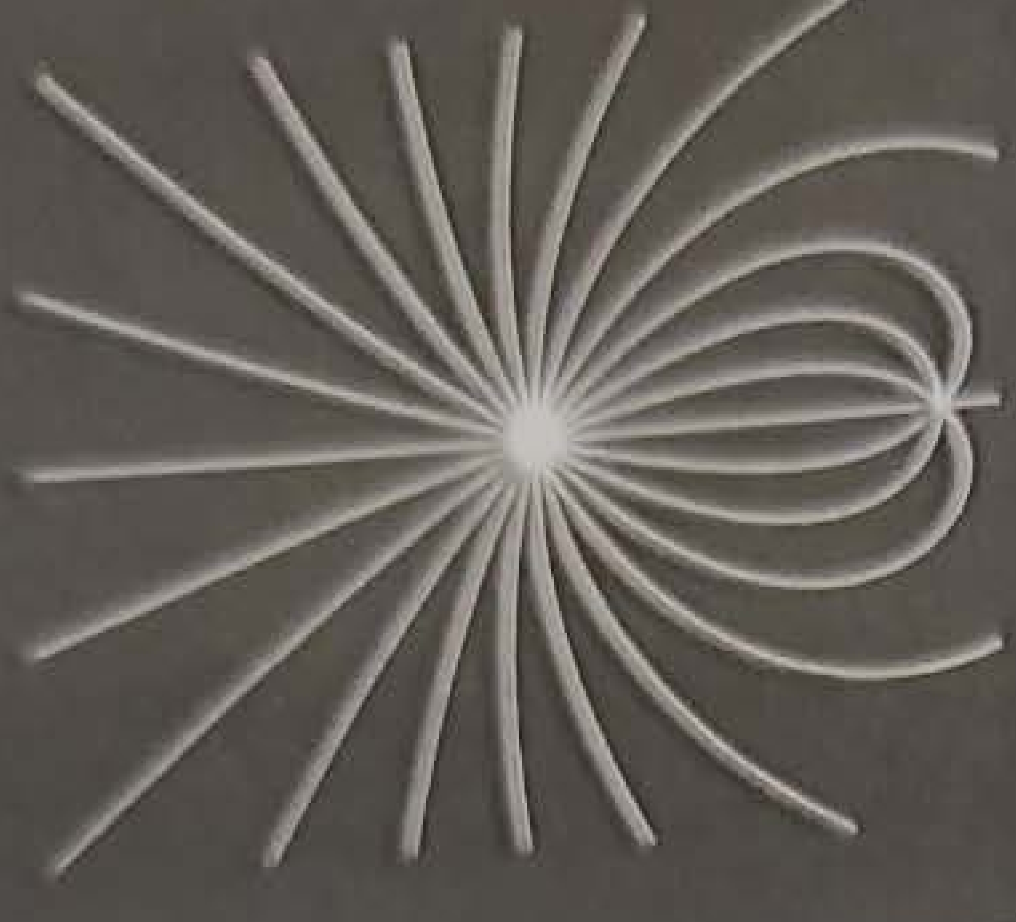


۹ القاکنایی، انرژی، و نیرو

۹-۱ القاکنایی

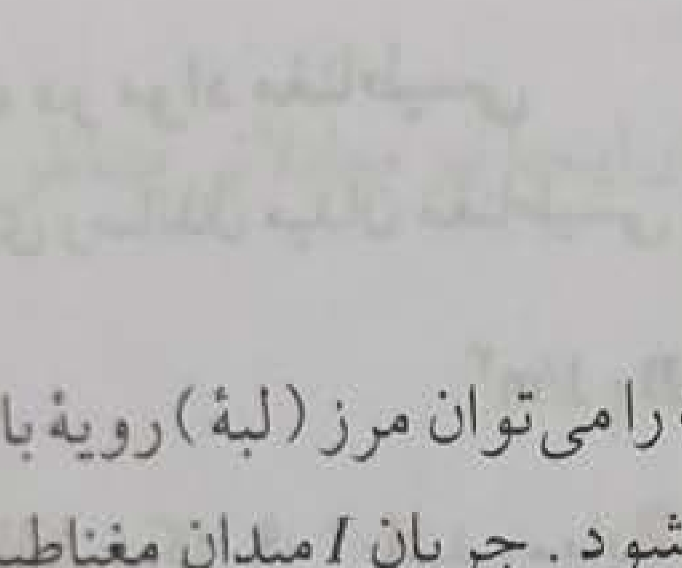
حلقه‌ای را در نظر بگیرید که جریان I از آن بگذرد. این حلقه را می‌توان مرز (لبهٔ) رویهٔ بازی دانست که بردار عمود بر سطح آن موافق با قاعدهٔ دست راست تعریف می‌شود. جریان I میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را در فضای اطراف ایجاد می‌کند. **گذر شار** از رویهٔ S به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Lambda = \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} \qquad (۱-۹)$$

نسبت گذر شار به جریان I **خود القاکنایی** حلقه تعریف می‌شود

$$L = \frac{\Lambda}{I} \qquad (۱-۹)$$

چون Λ با $\mathbf{B}$، و $\mathbf{B}$ با I متناسب است، L به مقدار جریان I بستگی ندارد و تنها تابعی از شکل حلقه و تراوایی محیطی که در آن قرار دارد است.



شکل ۹-۱ حلقهٔ جریان.

۹-۲ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

اگر در ناحیه‌ای از فضا میدان مغناطیسی وجود داشته باشد، چگالی انرژی ذخیره شده در آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$w_H = \tfrac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \qquad (۳-۹)$$

در محیطهای خطی $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ و چگالی انرژی به صورتهای معادل زیر بیان می‌شود:

$$w_H = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (۴-۹)$$

برای یافتن انرژی کل ذخیره شده در فضا باید از چگالی انرژی انتگرال گرفت.

کل انرژی مغناطیسی یک جریان را می‌توان از روابط زیر به دست آورد

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\, dv \quad (۵-۹)$$

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{K}\cdot\mathbf{A}\, ds \quad (۶-۹)$$

$$W = \frac{1}{2}\int \mathbf{I}\cdot\mathbf{A}\, dl \quad (۷-۹)$$

که $\mathbf{A}$ پتانسیل ناشی از جریان است.

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر نیز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (۴-۹)$$

مقایسهٔ معادلات بالا با معادلات (۴-۵) تا (۴-۹) آموزنده است.

۹-۳ توان تلف شده در مواد مغناطیسی

چگالی انرژی لازم برای رساندن میدان مغناطیسی یک محیط از ۰ به B از انتگرال زیر به دست می‌آید

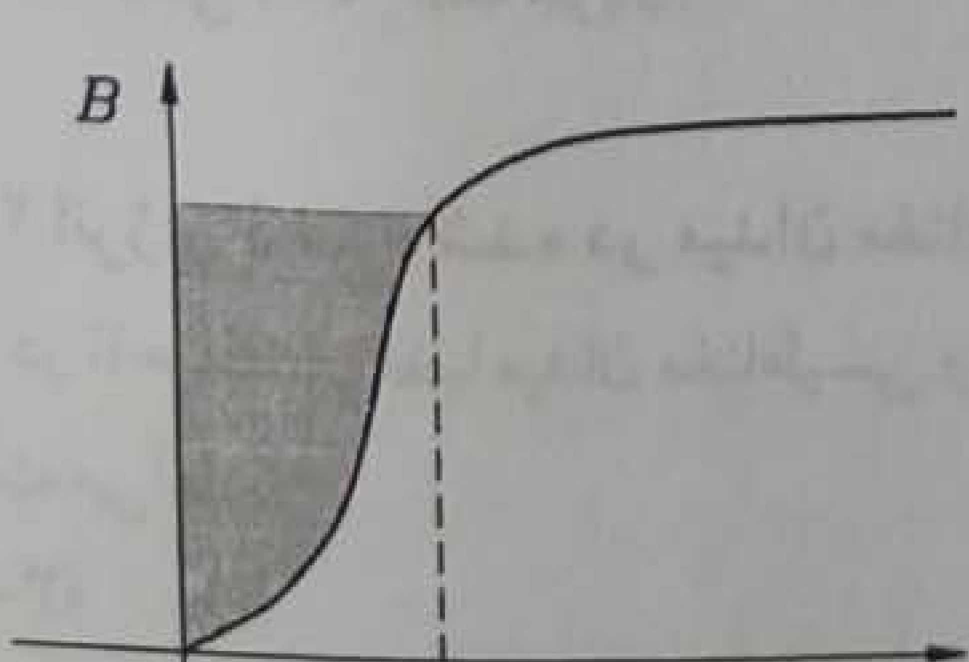
$$W = \int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B} \quad \mathrm{J/m^3} \quad (۹-۹)$$

اگر منحنی $B - H$ مطابق شکل ۹-۲ باشد، معادلهٔ (۹-۹) مساحت سطح هاشور زدهٔ شکل را نشان می‌دهد. اگر منحنی $B - H$ دارای هیستریزیس باشد، مثلاً وقتی ماده از جنس فرومغناطیس است، در برگشت از میدان B به ۰ منحنی دیگری طی می‌شود و انرژی لازم با منفی انرژی لازم برای رساندن میدان از ۰ به B برابر نیست. تفاوت این دو مقدار چگالی انرژی تلف شده در محیط را نشان می‌دهد. به روش ترسیمی می‌توان نشان داد که اگر میدان از B_1 به B_2 برسد و دوباره به B_1 برگردد، چگالی انرژی تلف شده با مساحت حلقهٔ هیستریزیس طی شده برابر است. بنابراین تلفات در مواد فرومغناطیس نرم، که حلقهٔ هیستریزیس لاغری دارند، کمتر از مواد فرومغناطیس سخت است. انرژی تلف شده باعث گرم شدن ماده می‌شود.

۹-۴ نیروی وارد بر جریان

اگر باری با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ حرکت کند، نیروی مغناطیسی زیر به آن وارد می‌شود

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} \quad (۱۰-۹)$$



شکل ۹-۲ سطح خاکستری با انرژی تلف شده متناسب است.

این معادله را **معادلهٔ لورنتز** می‌نامند. جریان از حرکت بار ناشی می‌شود، پس به جریان واقع در میدان مغناطیسی نیز نیرو وارد می‌شود. این نیرو از روابط زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, dv \qquad \text{جریان حجمی} \qquad (۹\text{-}۱۱)$$

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{K} \times \mathbf{B}\, ds \qquad \text{جریان سطحی} \qquad (۹\text{-}۱۲)$$

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{I} \times \mathbf{B}\, dl \qquad \text{جریان خطی} \qquad (۹\text{-}۱۳)$$

معادلهٔ آخر برای یک قطعه سیم راست به طول L به معادلهٔ معروف زیر می‌انجامد

$$F = BIL \qquad (۹\text{-}۱۴)$$

نیروی وارد بر یک حلقهٔ جریان صفر است، ولی میدان مغناطیسی می‌تواند به چنین حلقه‌ای گشتاور وارد کند. گشتاور وارد بر دو قطبی واقع در میدان مغناطیسی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{T} = \mathbf{B} \times \mathbf{m} \qquad (۹\text{-}۱۵)$$

۹-۵ نیروی مغناطیس وارد بر اجسام

میدان مغناطیسی به مواد واقع در آن نیرو وارد می‌کند. در اینجا نیز معادلاتی متناظر با معادلات (۴-۱۵) و (۴-۱۶) داریم

$$\mathbf{F} = -\nabla W \qquad \text{شار ثابت} \qquad (۹\text{-}۱۶)$$

$$\mathbf{F} = \nabla W \qquad \text{جریان ثابت} \qquad (۹\text{-}۱۷)$$

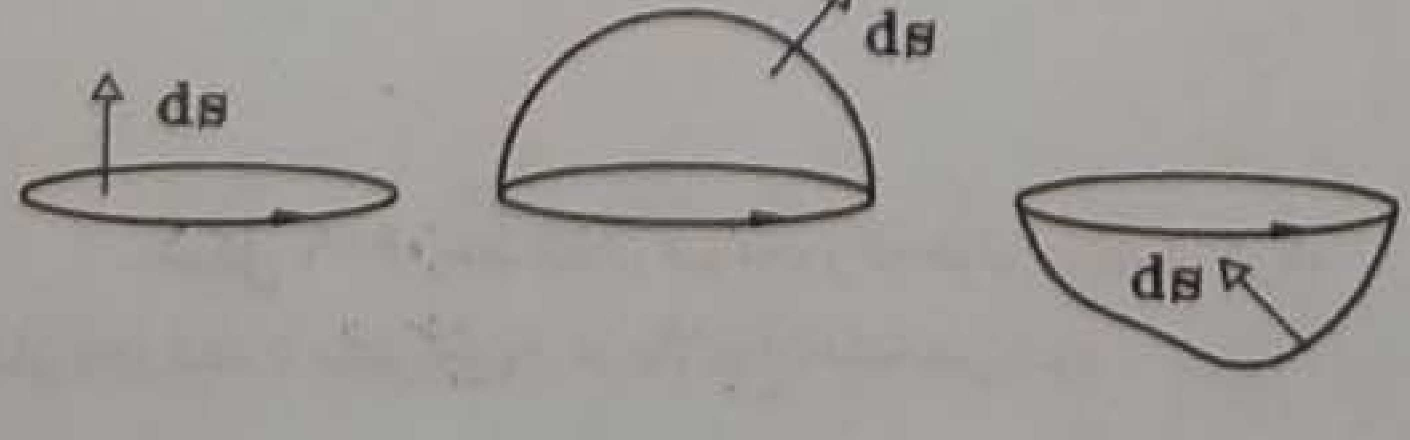
۹-۶ القاکنایی متقابل

وقتی دو حلقهٔ جریان در مجاورت هم قرار دارند، با عبور جریان از یکی میدانی تولید می‌شود که انتگرال آن روی سطح در برگرفته شده توسط حلقهٔ دوم، شار گذرنده از آن حلقه را به دست می‌دهد. می‌گوییم بین دو حلقه القاکنایی متقابل وجود دارد. این القاکنایی به صورت زیر تعریف می‌شود

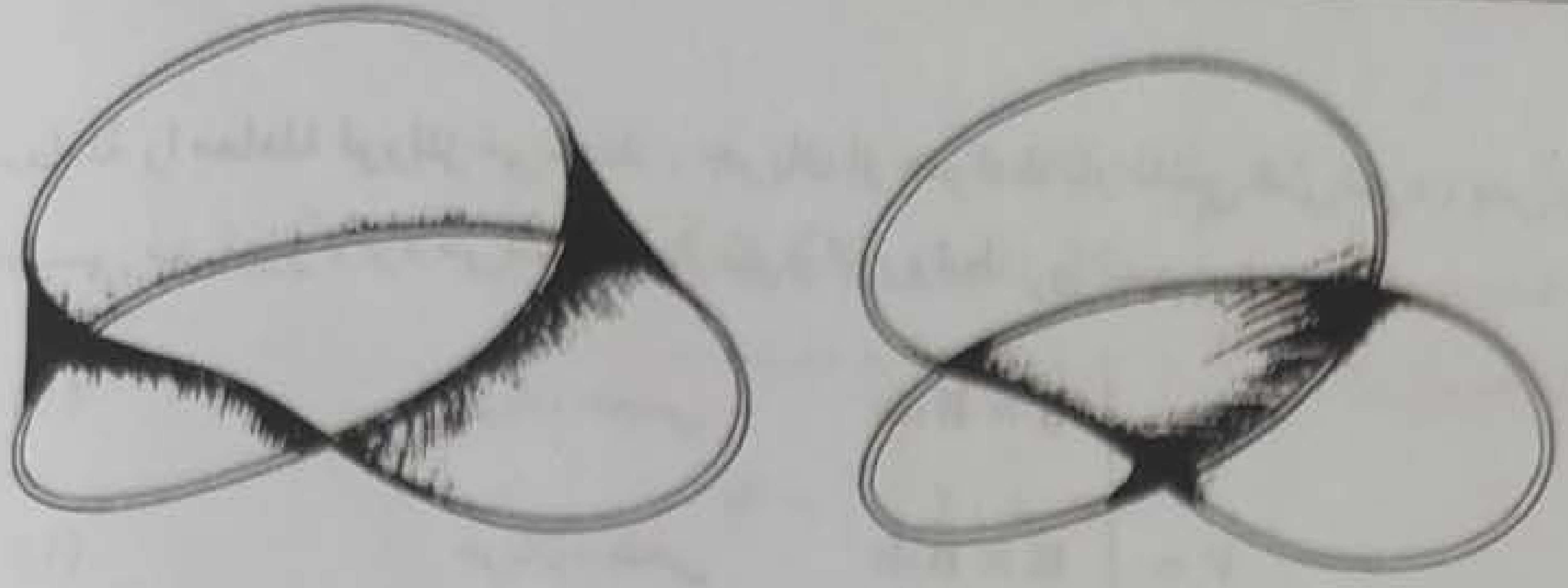
$$M_{۲۱} = \frac{\Phi_{۲۱}}{I_۱} = \frac{\mathbf{B}_۱ \cdot d\mathbf{s}}{I_۱} \qquad (۹\text{-}۱۸)$$

حل مسئله

مشکلترین بخش حل مسائل مربوط به یافتن القاکنایی، تشخیص رویه‌ای است که جریانها مرز آن را تشکیل می‌دهند. حتی در مورد ساده‌ای مانند حلقهٔ شکل ۹-۱ نیز بی نهایت رویه وجود دارد که حلقه مرز آن باشد. یک حلقهٔ دایره‌ای در نظر بگیرید. شکل ۹-۳ سه رویه را نشان می‌دهد که این دایره می‌تواند لبهٔ آن به حساب آید.



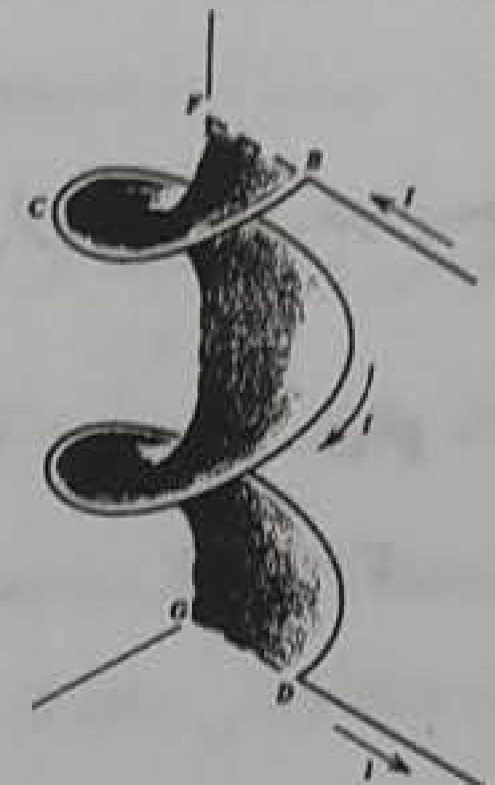
شکل ۹-۳ حلقهٔ جریان و سه رویه که جریان لبهٔ آن را تشکیل می‌دهد.



شکل ۹-۴

البته بی نهایت بودن رویه‌ها مشکل ساز نیست، ما برای حل مسئله ساده‌ترین رویهٔ ممکن را برمی‌گزینیم. مشکل در مواقعی پیش می‌آید که برای حلقه رویهٔ ساده‌ای وجود ندارد، و در بعضی مواقع حتی تصور رویه نیز مشکل است. شکل ۹-۴ دو مورد را نشان می‌دهد.

در اکثر موارد با کمی دقت می‌توان رویهٔ مورد نظر را یافت. در مواردی که از لحاظ عملی مهم است و نمی‌توان رویهٔ ساده‌ای تعریف کرد، معمولاً به تقریب متوسل می‌شویم. یکی از این موارد سیملوله‌ها هستند. القاگرها معمولاً به صورت شکلهای مختلف سیملوله‌ای ساخته می‌شوند. شکل ۹-۵ بخشی از یک سیملوله را نشان می‌دهد. می‌بینید که در این مورد نیز تعریف سطح رویه‌ای که سیملوله مرز آن است، مشکل می‌باشد.



شکل ۹-۵

اگر سیملوله به صورت فشرده پیچیده شده، و سیمهای آن نازک باشند می‌توان گذر شار را با مجموع شارهایی که از حلقه‌های تقریباً دایره‌ای سیملوله می‌گذرند برابر گرفت و نوشت

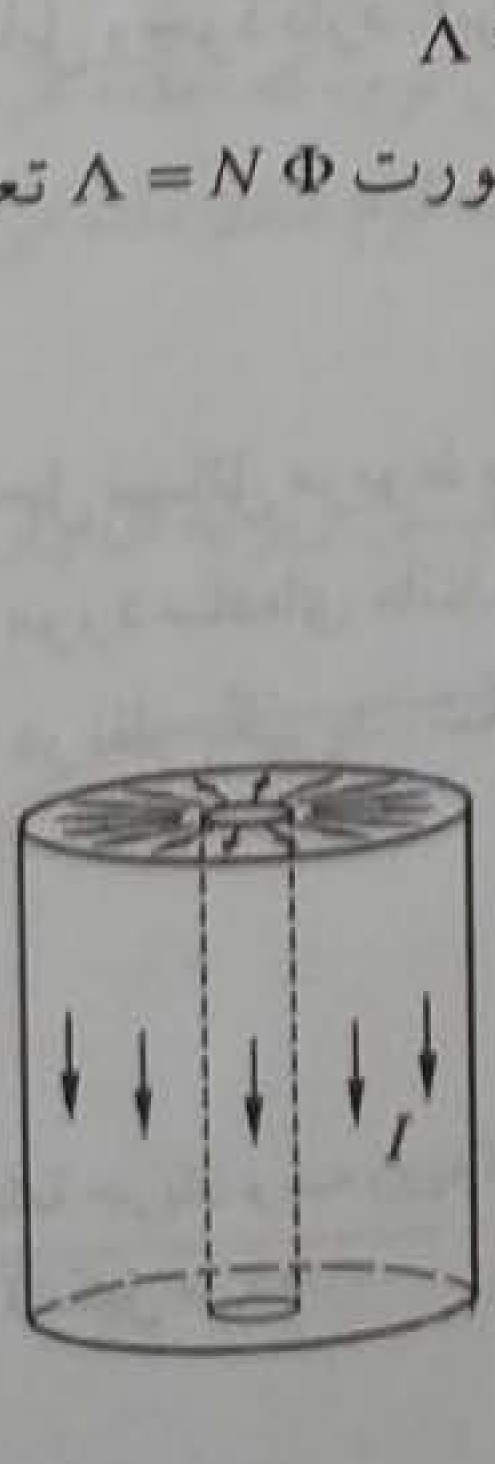
(۱۳-۹)

$$\Lambda = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots + \Phi_N$$

به همین خاطرست که در بعضی کتابها گذر شار را در این موارد به صورت $\Lambda = N\,\Phi$ تعریف می‌کنند که N تعداد دور حلقه‌هاست.

مثال ۱

القاکنایی در واحد طول یک خط انتقال هم محور را بیابید.



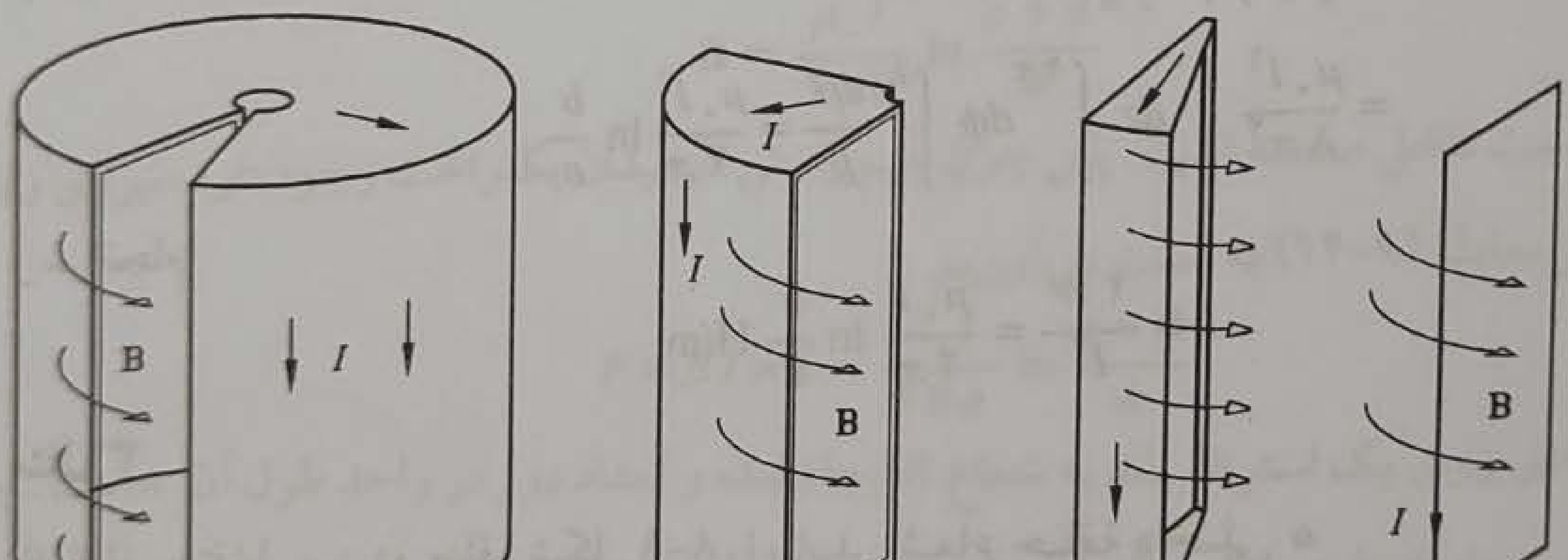
شکل ۹-۶ خط انتقال هم محور که طول آن بسیار کوتاه نشان داده شده تا مسیر جریان در بالای آن مشخص شود.

حل

خط انتقال هم محور (کواکسیال) از دو استوانهٔ هم محور هادی تشکیل شده است. جریان از سطح هادی داخلی می‌رود و از سطح داخلی هادی بیرونی برمی‌گردد. در ابتدا و انتهای خط منبع و بار وجود دارند و مسیر بستهٔ جریان را تشکیل می‌دهند. در شکل ۹-۶ یک انتهای خط به صورت ایده‌آل نشان داده شده است.

آیا در اینجا حلقه‌ای داریم؟ گذرِ شارِ کدام سطح را باید حساب کنیم؟ جریان از مرز کدام رویه می‌گذرد؟ برای پاسخ به این سوالها شکل ۹-۷ را در نظر بگیرید.

