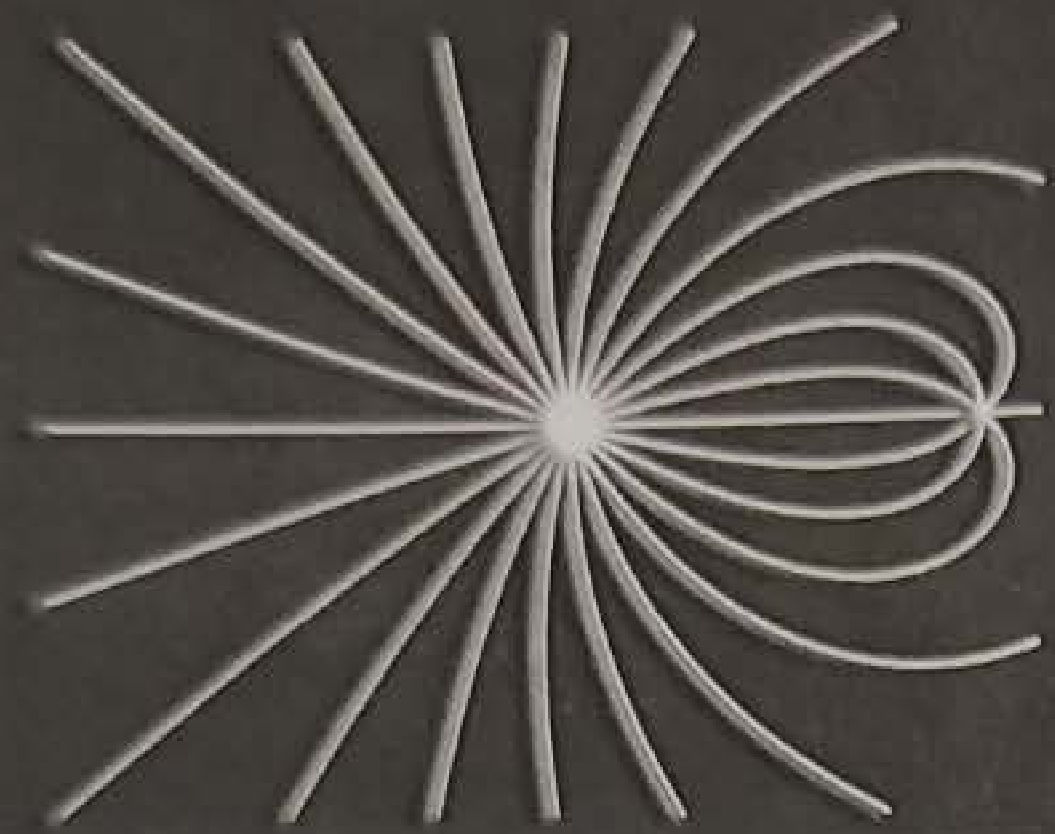


۸ میدان مغناطیسی در مواد

۸-۱ دو قطبی مغناطیسی

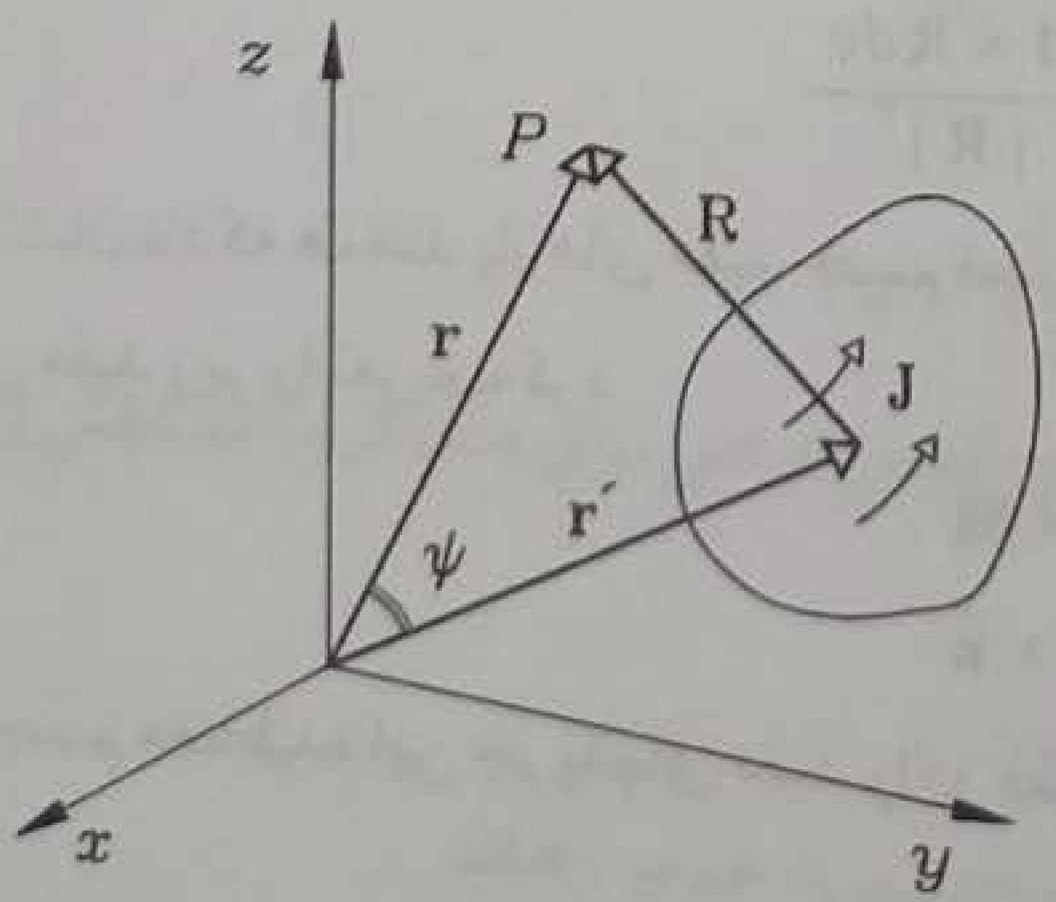
همانند بخش ۶-۳ می‌توان با بسط جملهٔ $1/|\mathbf{R}|$ به صورت معادلهٔ (۶-۹) پتانسیل مغناطیسی $\mathbf{A}$ را به صورت مجموعه‌ای از جملات نوشت. حاصل این کار عبارت است از

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\Big[\frac{1}{r}\int \mathbf{J}\,dv'+\frac{1}{r^2}\int \mathbf{J}\,r'\cos\psi\rho\,dv' \tag{۱-۸}$$

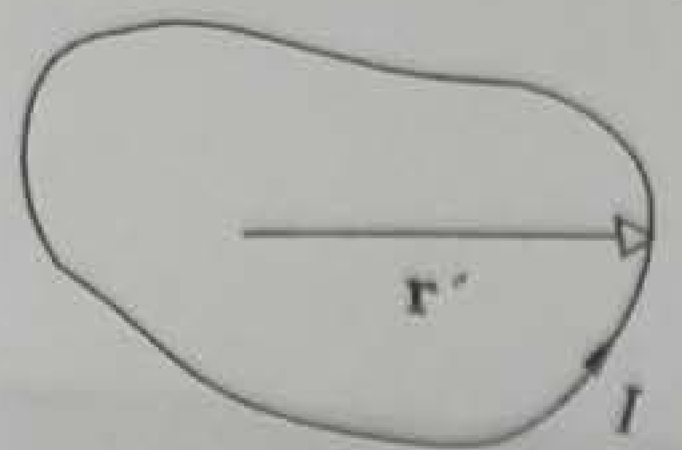
$$+\frac{1}{r^3}\int \mathbf{J}\,r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi-\frac{1}{2}\right)dv'+\cdots\Big]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int \mathbf{J}\,r'^n\,P_n(\cos\psi)\,dv' \tag{۲-۸}$$

که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ای لژاندر است. برای جریانهای سطحی و خطی باید به جای $\mathbf{J}\,dv'$ به ترتیب $\mathbf{K}\,ds$ و $I\,d\mathbf{l}$ را به کار برد. می‌توان نشان داد که برای میدانهای ساکن، یعنی میدانهای ناشی از جریانهایی با



شکل ۸-۱ یک توزیع جریان حجمی که پتانسیل برداری آن در نقطهٔ A به صورت معادلهٔ (۸-۲) بسط داده شده است.



شکل ۸-۲ حلقهٔ جریانی که گشتاور دو قطبی آن از معادلهٔ (۸-۴) به دست می‌آید.

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$، جملهٔ اول صفر است. پس مهمترین جمله، جملهٔ دوقطبی است که می‌توان آن را به صورت زیر در آورد

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \qquad (۸-۳)$$

که در آن $\mathbf{m}$ دو **گشتاور قطبی مغناطیسی** نامیده می‌شود، و برای حلقه‌های جریان به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{l} \qquad (۸-۴)$$

می‌توان ثابت کرد که (مسئلهٔ ۸-۴۰ را ببینید) برای حلقه‌های مسطح اندازهٔ گشتاور دو قطبی با حاصلضرب جریان در مساحت حلقه برابرست، راستای آن بر حلقه عمودست و جهت آن توسط قانون دست راست و با توجه به جهت جریان تعیین می‌شود. میدان مغناطیسی دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

۸-۲ مغناطش و میدان مغناطیسی در مواد

الکترونهای موجود در اتمهای مواد به خاطر چرخش اسپینی و اربیتالی دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی هستند. این گشتاورهای بسیار کوچک، به خاطر این که در راستاهای مختلف قرار دارند میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند. قرار گرفتن در یک میدان مغناطیسی خارجی باعث همراستا شدن نسبی دوقطبیهای مغناطیسی می‌شود، به نحوی که اگر مجموع دوقطبیهای موجود در حجم کوچک dv را با هم جمع کنیم، دیگر حاصلجمع صفر نمی‌شود. بردار **مغناطش** برای چنین ماده‌ای چنین تعریف می‌شود

$$\mathbf{M} = \frac{\Sigma \mathbf{m}_i}{dv} \qquad (۸-۵)$$

اکنون این دوقطبیها می‌توانند میدان خارجی تولید کنند. میدان یک جسم قطبیده باتوجه به معادله (۸-۳) عبارت است از

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{R}\, dv}{|\mathbf{R}|^3} \qquad (۸-۶)$$

می‌توان نشان داد که همانند بارهای مقید جسم قطبیده، می‌توان برای جسم مغناطیده نیز جریانهای حجمی و سطحی مقید زیر را تعریف کرد

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \qquad (۸-۷)$$

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \qquad (۸-۸)$$

به جای جسم مغناطیده این جریانهای مقید را در فضای آزاد در نظر می‌گیریم و میدان را حساب می‌کنیم.

۸-۳ شدت میدان مغناطیسی

برای این که در محاسبهٔ میدانهای مغناطیسی مجبور نباشیم هم جریانهای واقعی (آزاد) را به حساب آوریم و هم جریانهای مقید را، می‌توانیم بردار **شدت میدان مغناطیسی H** را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \qquad (۸-۹)$$

در این صورت قانون آمپر به صورت زیر در می‌آید

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \qquad (۸-۱۰)$$

یا

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (۸-۱۱)$$

که مستقل از محیط است.

۸-۴ مواد مغناطیسی خطی و تراوایی

در مواد مغناطیسی خطی قطبش با شدت میدان مغناطیسی متناسب است

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad (۸-۱۲)$$

که در آن χ_m **پذیرفتاری مغناطیسی** است. برای چنین ماده‌ای

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H}(1 + \chi_m)\\ &= \mu_0 \mu_R \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}\end{aligned} \qquad (۸-۱۳)$$

که در آن μ **تراوایی** محیط نام دارد، μ_R **تراوایی نسبی** و به صورت زیرست

$$\mu_R = \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi_m) \qquad (۸-۱۴)$$

۸-۵ پتانسیل مغناطیسی اسکالر و بارهای مغناطیسی

در بخش ۷-۴ گفتیم که نمی‌توان میدان مغناطیسی را مانند میدان الکتریکی از گرادیان یک پتانسیل اسکالر به دست آورد، زیرا کرل هر گرادیان صفرست ولی کرل میدان مغناطیسی صفر نیست. ولی اگر خود را به محیطهایی منحصر کنیم که در آنها جریان آزاد وجود ندارد می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \qquad (۸-۱۵)$$

به قیاس میدانهای الکتریکی می‌توان بارهای مغناطیسی نیز تعریف کرد

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \qquad (۸-۱۶)$$

$$\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad (۸-۱۷)$$

وپتانسیل مغناطیس اسکالر را به صورت زیر یافت

$$V_m = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_m\, dv}{R} \qquad (۸-۱۸)$$

توجه کنید که بار مغناطیسی نیز مانند جریانهای مقید تنها کمیتی فرضی برای مدل کردن مغناطش و یافتن اثر آن است.

