\nabla\times\mathbf{B} = ۰$. چون $\nabla\times\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t$ و $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_{۰}$، باید داشته باشیم $\partial\mathbf{D}/\partial t = ۰$ یعنی $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ باید مستقل از زمان باشند. ولی داریم $\nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ و چون طرف راست این معادله تابعی از زمان است $\mathbf{E}$ هم باید تابعی از زمان باشد.

برای میدان دوم داریم

$$\nabla\times\mathbf{B} = -\frac{\partial B_x}{\partial y}\,\hat{\mathbf{z}} = k\sin(۱۲۰\pi t - ky)\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس میدان الکتریکی تنها در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ مولفه دارد

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\,\hat{\mathbf{x}} = -\frac{\partial B}{\partial t} = ۱۲۰\pi t\sin(۱۲۰\pi t - ky)\,\hat{\mathbf{x}}$$

پس $\partial E_z/\partial x = ۰$ و مولفه E_z تابعی از x نیست. با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$E_z = \frac{120\pi}{k} \cos(120\pi t - ky)$$

حال چون

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\frac{k}{\mu_0} \sin(120\pi t - ky)\,\hat{\mathbf{z}} = \varepsilon \frac{(120\pi)^2}{k} \sin(120\pi t - ky)\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 (120\pi)^2$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۰-۲۳ میدان حول سیم عبارت است از

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

شاری که از حلقه عبور می‌کند برابرست با

$$\phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_S^{2S} \int_0^S \frac{dr}{r}\, dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} S \ln 2$$

$$|\text{emf}| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \frac{\mu_0}{2\pi} S \ln 2 \frac{dI}{dt}$$

می‌دانیم که جریانی که در حلقه ایجاد می‌شود، i_1، برابر $|\text{emf}|\,/\,R$ است و $\int i_1\,dt = Q$. پس

$$Q = \frac{\mu_0 S \ln 2}{2\pi R} \int \frac{dI}{dt}\, dt = \frac{\mu_0 S \ln 2}{2\pi R} \int dI$$

جریان از I به ۰ می‌رسد، پس $\int dI = -I$ و

$$Q = \frac{\mu_0 S \ln 2}{2\pi R} I$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۰-۲۴ میدان داخل سیملوله $B = \mu_0 n I$ و شار گذرنده از حلقه $\phi = BA = \mu_0 n I \pi a^2$ است. پس

$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 n \pi a^2 k$$ و

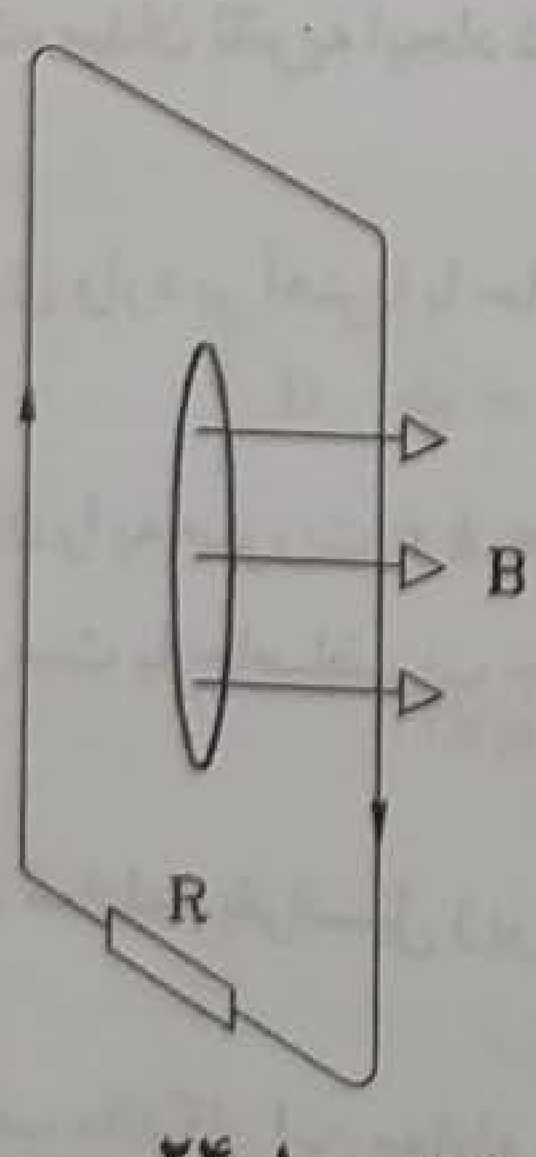
$$I = \frac{\text{emf}}{R} = -\frac{\mu_0 n \pi a^2 k}{R}$$