این شکل مراحل تبدیل یک حلقه به کابل هم محور را نشان می‌دهد. ابتدا حلقهٔ شکل ۹-۷ الف در شکل ۹-۷ ب کمی ضخیمتر شده‌است. همچنان می‌توانیم شار گذرنده از این حلقه را بدون هیچ ابهامی تعریف کنیم. در شکل ج هادی تشکیل دهندهٔ حلقه به صورتی غیر یکنواخت ضخیم شده است، به نحوی که بخشهایی از هادیهای داخلی و بیرونی کابل هم محور را می‌پوشانند. با اینکه حلقهٔ حاصل از یک رشتهٔ نازک تشکیل نشده‌است، ولی اگر میدان به نحوی باشد که هیچیک از خطوط میدان از سطح تشکیل دهندهٔ حلقه نگذرد، باز هم شار گذرنده از حلقه بدون ابهام قابل تعریف است. شکل د یک مرحلهٔ دیگر از ضخیم شدن غیر یکنواخت حلقه را نشان می‌دهد. اگر میدان به صورت تصویر شده در این شکل باشد، باز هم چون میدان با دیوارهٔ حلقه موازی است، گذر شار آن مقداری قابل تعریف دارد.



شکل ۹-۷ مراحل تبدیل یک حلقهٔ جریان به کابل هم محور.

سرانجام به شکل ۹-۶ می‌رسیم که همان کابل هم محور است، اگر میدان به صورت شعاعی باشد، از بدنهٔ حلقه شاری نمی‌گذرد و شار گذرنده از سطح حلقه را (البته قبول دارید که این حلقهٔ عجیبی است) می‌توان به صورت شاری که از یکی از مقاطع کابل می‌گذرد به دست آورد. به هم پیوستن دو لبهٔ شکل ۹-۷ د چیزی را تغییر نمی‌دهد، پس چون میدان به صورت زیرست

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (۹-۱۸)$$

داریم

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\rho\, dz\, \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi\rho}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho}\int_\circ^h dz = \frac{\mu_\circ I}{2\pi} h \ln\frac{b}{a}$$

میدان بیان شده در معادلهٔ (۹-۱۸) میدان یک کابل هم محورست. پس برای تمام حلقه‌های شکل ۹-۷

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi} \ln \frac{b}{a} \ \mathrm{H}$$

به شرطی که مکرراً در بالا تکرار شد توجه کنید. البته این شرط تنها در مورد کابل هم محور صحیح است، نه دیگر حلقه‌های شکل ۹-۷. پس القاکنایی به دست آمده در بالا القاکنایی خط هم محوری به طول h است و

$$l = \frac{L}{h} = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi} \ln \frac{b}{a} \ \mathrm{H/m}$$

در برخی موارد، مخصوصاً در مواردی که شکل حلقه‌ای القاگر قابل تشخیص نیست، استفاده از رابطهٔ انرژی، یعنی $W = \frac{۱}{۲} L I^۲$، یافتن القاکنایی را ساده تر می‌کند.

مثال ۲

القاکنایی در واحد طول خط هم محور را با استفاده از رابطهٔ انرژی بیابید.

حل

چگالی انرژی عبارت است از

$$w_H = \frac{۱}{۲\mu_\circ} B^۲ = \frac{\mu_\circ I^۲}{۸\pi^۲\rho^۲}$$

انرژی ذخیره شده در یک متر خط هم محور را می‌یابیم

$$W = \int_\circ^۱ \int_\circ^{۲\pi} \int_a^b w_H \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= \frac{\mu_\circ I^۲}{۸\pi^۲} \int_\circ^۱ dz \int_\circ^{۲\pi} d\phi \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_\circ I^۲}{۴\pi} \ln \frac{b}{a}$$

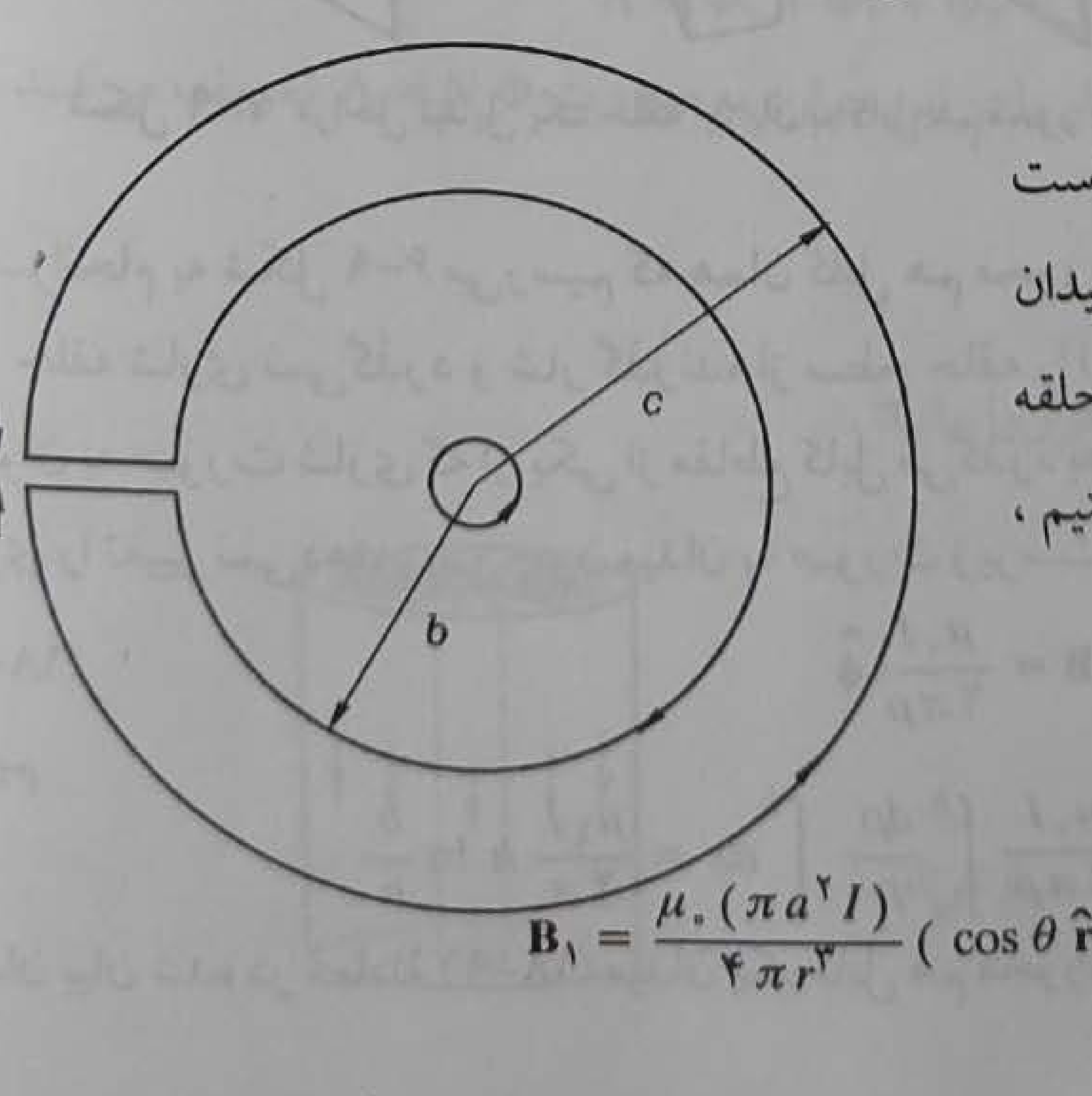
و سرانجام

$$l = \frac{۲W}{I^۲} = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi} \ln \frac{b}{a} \ \mathrm{H/m}$$

مثال ۳

القاکنایی متقابل بین دو حلقهٔ شکل ۹-۸ را بیابید. شعاع حلقهٔ داخلی a است، $b >> a$ و t بسیار کوچک است.

حل چون حلقهٔ داخلی خیلی کوچک است می‌توان میدان آن را در داخل حلقهٔ بیرونی میدان یک دو قطبی دانست. اگر محور مشترک دو حلقه را محور z و مرکز حلقه‌ها را مبدا فرض کنیم، میدان حلقه‌ای عبارت است از



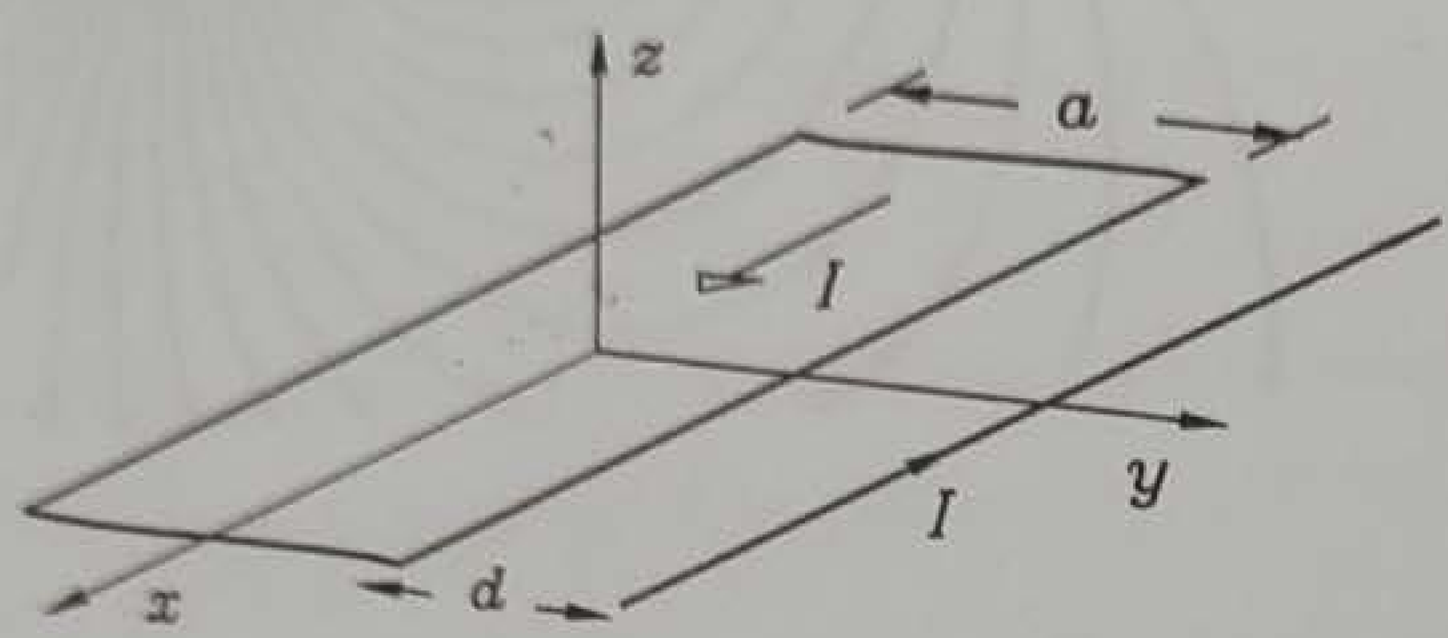
شکل ۹-۸

$$\mathbf{B}_۱ = \frac{\mu_\circ (\pi a^۲ I)}{۴\pi r^۳} (\cos\theta \, \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

در سطح حلقهٔ بیرونی $\theta = \pi/2$ و $\hat{\theta}$ $\mathbf{B}_1 = (\mu_0 a^2 I / 4\pi r^3)$. همچنین $\mathbf{ds}_2 = r\,d\phi\,dr\,(-\hat{\theta})$ (به جهت مسیر حلقهٔ بیرونی توجه کنید). پس

$$\Phi_{21} = \int \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{ds}_2 = \frac{-\mu_0 a^2 I}{4} \int_b^c \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\phi$$
$$= \frac{-\mu_0 a^2 I \pi}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

مثال ۴ از نواری به عرض a جریان I با چگالی یکنواخت می‌گذرد. سیم حامل جریان I همصفحه با نوار و به فاصلهٔ d از لبهٔ آن قرار دارد و جریان آن خلاف جهت جریان نوار است. نیروی وارد بر هر متر سیم چقدر است؟



شکل ۹-۹

حل میدانی که نوار در محل قرار گرفتن سیم ایجاد می‌کند (با توجه به حل مسئلهٔ ۷-۷) عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+d}{d}$$

جهت میدان به سمت داخل صفحه است. پس چون سیم راستی در میدان یکنواخت وجود دارد، نیروی وارد بر هر متر آن را از معادلهٔ (۹-۱۴) به دست می‌آوریم

$$F = BI \times 1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+d}{d}$$

مثال ۵ سیملوله‌ای روی یک استوانهٔ بلند به شعاع R ایجاد شده و تعداد دور در واحد طول آن n است. چه فشاری بر سطح سیملوله وارد می‌شود؟

حل اگر محور سیملوله را محور z بگیریم، میدان مغناطیسی داخل آن در جهت z است. جریان معادل سطحی $\mathbf{K} = nI$ روی بدنهٔ سیملوله وجود دارد، بنابراین نیروی وارد بر واحد سطح سیملوله عبارت است از (معادلهٔ ۹-۱۲)

$$p = \frac{\mathbf{F}}{ds} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} = nI\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \mu_0 nI\hat{\mathbf{z}} = \mu_0 n^2 I^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

این فشار (نیرو بر واحد سطح) در جهت افزایش حجم سیملوله عمل می‌کند.

روش دیگر حل این مسئله استفاده از روش کار مجازی است. چون جریان ثابت است از معادلهٔ (۹-۱۷) استفاده می‌کنیم. میدان داخل سیملوله عبارت است از $B = \mu_0 nI$. اگر بخشی از سیملوله به طول h را در نظر بگیریم، انرژی ذخیره شده در آن به صورت زیر به دست می‌آید

$$W = \text{حجم} \times \text{چگالی انرژی} = (\pi \rho^2 h) \times \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2\right)$$

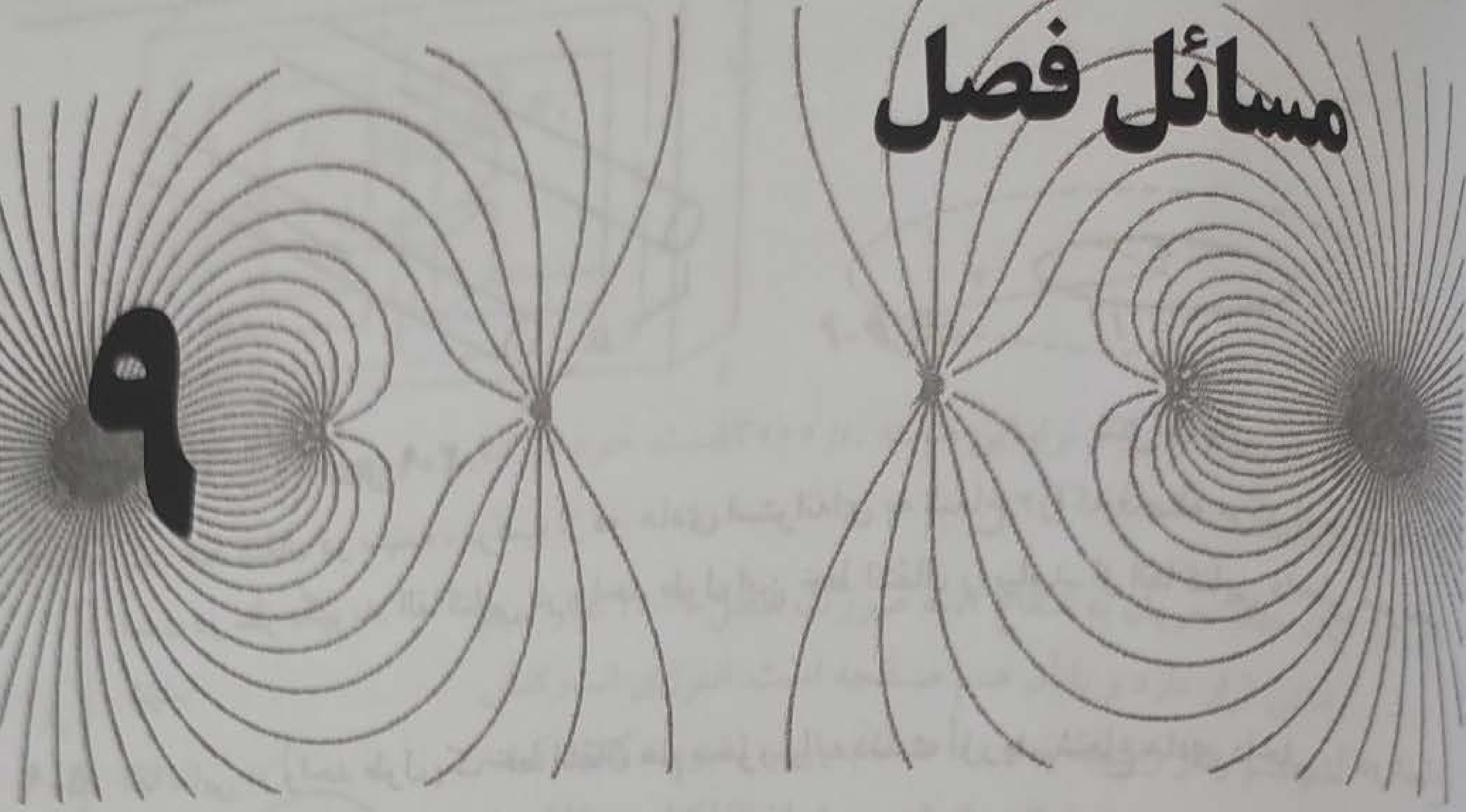
نیروی وارد بر این استوانه عبارت است از

$$\mathbf{F} = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial \rho}\hat{\mathbf{\rho}} = (2\pi\rho h)\left(\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)\hat{\mathbf{\rho}}$$

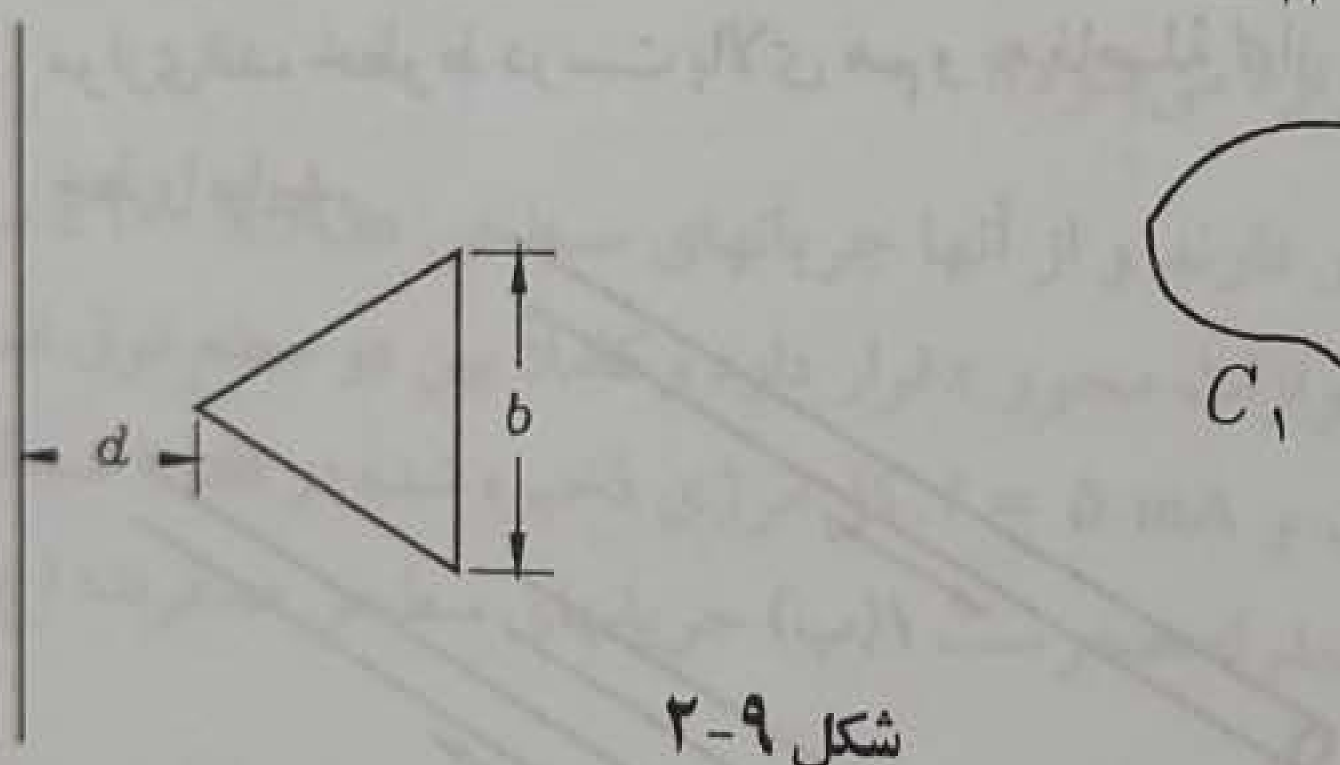
این نیرو در جهت $\hat{\mathbf{\rho}}$ به مساحت جانبی استوانه، یعنی $(2\pi\rho h)$، وارد می‌شود. پس فشار وارد بر سطح عبارت است از

$$\frac{\mathbf{F}}{2\pi\rho h} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \mu_0 n^2 I^2 \hat{\mathbf{\rho}}$$

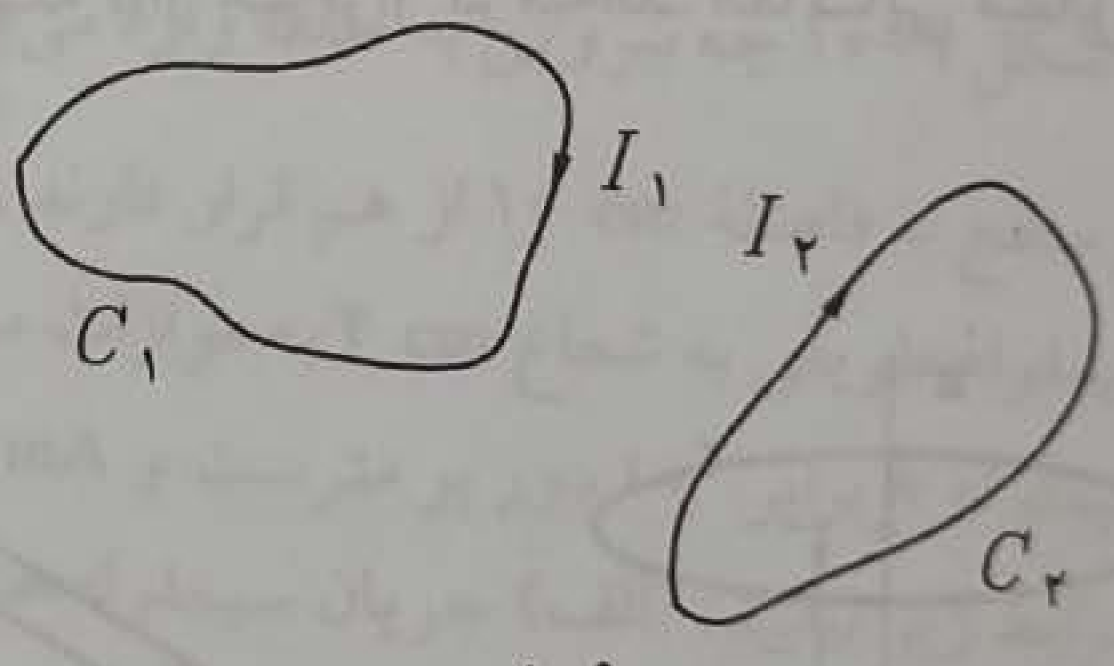
مسائل فصل ۹



۹-۱ بدون استفاده از مفهوم انرژی ثابت کنید که در صورت خطی، همگن و یکسانگرد بودن محیط بین دو حلقه جریان دلخواه داریم $L_{۱۲} = L_{۲۱}$.