۸-۶ شرایط مرزی

در مرز دو محیط با تراوایی‌های μ_1 و μ_2 میدانها به صورت زیر به هم مرتبط‌اند

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \qquad (۱۹-۸)$$

(۲۰-۸)

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکهٔ عمود بر مرز، به طرف ناحیهٔ ۱، است.

۸-۷ مدارهای مغناطیسی

به خاطر تشابه کمیات مغناطیسی و الکتریکی می‌توان تناظرهای زیر را بین کمیات الکتریکی و مغناطیسی برقرار کرد

$$\begin{array}{ccc} V_m & \leftrightarrow & V \\ \Phi & \leftrightarrow & I \\ \mu & \leftrightarrow & \sigma \\ H & \leftrightarrow & J \end{array}$$

در این صورت بین پتانسیل مغناطیسی و شار گذرنده از یک ماده رابطهٔ زیر (مشابه قانون اهم) وجود دارد

$$\Re = \frac{l}{\mu S} \qquad (۲۲-۸)$$

که l طول جسم، S مساحت سطح مقطع آن، و μ تراوایی آن است.

با استفاده از روابط بالا می‌توان برای حل بعضی مسائل مربوط به میدانهای مغناطیسی، وضعیت مسئله را به صورت مداری شبیه سازی می‌کنیم. این مدارها را **مدارهای مغناطیسی** می‌نامند، و در تحلیل آنها از تمام روشهای تحلیل مدارهای الکتریکی می‌توان استفاده کرد.

مثال ۱

گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه‌ای به شعاع a را که از آن جریان I می‌گذرد، بیابید. حلقه به صورت تشریح شده در مسئلهٔ ۷-۵ است.

حل

برای این حلقه $\mathbf{r}' = a\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و $\mathbf{dl} = a\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$، پس

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{dl} = a^2 d\phi\, \hat{\mathbf{z}}$$

و طبق معادلهٔ (۸-۴) داریم

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \int_0^{2\pi} a^2 d\phi\, \hat{\mathbf{z}} = \pi a^2 I \phi\, \hat{\mathbf{z}}$$

البته این حلقه مسطح است و مساحتی برابر πa^2 دارد؛ همچنین بردار عمود بر سطح حلقه بردار $\hat{\mathbf{z}}$ است. بنابراین

$$\mathbf{m} = I S \hat{\mathbf{n}} = \pi a^2 I \phi\, \hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۲

کره‌ای به شعاع R به طور یکنواخت مغناطیده شده است و در آن $M\,\hat{\mathbf{z}}$؛ میدان مغناطیسی اطراف آن را بیابید.

حل

این مسئله با استفاده از معادلهٔ (۸-۶) راحت‌تر حل می‌شود.

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{\mathbf{M}\times\mathbf{R}\,dv}{|\mathbf{R}|^3}\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\mathbf{M}\times\int\frac{\mathbf{R}\,dv}{|\mathbf{R}|^3}$$

زیرا $\mathbf{M}$ ثابت است و می‌توان آن را از داخل انتگرال بیرون آورد. اگر بخواهیم شدت میدان الکتریکی کرهٔ بارداری به شعاع R و بار حجمی $\rho = 1$ را بیابیم، به انتگرال زیر برمی‌خوریم

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{\mathbf{R}\,dv}{|\mathbf{R}|^3}=\frac{R^3\,\hat{\mathbf{r}}}{3\varepsilon_\circ r^2}\qquad r>R$$

با مقایسه دو انتگرال بالا می‌توان نوشت

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ R^3}{3}\mathbf{M}\times\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}=\frac{\mu_\circ R^3}{3r^2}\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{r}}$$
$$=\frac{\mu_\circ R^3}{3r^2}(M_\circ\,\hat{\mathbf{z}})\times\hat{\mathbf{r}}=\frac{\mu_\circ R^3}{3r^2}M_\circ\,(\cos\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}-\sin\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}})$$
$$=\frac{\mu_\circ R^3}{3r^2}M_\circ\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}=\frac{\mu_\circ M}{4\pi r^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

که در آن $M = VM_\circ$ و V حجم کره است. پس

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\frac{\mu_\circ M}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}+\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

میدان داخل کره را در مسئلهٔ ۸-۲۲ به دست می‌آوریم، نتیجه عبارت است از $\mathbf{B}=\frac{2}{3}\mu_\circ M_\circ\,\hat{\mathbf{z}}$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۳

چگونه می‌توان توزیع جریانی ایجاد کرد که در فضای کروی میدان یکنواختی ایجاد کند؟

حل

میدان داخل کرهٔ مسئلهٔ بالا یکنواخت است. جریانهای مقید ایجادکنندهٔ این میدان عبارت‌اند از:

$$\mathbf{J}_b=\nabla\times\mathbf{M}=0$$
$$\mathbf{K}_b=\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}=M_\circ\,\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{r}}$$
$$=M_\circ\sin\theta\,(\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}}-\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}})=M_\circ\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

اگر بتوان روی کره‌ای جریانی در جهت $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ ایجاد کرد، که چگالی آن با $\sin\theta$ متناسب باشد، می‌توان درون کره میدان یکنواخت داشت. به این منظور باید سیم پیچی حول کره ببندیم که با نزدیکتر شدن به استوا تعداد دورهایش زیادتر و زیادتر (متناسب با $\sin\theta$) شود.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۴

برای مثال ۲ درستی شرایط مرزی را امتحان کنید.

حل

باید داشته باشیم $B_{n1}=B_{n2}$. جهت عمود بر مرز $\hat{\mathbf{r}}$ است. اگر داخل را ناحیهٔ ۲ در نظر بگیریم

$$B_{n2}=\frac{2}{3}\mu_0 M_0\, \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\frac{2}{3}\mu_0 M_0 \cos\theta$$
$$B_{n1}=\frac{2}{3}\mu_0 M_0 \cos\theta$$

برای بررسی شرط مرزی مماسی از معادلهٔ (۸–۲۰) استفاده می‌کنیم

$$\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2=\frac{M_0}{3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}+\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})-\frac{2}{3}M_0\,\hat{\mathbf{z}}$$
$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=\frac{2M_0}{3}\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{r}}+\frac{M_0}{3}\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{2M_0}{3}\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{z}}$$
$$=0+\frac{M_0}{3}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}+\frac{M_0}{3}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}=M_0\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

که با جریان سطحی روی کره برابرست.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۵

استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h در امتداد محورش به طور یکنواخت مغناطیده شده است، یعنی اگر محور استوانه محور z باشد $M=M_0\,\hat{\mathbf{z}}$. میدان مغناطیسی روی استوانه را بیابید.

حل

استوانهٔ مغناطیده را می‌توان با جریانهای مقید زیر شبیه سازی کرد

$$\mathbf{J}_b=\nabla\times\mathbf{M}=0$$
$$\mathbf{K}_b=\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}=M_0\,\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}}=M_0\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

تنها بر روی سطح استوانه جریان سطحی معادل $M_0\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ وجود دارد. پس میدان روی محور را با توجه به حل مسئلهٔ ۷–۱۳ و با جایگزینی M_0 به جای NI_0 به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 M_0}{2}(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$$

که در آن θ_1 و θ_2 مطابق شکل ۷–۱۳ تعریف می‌شود.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۶

مثال ۵ را با استفاده از بار مغناطیسی حل کنید.

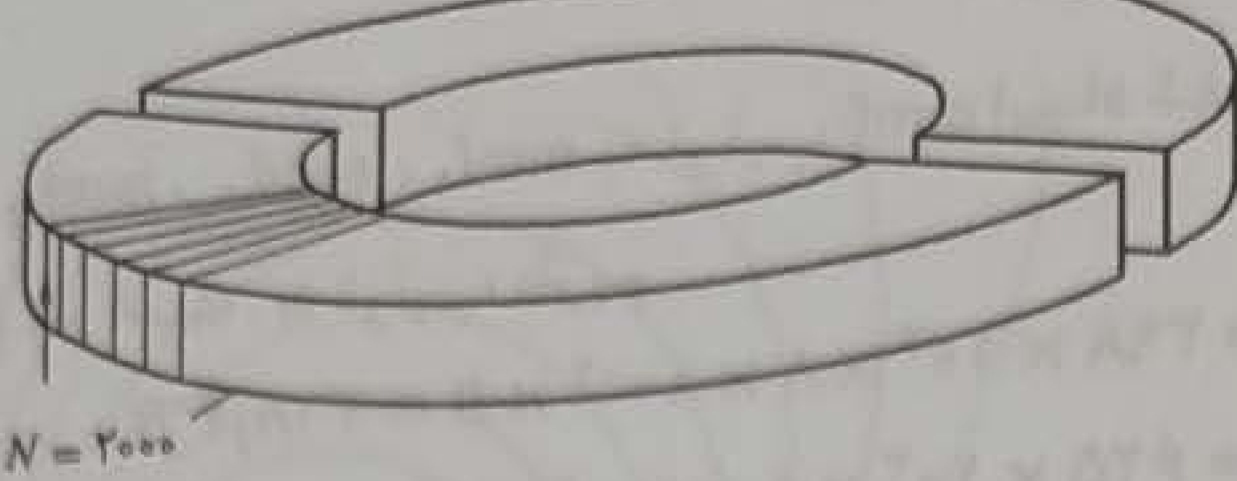
حل

چگالی بار مغناطیسی حجمی عبارت است از $\rho_m=-\nabla\cdot\mathbf{M}=0$. روی سطح جانبی

$$\sigma_m=\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{M}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}=0$$

روی قاعدهٔ بالایی $\sigma_m=\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{z}}=M_0$، و روی قاعدهٔ پایینی $\sigma_m=\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{M}\cdot-\hat{\mathbf{z}}=-M_0$. حال مسئله‌ای مشابه مسئلهٔ ۳–۲۴ داریم. به سادگی می‌توان معادلهٔ به دست آمده در حل مسئلهٔ ۳–۲۴ را به شکل معادلهٔ به دست آمده در مثال ۵ تبدیل کرد.