حل فوق با توجه به جهت انتخاب شده برای مسیر در شکل ح ۱۰-۲۴ انجام شده‌است. پس جهت جریان مثبت خلاف جهت نشان داده شده در شکل است.

برای حل قسمت دوم مسئله داریم

$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 n \pi a^2 \frac{dI}{dt}$$

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\text{emf}}{R}\, dt$$



شکل ح ۱۰-۲۴

که در آن $t_۰$ و $t_۱$ به ترتیب زمانهای شروع تغییر جریان از مقدار I و زمان رسیدن آن به مقدار نهایی $I-$ است.

$$Q = -\mu_۰ n \pi a^۲ \int_{I_۰}^{I_۱} dI = ۲ \mu_۰ n \pi a^۲ I$$

می‌بینیم که Q تنها به مقادیر اولیه و نهایی I بستگی دارد، نه به شیوه تغییر آن در این فاصله.

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰|\nabla\times B=\mu J|\nabla\times H=J|\nabla\cdot B=۰|\nabla\cdot D=\rho|\nabla\times E=۰|\oint D\cdot ds=Q|\int J\cdot ds=I|\oint H\cdot dl=I|\oint B\cdot ds=۰|\oint E\cdot dl=۰$

۱۰-۲۵ مثال ۱ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰|\nabla\times B=\mu J|\nabla\times H=J|\nabla\cdot B=۰|\nabla\cdot D=\rho|\nabla\times E=۰|\oint D\cdot ds=Q|\int J\cdot ds=I|\oint H\cdot dl=I|\oint B\cdot ds=۰|\oint E\cdot dl=۰$

۱۰-۲۶ قرص را به حلقه‌هایی به شعاع r و شعاع خارجی $r + dr$ تقسیم می‌کنیم. شاری که از این حلقه می‌گذرد $B\ r^۲\ \pi$ است. پس emf القا شده حول این حلقه عبارت است از

$$|\text{emf}| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \pi r^۲ \frac{dB}{dt} = \pi r^۲ B_۰ k$$

مقاومت حلقه عبارت است از

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{۲\pi r}{\sigma t\, dr}$$

پس جریانی که از این حلقه می‌گذرد برابر است با $I = \text{emf} / R$. توان تلف شده در این حلقه حاصلضرب emf در I است، یعنی

$$dW = \frac{(\text{emf})^۲}{R} = \frac{\pi^۲ r^۴ B_۰^۲ k^۲}{۲\pi r} \sigma t\, dr$$

و سرانجام

$$W = \frac{\pi B_۰^۲ k^۲ \sigma t}{۲} \int_۰^R r^۳ dr = \frac{\pi B_۰^۲ k^۲ \sigma t R^۴}{۸}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰|\nabla\times B=\mu J|\nabla\times H=J|\nabla\cdot B=۰|\nabla\cdot D=\rho|\nabla\times E=۰|\oint D\cdot ds=Q|\int J\cdot ds=I|\oint H\cdot dl=I|\oint B\cdot ds=۰|\oint E\cdot dl=۰$