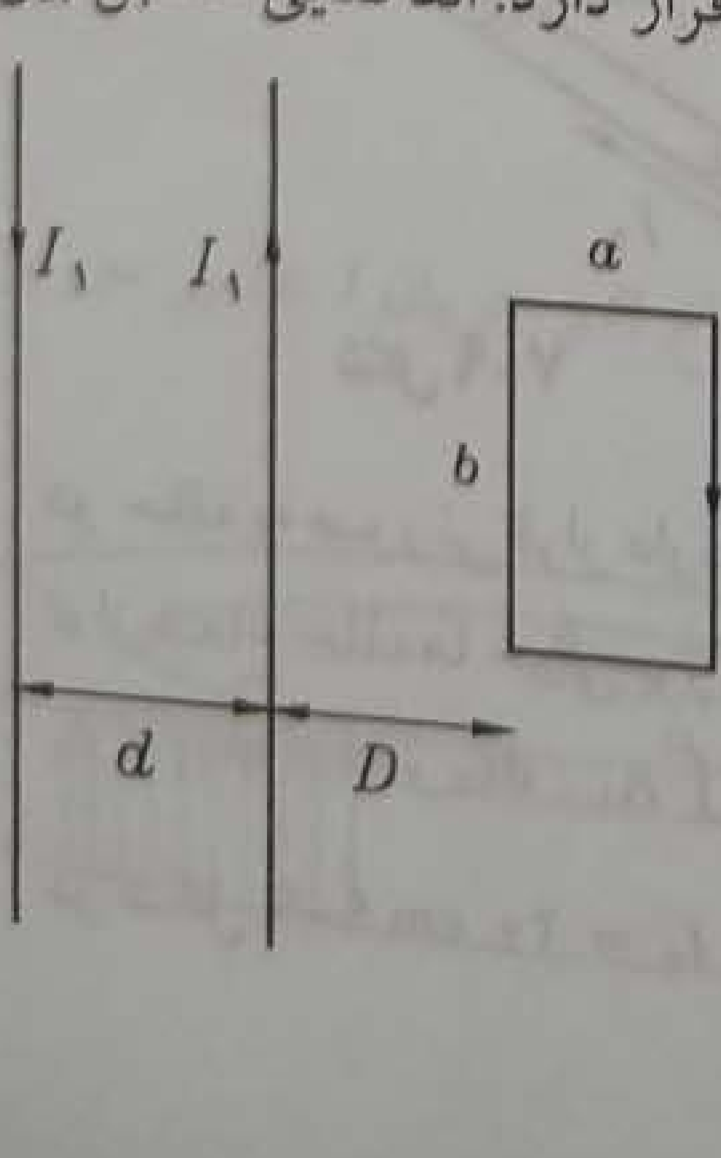
شکل ۹-۲



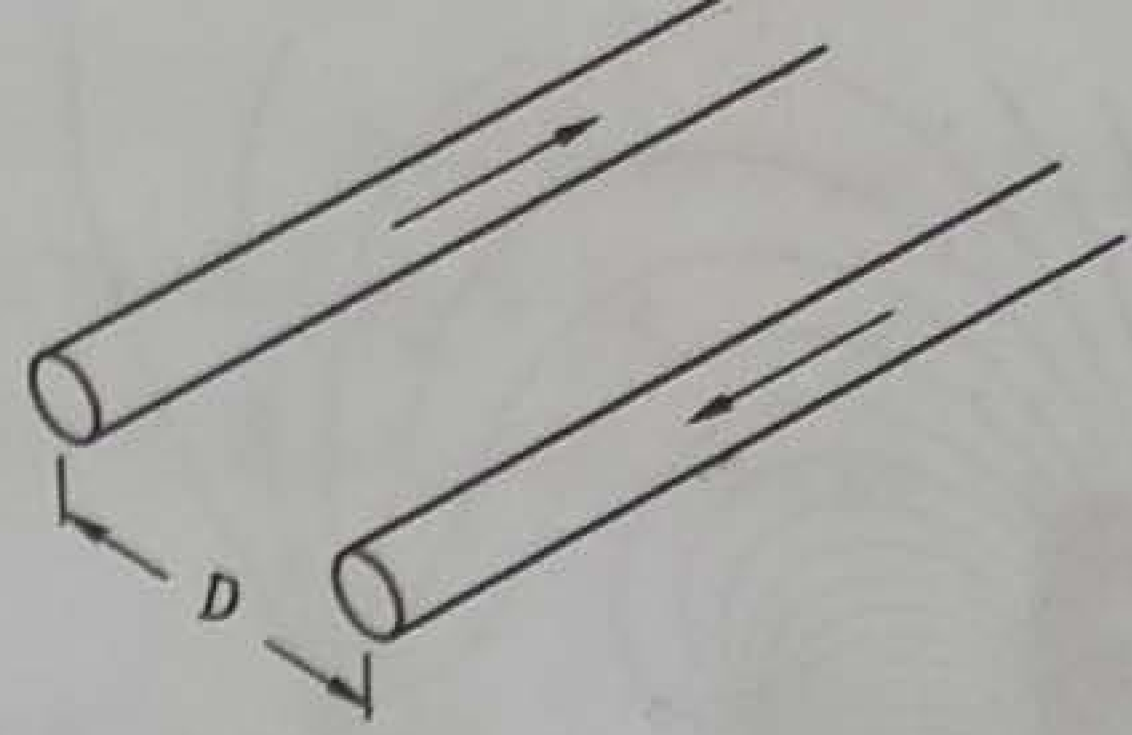
شکل ۹-۱

۹-۲ القاکنایی متقابل سیم بی‌نهایت و مثلث متساوی الاضلاع شکل ۹-۲ را بیابید.

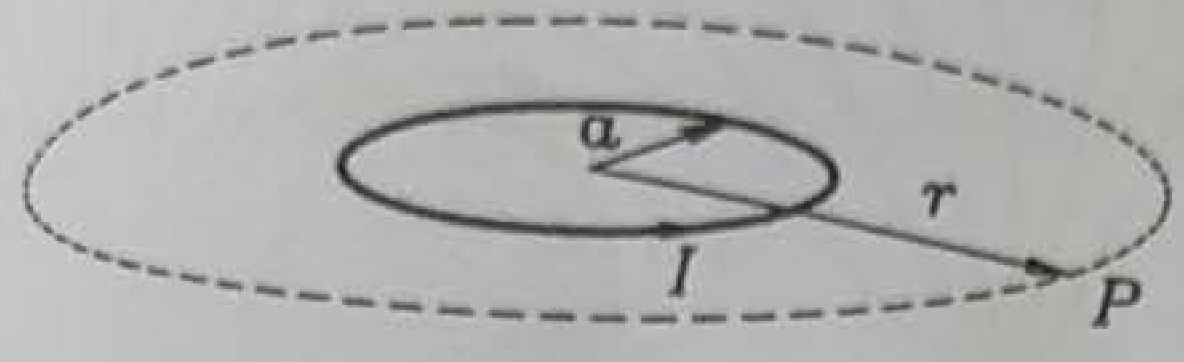
۹-۳ حلقهٔ مستطیل شکلی همصفحه با یک خط انتقال دو سیمه قرار دارد. القاکنایی متقابل بین حلقه و خط انتقال را بیابید.



شکل ۹-۳



شکل ۹-۴



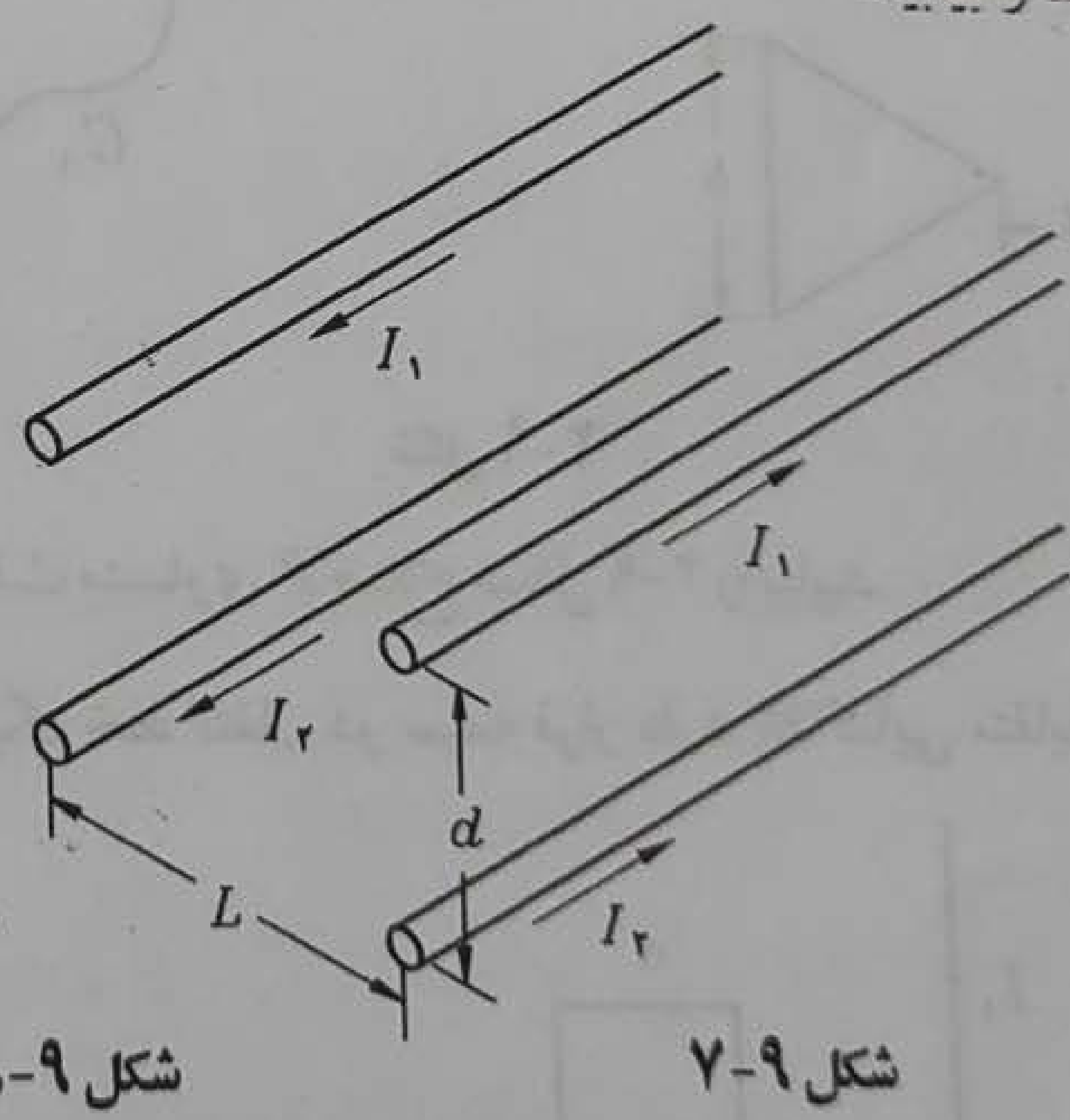
شکل ۹-۶

۹-۴ یک خط انتقال دو سیمه، مرکب از دو هادی استوانه‌ای به شعاع r را که فاصلهٔ مرکز تا مرکزشان D است در نظر بگیرید. القاکنایی در واحد طول این خط انتقال را بیابید. از القاکنایی داخلی صرفنظر کنید.

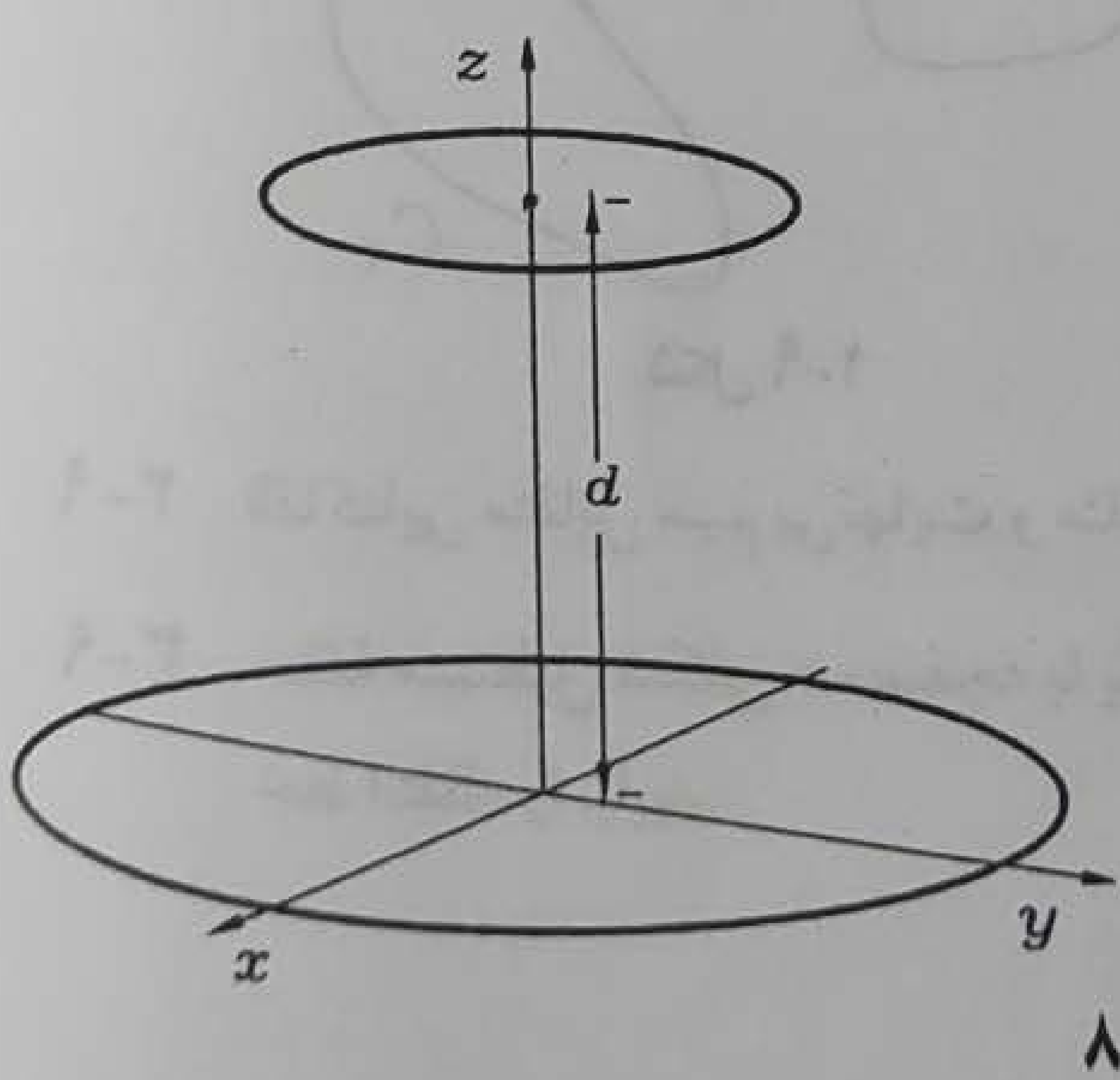
۹-۵ القاکنایی در واحد طول یک خط انتقال هم محور را به دست آورید. شعاع هادی داخلی را a و شعاع هادی خارجی را b فرض کنید.

۹-۶ با استفاده از مفهوم القاکنایی متقابل و با توجه به این که میدان در مرکز یک حلقه جریان $B = \mu_0 I / 2R$ است، میدان حلقه جریان را در نقاط دور واقع در صفحهٔ حلقه بیابید.

۹-۷ دو زوج خط دو سیمه به صورت شکل ۹-۷ قرار گرفته‌اند. صفحاتی که از هر زوج می‌گذرند با هم موازی‌اند، خطوط درست بالای هم و به فاصلهٔ d از هم قرار گرفته‌اند. القاکنایی متقابل بین دو زوج خط را بیابید.



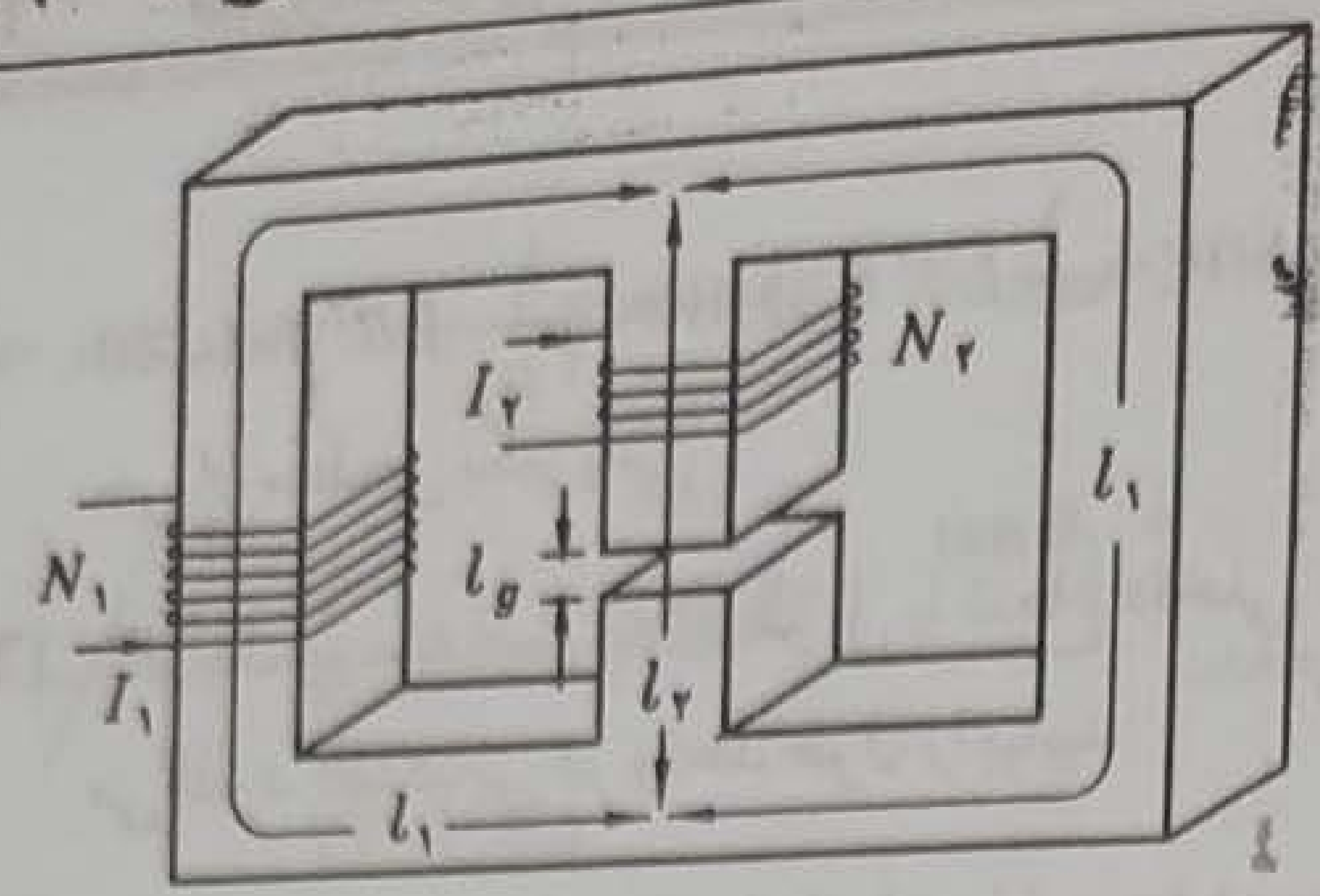
شکل ۹-۷



شکل ۹-۸

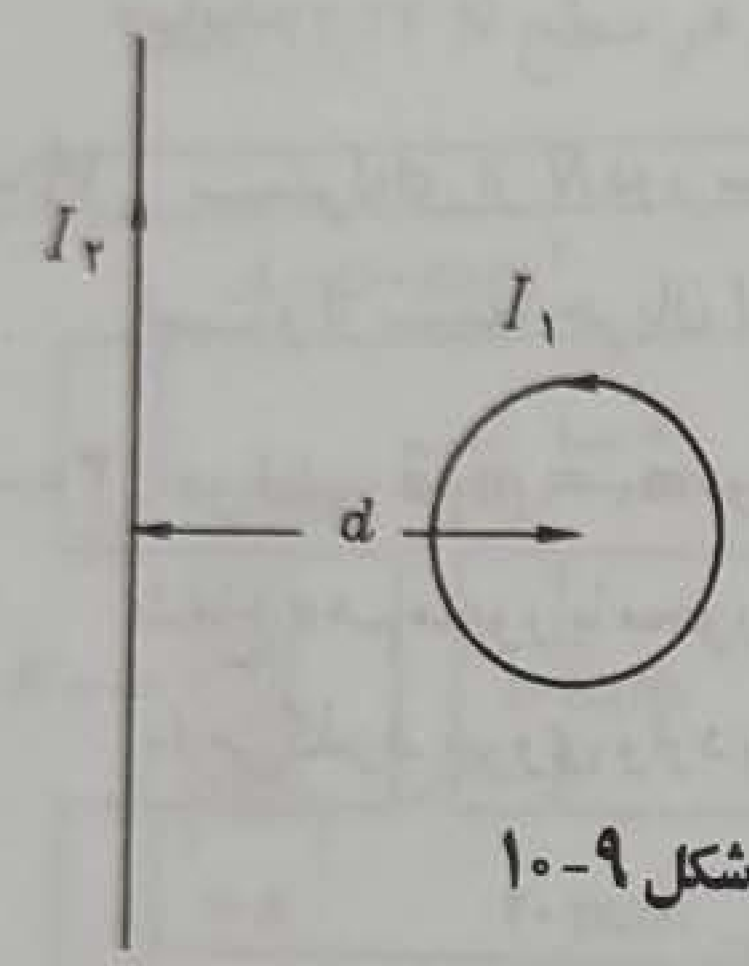
۹-۸ دو حلقه به صورتی قرار دارند که صفحات در بردارندهٔ آنها موازی و به فاصلهٔ d از هم قرار دارد. اگر d از شعاع حلقه‌ها خیلی بزرگتر باشد، القاکنایی بین دو حلقه چه خواهد بود؟ جواب را از دو روش $M = \phi_{21} / I_1$ و $M = \frac{1}{I_1} \int \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{dl}_2$ بیابید. شعاع حلقه‌ها a و b است.

۹-۹ در شکل ۹-۹ $l_1 = 2\, l_2 = 20$ cm و $l_g = 0.5$ mm. سطح مقطع تمام قسمتها 2π cm^2 است و



شکل ۹-۹

$N_1 = 2N_2 = 10$. تراوایی هسته $3000\mu_0$ است. خود القاکنایی سیم پیچها و القاکنایی متقابل آنها را بیابید.



شکل ۹-۱۰

۹-۱۰ یک حلقهٔ جریان به شعاع R به صورت شکل ۹-۱۰ کنار سیم راستی قرار دارد و با آن هم صفحه است. انرژی اندرکنش سیستم را از رابطهٔ $U = I_1 \phi_{12}$ بیابید. (توجه کنید که، $\phi_{21} = I_2 M$، پس با یافتن انرژی می‌توان القاکنایی متقابل بین سیم و حلقه را نیز یافت).

راهنمایی: انتگرال معین زیر به ازای $-1 < \beta < 1$ درست است

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 + \beta \cos\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

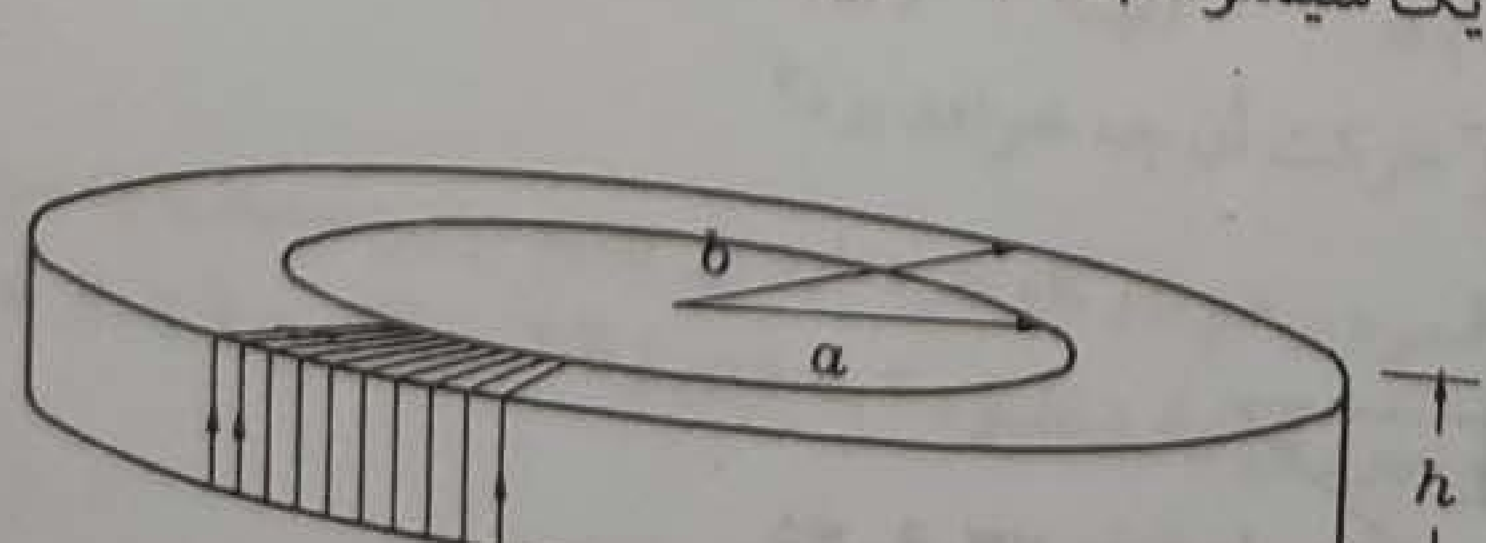
۹-۱۱ در شکل ۹-۱۰ چه نیرویی به حلقه وارد می‌شود؟

۹-۱۲ دو سطح به فاصلهٔ ۱۰ cm از هم قرار دارند و از آنها جریانهای سطحی $\pm 100\ \hat{x}$ A/m می‌گذرد. سیملولهٔ طویلی به شعاع ۴ cm به موازات محور x قرار دارد و کاملاً بین دو سطح فوق است. برای سیملوله n برابر 10^4 دور بر مترست و $I = 5$ mA. کل انرژی ذخیره شده در ۱ cm سیملوله را در شرایط زیر بیابید: **(الف)** جریان سیملوله صفرست؛ **(ب)** جریانهای سطحی صفرند؛ **(ج)** هر دو جریان برقرارست.

۹-۱۳ مقطع چنبرهٔ شکل ۹-۱۳ مربعی به ضلع h است. شعاع داخلی a و شعاع خارجی b است. سیم نازکی به تعداد n دور حول چنبره پیچیده شده است. خود القاکنایی سیم‌پیچ حاصل را بیابید.

۹-۱۴ انرژی ذخیره شده در سیم‌پیچ چنبره‌ای شکل ۹-۱۳ را بیابید.

۹-۱۵ انرژی ذخیره شده در واحد طول یک سیملولهٔ بلند به شعاع R و جریان I n آمپر دور بر متر را به روشهای زیر بیابید.



شکل ۹-۱۳

(الف) $W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, dv$؛ (ب) $W = \frac{1}{2} L I^2$؛ (ج) $W = \frac{1}{2}\int \mathbf{A}.\mathbf{K}\, ds$، جریان روی سیملوله را یک جریان سطحی بگیرید.