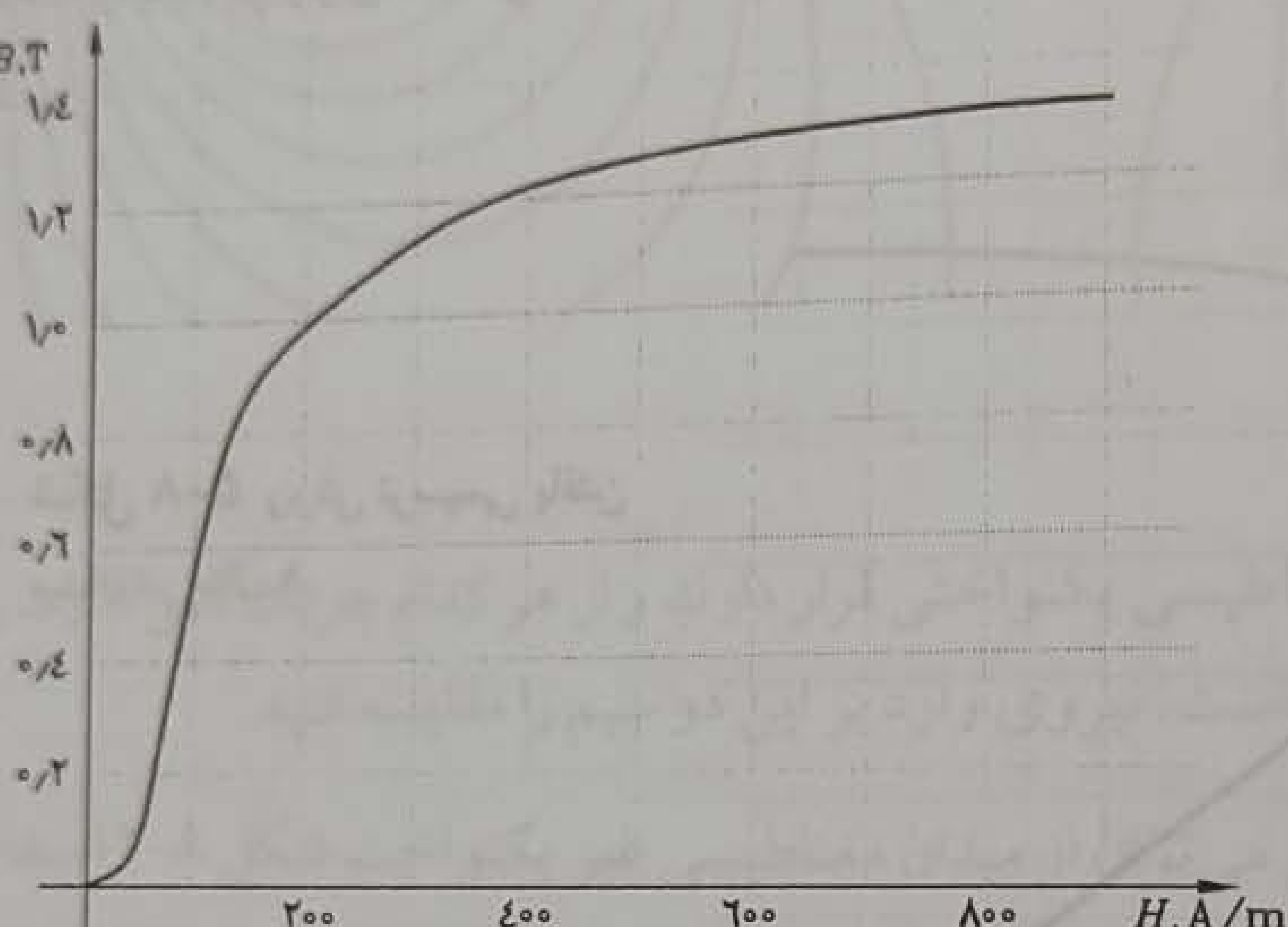
$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$



شکل ۸-۳ چنبرهٔ دو بخشی.

مثال ۷

چنبره شکل ۸-۳ از دو جنس تشکیل شده‌است، بخشی از یک آهن نرم با $\mu_R = ۲۰۰$ و بخشی از فولاد سیلیسوم دار با منحنی مغناطش نشان داده شده در شکل ۸-۴. شعاع متوسط چنبره ۴ cm، سطح مقطع آن ۸ cm², و طول شکاف هوایی در هر طرف ۰٫۲ mm است. برای ایجاد شار ۱ Wb/m² در هسته، چه جریانی باید از سیم پیچ بگذرد؟



شکل ۸-۴ منحنی مغناطیسی فولاد سیلیسیوم دار.

حل

به ازای $B = ۱$ T در فولاد سیلیسیوم دار، شدت میدان مغناطیس باید ۲۰۰ A/m باشد. طول مسیر ۰٫۰۴π m است، بنابراین نیروی محرکهٔ مغناطیسی لازم عبارت است از:

$$\text{mmf}_۱ = ۰٫۰۴\pi \times ۲۰۰ = ۲۵٫۱۳ \text{ At}$$

شار در فواصل هوایی و آهن نرم برابر $\Phi = SB = ۸ \times ۱۰^{-۴} \times ۱ = ۰٫۸$ mWb است. مقاومت فاصلهٔ هوایی $\mathcal{R}_g = ۳۹۸ \times ۱۰^۳$ و مقاومت آهن نرم $\mathcal{R}_۲ = ۶۲۵ \times ۱۰^۳$ است. پس

$$\text{mmf}_g = ۲\,\mathcal{R}_g \times \Phi = ۳۱۸٫۴ \text{ At}$$

$$\text{mmf}_s = ۲\,\mathcal{R}_۲ \times \Phi = ۵۰۰ \text{ At}$$

mmf کل برابر ۸۴۳٫۵ At است و باید از سیم پیچ جریان ۰٫۴۲ A عبور کند.

مثال ۸

اگر از سیم پیچ شکل ۸-۳ جریان ۰٫۵ A بگذرد، چه شاری در هسته ایجاد می‌شود؟

حل

در این حالت mmf کل برابر ۱۰۰۰ At است. برای مسیری که از داخل هسته می‌گذرد داریم

$$۱۰۰۰ = ۲\,\text{mmf}_g + \text{mmf}_s + \text{mmf}_۱$$

که در آن mmf_g ، mmf_s ، $\mathrm{mmf}_۱$ به ترتیب mmf ایجاد شده روی فاصله‌های هوایی، آهن نرم، و فولاد سیلیسیوم دار است. به ترتیب داریم

$$\mathrm{mmf}_g = \mathcal{R}_g \times \Phi = \mathcal{R}_g \times B\,S = ۳۹۸ \times ۱۰^۳ \times ۸ \times ۱۰^{-۴} \times B = ۳۱۸{,}۴\,B$$

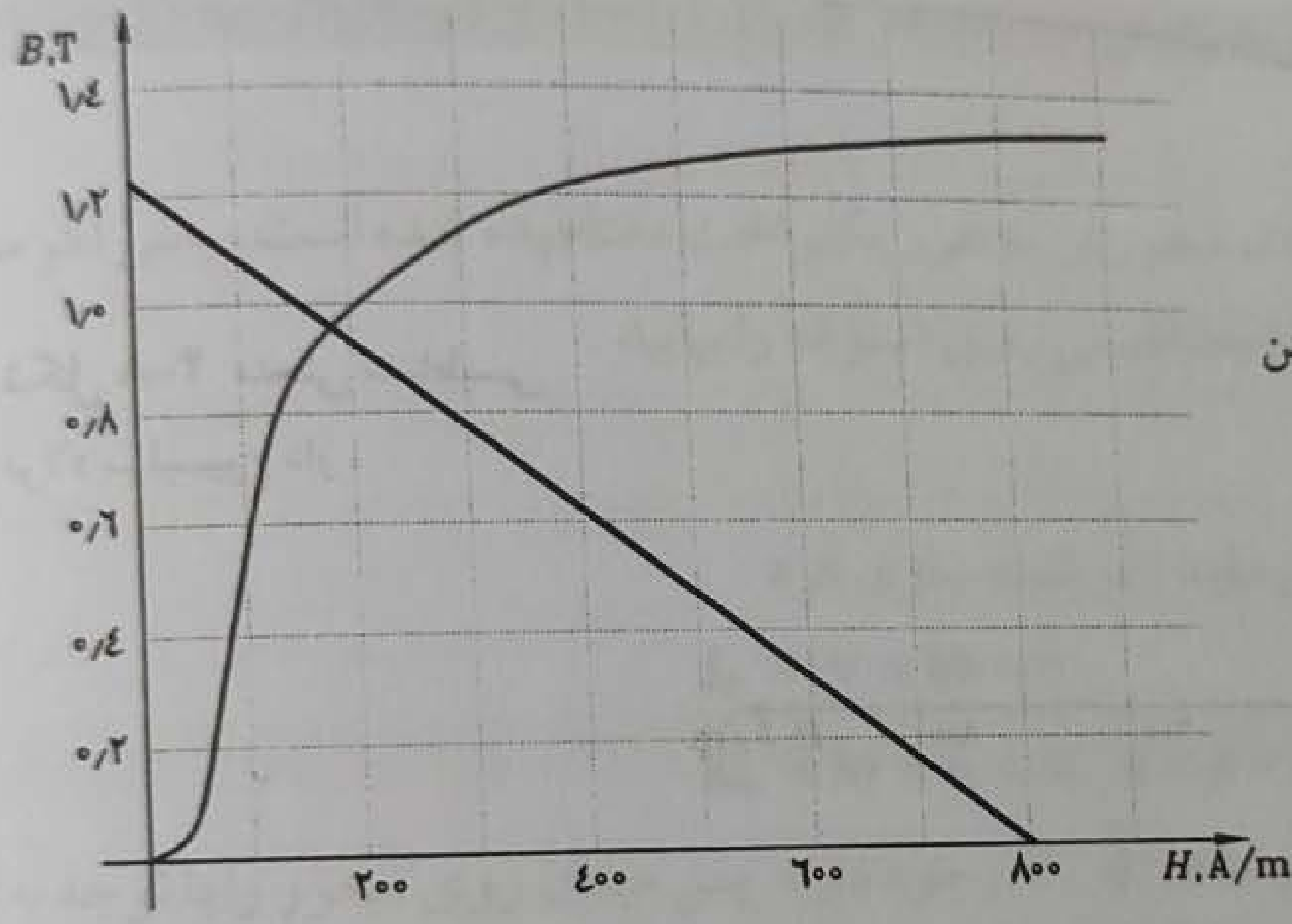
$$\mathrm{mmf}_s = \mathcal{R}_۲ \times \Phi = \mathcal{R}_۲ \times B\,S = ۶۲۵ \times ۱۰^۳ \times ۸ \times ۱۰^{-۴} \times B = ۵۰۰\,B$$

$$\mathrm{mmf}_s = H_s \times ۰{,}۰۴\,\pi$$

پس

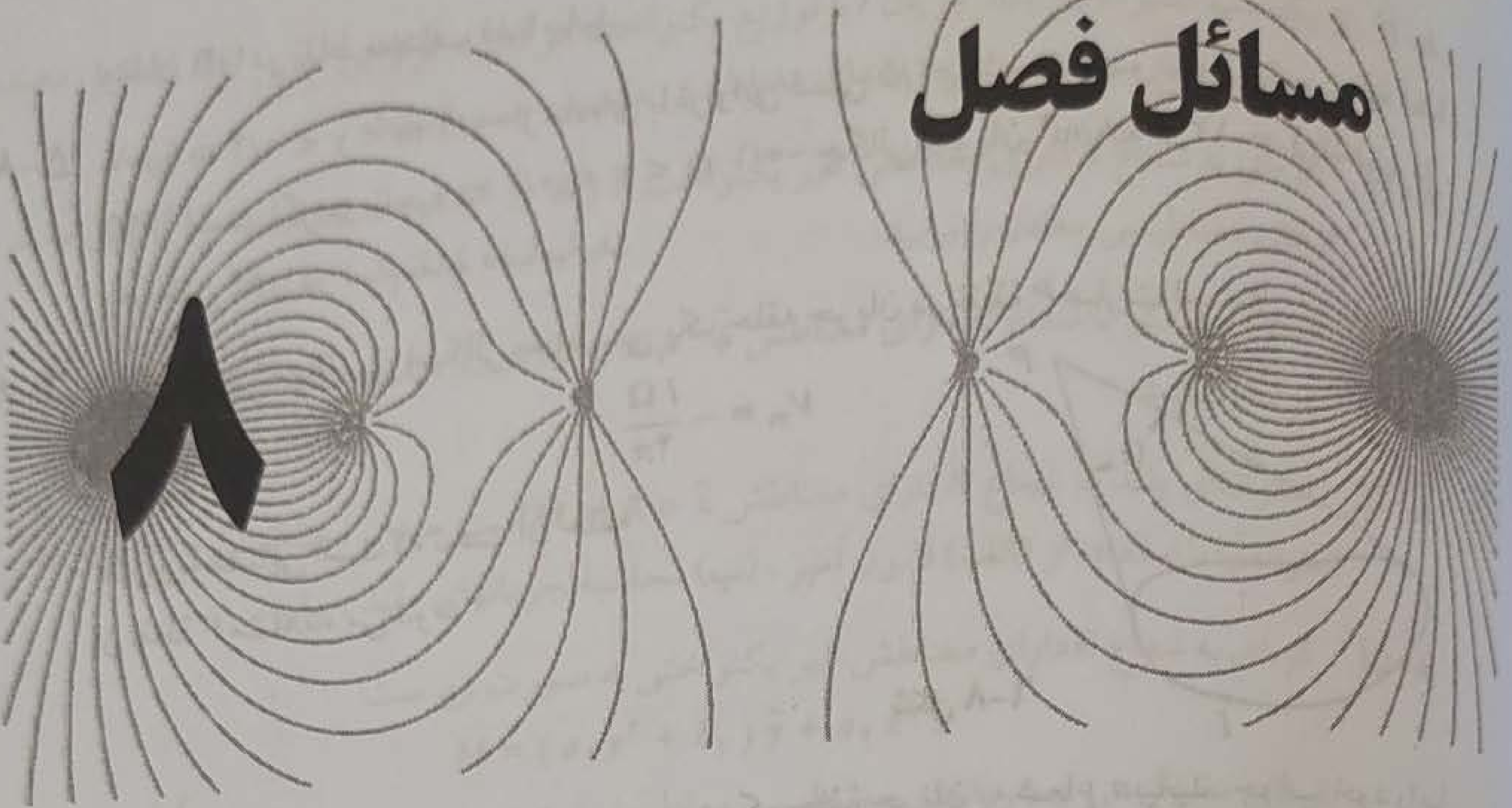
$$۸۱۸{,}۴\,B + ۰{,}۰۴\,\pi H_s = ۱۰۰۰$$

این معادله را باید بر روی منحنی مغناطیسی فولاد رسم کنیم. محل برخورد مقدار $B = ۰{,}۹۵\ \mathrm{T}$ را به دست می‌دهد.