۱۰-۲۷ آهنگ تغییر میدان آهنربا با سرعت آن متناسب است، یعنی $B_۱ \propto v$. این میدان متغیر جریانی در لوله القامی‌کند که با آهنگ تغییر میدان متناسب است. چون میدان ناشی از یک جریان با آن جریان متناسب است، میدان ثانویه ایجاد شده عبارت است از

$$B_۲ \propto v$$

نیروی وارد بر آهنربا با حاصلضرب سرعت آن و میدان مغناطیسی $B_۲$ متناسب است، یعنی

$$F \propto v^۲$$

که آن را به صورت $F = k v$ می‌نویسیم. اکنون طبق قانون دوم نیوتن مجموع نیروهای وارد بر آهنربا برابر است با حاصلضرب جرم آهنربا در شتاب آن

$$mg - k v^۲ = m a = m \frac{dv}{dt}$$

حال معادله دیفرانسیل زیر را داریم

$$m \frac{dv}{dt} + k v^۲ = m g$$

جواب ماندگار این معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$v = \sqrt{\frac{m g}{k}}$$

۱۰-۲۸ رلوکتانس هسته $5/\mu_0$ و رلوکتانس فاصله هوایی نیز $5/\mu_0$ است. پس نیروی محرکه $N_1 i_1 = 50 \cos t$ شار زیر را ایجاد می‌کند

$$\phi = \frac{50 \cos t}{10/\mu_0} = 5\mu_0 \cos t$$

$$v = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = 25 \times 5\mu_0 \sin t = 125\mu_0 \sin t$$

۱۰-۲۹ جواب $v/1\,\Omega = 125\mu_0 \sin t$ (v به دست آمده در مسئلهٔ ۱۰-۲۸) نیست. با اتصال مقاومت و گذشتن جریان از سیم پیچ دوم مدار مغناطیسی تغییر کرده، منبع دیگری نیز وارد آن می‌شود (شکل ح ۱۰-۲۹ را ببینید). برای این مدار

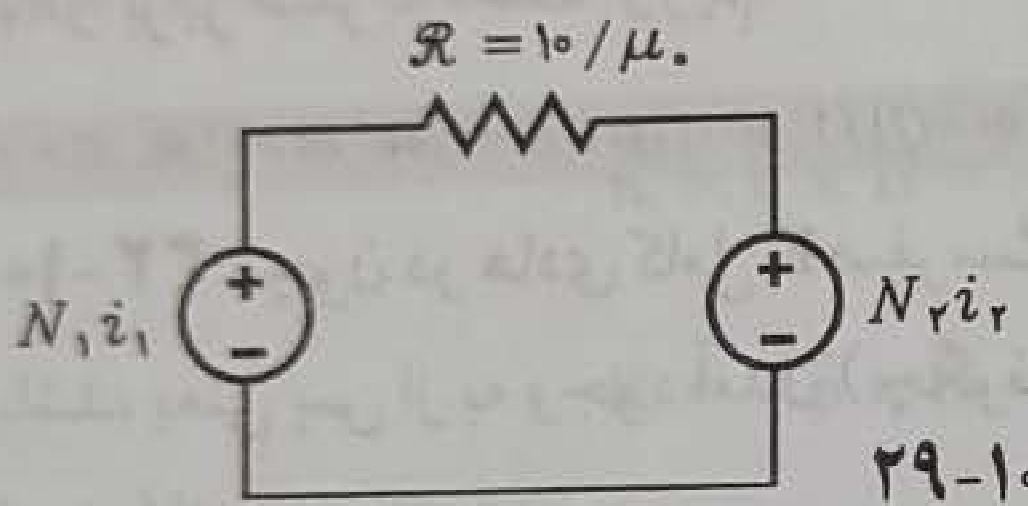
$$\phi_1 = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{R}$$

ولتاژ القا شده روی سیم پیچ دوم $-N_2 d\phi_1/dt$ و از طرفی با $1\,\Omega \times i_2$ برابر است. پس

$$-\frac{N_2}{R}\left(N_1 \frac{di_1}{dt} - N_2 \frac{di_2}{dt}\right) = i_2$$

$$-5\mu_0 (5 i'_1 - 25 i'_2) = i_2$$

حل معادله دیفرانسیل حاصل را به عهدهٔ خودتان می‌گذاریم.