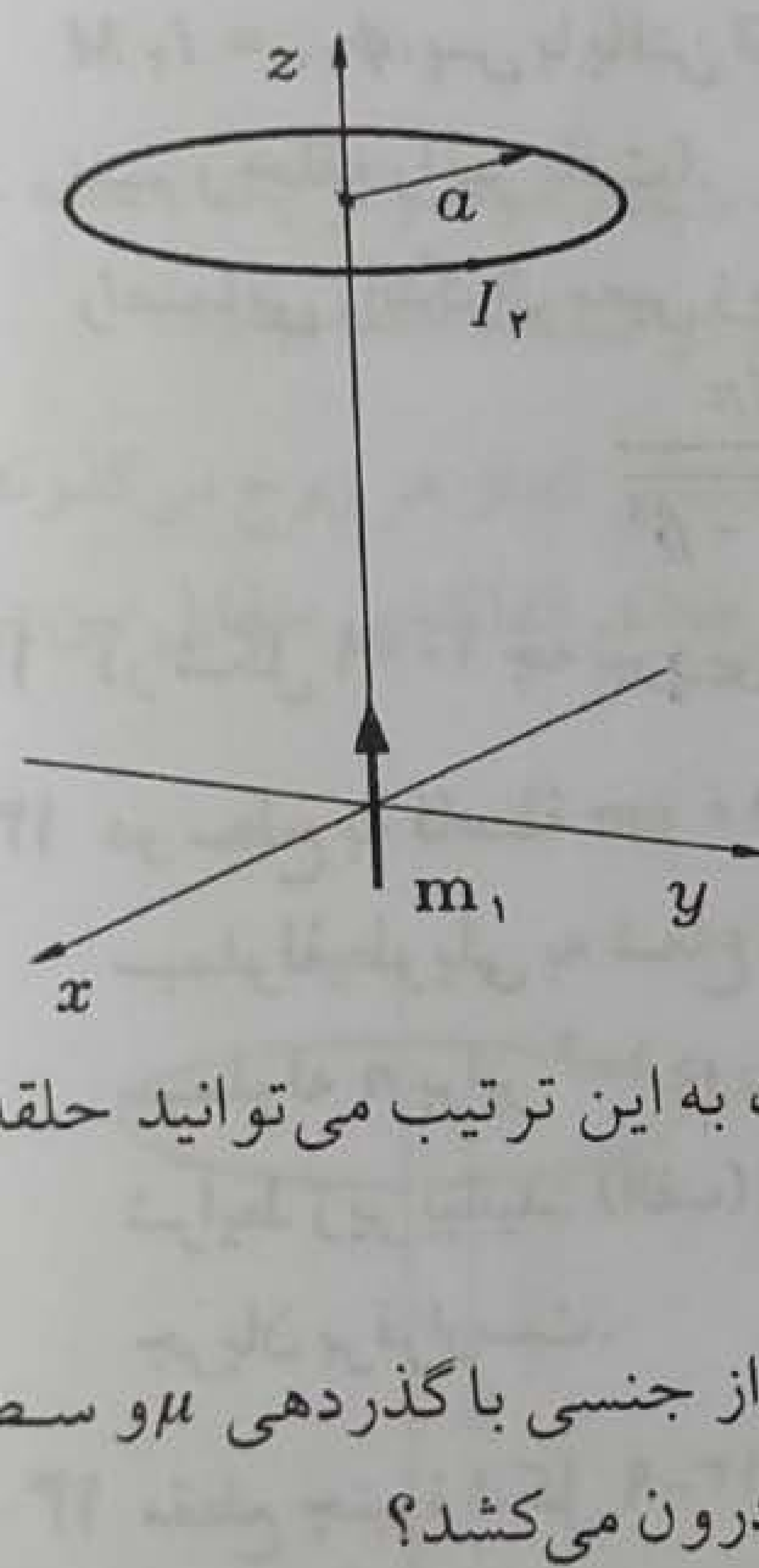
۹-۱۶ از یک پوسته استوانه‌ای طویل با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b جریان I با توزیع یکنواخت می‌گذرد. القاکنایی در واحد طول را بیابید.

۹-۱۷ مسئلهٔ ۹-۱۶ را با استفاده از انرژی ذخیره شده حل کنید.

۹-۱۸ القاکنایی در واحد طول سیمی استوانه‌ای با شعاع a را، که جریان به طور یکنواخت از آن می‌گذرد، بیابید.

۹-۱۹ سیملوله‌ای از N دور سیم نازک کنار هم پیچیده تشکیل شده است. طول سیملوله l و شعاع آن R است و از سیمها جریان I می‌گذرد. نیروی وارد بر واحد طول سیمها چقدر است؟

۹-۲۰ دو قطبی $\mathbf{m}_1 = m_1 \hat{\mathbf{z}}$ در مبدا مختصات قرار دارد. حلقه‌ای به شعاع a هم محور با محور z، در $z = d$ قرار دارد و از آن جریان I_2 می‌گذرد. نیروی وارد بر حلقه را بیابید.

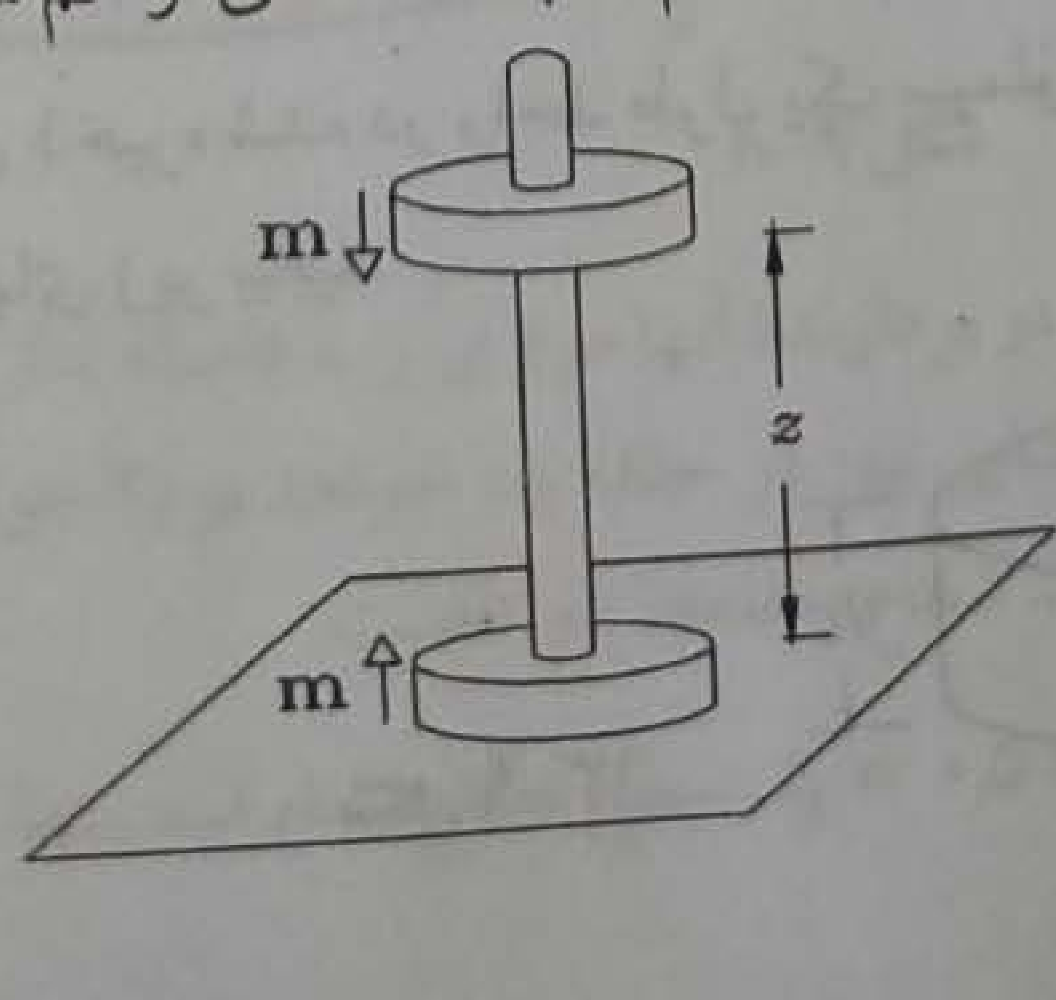


شکل ۹-۲۰

۹-۲۱ در مسئلهٔ ۹-۲۰ نیرو را در حالتی که a خیلی کوچک است بیابید، به این ترتیب می‌توانید حلقه را یک دو قطبی در نظر بگیرید.

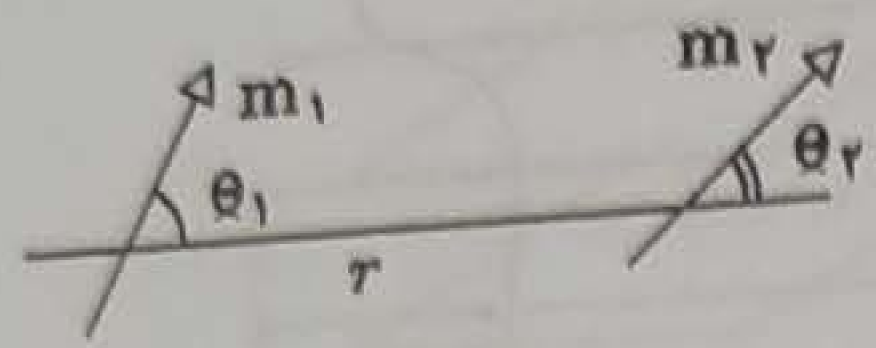
۹-۲۲ از سیملوله‌ای با n دور در واحد طول جریان I می‌گذرد. میله‌ای از جنسی با گذردهی μ و سطح مقطع A وارد سیملوله شده است. سیملوله با چه نیرویی میله را به درون می‌کشد؟

۹-۲۳ آهنرباهایی به شکل حلقه‌های سوراخدار داریم. جرم این آهنرباها M و گشتاور دو قطبی‌شان m است. اگر این آهنرباها را به صورت شکل ۹-۲۳ در میله کنیم به چه فاصله‌ای از هم می‌ایستند؟



شکل ۹-۲۳

۲۴-۹ دو دوقطبی به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند و می‌توانند آزادانه بچرخند. نشان دهید که در حالت تعادل داریم

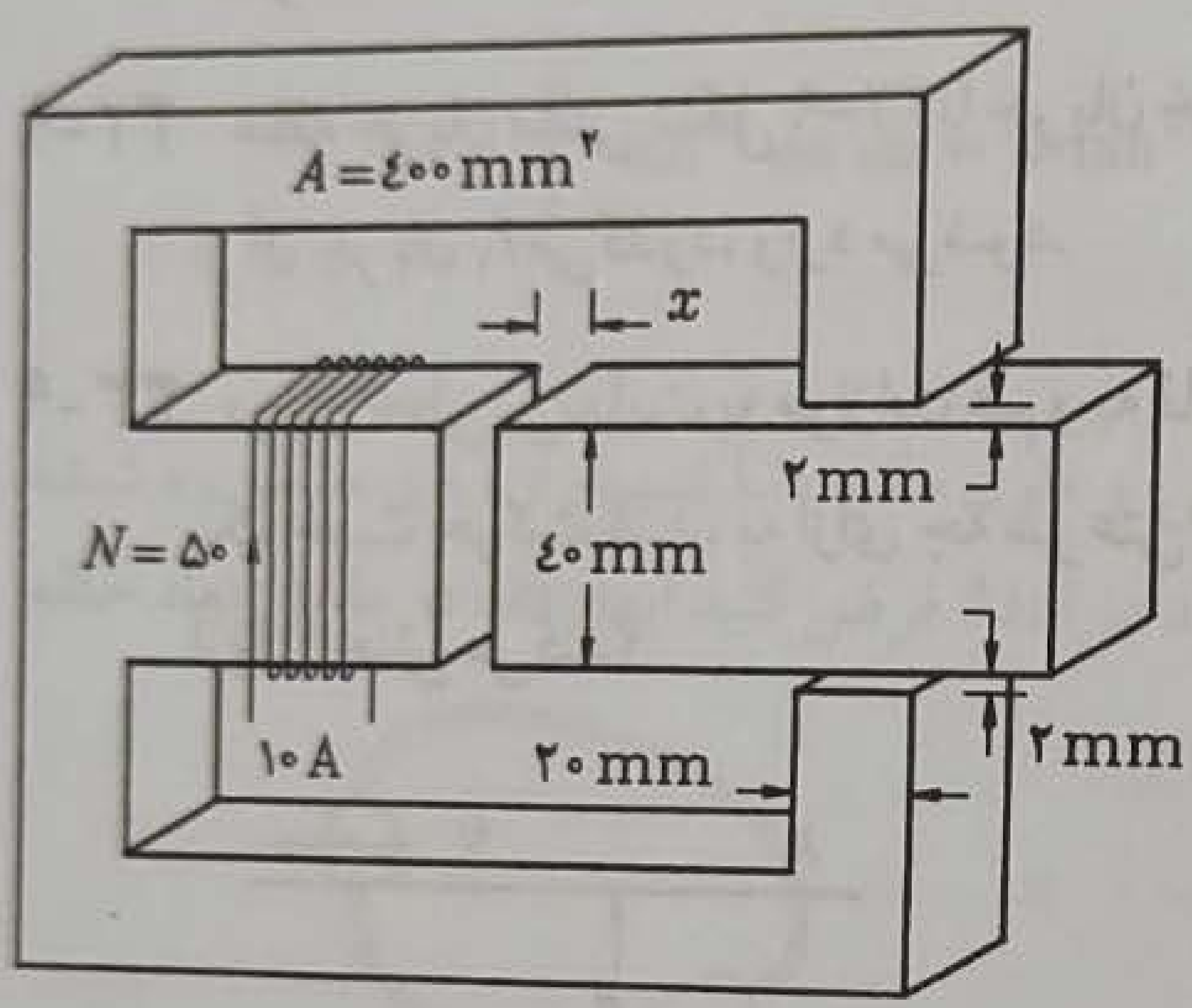


شکل ۹-۲۴

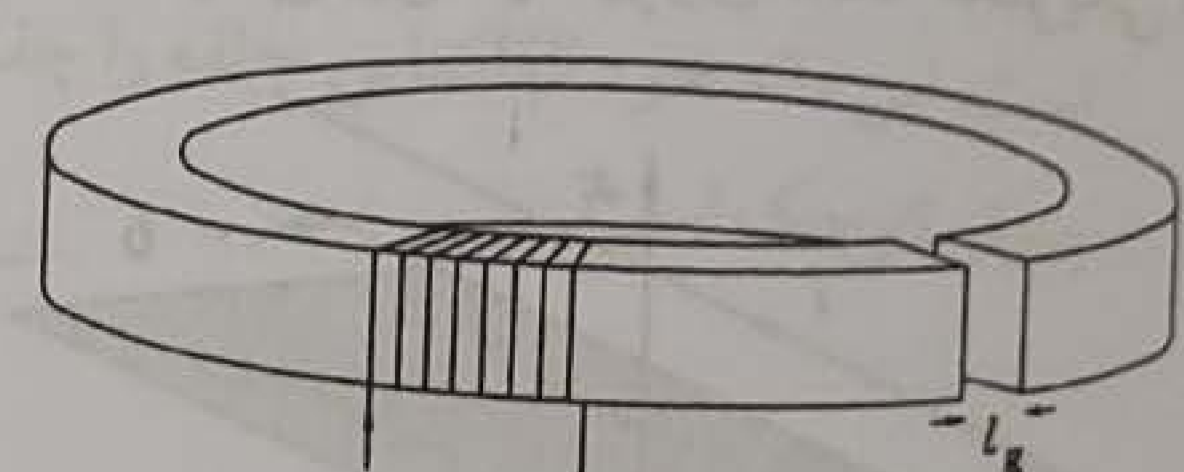
$$\tan\theta_1 = -2\tan\theta_2$$

شکل ۹-۲۴ زاویه‌های θ_1 و θ_2 را نشان می‌دهد.

۲۵-۹ چنبره شکل ۹-۲۵ از ماده‌ای با تراوایی نسبی ۳۵۰۰ ساخته شده و سطح مقطع آن مربعی به ابعاد $1{,}5 \times 1{,}5\ \mathrm{cm}^2$ است. شعاع داخلی چنبره ۵ cm است و سیم‌پیچ حول آن ۱۲۰ At نیروی محرکه مغناطیسی (mmf) ایجاد می‌کند. l_g باید چه باشد تا نیروی وارد بر هر سطح ۲۲٫۲۴ N باشد؟



شکل ۹-۲۶



شکل ۹-۲۵

۲۶-۹ هستهٔ آهنربای الکتریکی شکل ۹-۲۶ از ماده‌ای با $\mu_0 << \mu$ ساخته شده است. زبانه‌ای که به داخل آهنربا کشیده می‌شود نیز از همان جنس است. نیرویی که به ازای $x = 5$ mm به زبانه وارد می‌شود چقدر است؟ ضخامت تمام بخشها در جهت عمود بر کاغذ ۲ cm است.

۲۷-۹ بار نقطه‌ای q در مبدا مختصات و بی‌حرکت قرار دارد. میدان الکتریکی $\mathbf{E} = E_0\,\hat{\mathbf{z}}$ و میدان مغناطیسی $B = B_0\,\hat{\mathbf{x}}$ در این محیط وجود دارد. معادله مسیر حرکت بار q را به دست آورید.

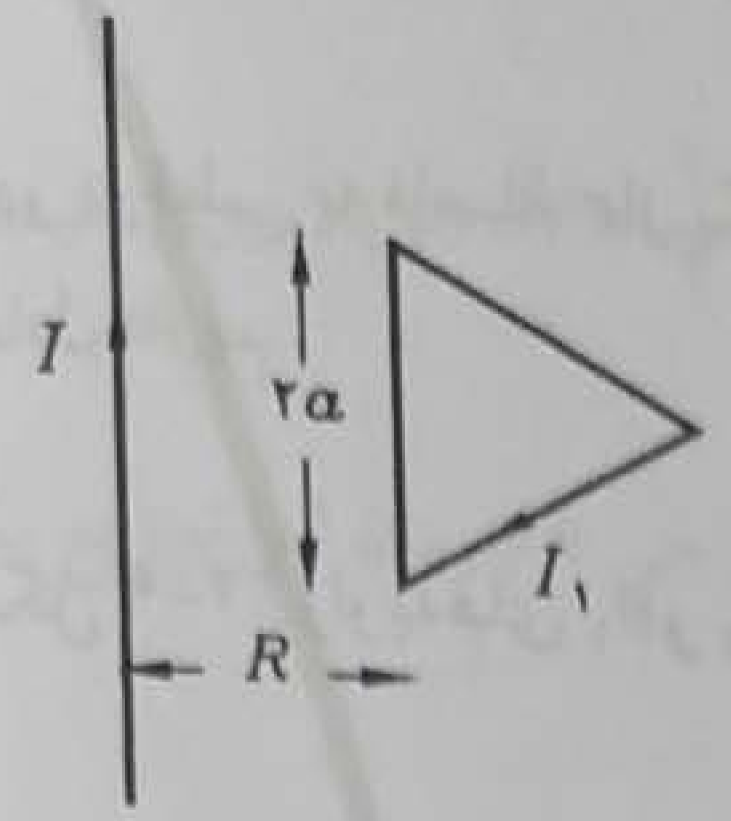
۲۸-۹ مسئلهٔ ۹-۲۷ را در حالتی که سرعت اولیهٔ بار $\mathbf{v}(0) = (E_0/B_0)(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$ است حل کنید.

۲۹-۹ اگر در مسئله ۹-۲۷ بار با سرعت اولیهٔ

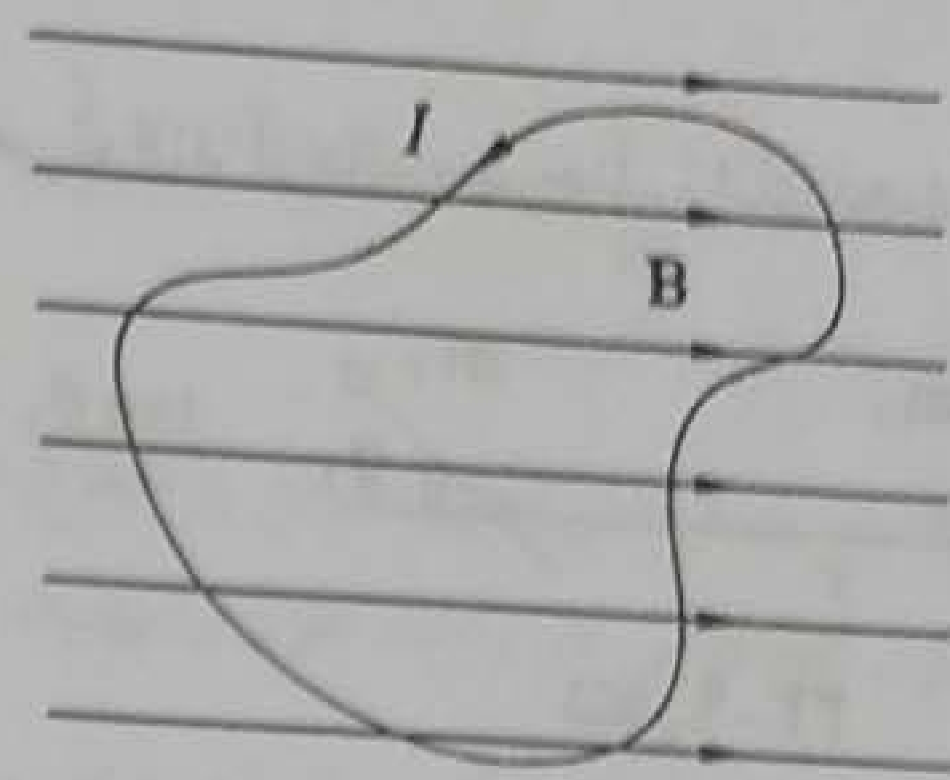
(الف) $\mathbf{v}(0) = (E_0/B_0)\,\hat{\mathbf{y}}$ (ب) $\mathbf{v}(0) = (E_0/2B_0)\,\hat{\mathbf{y}}$

در مبدا مختصات رها شود، مسیر حرکت آن چه خواهد بود؟

۳۰-۹ در محیطی میدانهای یکنواخت عمود برهم $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ وجود دارد. بار q باید در این محیط با چه سرعتی عمود بر $\mathbf{B}$ حرکت کند تا بر آن نیرویی وارد نشود؟ به ازای $\mathbf{E} = E_0(\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}})$ و $\mathbf{B} = B_0(2\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$ این سرعت را بیابید.



شکل ۹-۳۲

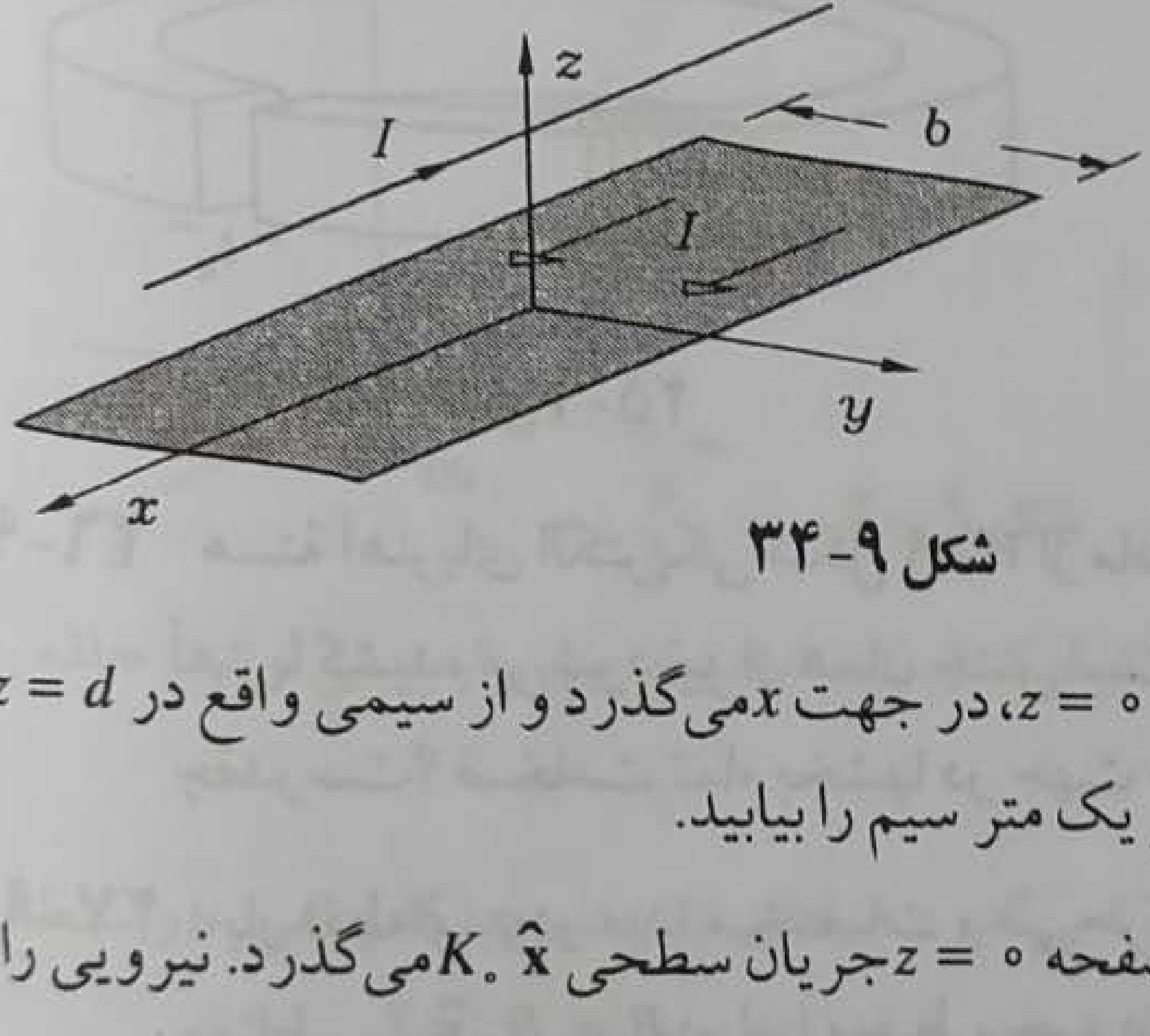


شکل ۹-۳۱

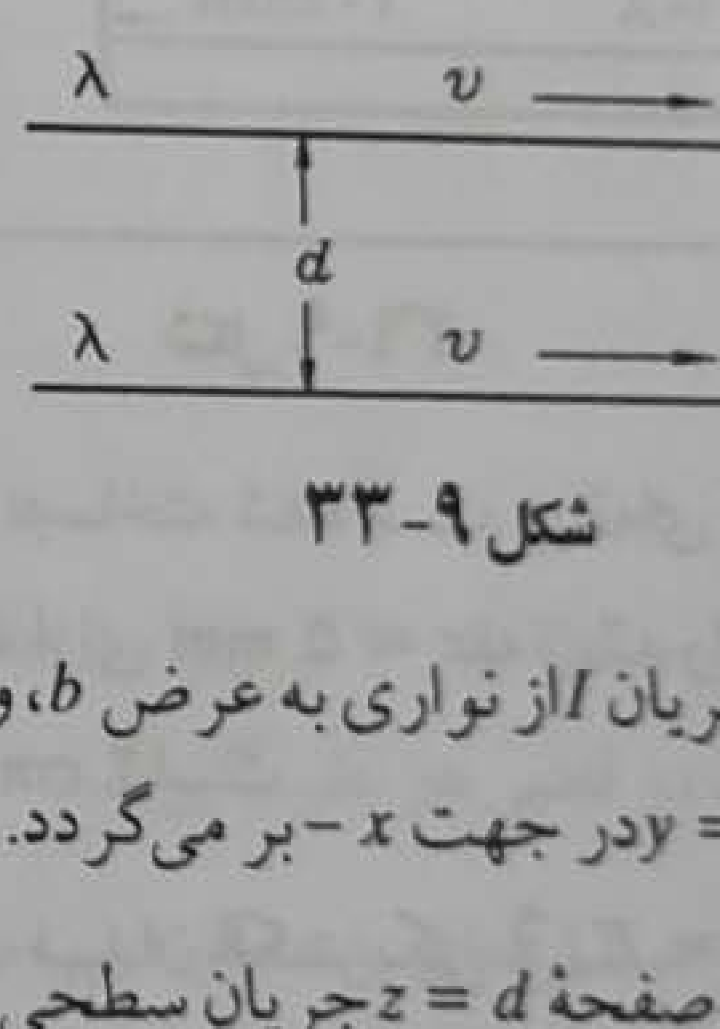
۹-۳۱ ثابت کنید نیروی وارد بر یک حلقهٔ جریان با شکل دلخواه واقع در میدان مغناطیسی یکنواخت صفرست.