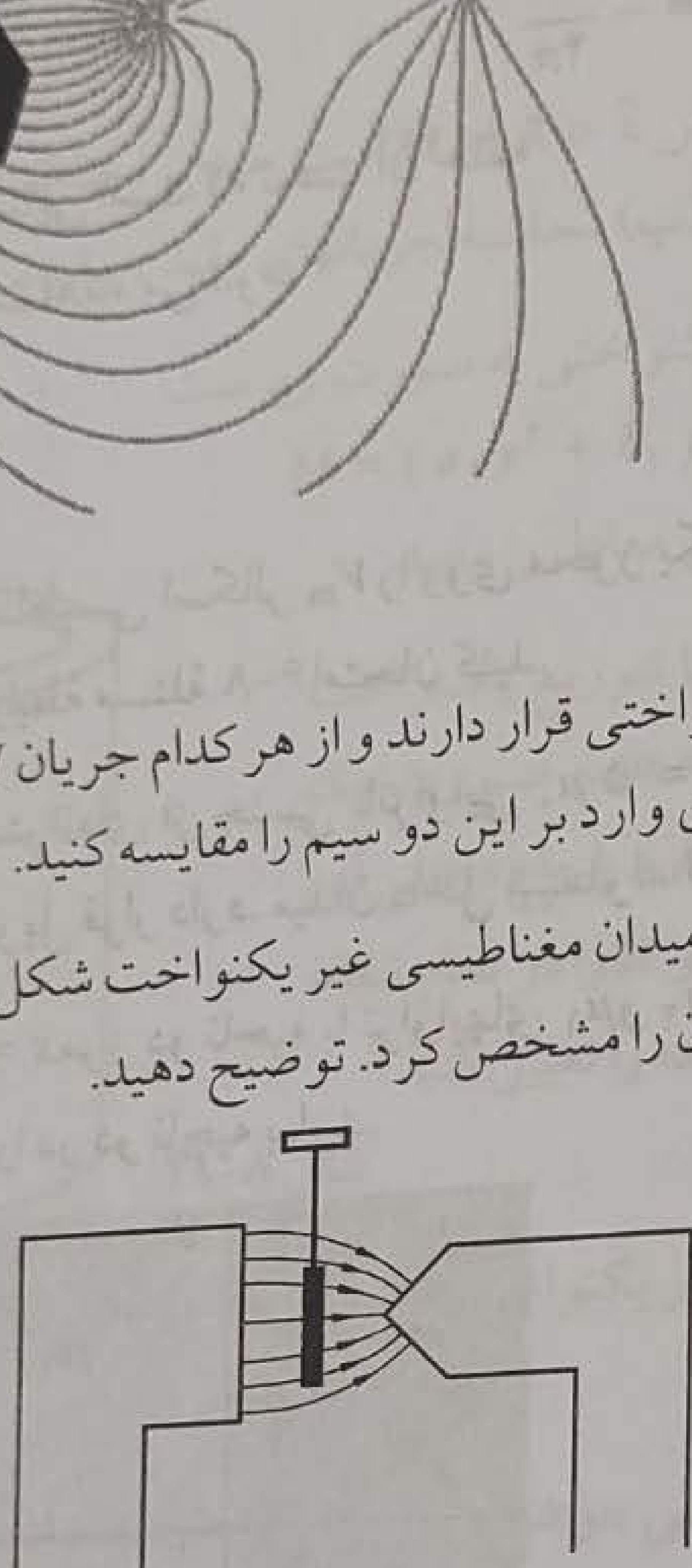
شکل ۸-۵ روش ترسیمی یافتن میدان در مثال ۸.

مسائل فصل ۸



۸-۱ دو سیم با طولهای l در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارند و از هر کدام جریان I می‌گذرد. یکی از این سیمها آهنی و دیگری مسی است. نیروی وارد بر این دو سیم را مقایسه کنید.

۸-۲ برای بررسی نوع مواد مغناطیسی می‌توان از میدان مغناطیسی غیر یکنواخت شکل ۸-۲ استفاده کرد. بسته به انحراف نمونهٔ آویزان می‌توان نوع آن را مشخص کرد. توضیح دهید.



شکل ۸-۲

۸-۳ در محیطی که $\mathbf{B} = ۰/۱\ \hat{\mathbf{x}}$، ناحیهٔ $۲ < |x|$ فضای آزادست. اگر در ناحیهٔ $|x| <۲$ داشته باشیم **(الف)** $\mu_R = ۵$ ؛ **(ب)** $\mu_R = ۵ / (۱ + x^۲)$، بردار مغناطش $\mathbf{M}$ را بیابید.

۸-۴ نواحی $x < ۰$ و $x > ۵$ فضای آزاد هستند، ناحیه $۳ < x < ۵$ دارای تراوایی نسبی ۴ و ناحیهٔ $۰ < x < ۳$ دارای تراوایی نسبی ۲/۵ است. سه جریان سطحی به صورت زیر روی مرز نواحی وجود دارد

$$K_۰ = ۵۰۰\ \hat{\mathbf{y}} \quad \text{A/m} \qquad x = ۰$$

$$K_۳ = ۱۰۰\ \hat{\mathbf{y}} \quad \text{A/m} \qquad x = ۳$$

$$K_۵ = -۳۰۰\ \hat{\mathbf{y}} \quad \text{A/m} \qquad x = ۵$$

میدان $\mathbf{B}$ را در نقاط مختلف فضا بیابید.

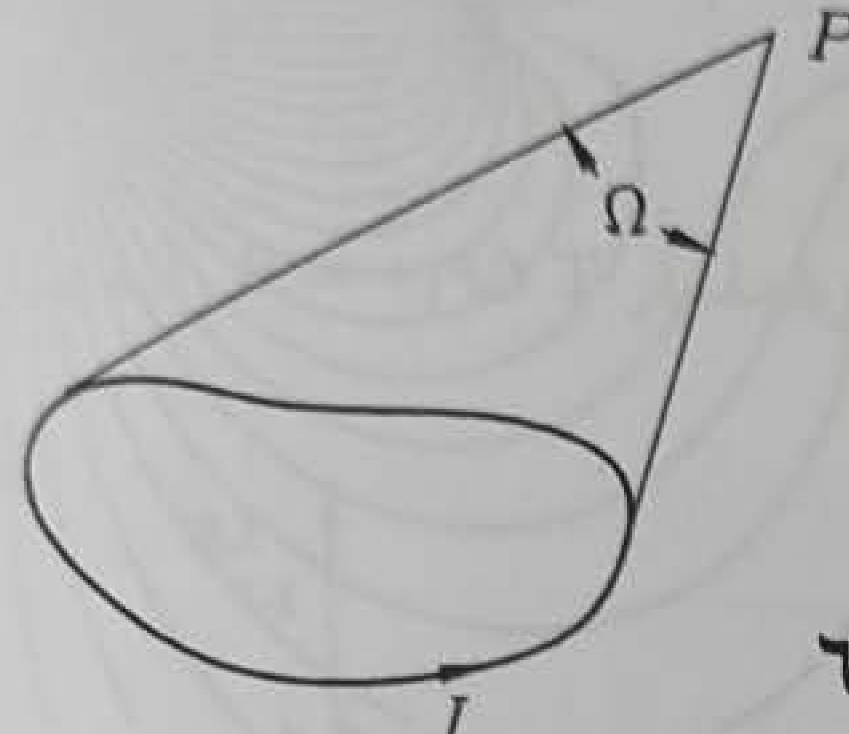
میدان **B** را در نقاط مختلف فضا بیابید.

۸-۵ ناحیهٔ $-۰/۱\ \mathrm{m} < y < ۰/۲\ \mathrm{m}$ از ماده‌ای با تراوایی نسبی ۲/۵ پر شده است و تراوایی نسبی بقیهٔ فضا ۱/۲۵ است. اگر در ناحیهٔ $-۰/۱\ \mathrm{m} < y < ۰/۲\ \mathrm{m}$ چگالی جریان $\mathbf{J} = ۱۲\ \hat{\mathbf{z}}\ \mathrm{kA/m^۲}$ باشد، بردار مغناطش **M** را در تمام نقاط فضا بیابید.

۸-۶ نشان دهید که پتانسیل اسکالر مغناطیسی یک حلقه جریان در نقطهٔ P عبارت است از

$$V_m = -\frac{I\,\Omega}{۴\pi}$$

Ω زاویهٔ فضایی است که تحت آن حلقه از نقطهٔ P مشاهده می‌شود.