شکل ح ۱۰-۲۹

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۱۰-۳۰ برای داشتن این جریان باید بار در نقطه $y = a$ با آهنگ $I\,dt$ کم در نقطه $y = -a$ با همان آهنگ زیاد شود. این بارها در صفحه $y = 0$ میدان الکتریکی زیر را ایجاد می‌کنند

$$\mathbf{E} = \frac{Q a}{2\pi \varepsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}}$$

چون Q تغییر می‌کند، یک میدان متغیر با زمان داریم و باید قانون آمپر را به شکل زیر به کار بریم

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

حال در مسیر آمپری که برای محاسبه به کار می‌بریم

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{Q a}{2\pi} \int d\phi \int \frac{r\,dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = -Q\left(1 - \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}\right)$$

زیرا با توجه به جهت مسیر آمپر $d\mathbf{s} = -r\,dr\,d\phi\,\hat{\mathbf{y}}$. چون $dQ/dt = I$

$$2\pi\rho H = I + \frac{\partial D}{\partial t} = I - I\left(1 - \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}\right) = \frac{a I}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

$$H = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

که با نتیجهٔ به دست آمده در مسئلهٔ ۷-۱ تطابق دارد.

۳۱-۱۰ دیورژانس کرل هر تابعی صفر است، پس چون $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

که نتیجه می‌دهد $\nabla \cdot \mathbf{B} = k_1$. همچنین $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ پس

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

طبق معادله پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$ پس

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho - \nabla \cdot \mathbf{D}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho + k_2$$

می‌بینیم که دو ثابت k_1 و k_2 باید تعیین شوند. اگر فرض کنیم حداقل در یک زمان $\nabla \cdot \mathbf{B}$ صفر بوده است، می‌توانیم نتیجه بگیریم $k_1 = 0$. همچنین اگر خود را به میدانها و منابع متغیر با زمان محدود کنیم می‌توانیم k_2 را برابر صفر به دست آوریم.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳۲-۱۰ چون در هادی کامل $\mathbf{E}$ صفر است، $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ یعنی $\mathbf{B}$ نمی‌تواند تغییرات زمانی داشته باشد، یعنی پس از به وجود آمدن (چگونه ؟! به وجود آوردن چنین میدانی خود یک تغییر زمانی در میدان است) از بین نمی‌رود.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳۳-۱۰ از طرفین معادله $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ دیورژانس می‌گیریم

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

با توجه به این که دیورژانس کرل هر میدان برداری صفر است داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

و با استفاده از $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ معادلهٔ پیوستگی به دست می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳۴-۱۰ مولفه مماسی چگالی جریان را می‌توان به راحتی یافت

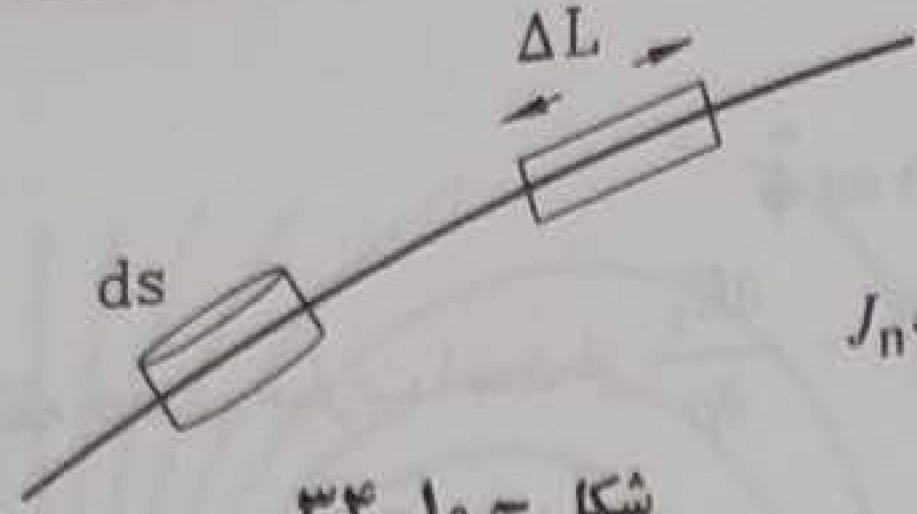
$$\mathbf{J}_{t2} = \sigma_2 \mathbf{E}_{t2} = \sigma_2 \mathbf{E}_{t1} = \sigma_2 (20\,\hat{\mathbf{y}} + 30\,\hat{\mathbf{z}}) \cos 10^9 t$$