۹-۳۲ حلقه جریان مثلثی شکل ۹-۳۲ با جریان خطی I در یک صفحه قرار دارند. چه نیرویی بر حلقه، که از آن جریان I_1 می‌گذرد، وارد می‌شود.

۹-۳۳ دو بار خطی بی‌نهایت به موازات هم و به فاصله d از هم قرار دارند. اگر دو بار خطی با سرعت v در یک جهت حرکت کنند، به ازای چه سرعتی نیروی مغناطیسی بین آنها نیروی دافعه الکتریکی بین آنها را خنثی می‌کند؟



شکل ۹-۳۴

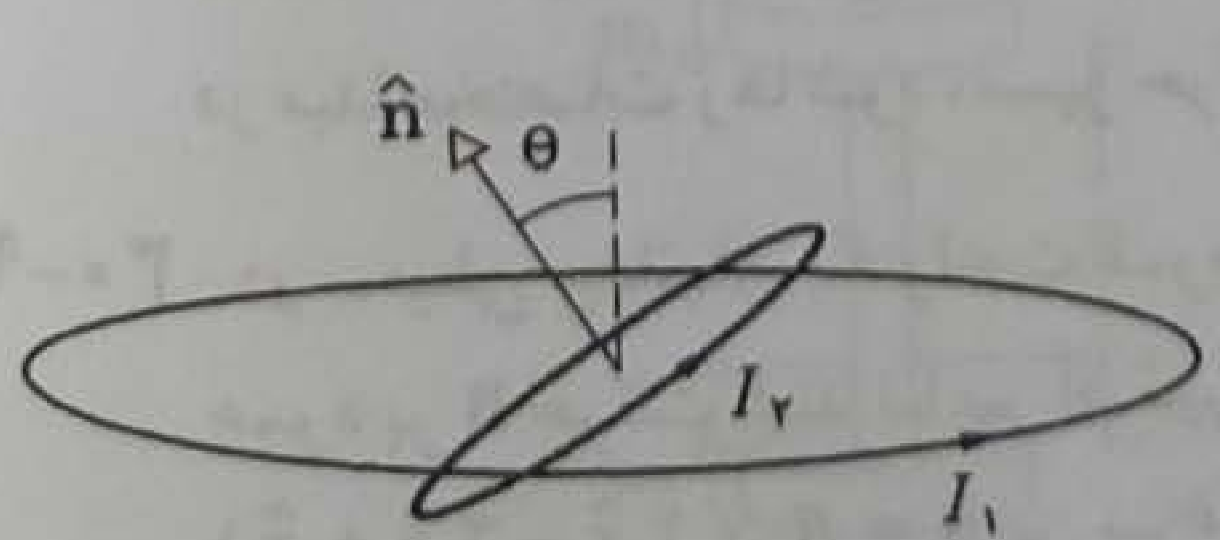


شکل ۹-۳۳

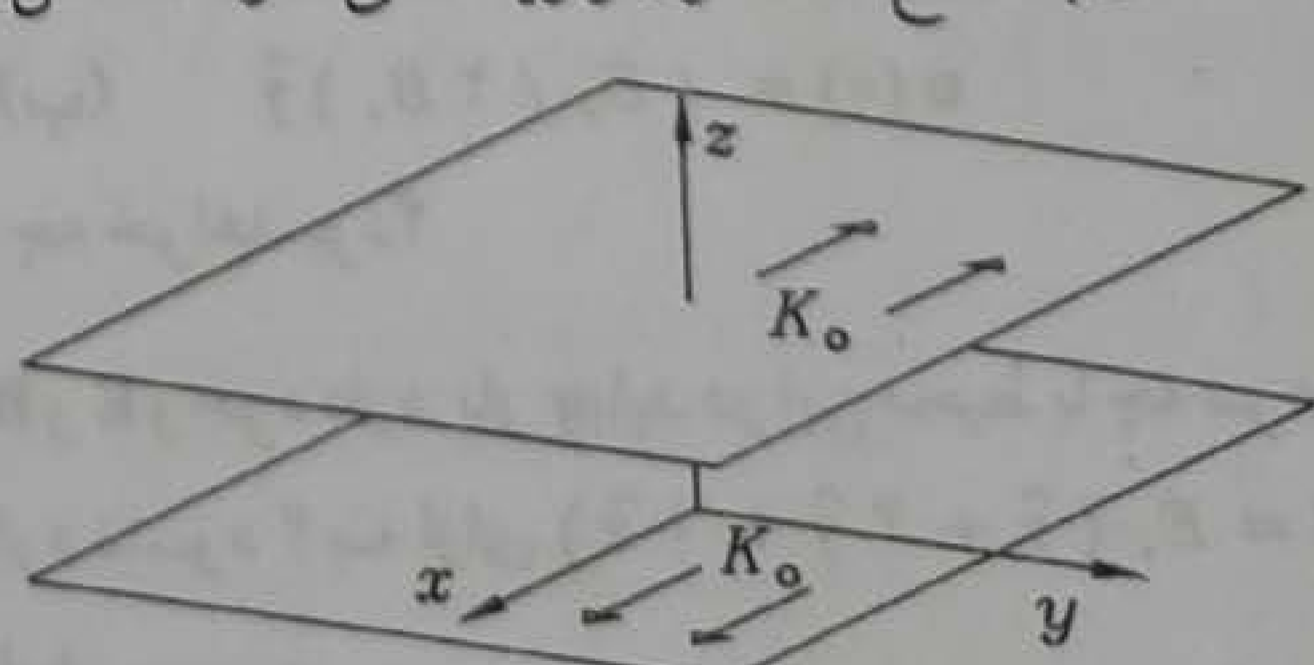
۹-۳۴ جریان I از نواری به عرض b، واقع در صفحه $z = 0$، در جهت x می‌گذرد و از سیمی واقع در $z = d$ و $y = 0$ در جهت $x-$ بر می‌گردد. نیروی وارد بر یک متر سیم را بیابید.

۹-۳۵ از صفحهٔ $z = d$ جریان سطحی $-K_0\,\hat{\mathbf{x}}$ و از صفحه $z = 0$ جریان سطحی $K_0\,\hat{\mathbf{x}}$ می‌گذرد. نیرویی را که بر یک متر مربع صفحهٔ $z = d$ وارد می‌شود بیابید.

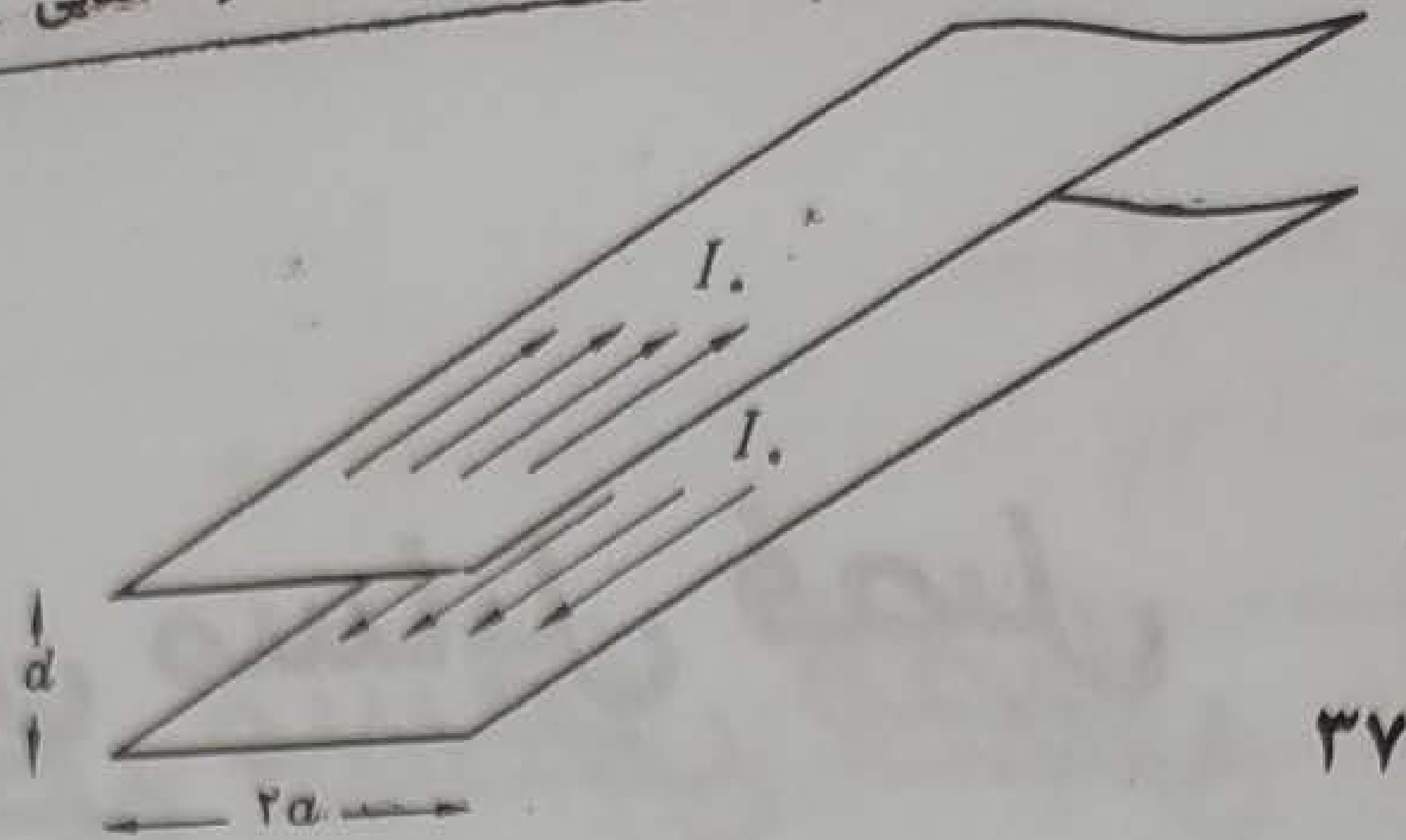
۹-۳۶ حلقه‌ای به شعاع b و جریان I_2 در میان حلقه‌ای به شعاع a $(b \ll a)$ و جریان I_1 قرار دارد و سطح آن با سطح حلقه اول زاویه θ می‌سازد (شکل ۹-۳۶). گشتاور وارد بر حلقه کوچک را بیابید.



شکل ۹-۳۶



شکل ۹-۳۵



شکل ۹-۳۷

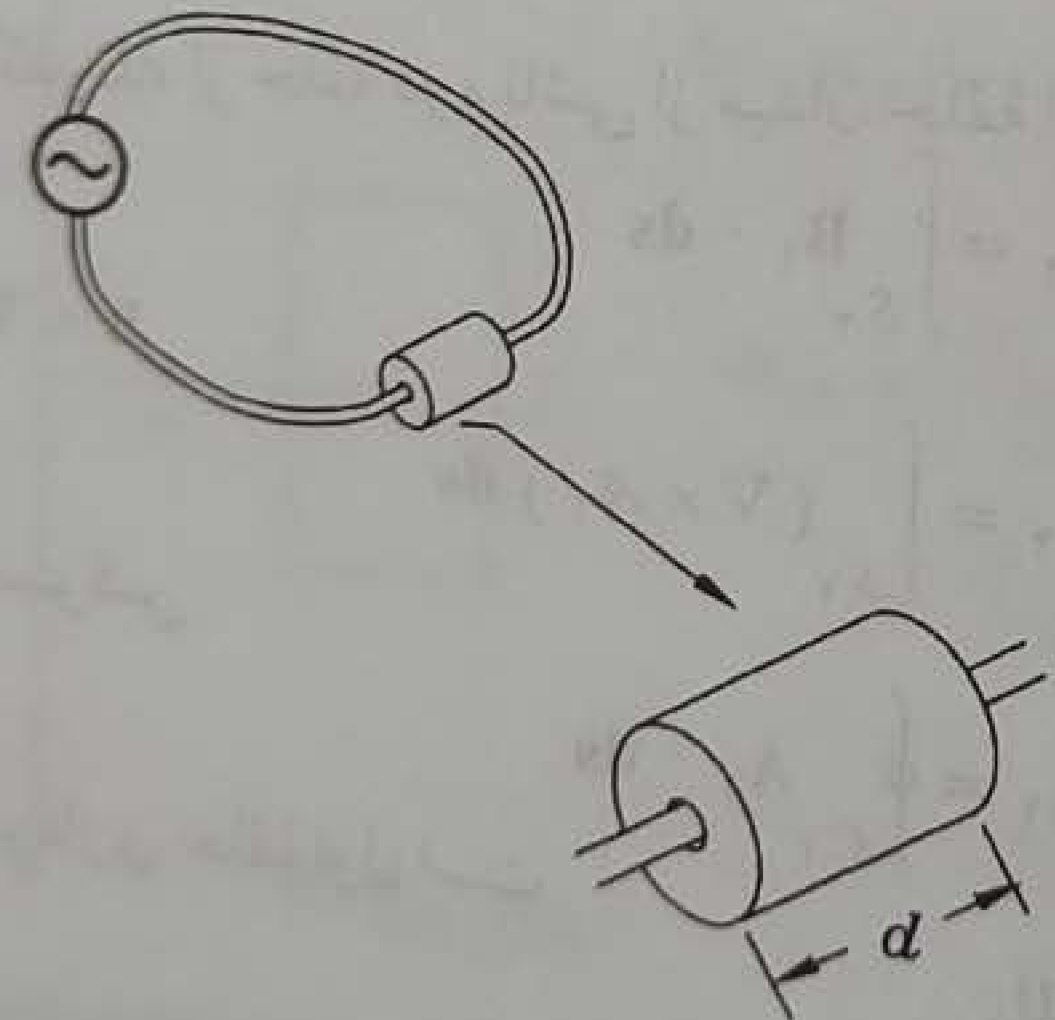
۹-۳۷ دو نوار به عرض $2a$ به موازات هم و به فاصله d از یکدیگر قرار دارند و از آنها جریانهای I_1 و I_2 در جهتهای مخالف هم می‌گذرد. جریانها روی نوارها به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. نیرویی را که به هر متر نوارها وارد می‌شود بیابید.

راهنمایی: مسئلهٔ ۷-۸ را ببینید. همچنین داریم

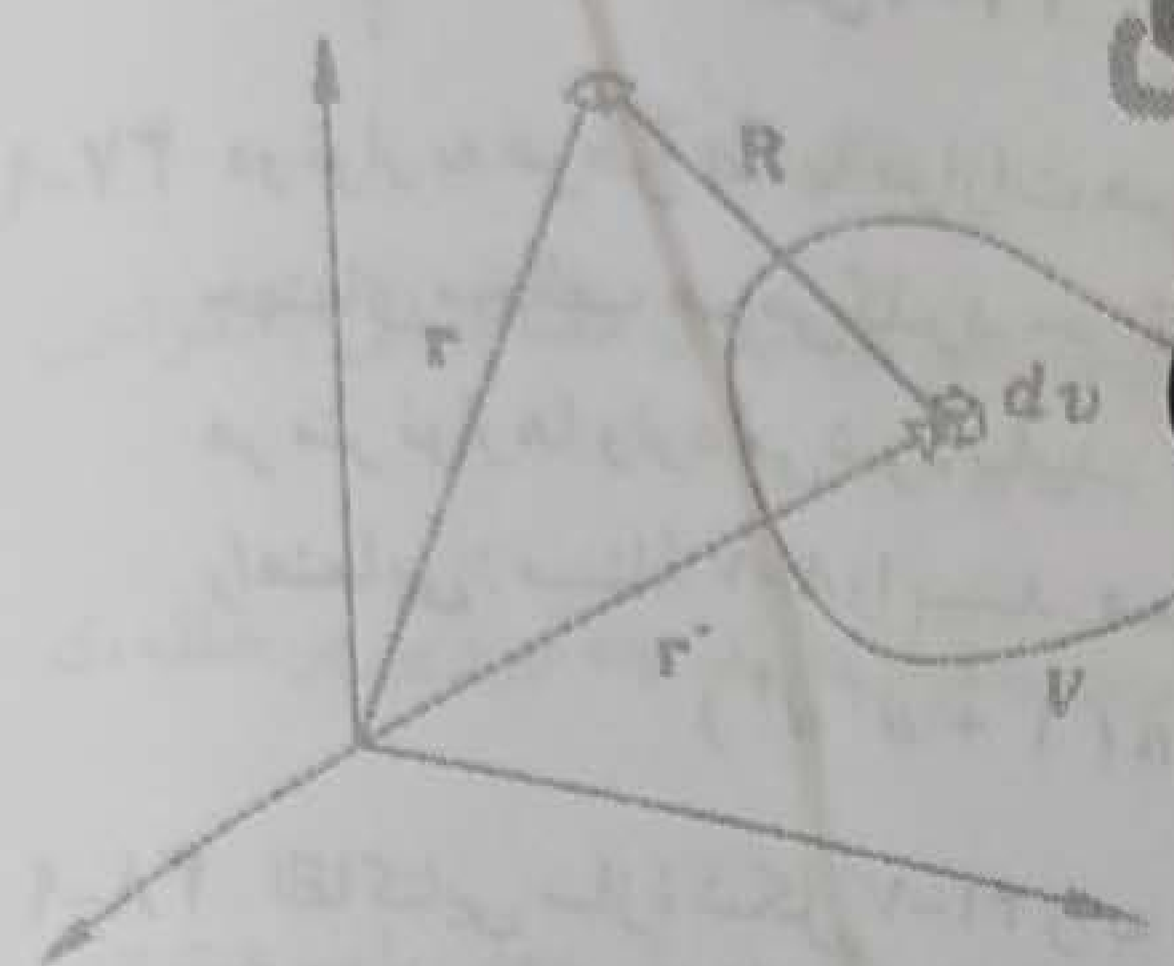
$$\int \tan^{-1} au \, du = u \tan^{-1} au - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2 u^2)$$

۹-۳۸ القاکنایی سازهٔ شکل ۷-۴۱ را به دست آورید.

۹-۳۹ یک دانهٔ فریت به شعاع داخلی، شعاع خارجی و طول مانند دانهٔ تسبیح از روی سیمی رد شده است. این دانه خود القاکنایی حلقه را چقدر زیاد می‌کند؟ فرض کنید ابعاد دانه در مقابل ابعاد حلقه بسیار کوچک است.



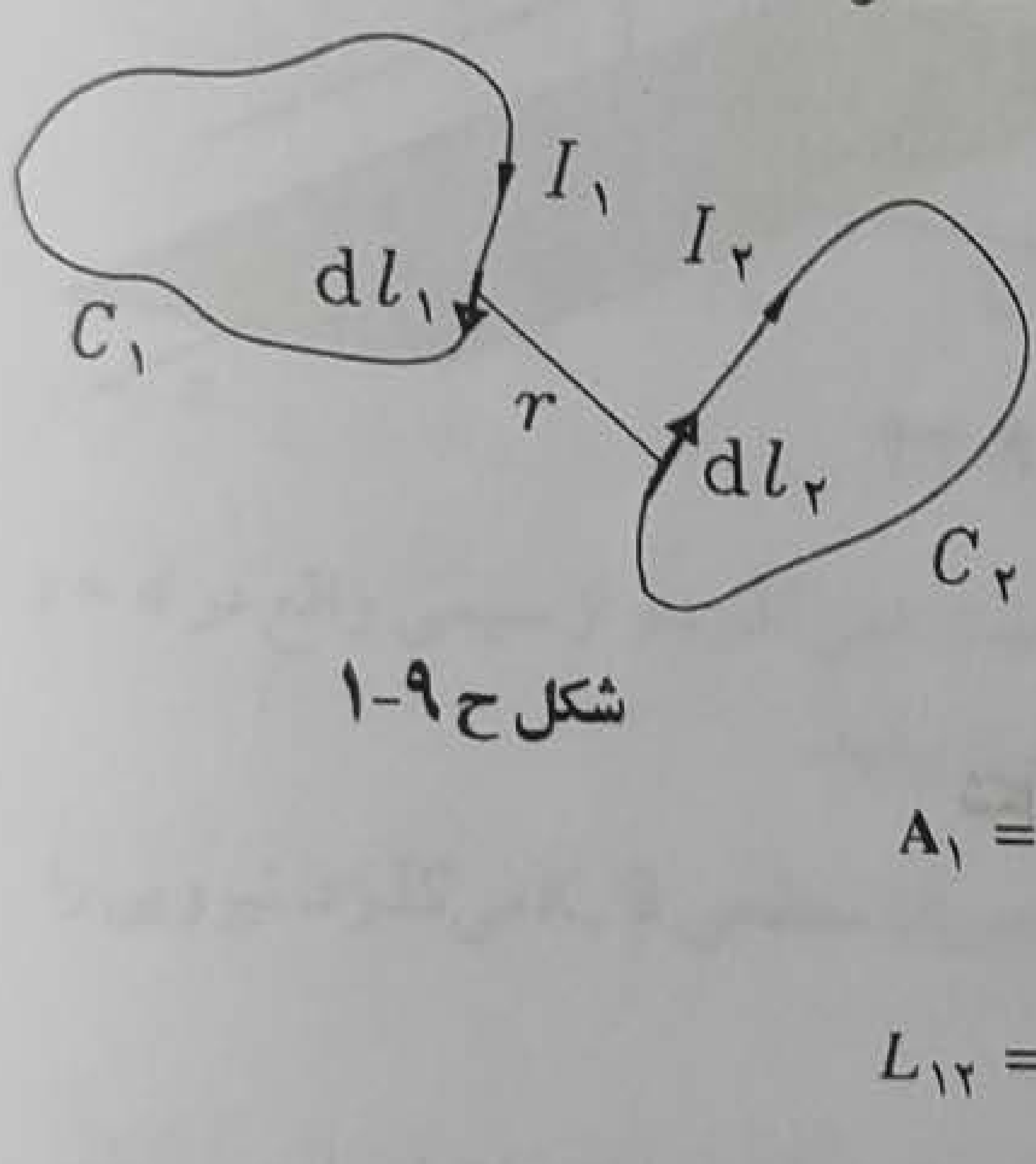
شکل ۹-۳۹



حل مسایل فصل ۹

۱-۹ شار گذرنده از حلقهٔ دوم ناشی از میدان حلقهٔ اول عبارت است از

$$\Phi_{۱۲} = \int_{S_۲} \mathbf{B}_۱ \cdot \mathbf{ds}$$



شکل ح ۹-۱

چون $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\Phi_{۱۲} = \int_{S_۲} (\nabla \times A_۱)\, \mathbf{ds}$$

طبق قضیهٔ استوکس

$$\Phi_{۱۲} = \oint_{C_۲} \mathbf{A}_۱ \cdot \mathbf{ds}$$

$\mathbf{A}_۱$ پتانسیل برداری حلقهٔ اول است

$$\mathbf{A}_۱ = \oint_{C_۱} \frac{\mu I_۱}{۴\pi} \frac{\mathbf{dl}_۱}{r}$$

پس

$$L_{۱۲} = \frac{\mu}{۴\pi} \oint_{C_۲} \oint_{C_۱} \frac{\mathbf{dl}_۱ \cdot \mathbf{dl}_۲}{r}$$

به همین ترتیب به دست می‌آوریم

$$L_{۲۱} = \frac{\mu}{۴\pi} \oint_{C_۲} \oint_{C_۱} \frac{\mathbf{dl}_۲ \cdot \mathbf{dl}_۱}{r}$$

و برابری دو انتگرال کاملاً واضح است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

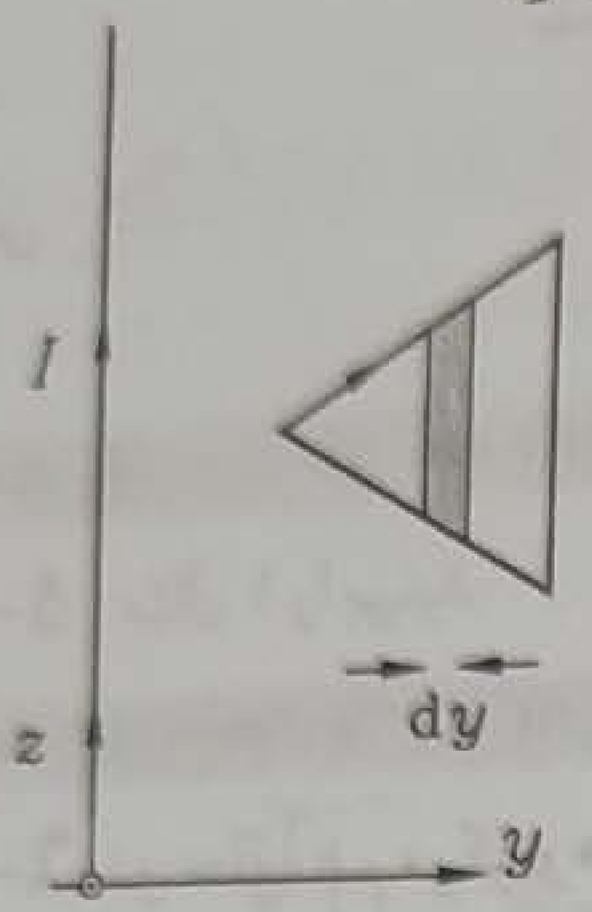
۲-۹ میدان ناشی از سیم راست در دستگاه مختصات نشان داده شده، عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi y} (-\hat{\mathbf{x}})$$

(مثلث در صفحهٔ $x = ۰$ قرار دارد). سطح مثلث را به نوارهایی با عرض dy تقسیم می‌کنیم. طول هر نوار واقع

در فاصلهٔ y عبارت است از $(2/\sqrt{3})(y-d)$. پس

$$\Phi = \int \mathbf{B}\cdot ds = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi y}(-\hat{\mathbf{x}})\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}(y-d)\,dy\,(-\hat{\mathbf{x}})$$