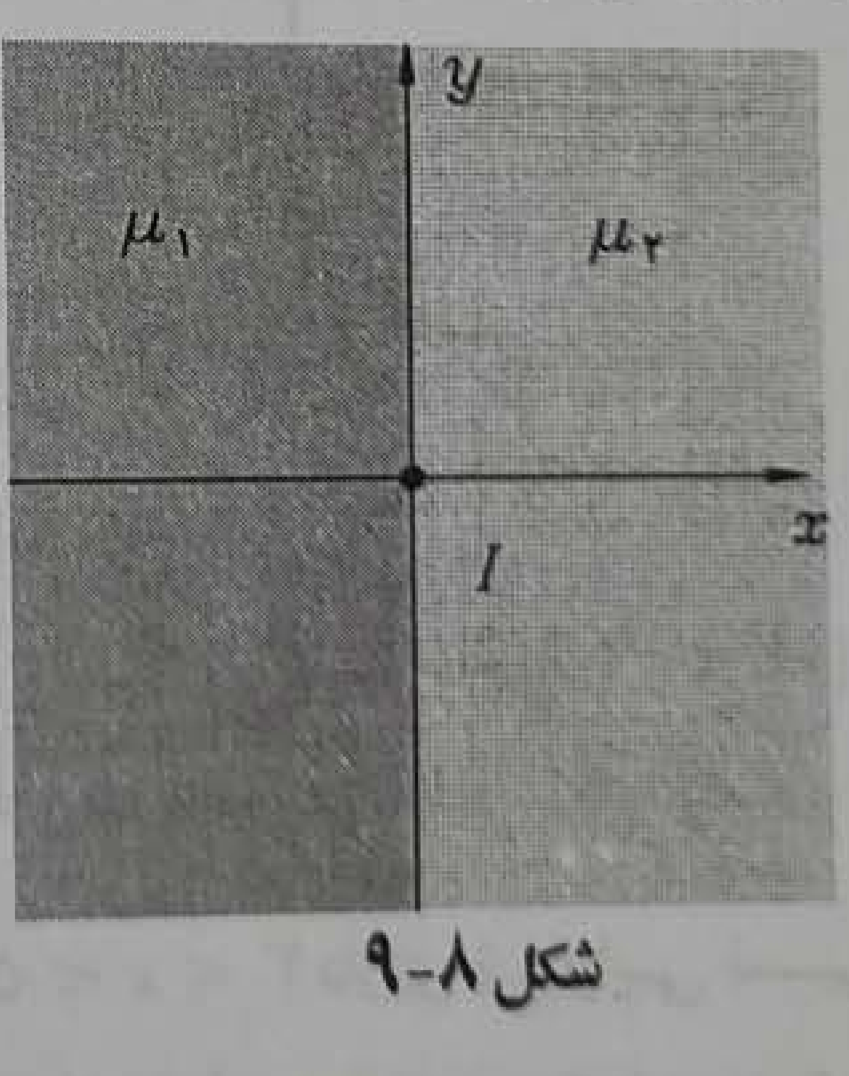


شکل ۸-۶

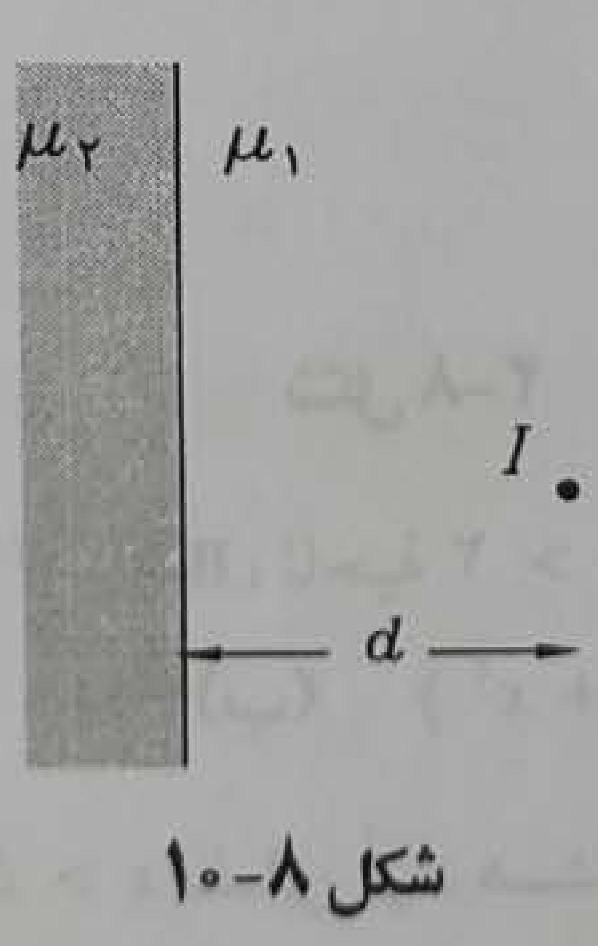
۸-۷ پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m را روی محور یک حلقهٔ جریان به شعاع a بیابید. جواب خود را با استفاده از رابطهٔ مسئلهٔ ۸-۶ امتحان کنید.

۸-۸ یک میله استوانه‌ای از جنسی باتراوایی $\mu = ۵\,\mu_۰$ به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۸ در یک سیملولهٔ طویل قرار دارد. میدان داخل سیملوله B و M داخل میله استوانه‌ای را بیابید.

۸-۹ صفحه $x = ۰$ مرز دو ناحیه با تراوایهای $\mu_۱$ و $\mu_۲$ است. جریان I روی محور z ها قرار دارد. میدان مغناطیسی را در دو ناحیه بیابید.



شکل ۸-۹



شکل ۸-۱۰

۸-۱۰ جریان خطی I به موزات مرز بین دو ناحیه با تراوایی‌های $\mu_۱$ و $\mu_۲$ قرار دارد. میدان مغناطیسی را در دو محیط بیابید. فرض کنید میدان در محیط ۱ را می‌توان میدان ناشی از جریان I و جریان تصویر $I_۱$ واقع در محیطی با تراوایی $\mu_۱$ دانست، که جریان تصویر $I_۱$ تصویر آیینه‌ای I نسبت به مرزست. همچنین میدان در ناحیهٔ ۲ را می‌توان ناشی از جریان $I_۲$ منطبق بر جریان I واقع در محیطی با تراوایی $\mu_۲$ دانست؛ $I_۱$ و $I_۲$ را بیابید.

۸-۱۱ از یک سیم استوانه‌ای بلند جریان I با توزیع یکنواخت می‌گذرد. تراوایی نسبی مادهٔ تشکیل دهندهٔ سیم μ_r و شعاع سیم a است. جریانهای مغناطیسی مقید در سیم را بیابید.

۸-۱۲ کره‌ای به شعاع R دارای مغناطش غیر یکنواخت $\mathbf{M} = (A z^2 + B)\,\hat{\mathbf{z}}$ است. جریانهای مقید و بارهای مغناطیسی معادل را بیابید.

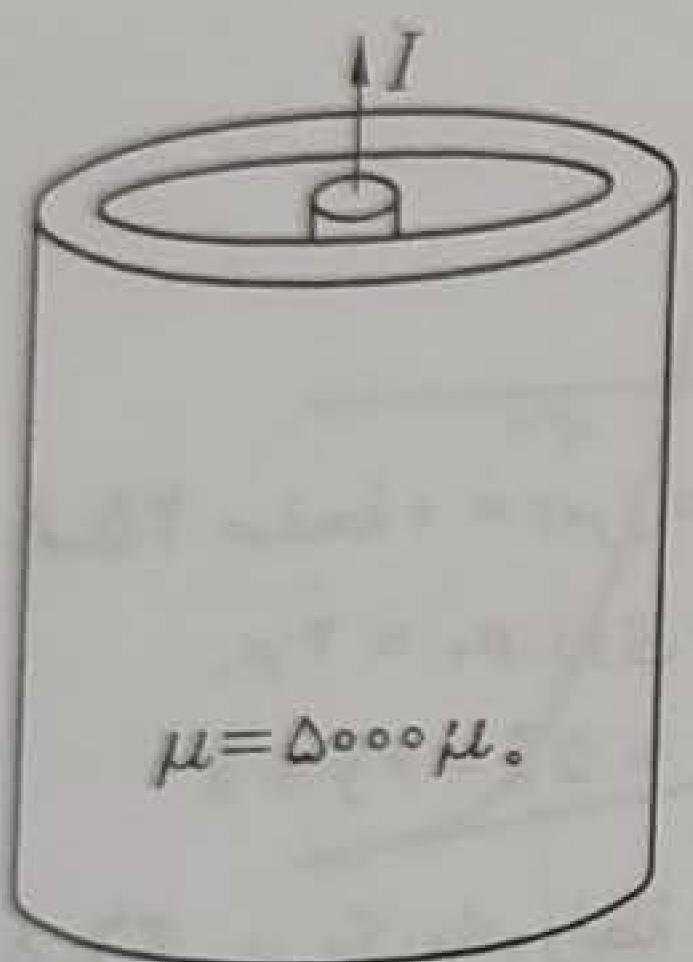
۸-۱۳ استوانهٔ بلندی با شعاع R دارای مغناطش $\mathbf{M} = K\rho^2\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ است. میدان مغناطیسی درون و بیرون استوانه را بیابید.

۸-۱۴ استوانه‌ای بلند به شعاع R دارای مغناطش $\mathbf{M} = K\rho\,\hat{\mathbf{z}}$ است. میدان مغناطیسی داخل و خارج استوانه را با استفاده از **(الف)** قانون آمپر، **(ب)** محاسبهٔ جریانهای مقید، بیابید.

۸-۱۵ کره‌ای به شعاع R دارای مغناطش غیر یکنواختی به صورت زیرست

$$\mathbf{M} = (a_1 y^2 + b_1)\,\hat{\mathbf{y}} + a_2 x^2\,\hat{\mathbf{x}}$$

بارهای مغناطیسی و جریانهای مغناطیسی معادل را بیابید.



شکل ۸-۱۶

۸-۱۶ از یک سیم مسی به شعاع a جریان I با توزیع یکنواخت می‌گذرد. ماده‌ای با تراوایی $\mu = 5000\,\mu_0$ به صورت یک پوستهٔ استوانه‌ای، هم محور با سیم قرار دارد. شعاع داخلی این پوسته b و شعاع خارجی آن c است. $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ را در تمام نقاط خارج از سیم بیابید. جریانهای مقید پوسته را تعیین کنید.

۸-۱۷ استوانهٔ بلندی در امتداد محورش به طور یکنواخت مغناطیده شده است. میدان مغناطیسی درون و بیرون استوانه را بیابید.

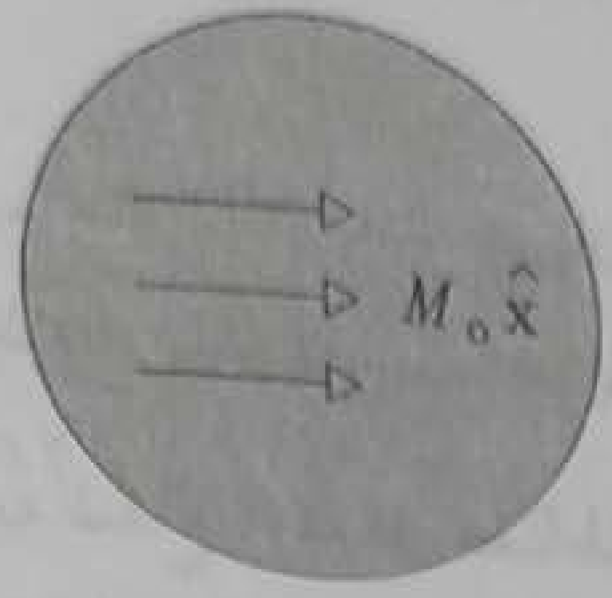
۸-۱۸ پوستهٔ استوانه‌ای ناهمگنی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و طول بسیار بلند هم محور با محور z قرار گرفته و جریان خطی I روی محور z (در جهت +) برقرارست. میدان داخل استوانه به صورت $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi a)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ است. **(الف)** تراوایی پوسته و **(ب)** جریانهای مقید آن را بیابید.

۸-۱۹ فضای $2 > z > 1$ از ماده‌ای با پذیرفتاری مغناطیسی $\chi_m = \frac{z}{4}$ پر شده است. میدان مغناطیسی در این فضا $B_1 = B_0\,\hat{\mathbf{x}}$ است. چگالی جریانهای القا شده در ماده را بیابید.

۸-۲۰ نشان دهید در مرز بین یک مادهٔ قطبیده و هوا (ناحیهٔ ۱) می‌توان شرط مرزی مولفه عمودی میدان را به صورت زیر بیان کرد

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{M}_2$$

۸-۲۱ استوانه طویلی به شعاع R در جهت عمود بر محورش قطبیده شده است (مثلاً اگر محور استوانه را محور z بگیریم $\mathbf{M} = M_0\,\hat{\mathbf{x}}$). تراوایی استوانه μ_1 و تراوایی محیط اطراف آن μ_2 است. میدان داخل و



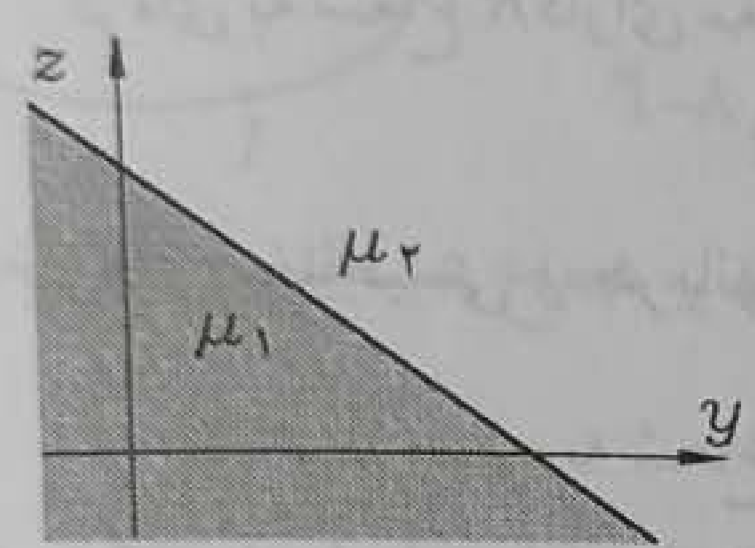
شکل ۸-۲۱

خارج استوانه را بیابید.

۸-۲۲ کره‌ای به شعاع R دارای مغناطش یکنواخت $\mathbf{M} = M_\circ \hat{\mathbf{z}}$ است. میدان مغناطیسی داخل و خارج کره را بیابید.

۸-۲۳ بر روی کره‌ای به شعاع R جریان سطحی $\mathbf{K} = k_\circ \sin\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$ وجود دارد. میدان داخل کره $\mathbf{B}_i = C_۱ \hat{\mathbf{z}}$ و میدان خارج کره $\mathbf{B}_o = (C_۲ / r^۳)(\hat{\mathbf{z}} - ۳\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}})$ است. $C_۱$ و $C_۲$ را بیابید.

۸-۲۴ صفحهٔ $z + y = ۱$ مرز دو ناحیه با تراوایی‌های $\mu_۱ = ۴\mu_\circ$ و $\mu_۲ = ۶\mu_\circ$ است. در ناحیهٔ ۱ $\mathbf{B}_۱ = ۲\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$. میدان مغناطیسی در ناحیهٔ ۲ را بیابید.