$$= (0{,}08\,\hat{\mathbf{y}} + 0{,}12\,\hat{\mathbf{y}}) \cos 10^9 t$$

برای یافتن شرط مرزی برای J_n شکل ح ۱۰-۳۴ را در نظر می‌گیریم. سطح نشان داده شده استوانه بسیار کوچکی با سطح قاعده ΔS و ارتفاع بسیار ناچیز است. جریانی که وارد این استوانه می‌شود $\mathbf{J}_2 \cdot \Delta S\,\hat{\mathbf{n}}$ و جریانی که از آن خارج می‌شود $\mathbf{J}_1 \cdot \Delta S\,\hat{\mathbf{n}}$ است. تفاضل این دو جریان، طبق اصل پیوستگی، باید با تغییر بار سطحی برابر باشد، یعنی

$$\mathbf{J}_2 \cdot \Delta S\,\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{J}_1 \cdot \Delta S\,\hat{\mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\sigma \Delta S)$$

$$J_{n2} - J_{n1} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$



شکل ح ۱۰-۳۴

از طرف دیگر چون $D_{n۲} - D_{n۱} = \sigma$ به دست می‌آوریم

$$J_{n۲} - J_{n۱} = -\frac{\partial D_{n۲}}{\partial t} + \frac{\partial D_{n۱}}{\partial t}$$

و با استفاده از روابط $\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E}$ و $\mathbf{D} = \varepsilon\,E$

$$\sigma_۲ E_{n۲} - \sigma_۱ E_{n۱} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_۱ E_{n۱} - \varepsilon_۲ E_{n۲})$$

داریم $E_{n۱} = ۱۰ \cos ۱۰^۹ t$ و فرض می‌کنیم $E_{n۲} = A \cos ۱۰^۹ t + B \sin ۱۰^۹ t$. با گذاشتن این دو در رابطه بالا به دست می‌آوریم $A = ۴{,}۹۰۴$ و $B = ۰{,}۴۸۱$. پس

$$\mathbf{E}_{n۲} = (۴{,}۹ \cos ۱۰^۹ t + ۰{,}۴۸ \sin ۱۰^۹ t)\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{J}_{n۲} = \sigma_۲ \mathbf{E}_{n۲} = ۴ \times ۱۰^{-۳}\,\mathbf{E}_{n۲}$$

و سرانجام

$$\mathbf{J}_۲ = \mathbf{J}_{t۲} + \mathbf{J}_{n۲} = ۰{,}۰۲\,(\cos ۱۰^۹ t + ۵{,}۶^\circ)\,\hat{\mathbf{z}} + (۰{,}۰۸\,\hat{\mathbf{y}} + ۰{,}۱۲\,\hat{\mathbf{z}}) \cos ۱۰^۹ t$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱۰-۳۵ روی مرزهادی $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$، پس در $\rho = ۵$ mm

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \frac{۲}{۰{,}۰۰۵} \cos ۲\pi z \cos ۴\pi \times ۱۰^۸ t\,\hat{\mathbf{z}} \quad \text{A/m}$$

در $\rho = ۲۰$ mm

$$\mathbf{K} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{H} = \frac{-۲}{۰{,}۰۰۲} \cos ۲\pi \cos ۴\pi \times ۱۰^۸ t\,\hat{\mathbf{z}} \quad \text{A/m}$$