شکل ح ۹-۲

انتگرال در فاصلهٔ d تا $d+\frac{\sqrt{3}}{2}b$ محاسبه می‌شود:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\int\frac{y-d}{y}\,dy = \frac{\mu_0 I\sqrt{3}}{2\pi}\left[y-d\ln y\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}b - d\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}\,b}{2d}\right)\right]$$

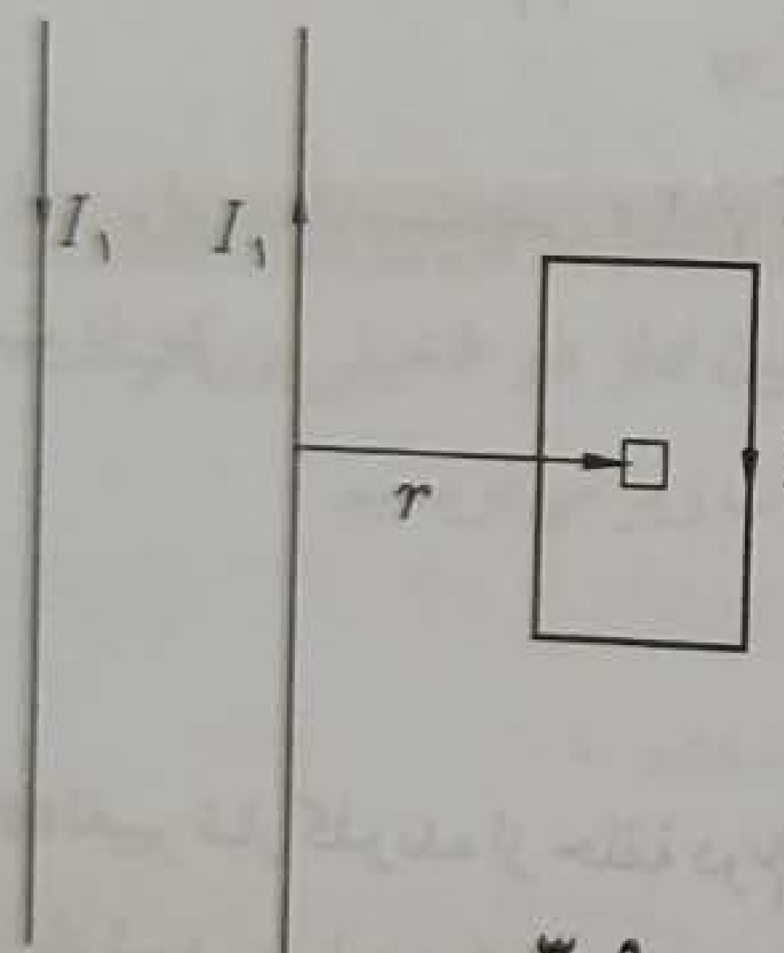
و سرانجام

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\left[\frac{b}{2} - \frac{d}{\sqrt{3}}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}\,b}{2d}\right)\right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۳ میدان مغناطیسی ناشی از خط انتقال دو سیمه عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+d}\right)$$



شکل ح ۹-۳

جهت میدان به طرف داخل کاغذست. با توجه به جهت I_2 بردار **ds** نیز جهتی به طرف داخل کاغذ دارد و

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_0^b\int_D^{D+a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+d}\right)dr\,dh$$

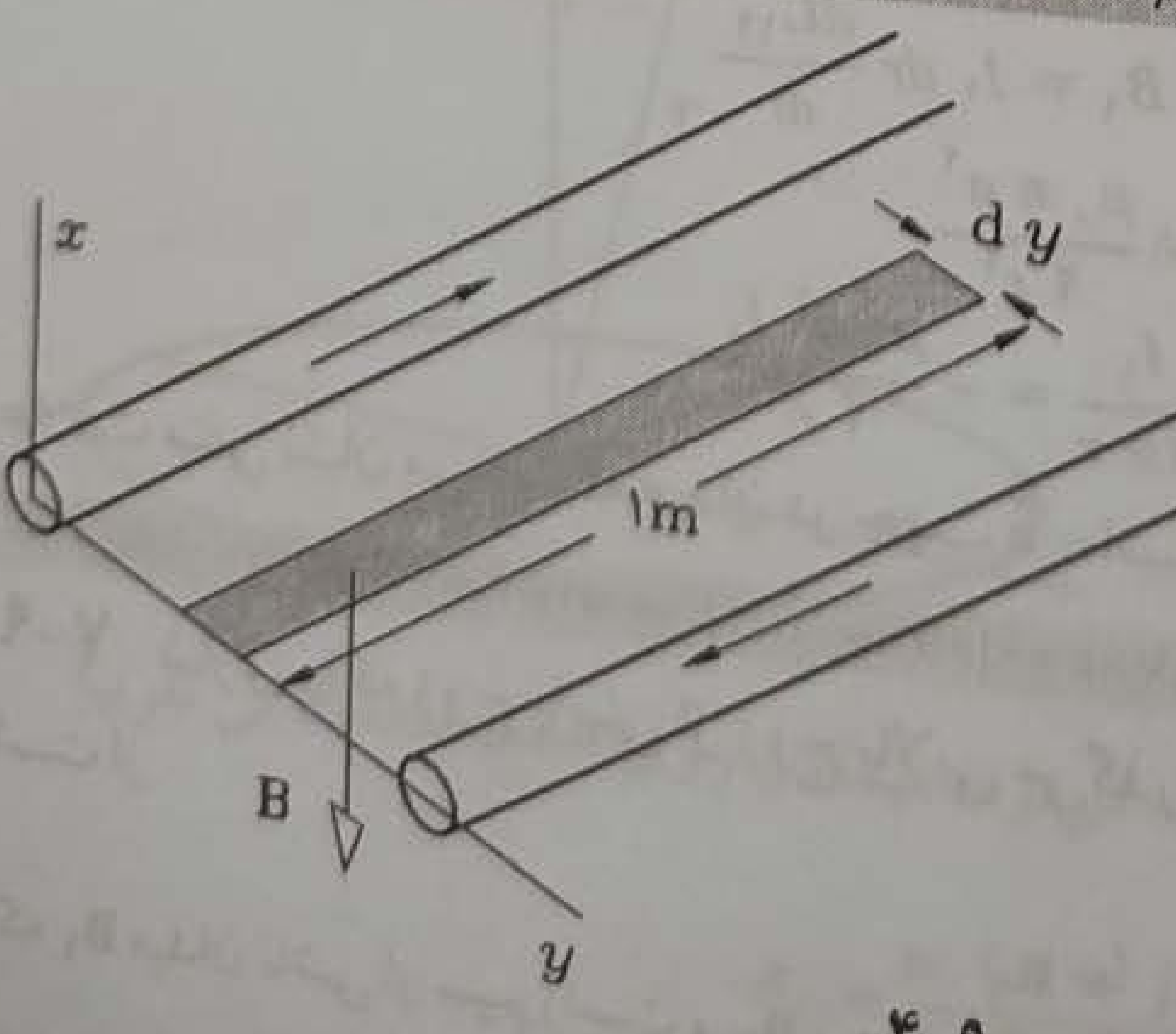
$$= \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\left[\ln r - \ln(r+d)\right]\Big|_D^{D+a}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{1+\dfrac{a}{D}}{1+\dfrac{a}{D+d}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۴ دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل ح ۹-۴ را بر می‌گزینیم. میدان مغناطیسی بین دو سیم عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{D-y}\right)(-\hat{\mathbf{x}})$$



شکل ح ۹-۴

شاری که از بین دو سیم، در واحد طول، می‌گذرد و عبارت است از

$$\Phi = \frac{\mu_\circ I}{2\pi} \int_r^{D-r} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{D-y} \right) dy = \frac{\mu_\circ I}{\pi} \ln \frac{D-r}{r}$$

پس

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_\circ}{\pi} \ln \frac{D-r}{r}$$

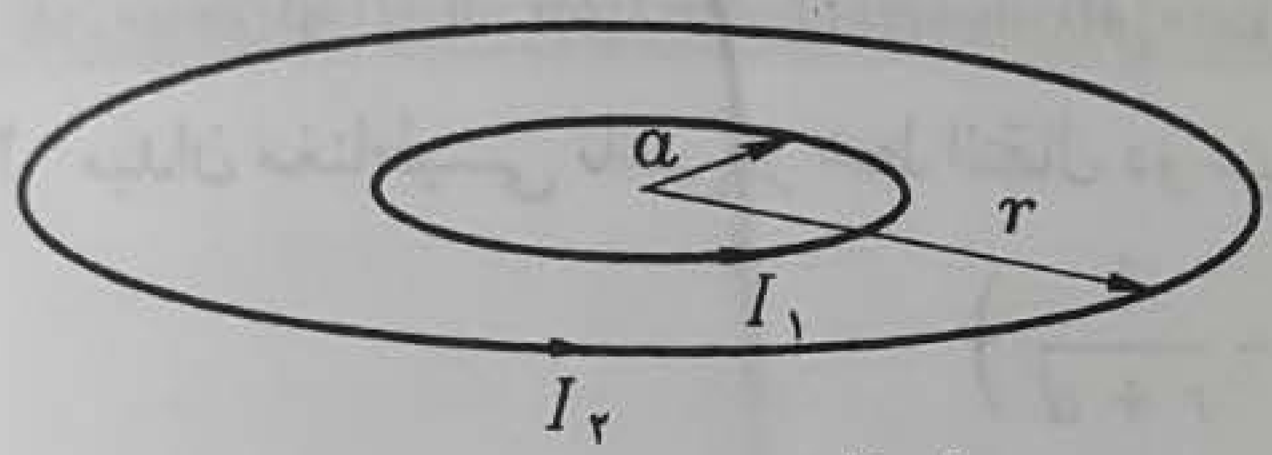
$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۹-۵ مثال ۱ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۹-۶ دو حلقهٔ هم مرکز و هم صفحه در نظر می‌گیریم (شکل ح ۹-۶ با $a << r$). القاکنایی متقابل دو حلقه را می‌یابیم. به ازای جریان I_2 میدان $\mu_\circ I_2 / 2r$ در مرکز حلقه به وجود می‌آید. اگر $a << r$ می‌توان میدان را در تمام حلقهٔ وسطی ثابت فرض کرد و به دست آورد

$$\Phi_{21} = \pi a^2 B = \pi a^2 \mu_\circ I_2 / 2r$$



شکل ح ۹-۶

پس

$$L_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_\circ \pi a^2}{2r}$$

L_{12} نیز برابر L_{21} است. پس $L_{21} = \mu_\circ \pi a^2 / 2r$. dL_{12} / dr تغییر القاکنایی به ازای تغییر شعاع حلقهٔ دوم است. داریم

$$L_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_1}$$

$$\frac{dL_{12}}{dr} = \frac{1}{I_1} \frac{d\phi_{12}}{dr}$$

$d\phi_{12}$ تغییر شار گذرنده از حلقهٔ دوم هنگام تغییر شعاع آن به اندازهٔ dr است. اگر شعاع حلقهٔ بیرونی به اندازهٔ dr زیاد شود، مساحت حلقه به اندازهٔ $2\pi r\,dr$ زیاد می‌شود. در این مساحت میدان ناشی از حلقهٔ داخلی B_1 است (چیزی که به دنبال یافتن آن هستیم). پس

$$d\phi_{12} = (2\pi r\,dr)\,B_1 = I_1\,dr \frac{dL_{12}}{dr}$$

$$\frac{dL_{12}}{dr} = -\frac{\mu_\circ \pi a^2}{2r^2}$$

$$B_1 = -\frac{\mu_\circ \pi a^2}{2r^2} \frac{I_1}{2\pi r} = -\frac{\mu_\circ a^2 I_1}{4r^3}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که میدان در جهت $-\hat{\mathbf{z}}$ است.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۹-۷ شاری را که زوج پایینی از زوج بالایی می‌گذرانند می‌یابیم. میدان ناشی از زوج سیم پایینی عبارت است از

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

که $\mathbf{B}_1$ میدان ناشی از سیم راست و $\mathbf{B}_2$ میدان ناشی از سیم چپ است. و با توجه به شکل ح ۹-۷

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s}$$

که در آن $d\mathbf{s} = dx\, dz\, \hat{\mathbf{y}}$ و $\mathbf{B}_2 = -\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi \rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}$. پس

$$\Phi_1 = \int \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\int_0^1\int_L^0 \frac{dx\, dz}{\rho}\cos\phi$$

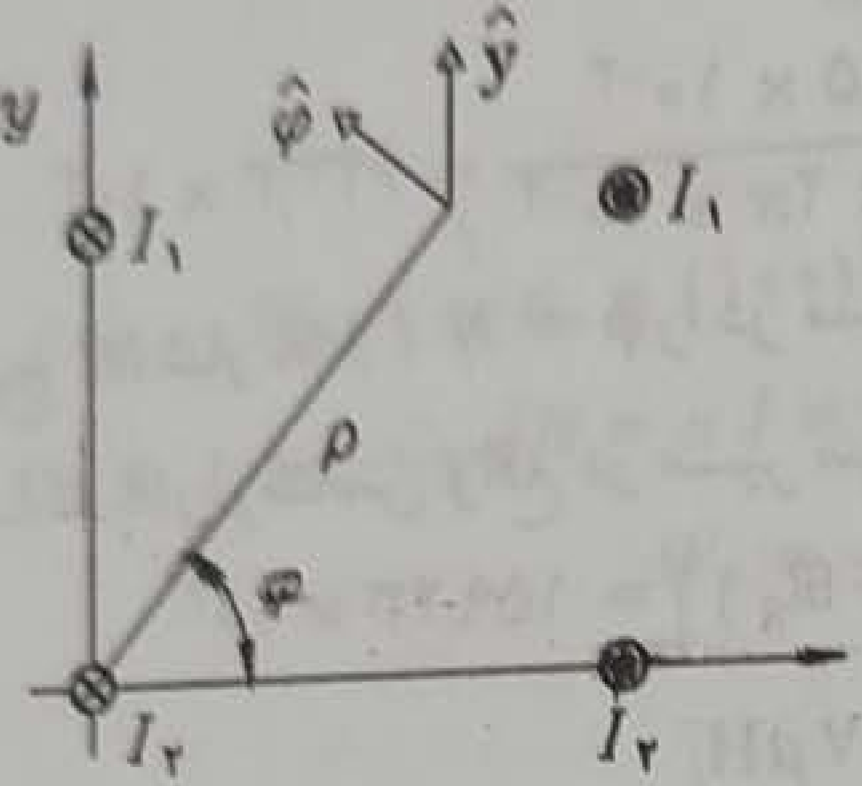
$\cos\phi = x/\rho$ و $\rho^2 = x^2 + d^2$ پس

$$\Phi_1 = \frac{-\mu_0 I_2}{2\pi}\int_L^0 \frac{x\, dx}{x^2 + d^2} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\ln\left(1 + \frac{L^2}{d^2}\right)$$

کمی دقت نشان می‌دهد که $\int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}$ نیز همین مقدار را دارد، پس

$$\Phi = 2\,\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\ln\left(1 + \frac{L^2}{d^2}\right)$$

$$L = \frac{\Phi}{I_2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(1 + \frac{L^2}{d^2}\right)$$



شکل ح ۹-۷

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۸ شعاع حلقهٔ پایینی را a و شعاع حلقهٔ بالایی را b فرض می‌کنیم. چون d از a و b خیلی بزرگتر است، پتانسیل $\mathbf{A}_1$ حلقهٔ پایینی را با توجه به میدان A دو قطبی مغناطیسی به صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 a^2 I_1 \sin\theta}{4 r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

که در آن a شعاع حلقهٔ پایینی و I_1 جریان آن است. همچنین $d\mathbf{l}_2 = b\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$،

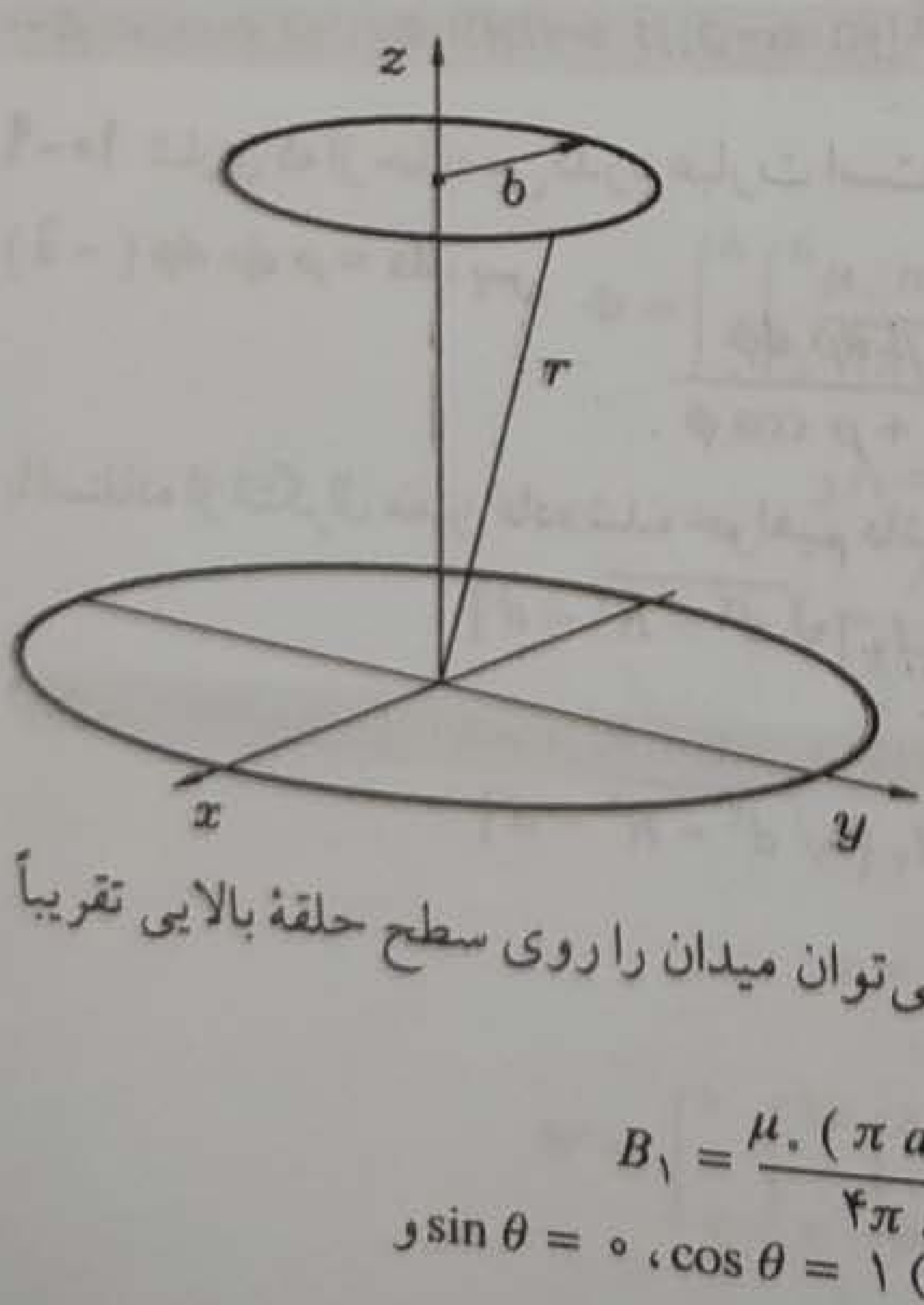
$$M = \frac{\mu_0 a^2}{4 r^2}\sin\theta\int_0^{2\pi} b\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi\mu_0 a^2 b \sin\theta}{4 r^2}$$

$r^2 = d^2 + b^2$ و $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$، پس

$$M = \frac{2\pi\mu_0 a^2 b^2}{4 r^3}$$

$$= \frac{2\pi\mu_0 a^2 b^2}{4 d^3}$$



شکل ح ۹-۸

در روش دوم، چون b در مقابل d خیلی کوچک است، می‌توان میدان را روی سطح حلقهٔ بالایی تقریباً ثابت فرض کرد. و میدان دو قطبی مغناطیسی

$$B_1 = \frac{\mu_0(\pi a^2 I_1)}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

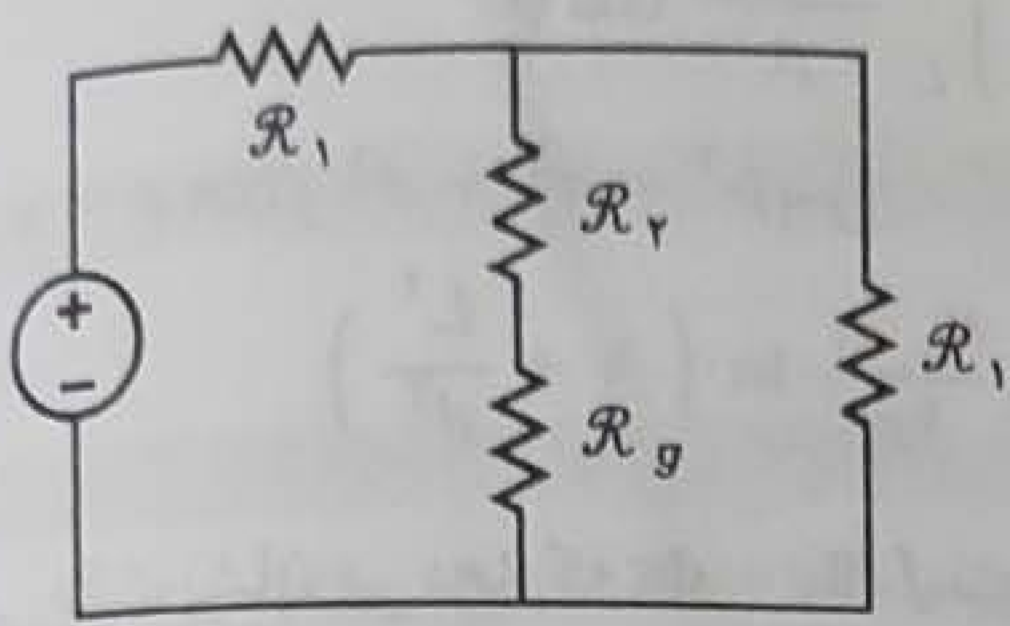
و روی محور zها (یا دقیقتر در فضای نزدیک به محور zها) $\cos\theta = 1$، $\sin\theta = 0$ و

$$B_1 = \frac{\mu_\circ \pi a^2 I_1}{2\pi d^3}$$

$\Phi = B_1 S = B_1 \pi b^2$ و $M = \Phi / I_1$ و همان مقدار را برای M به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=\circ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=\circ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=\circ \mid \oint E\cdot dl=\circ$

۹-۹ از لحاظ رلوکتانسها مدار شکل ح ۹-۹ را داریم که در آن



شکل ح ۹-۹

$$\mathcal{R}_1 = \frac{20 \times 10^{-2}}{3000 \mu_\circ \times 2\pi \times 10^{-4}} = 84{,}43 \times 10^3$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{2} \mathcal{R}_1 = 42{,}217 \times 10^3$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{0{,}5 \times 10^{-3}}{\mu_\circ \times 2\pi \times 10^{-4}} = 633{,}3 \times 10^3$$

چون سیم پیچ NI شار $\phi = N I / \mathcal{R}$ را در مسیری که از آن می‌گذرد ایجاد می‌کند و $L = N\phi / I$ پس $L = N^2 / \mathcal{R}$ که $\mathcal{R}$ رلوکتانس واقع در مسیر سیم پیچ است. پس $L_1 = N_1^2 / \mathcal{R}_3$ که در آن

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 + [\mathcal{R}_1 \parallel (\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g)] = 159{,}43 \times 10^3$$

$$L_1 = \frac{10 \times 10}{159{,}43 \times 10^3} = 627 \mu\text{H}$$

به همین ترتیب $L_2 = N_2^2 / \mathcal{R}_4$ که در آن

$$\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g + (\mathcal{R}_1 \parallel \mathcal{R}_1) = 717{,}73 \times 10^3$$

$$L_2 = \frac{5 \times 5}{717{,}73 \times 10^3} = 34{,}8 \mu\text{H}$$

سیم‌پیچ N_2 شار $N_2 I_2 / \mathcal{R}_4$ را ایجاد می‌کند. که نصف آن از سیم پیچ سمت چپ می‌گذرد. پس

$$M = \frac{N_1 N_2}{2 \mathcal{R}_4} = \frac{5 \times 10}{2 \times 717{,}73 \times 10^3} = 34{,}8 \mu\text{H}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=\circ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=\circ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=\circ \mid \oint E\cdot dl=\circ$

۹-۱۰ شاری که از حلقه می‌گذرد عبارت است از $\int \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{ds}$ که در آن $\mathbf{B}_2 = \dfrac{\mu_\circ I}{2\pi (d + \rho \cos\phi)} (-\hat{\mathbf{z}})$ و $\mathbf{ds} = \rho\, d\rho\, d\phi\, (-\hat{\mathbf{z}})$، پس

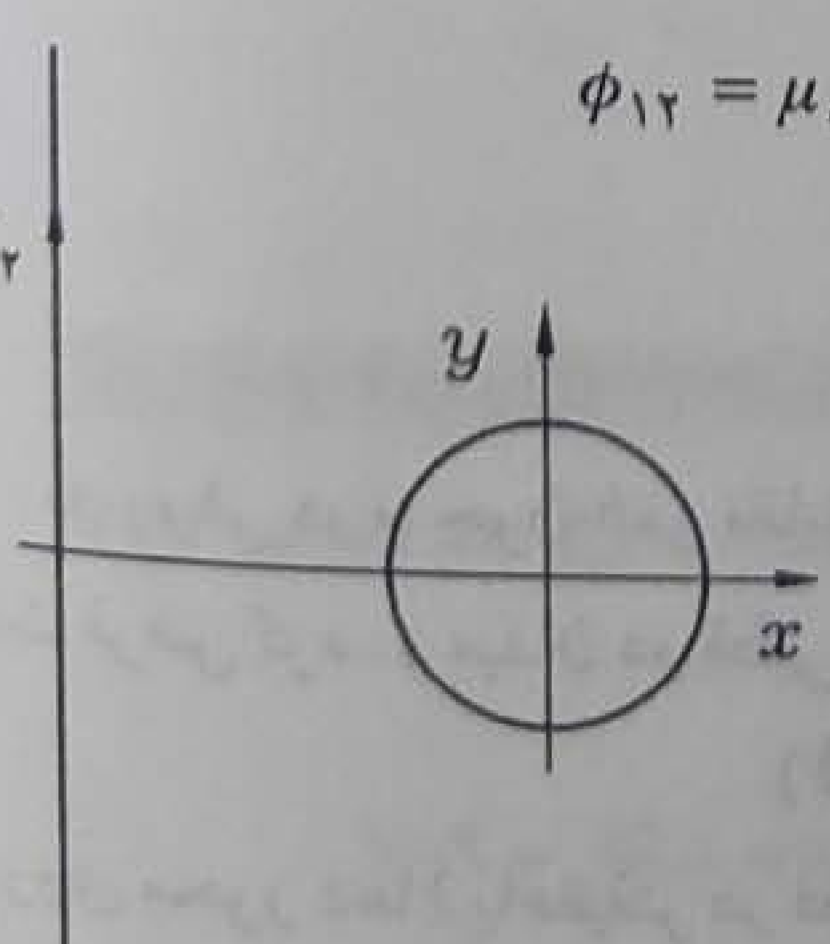
$$\phi_{12} = \frac{\mu_\circ I_2}{2\pi} \int_\circ^R \int_\circ^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\phi}{d + \rho \cos\phi}$$