شکل ۸-۲۴

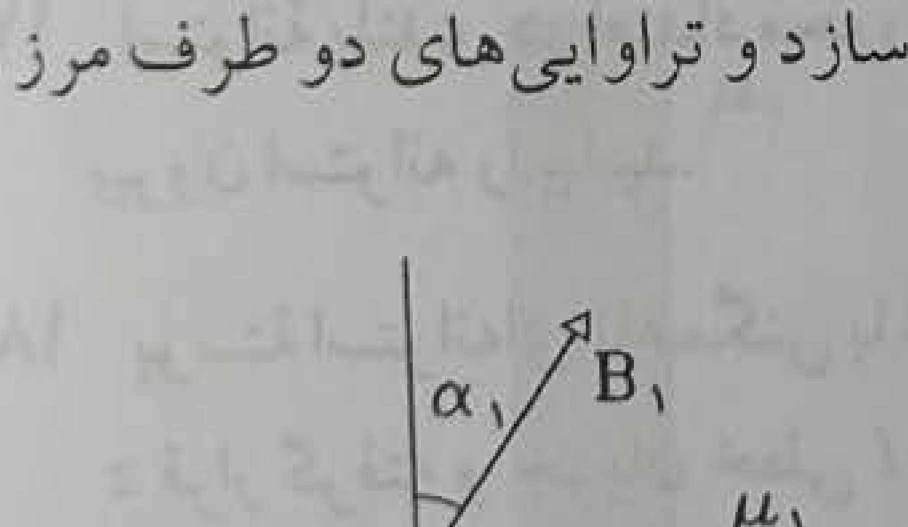
۸-۲۵ صفحهٔ $z = \circ$ مرز دو محیط است: محیط اول $(z > \circ)$ با تراوایی $\mu_۱ = ۴\mu_\circ$ و محیط دوم با تراوایی $\mu_۲ = ۲\mu_\circ$. روی صفحهٔ $z = \circ$ جریان سطحی $\mathbf{K} = ۲\hat{\mathbf{x}} - ۳\hat{\mathbf{y}}$ برقرارست و در محیط اول $\mathbf{H}_۱ = ۵\hat{\mathbf{x}} - ۶\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$. چگالی شار مغناطیسی در محیط دوم، $\mathbf{B}_۲$، را بیابید.

۸-۲۶ در یک ماده رابطهٔ B و H به صورت $B = \mu_\circ H^۲$ داده شده است. $\mathbf{M}$ و μ برای این ماده چیست؟

۸-۲۷ نشان دهید که بین زوایایی که میدان $\mathbf{B}$ با عمود بر مرز می‌سازد و تراوایی‌های دو طرف مرز رابطهٔ زیر برقرارست

$$\frac{\tan\alpha_۱}{\tan\alpha_۲} = \frac{\mu_۱}{\mu_۲}$$

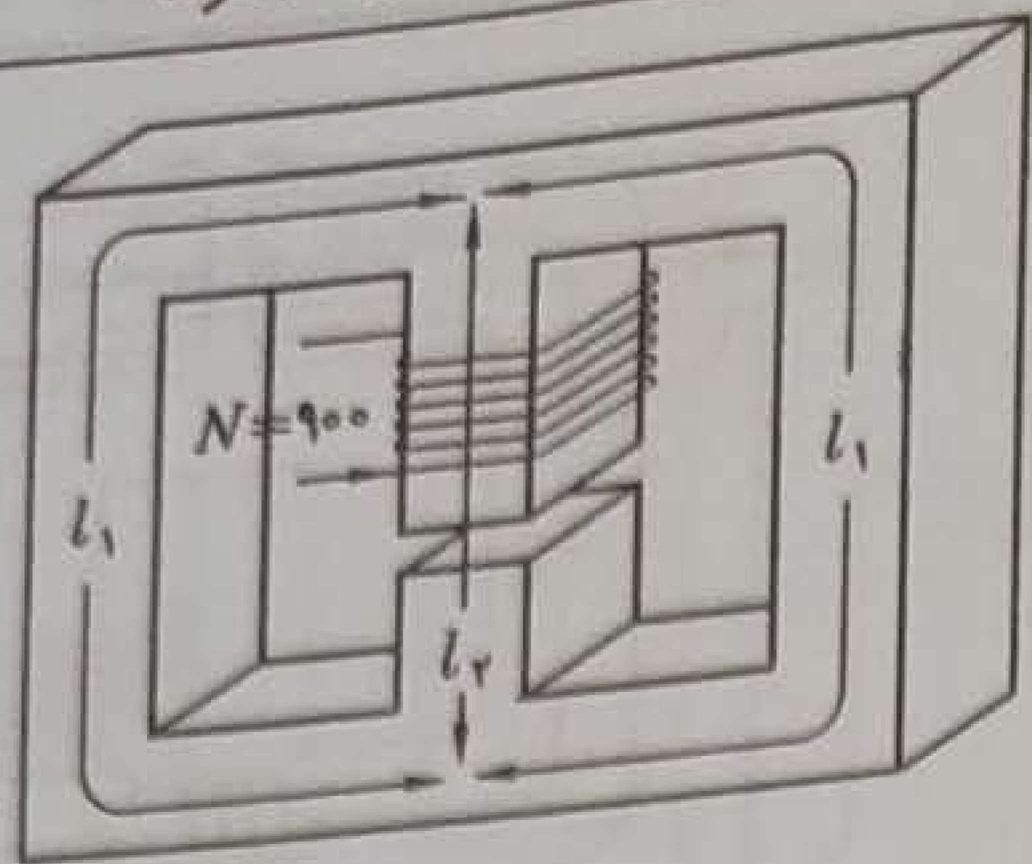
اگر $\mu_۲ >> \mu_۱$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت.



شکل ۸-۲۷

۸-۲۸ در مرز بین هوا و یک مادهٔ فرومغناطیسی با $\mu_r = ۸\circ\circ\circ$، میدان $\mathbf{B}$ با بردار عمود بر سطح ماده زاویهٔ $\circ^\circ$، ۴۵°، $۶\circ^\circ$ و ۸۷° می‌سازد. زاویه‌ای که $\mathbf{B}$ در هوا با بردار عمود بر سطح می‌سازد بیابید.

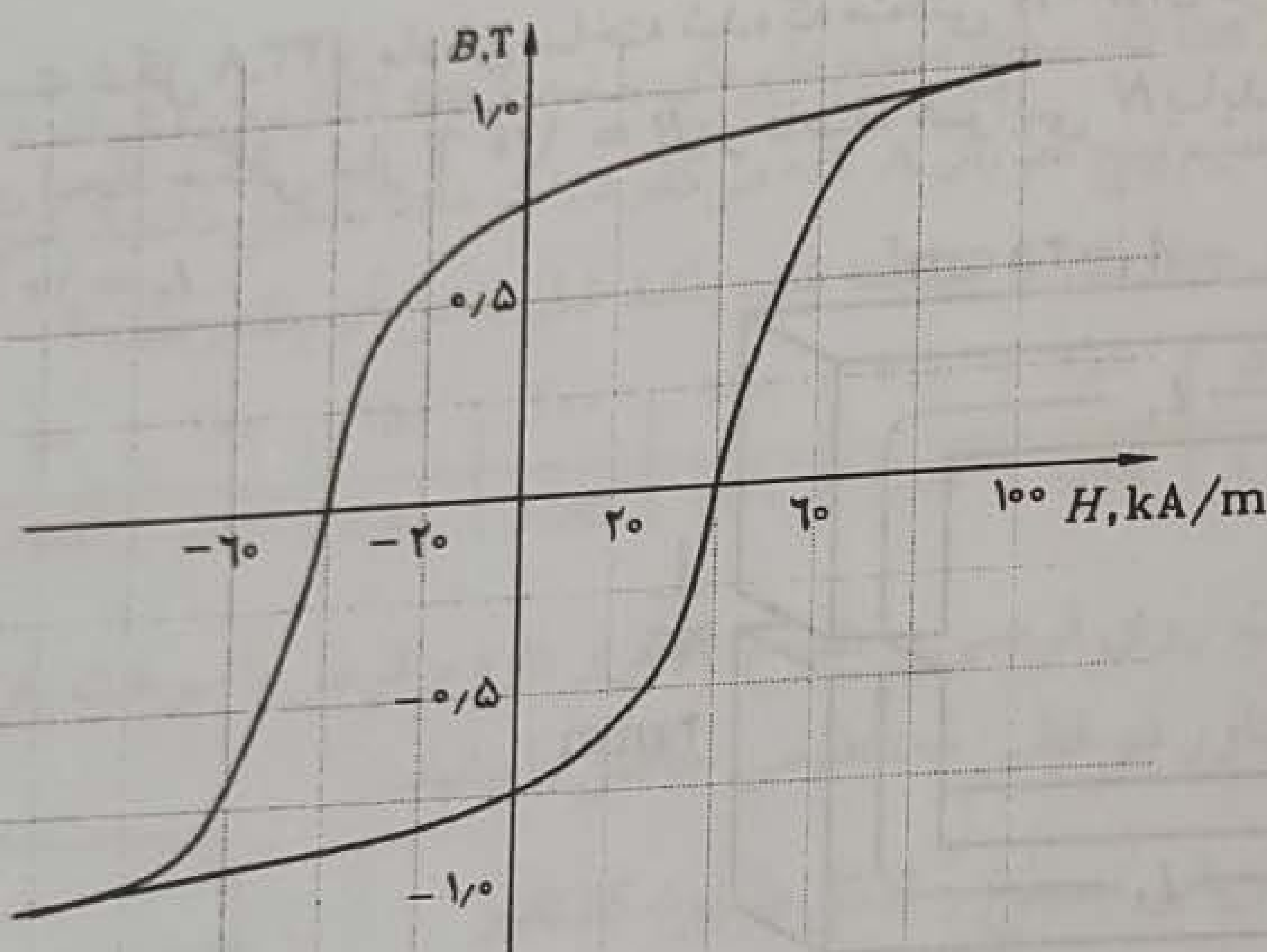
۸-۲۹ قابی با محیط متوسط $۲l_۱ = ۳\circ$ cm و سطح مقطع $A_۱ = ۲\ \text{cm}^۲$ از جنسی با $\mu_r = ۴\circ\circ\circ$ ساخته شده است. وسط قاب ستونی به طول $l_۲ = ۵$ cm و سطح مقطع $A_۲ = ۲/۵\ \text{cm}^۲$ از همان جنس قرار دارد که روی آن سیم پیچی بسته شده و از آن جریان ۰/۲ A می‌گذرد. می‌خواهیم یک شکاف هوا در این ستون ایجاد کنیم به نحوی که چگالی شار در آن $۱/۲\ \text{Wb}/\text{m}^۲$ باشد. طول شکاف هوایی را