در $z = ۰$

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = -\frac{۲}{\rho} \cos ۴\pi \times ۱۰^۸ t\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \text{A/m}$$

در $z = ۵۰$ cm

$$\mathbf{K} = -\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = -\frac{۲}{\rho} \cos ۴\pi \times ۱۰^۸ t\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \text{A/m}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱۰-۳۶ در محیط عایق $\mathbf{J} = ۰$، پس

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \varepsilon\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{۴\pi}{\rho} \sin ۲\pi z \cos ۴\pi \times ۱۰^۸ t\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

پس $\mathbf{E}$ تنها در جهت $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ مولفه دارد و با انتگرالگیری

$$\mathbf{E} = \frac{۵۰۲}{\rho} \sin ۲\pi z \sin ۴\pi \times ۱۰^۸ t\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

چگالی جریان جابجایی $\partial\mathbf{D} / d\partial$ است

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = ۲{,}۲۵\,\varepsilon_\circ \times ۴\pi \times ۱۰^۸\,\frac{۵۰۲}{\rho} \sin ۲\pi z \cos ۴\pi \times ۱۰^۸ t\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$= \frac{۱۲{,}۵۵}{\rho} \sin ۲\pi z \cos ۴\pi \times ۱۰^۸ t\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱۰-۳۷ با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی را می‌یابیم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I_\circ}{۲\pi\rho} \cos \omega t\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\mu_\circ I_\circ}{۲\pi\rho}\omega \sin \omega t\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

مولفه ϕکرل عبارت است از $\frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial z}$. تقارن در جهت عمودی نشان می‌دهد که مشتق نسبت به z صفرست، پس

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\frac{\mu_\circ I_\circ}{۲\pi\rho}\omega \sin \omega t$$

$$E_z = -\frac{\mu_\circ I_\circ}{۲\pi}\omega \sin \omega t \ln \rho$$

در یافتن B از معادله $\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I$ استفاده کرده‌ایم، حال آنکه معادله مکسول عبارت است از

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

برای صحیح بودن B به دست آمده جریان جابجایی باید از جریان هدایتی بسیار کوچکتر باشد. همچنین $\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \mathbf{E}$ و $\partial \mathbf{D} / \partial t$ عبارت است از

$$\mathbf{J}_D = \frac{-\mu_\circ \varepsilon_\circ I_\circ}{۲\pi}\omega^۲ \cos \omega t \ln \rho$$

$I_D = \int \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{s}$ روی سطح داخل مسیر آمپر عبارت است از

$$I_D = -\mu_\circ \varepsilon_\circ \omega^۲ I_\circ \cos \omega t \int \rho \ln \rho\, d\rho$$

چون مقدار انتگرال نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچک است، برای چشم‌پوشی از جریان جابجایی باید داشته باشیم

$$\omega^۲ \mu_\circ \varepsilon_\circ << ۱$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۰-۳۸ در فضای آزاد $\rho = \circ$ و $J = \circ$ پس $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\mathbf{y}} = -\mu_\circ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

پس H فقط مولفه در جهت دارد و

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{E_\circ}{\mu_\circ}\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

با انتگرالگیری داریم

$$H_y = \frac{E_\circ}{\mu_\circ c}\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

نسبت دامنه میدان الکتریکی به دامنه میدان مغناطیسی عبارت است از

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \mu_\circ c = ۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times ۳ \times ۱۰^۸ = ۱۲۰\pi = ۳۷۷\,\Omega$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱۰-۳۹ ابتدا $\nabla \times \mathbf{E}$ را حساب می‌کنیم

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{۱}{r}\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{-۰{,}۵}{r}\sin\theta \cos(۱۵ \times ۱۰^۸ t - ۵r)\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\mu_\circ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

پس H تنها مولفه ϕ دارد و با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$\mathbf{H} = \frac{۲{,}۶۵ \times ۱۰^{-۴}}{r}\sin\theta \sin(۱۵ \times ۱۰^۸ t - ۵r)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$