با استفاده از انتگرال معین داده شده خواهیم داشت

$$\phi_{12} = \mu_\circ I_2 \int_\circ^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{d^2 - \rho^2}} = \mu_\circ I_2 [\sqrt{d^2 - R^2} - d]$$

و پس

$$U = \mu_\circ I_1 I_2 [\sqrt{d^2 - R^2} - d]$$



شکل ح ۹-۱۰

۹-۱۱ انرژی حلقه در حالتی که فاصله‌اش تا سیم برابر xاست، عبارت است از

$$U = \mu_0 I_1 I_2 [\sqrt{x^2 - R^2} - x]$$

و $F = dU/dx$، پس $F = \mu_0 I_1 I_2 \left[\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} - 1 \right]$ و در $x = d$

$$F = \mu_0 I_1 I_2 \left[\frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}} - 1 \right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۱۲ میدان در بین دو صفحه $B = \mu_0 H = 100\,\mu_0$ و $H = 100$ A/m است. در حالت الف

$$W_1 = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 V$$

که در آن V حجم سیملوله است و

$$W_1 = \frac{1}{2}\mu_0 \times (100)^2 \times \pi \times (0.04)^2 \times (0.01) = 31.6\ \mu\text{J}$$

در حالت ب میدان داخل سیملوله یکنواخت و برابر $H = n\,I = 50$ A/m است، پس

$$W_2 = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 V = 7.90\ \mu\text{J}$$

در حالت ج دو میدان داریم و در این حالت

$$W_H = \frac{1}{2}\mu H_1^2 + \frac{1}{2}\mu H_1^2 + \mu H_1 \cdot H_2$$

ولی چون دو میدان بر هم عمودند

$$H^2 = 100^2 + 50^2 = 12500\ (\text{A/m})^2$$

$$W_3 = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 V = 39.5\ \mu\text{J}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۱۳ با توجه به حل مسئلهٔ ۷-۲۶ میدان داخل چنبره عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

شاری که از هر مقطع چنبره می‌گذرد عبارت است از

$$\Phi = \int_0^h \int_a^b \frac{\mu_0 n I}{2\pi\rho}\, d\rho\, dh = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} h \ln\frac{b}{a}$$

شاری که از کل سیم پیچ می‌گذرد nبرابر Φاست. پس $\Lambda = n\,\Phi$ و

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} n^2 \ln\frac{b}{a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۱۴ چگالی انرژی عبارت است از

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{8\pi^2\rho^2}$$

کل انرژی ذخیره شده برابرست با

$$W = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b u\,\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= \frac{\mu_\circ n^\text{۲} I^\text{۲}}{\text{۸} \pi^\text{۲}} \int_\circ^h dz \int_\circ^{\text{۲}\pi} d\phi \int_a^b \frac{d\rho}{\rho}$$

$$= \frac{\mu_\circ n^\text{۲} I^\text{۲}}{\text{۸} \pi^\text{۲}} (h)(\text{۲}\pi) \ln \frac{b}{a}$$

این انرژی را می‌توان از رابطهٔ $\frac{\text{۱}}{\text{۲}} L I^\text{۲}$، با L به دست آمده در مسئله ۹-۱۳، نیز یافت.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۹-۱۵ میدان داخل سیملوله $B = \mu_\circ n I \hat{\boldsymbol{\phi}}$، القاکنایی در واحد طول آن $\mu_\circ n^\text{۲} \pi R^\text{۲}$ و پتانسیل مغناطیسی آن $(\mu_\circ n I R^\text{۲} / \text{۲}\rho)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ است. پس

(الف) $B^\text{۲} = \mu_\circ^\text{۲} n^\text{۲} I^\text{۲}$ و چون میدان در داخل سیملوله یکنواخت است

$$W = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\mu_\circ} B^\text{۲} V = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \mu_\circ n^\text{۲} I^\text{۲} (\pi R^\text{۲})$$

که V حجم یک متر سیملوله است.

(ب)

$$W = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} L I^\text{۲} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \mu_\circ n^\text{۲} \pi R^\text{۲} I^\text{۲}$$

(ج) $K = n I \hat{\boldsymbol{\phi}}$ و روی سطح سیملوله $r = R$ پس $\mathbf{A}\cdot\mathbf{K} = \mu_\circ n^\text{۲} I^\text{۲} R / \text{۲}$ و

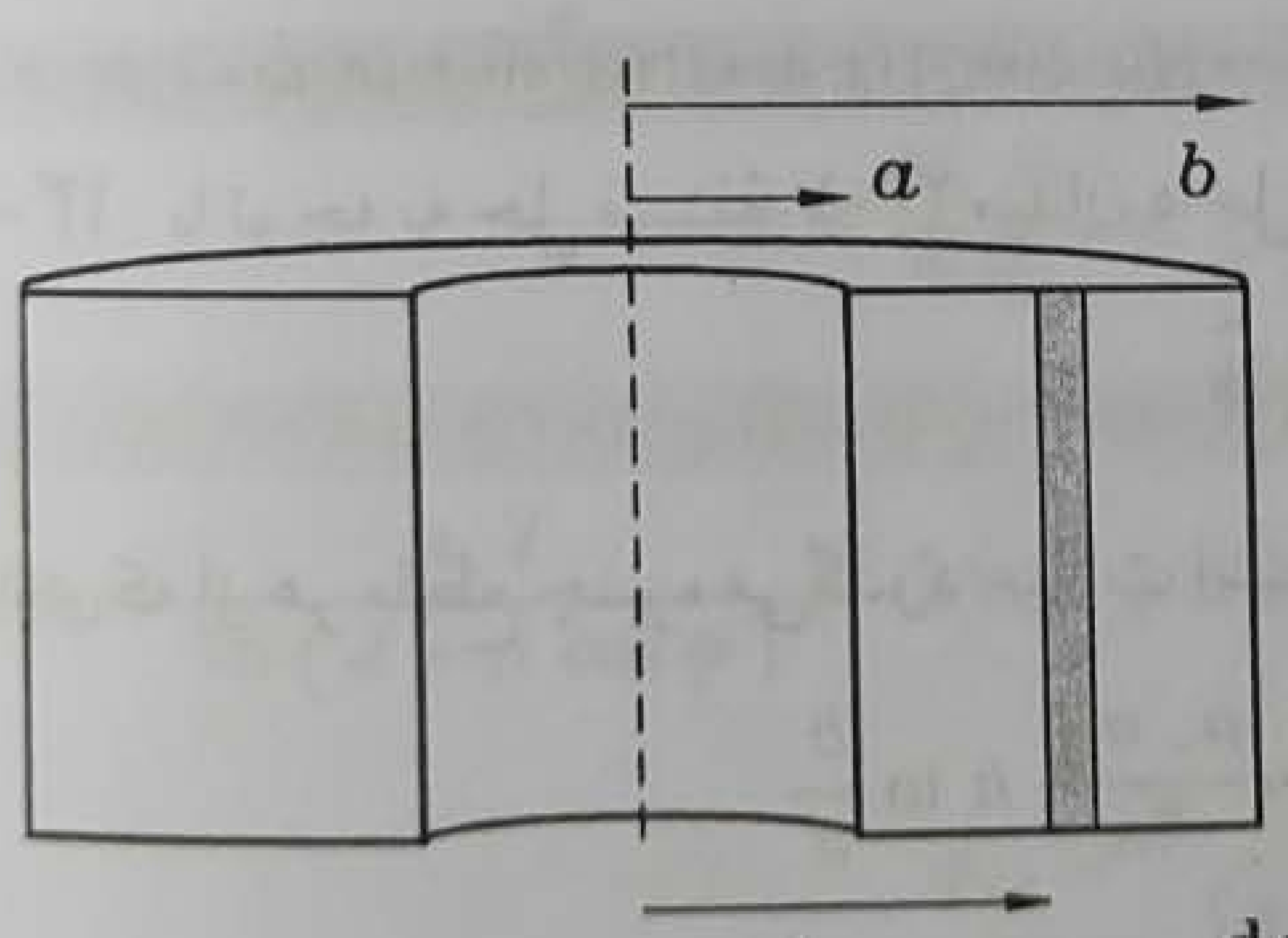
$$W = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \int \mathbf{A}\cdot\mathbf{K}\, ds = \frac{\mu_\circ n^\text{۲} I^\text{۲} R}{\text{۴}} (\text{۲}\pi R)$$

$$= \frac{\mu_\circ n^\text{۲} \pi R^\text{۲} I^\text{۲}}{\text{۲}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۹-۱۶ شکل ح ۹-۱۶ مقطعی از پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد. با استفاده از قانون آمپر می‌توان نشان داد که میدان داخل پوسته در فاصله ρ از محور برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{\text{۲}\pi\rho} \left(\frac{\rho^\text{۲} - a^\text{۲}}{b^\text{۲} - a^\text{۲}} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$



شکل ح ۹-۱۶

گذر شار متناظر با سطح هاشور زده را به دست می‌آوریم

$$d\Lambda = \frac{\mu_\circ I}{\text{۲}\pi\rho} \left(\frac{\rho^\text{۲} - a^\text{۲}}{b^\text{۲} - a^\text{۲}} \right) (l\, d\rho) \left(\frac{\rho^\text{۲} - a^\text{۲}}{b^\text{۲} - a^\text{۲}} \right)$$

نکته اصلی حل این مسئله در جملهٔ آخر عبارت فوق نهفته است. تمام جریان I در گذر شار مربوط به سطح هاشور زده شده دخیل نیست، بلکه تنها بخشی از جریان که درون این سطح هست باید در نظر گرفته شود. پس

$$\Lambda = \frac{\mu_\circ I l}{\text{۲}\pi (b^\text{۲} - a^\text{۲})^\text{۲}} \int_a^b \frac{(\rho^\text{۲} - a^\text{۲})^\text{۲}}{\rho} d\phi$$

$$= \frac{\mu_\circ I l}{\text{۲}\pi (b^\text{۲} - a^\text{۲})^\text{۲}} \int_a^b (\rho^\text{۳} - \text{۲} a^\text{۲}\rho + \frac{a^\text{۴}}{\rho})\, d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi (b^2 - a^2)^2} \left[\frac{\rho^4}{4} - \rho^2 a^2 + a^4 \ln \rho \right] \Big|_a^b$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\Lambda}{I l} = \frac{\mu_0}{8\pi (b^2 - a^2)} \left(b^2 - 3a^2 + \frac{4a^4}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۹-۱۷ میدان مغناطیسی را برابر $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi (b^2 - a^2)} \left(\rho - \dfrac{a^2}{\rho} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}$ به دست آوردیم. پس

$$w_H = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 (b^2 - a^2)^2} \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right)^2$$

و انرژی ذخیره شده برابرست با

$$W = \int w_H \, dv = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b w_H \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= 2\pi l \int_a^b w_H \rho \, d\rho = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (b^2 - a^2)^2} \int_a^b \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right)^2 \rho \, d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi (b^2 - a^2)^2} \left[\frac{b^4 - a^4}{4} - a^2 (b^2 - a^4) + a^4 \ln \frac{b}{a} \right]$$

و چون $W = \frac{1}{2} L I^2$،

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi (b^2 - a^2)} \left(\frac{b^2 + a^2}{4} - a^2 + \frac{a^4}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۹-۱۸ میدان داخل سیم را با استفاده از قانون آمپر به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho \, \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

انرژی ذخیره شده در واحد طول سیم عبارت است از

$$W = \int w_H \, dv = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b w_H \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= 2\pi \int_a^b w_H \rho \, d\rho$$

که در آن $w_H = B^2 / 2\mu_0$ چگالی انرژی مغناطیسی است

$$W = 2\pi \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^4} \int_a^b \rho^3 \, d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

و سرانجام

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۹-۱۹ میدان داخل سیملوله $B = \mu_0 N I / l$ است. انرژی ذخیره شده در سیملوله عبارت است از

$$U = V B^2 / 2\mu_0$$

که در آن $V = \pi R^2 l$ حجم سیملوله است.

$$U = \frac{\pi R^2 l \mu_0 N^2 I^2}{2\mu_0 l^2} = \frac{\pi \mu_0 N^2 I^2}{2l} R^2$$

نیرو در جهت شعاعی و رو به بیرون است. این نیرو به یک دور سیم وارد می‌شود. پس نیروی وارد بر واحد طول سیم عبارت است از

$$f = \frac{F}{2\pi R} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2l}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۹-۲۰ میدان ناشی از دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1}{r^3}\,(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

نیروی وارد بر حلقه عبارت است از

$$\mathbf{F} = I_2\int d\mathbf{l}\times\mathbf{B} = -I_2\int \mathbf{B}\times(a\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}) \qquad (1)$$

$$= -\frac{\mu_0 m_1 I_2 a}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi} 2\cos\theta\,d\phi\,(-\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}\,d\phi$$

برای محاسبهٔ انتگرال بردارهای $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ را در دستگاه مختصات قائم بیان می‌کنیم.

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

چون انتگرال $\sin\phi$ و $\cos\phi$ روی یک دورهٔ تناوب صفر می‌شود، مولفه‌های x و y نیرو صفر است و

$$F_z = -\frac{\mu_0 m_1 I_2 a}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi} 3\sin\theta\cos\theta\,d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 m_1 I_2 a}{4\pi r^3}\times 6\pi\sin\theta\cos\theta$$

که در آن $\sin\theta = a/r$ ، $\cos\theta = d/r$ و $r = \sqrt{d^2 + a^2}$. پس

$$F_z = -\frac{\mu_0 m_1 I_2 a}{4\pi r^3}\times 6\pi\times\frac{a}{r}\times\frac{d}{r} = -\frac{3}{2}\mu_0 m_1 I_2\frac{a^2 d}{(d^2+a^2)^{5/2}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۹-۲۱ با میل a به صفر داریم

$$F_z = -\frac{3\mu_0 m_1 I_2}{2}\frac{a^2 d}{d^5} = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi d^4}$$

که در آن $m_2 = \pi a^2 I_2$. وقتی حلقه را دو قطبی در نظر می‌گیریم $\mathbf{m}_2 = m_2\hat{\mathbf{z}}$، داریم $\mathbf{F} = (\mathbf{m}_2\cdot\nabla)\,\mathbf{B}_1$، پس

$$\mathbf{F} = (m_2\hat{\mathbf{z}}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}_1 = m_2\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{B}_1$$

روی محور z داریم $\cos\theta = 1$ ، $\sin\theta = 0$ ، $r = z$ و $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$، پس از معادلهٔ (۱) حل مسئلهٔ ۹-۲۰ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{2\pi z^3}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{F} = m_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_0 m_1}{2\pi z^3}\right)\hat{\mathbf{z}} = \frac{-3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi z^4}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۹-۲۲ نیرویی که سیملوله به میله وارد می‌کند آن را به اندازهٔ Δx به درون می‌کشد و به این ترتیب بر روی آن

به اندازهٔ $F\,\Delta x$ کار انجام می‌دهد. به این ترتیب حجمی که قبلاً فضای آزاد بوده با میله پر می‌شود. این پدیده باعث می‌شود انرژی ذخیره شده در این حجم از $(A\,\Delta x)(\frac{1}{2}\mu_{\circ} H^{2})$ به $(A\,\Delta x)(\frac{1}{2}\mu H^{2})$ برسد. یعنی

$$\Delta U = \frac{1}{2}(\mu - \mu_{\circ})\, H^{2} A\, \Delta x$$

چون $F\,\Delta x = \Delta U$ داریم

$$F = \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{1}{2}(\mu - \mu_{\circ})\, H^{2} A$$
$$= \frac{1}{2}(\mu - \mu_{\circ})(n\,I)^{2} A$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۲۳ نیرویی که بر دو قطبی بالایی وارد می‌شود عبارت است از (مسئلهٔ ۹-۲۱ را ببینید)

$$\mathbf{F} = \frac{3\,\mu_{\circ}\, m^{2}}{2\pi\, z^{4}}\,\hat{\mathbf{z}}$$

این نیرو با نیروی وزن دو قطبی برابر است

$$\frac{3\,\mu_{\circ}\, m^{2}}{2\pi\, z^{4}} = M\,g$$

$$z = \left(\frac{3\,\mu_{\circ}\, m^{2}}{2\pi\, M\,g}\right)^{1/4}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۲۴ انرژی یک دو قطبی واقع در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ برابر $\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}$ - است و میدان مغناطیسی دو قطبی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد (مسئلهٔ ۶-۱۰ را ببینید)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_{\circ}}{4\pi}\,\frac{1}{r^{3}}\,[\,3\,(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}\,]$$

پس انرژی دو قطبی m_2 عبارت است از

$$U = -\,\mathbf{m}_{2}\cdot\mathbf{B} = -\,\frac{\mu_{\circ}}{4\pi}\,\frac{1}{r^{3}}\,[\,3\,(\mathbf{m}_{1}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,(\mathbf{m}_{2}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}_{1}\cdot\mathbf{m}_{2}\,]$$

برای آرایش نشان داده شده داریم

$$\mathbf{m}_{1}\cdot\mathbf{m}_{2} = m_{1}\, m_{2}\cos(\theta_{1}-\theta_{2}),\ \mathbf{m}_{2}\cdot\hat{\mathbf{r}} = m_{2}\cos\theta_{2},\ \mathbf{m}_{1}\cdot\hat{\mathbf{r}} = m_{1}\cos\theta_{1}$$

$$U = \frac{\mu_{\circ}\, m_{1}\, m_{2}}{4\pi\, r^{3}}\,[\,\cos(\theta_{1}-\theta_{2}) - 3\cos\theta_{1}\cos\theta_{2}\,]$$

$\mathbf{m}_2$ به نحوی می‌چرخد که انرژی می‌نیمم شود، یعنی در حالت پایدار $dU/d\theta_{2} = 0$ یا

$$\sin(\theta_{1}-\theta_{2}) + 3\cos\theta_{1}\sin\theta_{2} = 0$$

یا $\sin\theta_{1}\sin\theta_{2} - \cos\theta_{1}\sin\theta_{2} + 3\cos\theta_{1}\sin\theta_{2} = 0$ که به دست می‌دهد

$$\tan\theta_{1} = -\,2\tan\theta_{2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۲۵ نیرو عبارت است از

$$F = \frac{B^{2}}{2\,\mu_{\circ}}\,S$$

پس چگالی شار در فاصلهٔ هوایی باید برابر مقدار زیر باشد

$$B = \sqrt{\frac{۲\mu_۰ F}{S}} = ۰٫۴۹۸\ \text{Wb/m}^۲$$

$\phi = B\,S = ۱۱۲٫۰۵\,\mu\ \text{Wb}$ ، و داریم
شار داخل فاصله هوایی و چنبره عبارت است از

$$\phi = \frac{\text{mmf}}{\mathcal{R} + \mathcal{R}_g} = \frac{۱۲۰}{\mathcal{R} + \mathcal{R}_g}$$

که $\mathcal{R}$ رلوکتانس چنبره و $\mathcal{R}_g$ رلوکتانس فاصله هوایی است.

$$\mathcal{R} = \frac{۲\pi\,(۵ + ۰٫۷۵) \times ۱۰^{-۲}}{۳۵۰۰\,\mu_۰ \times ۱٫۲۵ \times ۱۰^{-۴}} = ۳۶۵ \times ۱۰^{۳}$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{۱۲۰}{\phi} - \mathcal{R} = ۷۰۶ \times ۱۰^{۳}$$

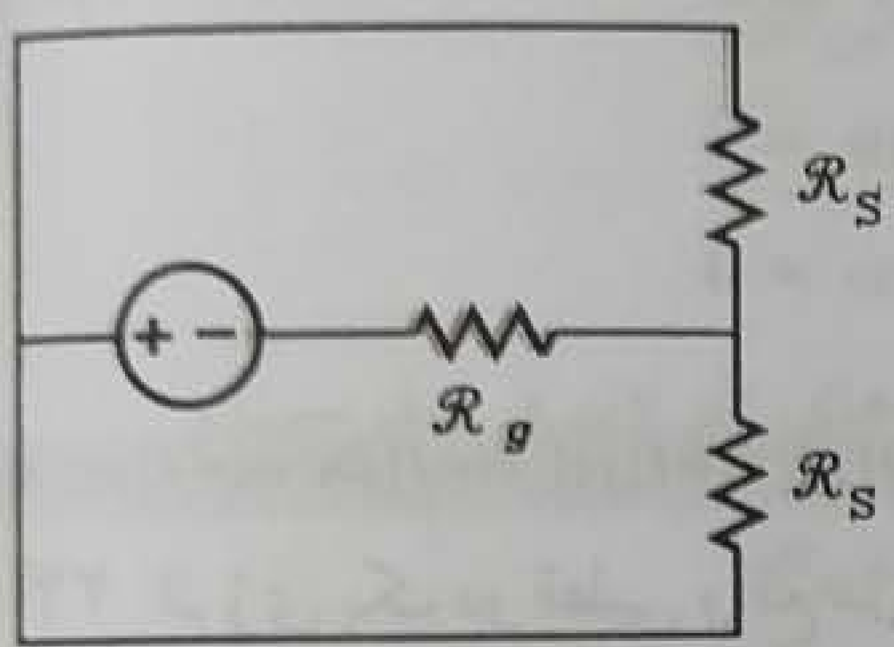
$$l_g = \mu_۰\, S\, \mathcal{R}_g = ۰٫۲\ \text{mm}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A = ۰\,|\,\nabla\times B = \mu J\,|\,\nabla\times H = J\,|\,\nabla\cdot B = ۰\,|\,\nabla\cdot D = \rho\,|\,\nabla\times E = ۰\,|\,\oint D\cdot ds = Q\,|\,\int J\cdot ds = I\,|\,\oint H\cdot dl = I\,|\,\oint B\cdot ds = ۰\,|\,\oint E\cdot dl = ۰$

۹-۲۶ چون هسته تراوایی بسیار بزرگی دارد رلوکتانس آن در مقابل رلوکتانس فاصله هوایی قابل اغماض است و برای مدار مغناطیسی شکل ح ۹-۲۶ داریم

$$\mathcal{R}_s = \frac{۲ \times ۱۰^{-۳}}{۴۰۰ \times ۱۰^{-۶}\,\mu_۰} = \frac{۵}{\mu_۰}$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{x \times ۱۰^{-۳}}{۴۰ \times ۴۰ \times ۱۰^{-۶}\,\mu_۰} = \frac{۱۰\,x}{۸\,\mu_۰}$$



شکل ح ۹-۲۶

که در آن x بر حسب میلیمتر است. پس رلوکتانس کل دیده شده توسط سیم‌پیچ $\mathcal{R} = \mathcal{R}_g + \frac{۱}{۲}\mathcal{R}_s$ است و با توجه به حل مسئلهٔ ۹-۹ القاکنایی آن برابر است با

$$L = \frac{N^۲}{\mathcal{R}} = \frac{۲۵۰۰}{(۲٫۵/\mu_۰) + (۱۰\,x/۸\,\mu_۰)} = \frac{۲۰۰۰۰\,\mu_۰}{۲۰ + ۱۰\,x} = \frac{۲۰۰۰\,\mu_۰}{x + ۲}$$

نیروی وارد شده بر زبانه عبارت است از

$$F = \frac{۱}{۲} I^۲ \frac{dL}{dx} = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰۰ \times ۲۰۰۰\,\mu_۰ \frac{۱}{(x + ۲)^۲}$$

و در $x = ۵\ \text{mm}$

$$F = -\frac{۴\pi}{۴۹۰۰}\,N$$

منفی بودن نیرو نشان می‌دهد که این نیرو نیروی جاذبه است.