شکل ۸-۲۹

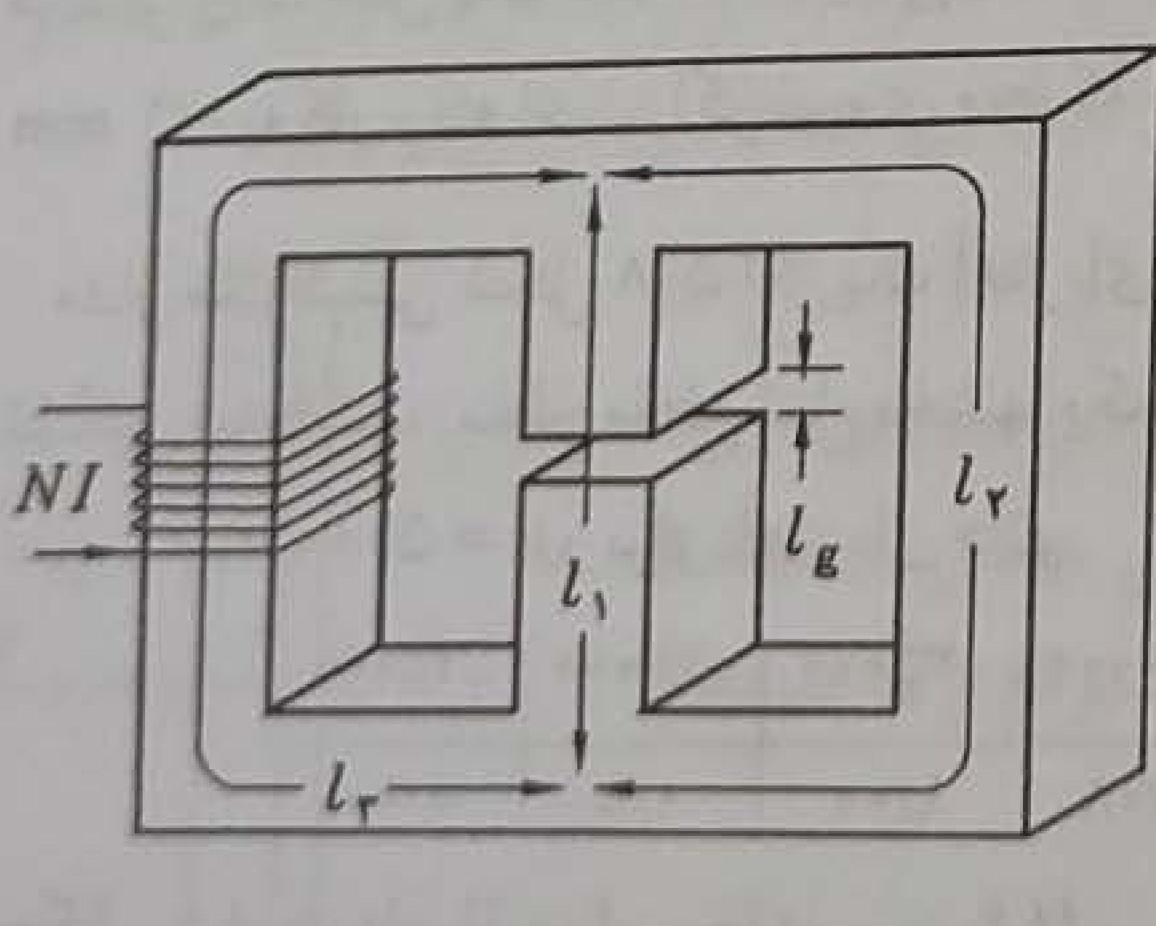
تعیین کنید.

۳۰ـ۸ یک مادهٔ فرومغناطیس با منحنی مشخصهٔ نشان داده شده در شکل ۸ـ۳۰ به صورت چنبره‌ای با طول متوسط $L = ۱۰$ cm و شکاف هوایی $l = ۱$ mm در آورده شده است. مقادیر **H** و **B** را در شکاف هوایی بیابید. **M** درون چنبره را نیز تعیین کنید. از تقریبهای معقول استفاده کنید و اثرهای لبه‌ای را نادیده بگیرید.



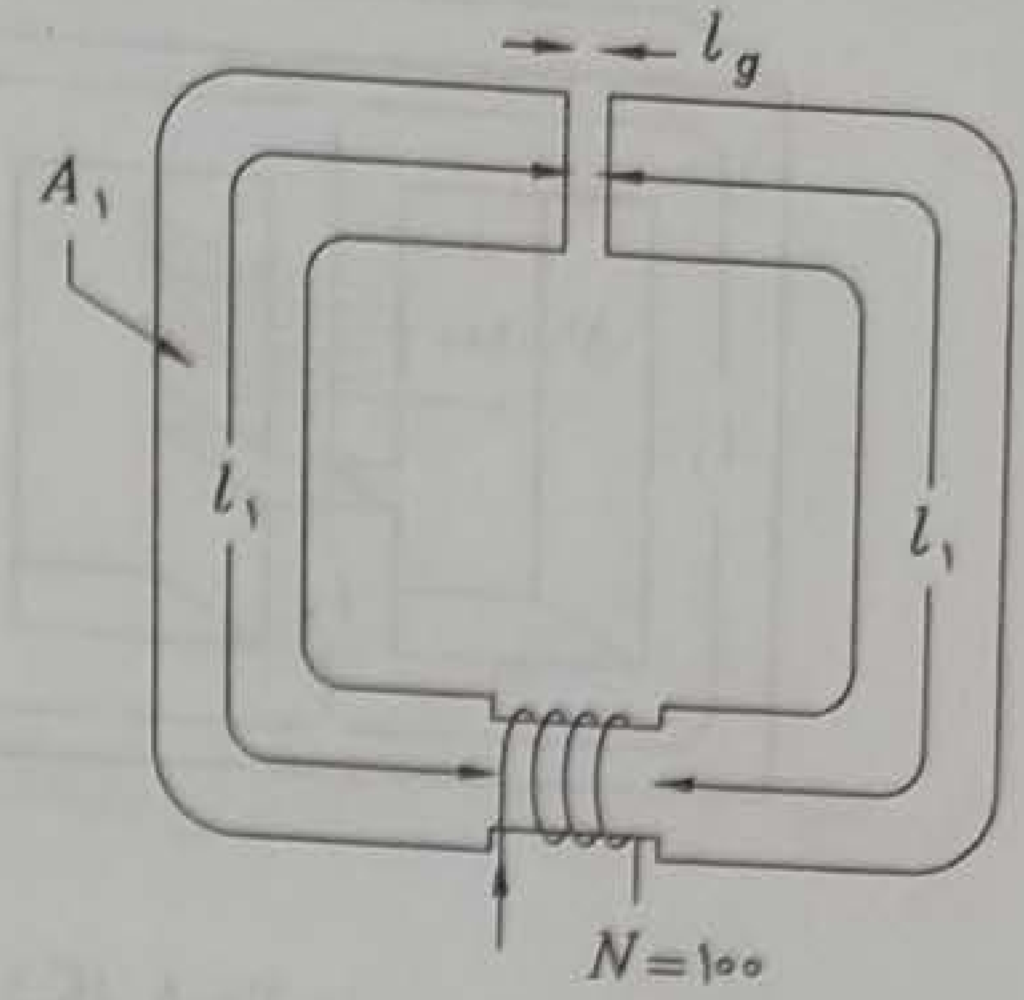
شکل ۸-۳۰

۳۱ـ۸ شکل ۸ـ۳۱ از یک مادهٔ مغناطیسی با $\mu_r = ۴۰۰۰$ ساخته شده است. سطح مقطع تمام قسمتها $۷/۹ \times ۱۰^{-۳}$ m² است. میدان را در شکاف هوایی به دست آورید. داریم $l_2 = l_3 = ۱$ m، $l_g = ۰/۷۶$ mm و $NI = ۲۰۰$ At.



شکل ۸-۳۱

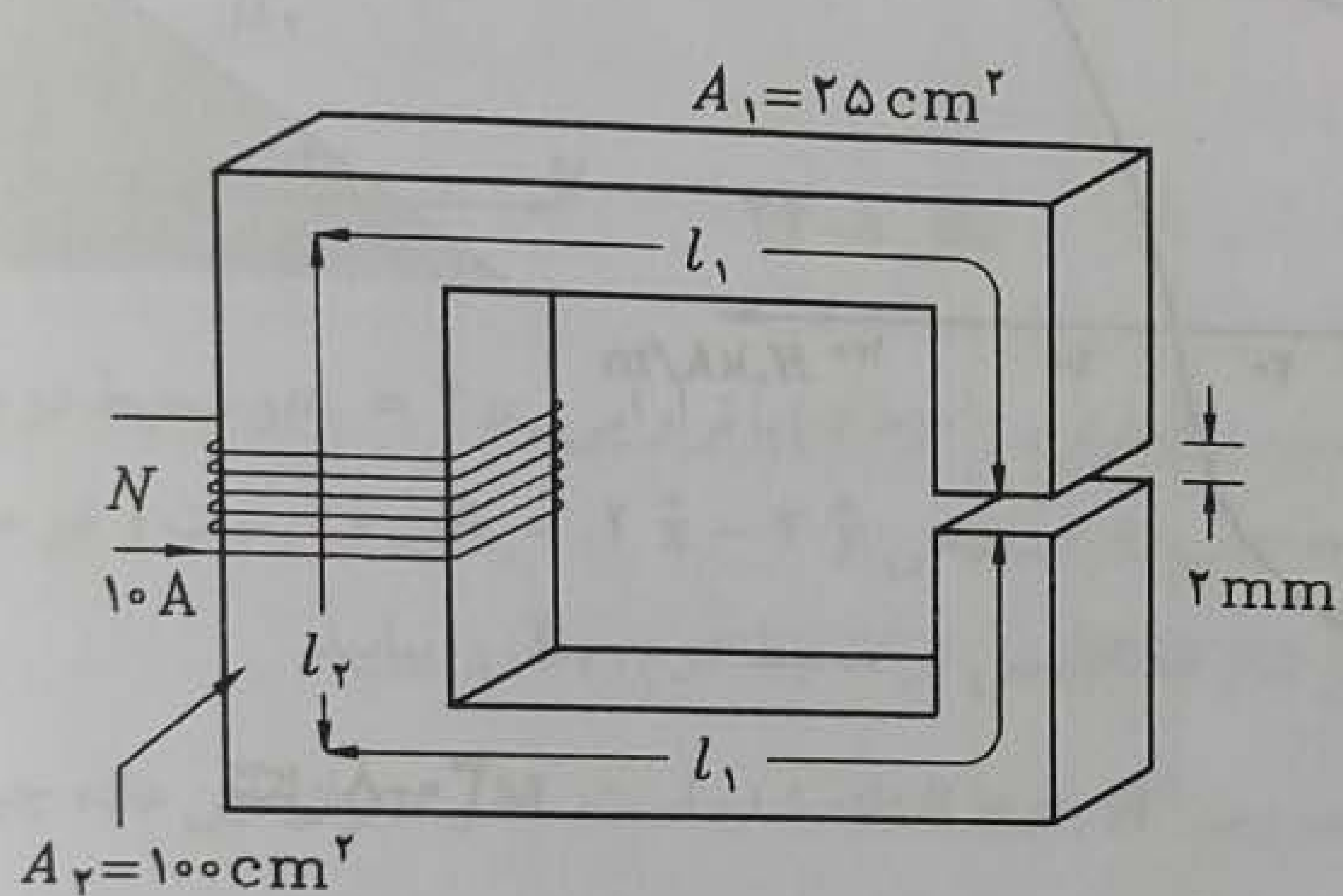
۳۲ـ۸ هسته شکل ۸ـ۳۲ الف از ماده‌ای با منحنی مغناطیس نشان داده شده در شکل ۸ـ۳۲ ب ساخته شده است، $l_1 = ۴۰$ cm، $l_g = ۲$ mm و $A = ۱۰$ cm². بخشی که سیم‌پیچ روی آن پیچیده شده دارای طول $l_2 = ۱۰$ cm و سطح مقطع ۵ cm² است. شار نشتی سیم‌پیچ ۰/۰۱ mWb است. جریان I را به



شکل ۸-۳۲

نحوی تعیین کنید که در شکاف هوایی چگالی شار T ۰/۶ باشد.

۸ـ۳۳ هسته شکل ۸ـ۳۳ از ماده‌ای ساخته شده که منحنی B - H آن در شکل ۸ـ۳۲ ب نشان داده شده‌است. برای ایجاد چگالی شار B = ۱/۰ T در فاصلهٔ هوایی N باید چند دور باشد؟ l_1 = ۲۵ cm و l_2 = ۱۰ cm.