$\nabla\cdot\nabla\times A = ۰\,|\,\nabla\times B = \mu J\,|\,\nabla\times H = J\,|\,\nabla\cdot B = ۰\,|\,\nabla\cdot D = \rho\,|\,\nabla\times E = ۰\,|\,\oint D\cdot ds = Q\,|\,\int J\cdot ds = I\,|\,\oint H\cdot dl = I\,|\,\oint B\cdot ds = ۰\,|\,\oint E\cdot dl = ۰$

۹-۲۷ نیرویی که در طی حرکت بار بر آن وارد می‌شود عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\,\mathbf{E} \\ &= q\,(v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}) \times B_۰\,\hat{\mathbf{x}} + q\,E_۰\,\hat{\mathbf{z}} \\ &= q\,B_۰\,v_z\,\hat{\mathbf{y}} + q\,(E_۰ - B_۰\,v_y)\,\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

که در آن v_x، v_y، و v_z مولفه‌های سرعت ذره هستند. چون در جهت $\hat{\mathbf{x}}$ به ذره نیرویی وارد نمی‌شود و سرعت اولیهٔ ذره در این جهت نیز صفر است، ذره همواره در صفحه $x = ۰$ می‌ماند. $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ و $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ پس

$$m\dot{v}_y = qB_\circ v_z$$

$$m\dot{v}_z = qE_\circ - qB_\circ v_y \qquad (1)$$

(۲)

که علامت نقطه بر روی یک کمیت مشتق آن نسبت به زمان را نشان می‌دهد. از معادله دوم نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$m\ddot{v}_z = -qB_\circ \dot{v}_y$$

با قرار دادن $\dot{v}_y$ از معادلهٔ اول در این معادله و $\omega = qB_\circ / m$ به دست می‌آوریم $\ddot{v}_z = -\omega^2 v_z$ که حل آن عبارت است از

$$v_z = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (3)$$

با قرار دادن این مقدار در معادله (۲) به دست می‌آوریم

$$v_y = \frac{E_\circ}{B_\circ} + A\sin\omega t - B\cos\omega t \qquad (4)$$

شرایط اولیه $v_z = \circ$ و $v_y = \circ$ نتیجه می‌دهد $A = \circ$ و $B = E_\circ / B_\circ$. مختصهٔ y و z محل بار در هر زمان با انتگرالگیری از سرعت بار به دست می‌آید

$$z = -\frac{E_\circ}{B_\circ\omega}\cos\omega t + K_1$$

$$y = \frac{E_\circ}{B_\circ}t - \frac{E_\circ}{B_\circ\omega}\sin\omega t + K_2$$

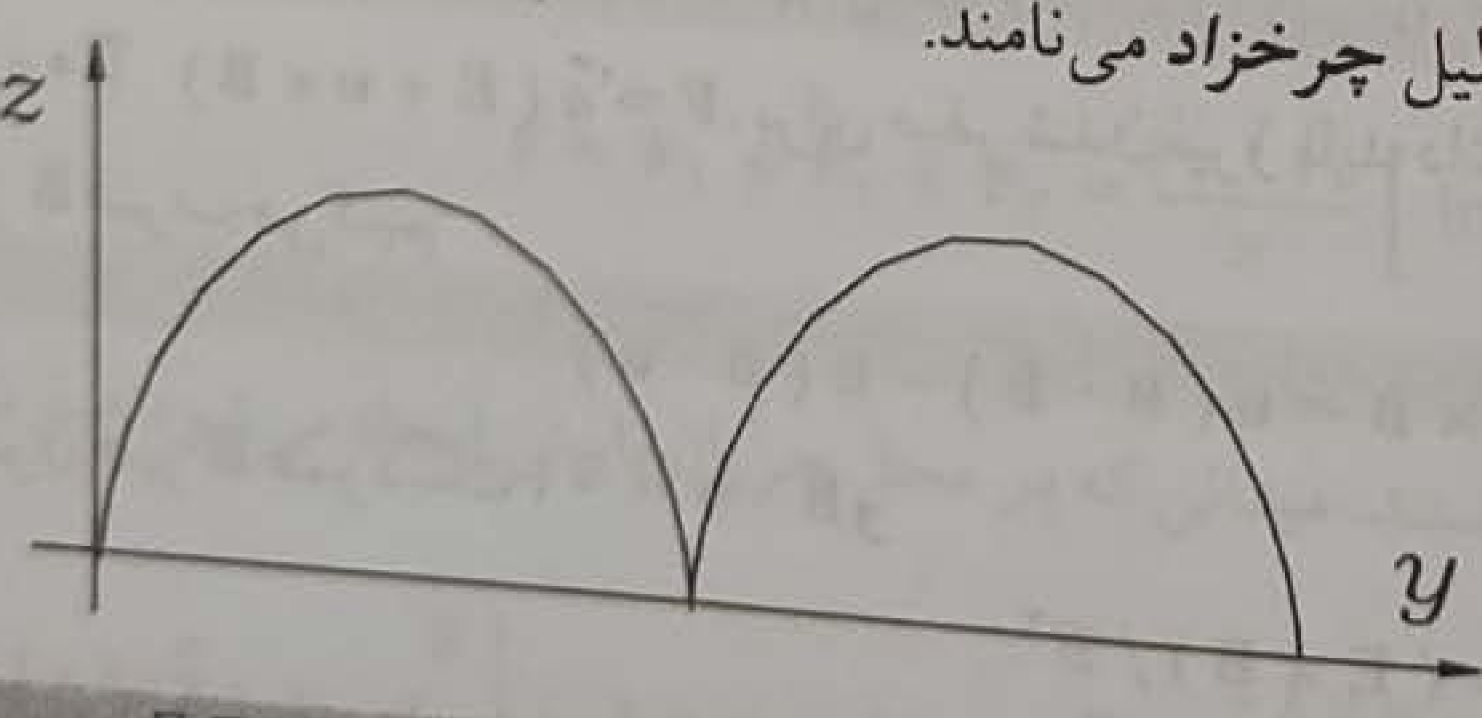
در $t = \circ$ بار در مبدا قرار دارد، که نتیجه می‌دهد $K_1 = E_\circ / B_\circ\omega$ و $K_2 = \circ$. پس

$$z = \frac{E_\circ}{B_\circ\omega}(1 - \cos\omega t) \quad \text{و} \quad y = \frac{E_\circ}{B_\circ\omega}(t\omega - \sin\omega t)$$

اگر قرار دهیم $R = E_\circ / B_\circ\omega$ خواهیم داشت $z - R = -R\cos\omega t$ و $y - Rt\omega = R\sin\omega t$، یا

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

معادله مسیر در شکل ح ۹–۲۷ نشان داده شده است. این معادلهٔ دایره‌ای است که مرکز آن با سرعت خطی $R\omega$ در جهت y حرکت می‌کند. نقطه‌ای واقع در لبهٔ یک چرخ به شعاع R، که با سرعت $R\omega$ حرکت می‌کند چنین مسیری را می‌پیماند. این منحنی را به همین دلیل **چرخزاد** می‌نامند.



شکل ح ۹-۲۷

۹-۲۸ با قرار دادن شرط اولیه در معادلات (۳) و (۴) حل مسئلهٔ ۹–۲۷ به دست می‌آوریم $B = \circ$ و $A = E_\circ / B_\circ$. با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$y = \frac{E_\circ}{B_\circ}t - \frac{E_\circ}{B_\circ\omega}\cos\omega t + K_1$$

$$z = \frac{E_\circ}{B_\circ\omega}\sin\omega t + K_2$$

و سرانجام با توجه به این که در $t = 0$ بار در مبدا قرار دارد $K_2 = 0$ و $K_1 = E_0 / \omega B_0$.

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = 0 \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

۹-۲۹ (الف) سرعت بار را به صورت بیان شده در حل مسئلهٔ ۹-۲۷ به صورت معادلات (۳) و (۴) به دست می‌آوریم. با توجه به شرط اولیهٔ داده شده $B = 0$ و $A = 0$، پس $v_y = E_0 / B_0$ و $y = (E_0 / B_0)\, t$ یعنی بار با سرعت E_0 / B_0 روی محور y حرکت می‌کند.

(ب) با قرار دادن شرط اولیه داده شده، در معادلات (۳) و (۴) حل مسئلهٔ ۹-۲۷ به دست می‌آوریم $A = 0$ و $B = E_0 / 2 B_0$. با انتگرالگیری خواهیم یافت

$$z = \frac{-E_0}{2 \omega B_0} \cos \omega t + K_1$$

$$y = \frac{E_0}{B_0} t + \frac{E_0}{2 B_0 \omega} \sin \omega t + K_2$$

چون بار در $t = 0$ در مبدا مختصات قرار دارد، باید داشته باشیم $K_2 = 0$ و $K_1 = E_0 / 2 \omega B_0$

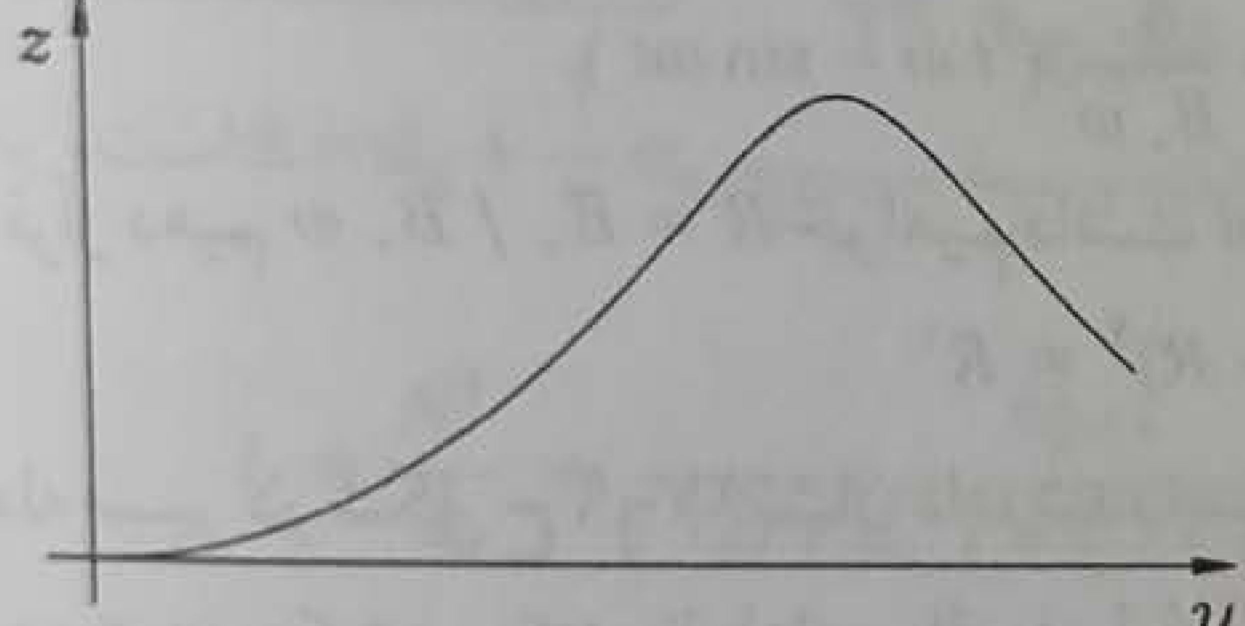
$$z = \frac{E_0}{2 \omega B_0} (1 - \cos \omega t)$$

$$y = \frac{E_0}{B_0} t + \frac{E_0}{2 B_0 \omega} \sin \omega t$$

با همان فرض $R = E_0 / \omega B_0$ خواهیم داشت

$$(y - \omega R t)^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}$$

مسیر حرکت در شکل ح ۹-۲۹ نشان داده شده است.



شکل ح ۹-۲۹

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = 0 \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

۹-۳۰ $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. برای صفر شدن نیرو باید داشته باشیم $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$. دو طرف را در $\mathbf{B}$ ضرب می‌کنیم

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{B} = \mathbf{v} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})$$

چون $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{B}$ عمود است، $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0$ و

$$\mathbf{v} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) / B^2$$

به ازای میدانهای داده شده $B^2 = 9 B_0^2$ و

$$\mathbf{v} = B_0 E_0 (6 \hat{\mathbf{x}} + 3 \hat{\mathbf{y}} - 6 \hat{\mathbf{z}}) / 9 B_0^2$$
$$= \frac{E_0}{3 B_0} (2 \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - 2 \hat{\mathbf{z}})$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = 0 \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

۹-۳۱ نیروی وارد بر یک عنصر طول حلقه عبارت است از

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

کل نیروی وارد بر حلقه جمع این نیروهاست

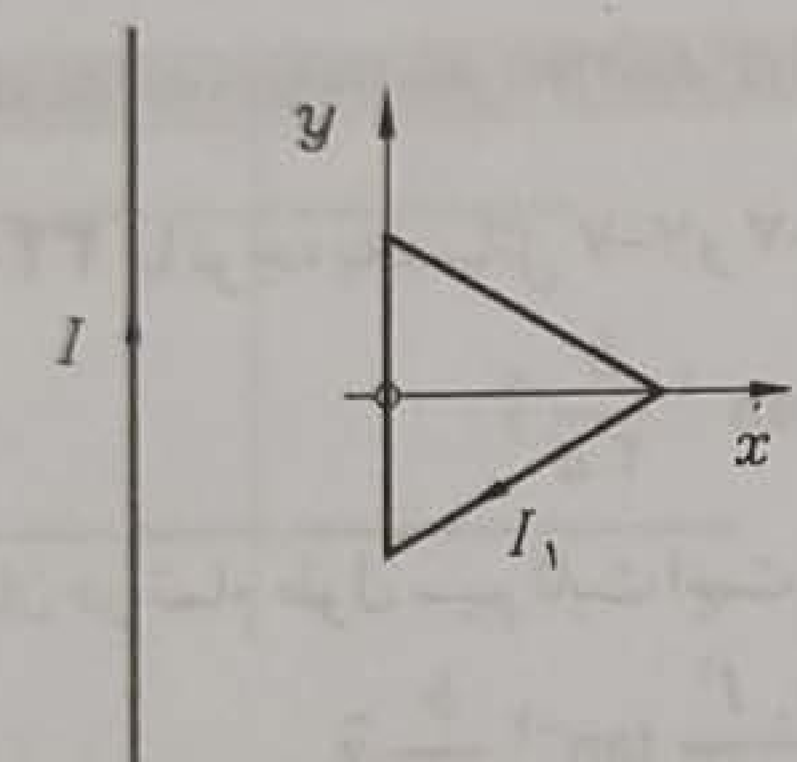
$$\mathbf{F} = \sum d\mathbf{F} = \sum I\, d\mathbf{l} \times B$$
$$= I\left(\sum d\mathbf{l} \right) \times B$$

زیرا B ثابت است و ضرب برداری روی جمع خاصیت پخشی دارد. $\sum \mathbf{dl}$ جمع بردارهای حول حلقه است که به وضوح صفر است. پس $\mathbf{F} = 0$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۳۲ میدان مغناطیسی در محل مثلث عبارت است از $\mathbf{B} = [\, I\mu_0 \,/\, 2\pi(R+x)\,](-\hat{\mathbf{z}})$. نیروی وارد بر بخش موازی با جریان خطی عبارت است از

$$\mathbf{F} = (2a)\frac{\mu_0 I I_1}{2\pi R}(-\hat{\mathbf{x}})$$



شکل ح ۹-۳۲

در امتداد ساق بالایی $dy = -dx$ پس $\mathbf{dl} = dx\,\hat{\mathbf{x}} - dx\,\hat{\mathbf{y}}$. نیروی وارد بر ساق بالایی مثلث عبارت است از

$$\mathbf{F}_2 = \int I_1\, d\mathbf{l}\times\mathbf{B} = \frac{I I_1 \mu_0}{2\pi}\int (dx\,\hat{\mathbf{x}} - dx\,\hat{\mathbf{y}}) \times \frac{-\hat{\mathbf{z}}}{R+x}$$
$$= \frac{I I_1}{2\pi}(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})\int_0^a \frac{dx}{R+x} = \frac{I I_1}{2\pi}(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})\ln\left(1+\frac{a}{R}\right)$$

به همین ترتیب چون روی ساق پایینی $dy = dx$ نیروی وارد بر آن عبارت است از

$$\mathbf{F}_3 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi}(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}})\ln\left(1+\frac{a}{R}\right)$$

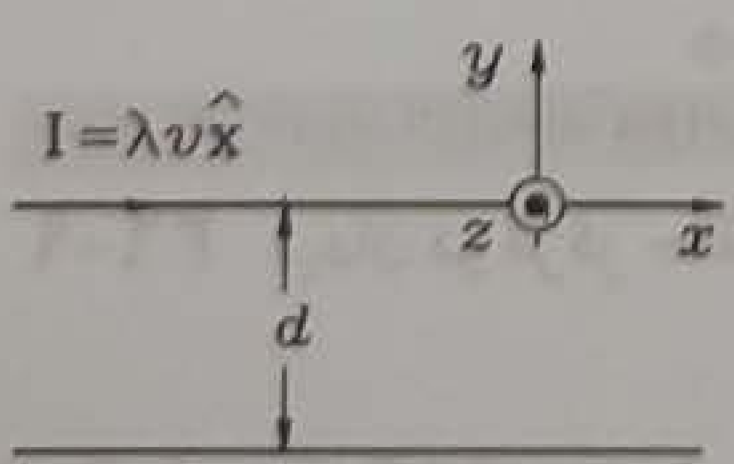
پس

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \frac{\mu_0 I I_1}{\pi}\left[\ln\left(1+\frac{a}{R}\right) - \frac{a}{R}\right]\hat{\mathbf{x}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۹-۳۳ دو بار معادل جریانهای $\mathbf{I} = \lambda v\,\hat{\mathbf{x}}$ هستند. میدانی که در محل جریان پایینی ایجاد می‌شود عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{-\lambda v \mu_0}{2\pi d}\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۹-۳۳

پس نیروی وارد بر عنصر کوچکی از سیم پایینی عبارت است از

$$\mathbf{F}_B = \lambda v\, dx\,\hat{\mathbf{x}} \times \frac{-\lambda v \mu_0}{2\pi d}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\lambda^2 v^2 \mu_0}{2\pi d}\hat{\mathbf{y}}$$

که نیروی جاذبه است. میدان الکتریکی در محل سیم پایینی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}(-\hat{\mathbf{y}})$$

و نیروی الکتریکی وارد بر عنصر طول سیم پایینی برابر است با

$$F_E = \lambda \, dx \, \mathbf{E} = \frac{-\lambda^2}{2\pi \varepsilon_0 d} \hat{\mathbf{y}}$$

برای این که دو نیرو هم را خنثی کنند باید داشته باشیم $|\mathbf{F}_B| = |\mathbf{F}_E|$ یا

$$\frac{\lambda^2}{2\pi \varepsilon_0 d} = \frac{\lambda^2 v^2 \mu_0}{2\pi d}$$

که نتیجه می‌دهد $v^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1$ یا

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

که سرعت نور در فضای آزاد است.

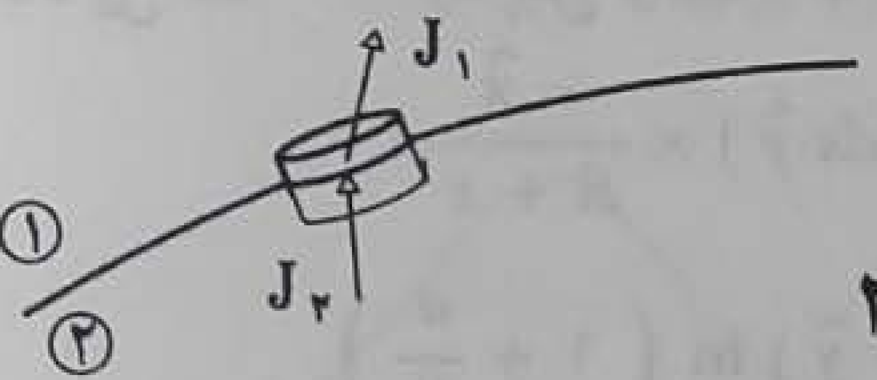
$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۹-۳۴ با توجه به مسائل ۷-۷ و ۷-۸ میدان ناشی از نوار جریان در محل سیم تنها مولفه y دارد و برابر است با

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\left(2 \tan^{-1} \frac{b}{2d}\right)\hat{\mathbf{y}} = -\frac{\mu_0 I}{\pi b} \tan^{-1} \frac{b}{2d} \hat{\mathbf{y}}$$

میدان در تمام طول سیم ثابت است، پس

$$\mathbf{F} = l\,\mathbf{I} \times \mathbf{B} = I(-\hat{\mathbf{x}}) \times \frac{-\mu_0 I}{\pi b} \tan^{-1} \frac{b}{2d} \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi b} \tan^{-1} \frac{b}{2d} \hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۹-۳۴

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۹-۳۵ میدان مغناطیسی ناشی از جریان سطحی واقع در $z = 0$ در محل جریان سطحی $K_0 \hat{\mathbf{x}}$ - عبارت است از

$$B = \frac{-\mu_0 K_0}{2} \hat{\mathbf{y}}$$

داریم

$$F = \iint \mathbf{K} \times \mathbf{B}\, ds = \int_0^1 \int_0^1 (-K_0 \hat{\mathbf{x}}) \times \left(\frac{-\mu_0 K_0}{2} \hat{\mathbf{y}}\right) dx\, dy$$

$$= \frac{\mu_0 K_0^2}{2}(-\hat{\mathbf{z}}) \int_0^1 \int_0^1 dx\, dy = \frac{-\mu_0 K_0^2}{2} \hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۹-۳۶ میدان در مرکز حلقه بزرگ عبارت است از (مسئله ۷-۲ به ازای $\alpha = 2\pi$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2a} \hat{\mathbf{z}}$$

حلقه کوچک گشتاوری برابر مقدار زیر دارد

$$\mathbf{m}_2 = \pi b^2 I_2 \hat{\mathbf{n}}$$

گشتاور وارد بر حلقه کوچک از $\mathbf{m}_2 \times \mathbf{B}$ به دست می‌آید

$$T = \pi b^{۲} I_{۲} \frac{\mu_{\circ} I_{۱}}{۲ a} (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{z}})$$

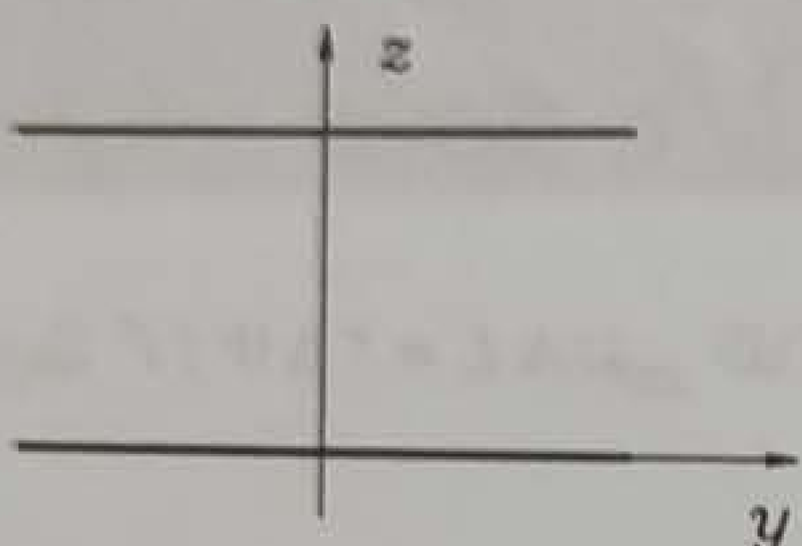
که در آن $\hat{\mathbf{n}} = \cos\theta\, \hat{\mathbf{z}} + \sin\theta\, \hat{\mathbf{x}}$. اگر امتداد تصویر $\hat{\mathbf{n}}$ بر صفحه حلقه بزرگ را محور $\hat{\mathbf{x}}$ بنامیم، پس

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\sin\theta\, \hat{\mathbf{y}}$$

پس گشتاور وارده سعی می‌کند حلقه کوچک را به نحوی بچرخاند که هم‌صفحه با حلقه بزرگ قرار گیرد، به صورتی که جهت جریانها یکسان باشد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۹-۳۷ دستگاه مختصات را به صورت نشان داده شده در شکل ح ۹-۳۷ بر می‌گزینیم. در نوار پایینی $\mathbf{K} = (I_{\circ}/۲a)\,\hat{\mathbf{x}}$ و در نوار بالایی $\mathbf{K} = -(I_{\circ}/۲a)\,\hat{\mathbf{x}}$. چون میدان نوار پایینی در محل نوار بالایی مولفه z و y دارد



شکل ح ۹-۳۷

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= -\frac{I_{\circ}}{۲a}\hat{\mathbf{x}} \times (B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}})\, ds \\ &= -\frac{I_{\circ}}{۲a}(B_y \hat{\mathbf{z}} - B_z \hat{\mathbf{y}})\, ds \end{aligned}$$

تقارن نشان می‌دهد که مولفه y نیروی کل صفر است، پس $d\mathbf{F} = -\frac{I_{\circ}}{۲a} B_y \hat{\mathbf{z}}$. در مسئله ۷-۸ به دست آوردیم

$$B_y = -\frac{\mu_{\circ} I_{\circ}}{۴ a \pi}\left[\tan^{-۱}\frac{y+a}{d} - \tan^{-۱}\frac{y-a}{d}\right]$$

پس

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\circ}^{۱}\int_{-a}^{a} d\mathbf{F}\, dy\, dx = \int_{-a}^{a} d\mathbf{F}\, dy \\ &= \frac{\mu_{\circ} I_{\circ}^{۲}}{۸ a^{۲}\pi}\hat{\mathbf{z}}\int_{-a}^{a}\left(\tan^{-۱}\frac{y+a}{d} - \tan^{-۱}\frac{y-a}{d}\right) dy \\ &= -\frac{\mu_{\circ} I_{\circ}^{۲}}{۸ a^{۲}\pi}\left[۴a\tan^{-۱}\frac{۲a}{d} - d\ln\left(۱ + \frac{۴a^{۲}}{d^{۲}}\right)\right] \end{aligned}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۹-۳۸ برای استفاده از روش شار به مثال ۱ توجه کنید. سطحی که باید شار گذرنده از آن را حساب کنیم یک قطاع است و میدان را در مسئلهٔ ۷-۴۱ به دست آوردیم

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int \frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot r\,d\theta\,dr\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi}\int_{\theta_{\circ}}^{\pi-\theta_{\circ}}\frac{d\theta}{\sin\theta}\int_{\circ}^{R} dr = \frac{\mu_{\circ} I R}{\pi}\int_{\theta_{\circ}}^{\pi/۲}\frac{d\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\mu_{\circ} I R}{\pi}\ln\operatorname{cotg}\frac{\theta_{\circ}}{۲} \end{aligned}$$

و بنابراین القاکنایی عبارت است از

$$L = \frac{\mu_{\circ} R}{\pi}\ln\operatorname{cotg}\frac{\theta_{\circ}}{۲}$$

می‌توان این نتیجه را از روش انرژی نیز به دست آورد

$$W = \frac{۱}{۲} \int \frac{B^{۲}}{\mu_{\circ}} dv = \int \frac{\mu_{\circ} I^{۲}}{۸\pi^{۲} r^{۲} \sin^{۲}\theta} r^{۲} \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$= \frac{\mu_{\circ} I^{۲}}{۸\pi^{۲}} \int_{\theta_{\circ}}^{\pi-\theta_{\circ}} \frac{d\theta}{\sin\theta} \int_{\circ}^{۲\pi} d\phi \int_{\circ}^{R} dr = \frac{\mu_{\circ} I^{۲} R}{۲\pi} \ln \operatorname{cotg} \frac{\theta_{\circ}}{۲}$$

و رابطهٔ $L = ۲W / I^{۲}$ همان القاکنایی بالا را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times \mathbf{B}=\mu \mathbf{J} \,|\, \nabla\times \mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot \mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot \mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times \mathbf{E}=\circ \,|\, \oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۹-۳۹ تغییر انرژی ذخیره شده در محیطی که قبلاً فضای آزاد بوده و اکنون توسط فریت اشغال شده عبارت است از (چون دانهٔ فریت بسیار کوچک است، میدان داخل آن را از رابطهٔ میدان یک سیم راست بسیار بلند به دست می‌آوریم)

$$\Delta W = \frac{d I^{۲}}{۴\pi} \ln \frac{b}{a} (\mu - \mu_{\circ})$$

رابطهٔ $\Delta L = ۲\Delta W / I^{۲}$ تغییر القاکنایی را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$\Delta W = \frac{d}{۲\pi} \ln \frac{b}{a} (\mu - \mu_{\circ})$$