شکل ۸-۳۳

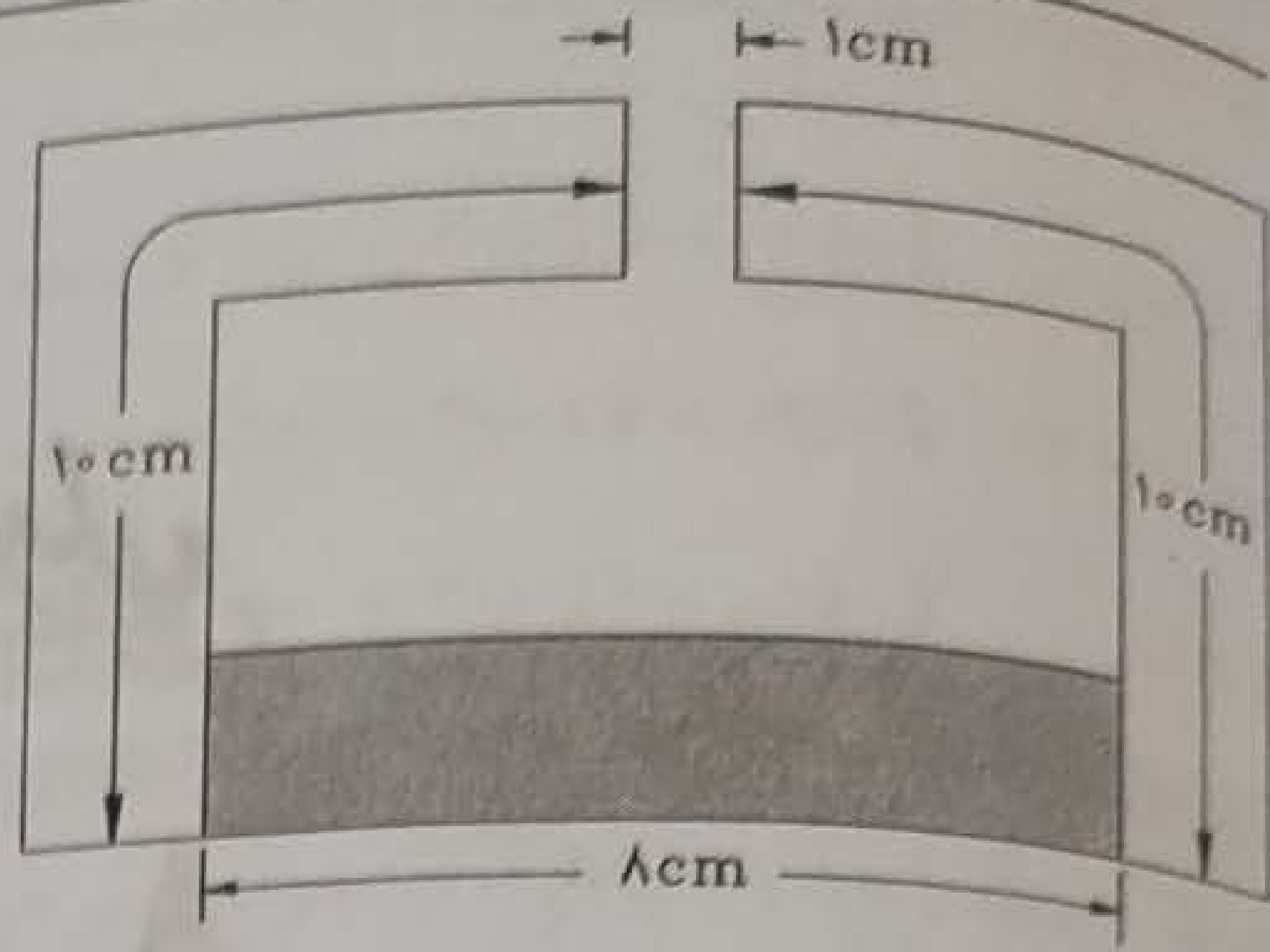
۸ـ۳۴ رابطهٔ $B - H$ یک آهن خاص را می‌توان به صورت $B = 1/2\, H^2 / (H^2 + 10000)$ بیان کرد. این ماده برای ساختن یک مدار مغناطیسی ساده، با سطح مقطع ۰/۸ cm²، طول ۵ cm و شکاف هوایی ۰/۱ mm به کار رفته است. اگر نیروی محرکهٔ مغناطیسی ۱۰۰ At باشد، شار داخل مدار را بیابید.

۸ـ۳۵ مدار مغناطیسی شکل ۸-۳۵ از یک آهنربای دائم به طول ۸ cm و دو بخش آهنی به طول ۱۰ cm تشکیل شده‌است. سطح مقطع تمام بخشها یکسان است و از شار سرریز می‌توان چشم پوشید. برای آهن نرم $\mu = 5000\mu_0$ و برای آهنربای دائم

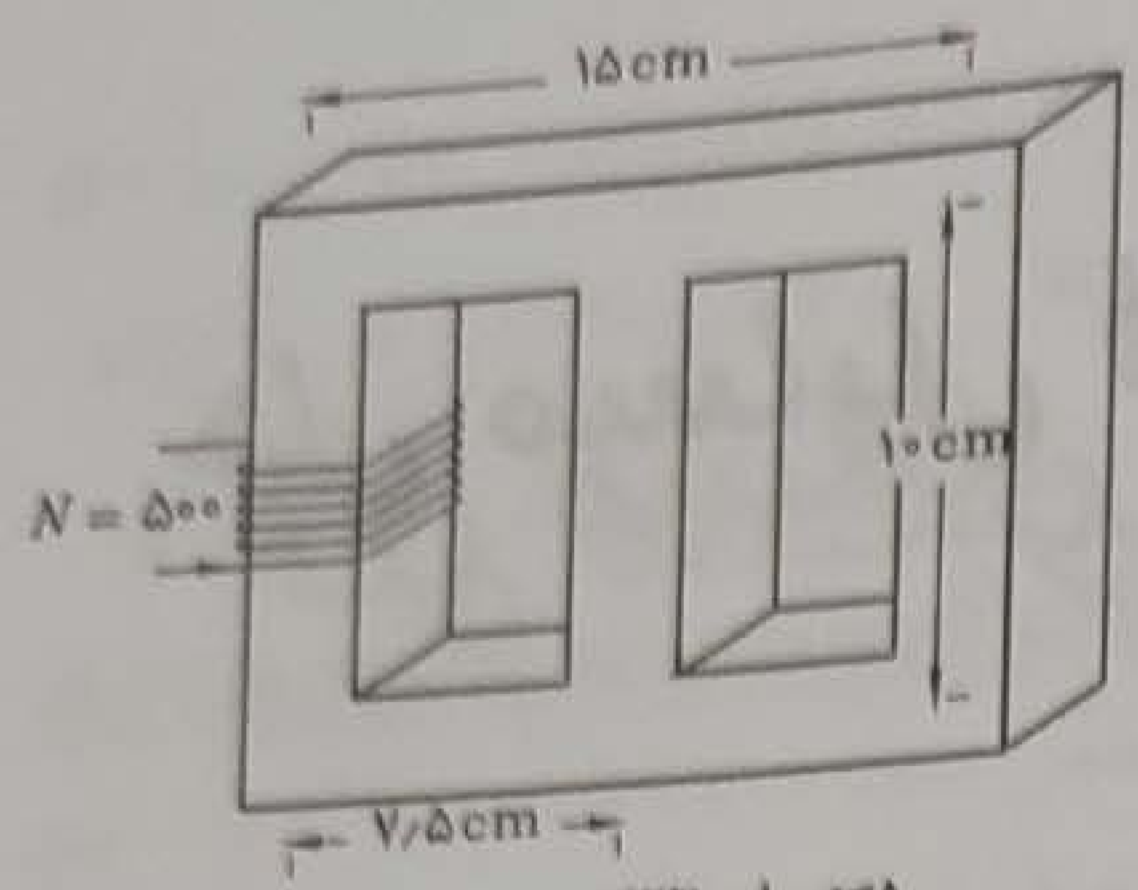
H	۰	۱۰۰۰۰-	۲۰۰۰۰-	۳۰۰۰۰-	۳۵۰۰۰-	۴۰۰۰۰-	۴۵۰۰۰-
B	۱/۲۵	۱/۲۲	۱/۱۸	۱/۰۸	۱/۰۰	۰/۸	۰/۰۰

چگالی شار در فاصلهٔ هوایی چقدر است؟ H بر حسب A/m و B بر حسب Wb/m² داده شده است.

۸ـ۳۶ برای آهن تشکیل دهندهٔ قاب شکل ۸-۳۶، $\mu = 2500\mu_0$. جریان سیم پیچ ۰/۳ A و سطح مقطع تمام بخشهای قاب ۴ cm² است. شار ساق سمت راست را بیابید.



شکل ۸-۳۵



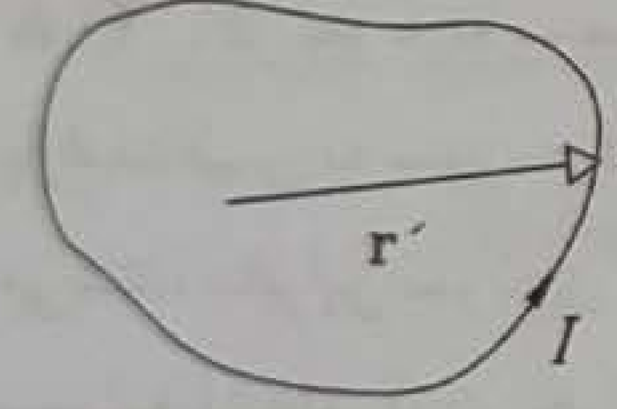
شکل ۸-۳۶

۸ـ۳۷ اگر در مسئلهٔ ۸-۳۶ ساق وسطی شکافی به طول ۲ داشته باشد، شاری که از ساق سمت راست می‌گذرد چه تغییری می‌کند؟

۸ـ۳۸ چنبره‌ای با شعاع متوسط ۱۵ cm سطح مقطع دایره‌ای با شعاع ۲ cm دارد و روی آن ۱۰۰۰ دور سیم پیچیده شده است. از این سیم پیچ جریان ۰/۷ A می‌گذرد. اگر مادهٔ تشکیل دهندهٔ چنبره از ماده‌ای با رابطهٔ $B - H$ داده شده در جدول زیر ساخته شده باشد شار داخل آن چقدرست؟

H , A/m	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۵۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۸۰۰
B , T	۰/۰۷	۰/۲۳	۰/۶۰	۰/۸۵	۱/۰۰	۱/۰۷	۱/۱۸	۱/۲۵	۱/۳۰	۱/۳۳

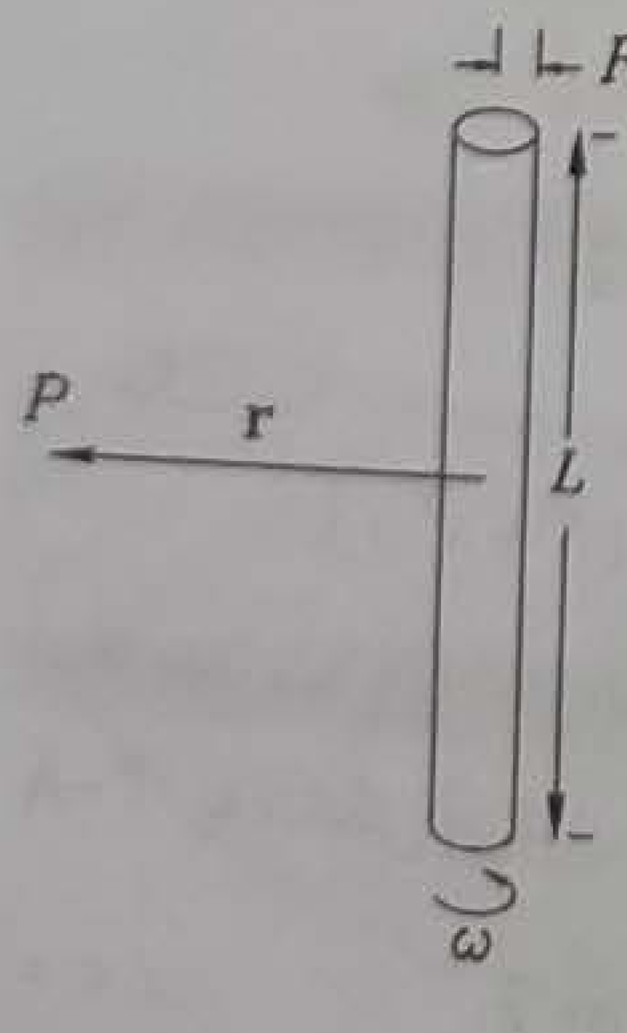
۸ـ۳۹ بار Q به طور یکنواخت روی قرصی به شعاع R قرار دارد و قرص با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می‌چرخد. گشتاور دو قطبی مغناطیسی حاصل را بیابید.



شکل ۸-۴۰

۸ـ۴۰ ثابت کنید برای حلقهٔ جریانی مسطح و شکل دلخواه گشتاور دو قطبی مغناطیسی حاصلضرب جریان در مساحت حلقه، و در جهت عمود بر سطح حلقه است.

۸ـ۴۱ بار Q به طور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع A قرار دارد و کره با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از مرکزش می‌گذرد می‌چرخد. گشتاور دو قطبی مغناطیسی حاصل را بیابید.

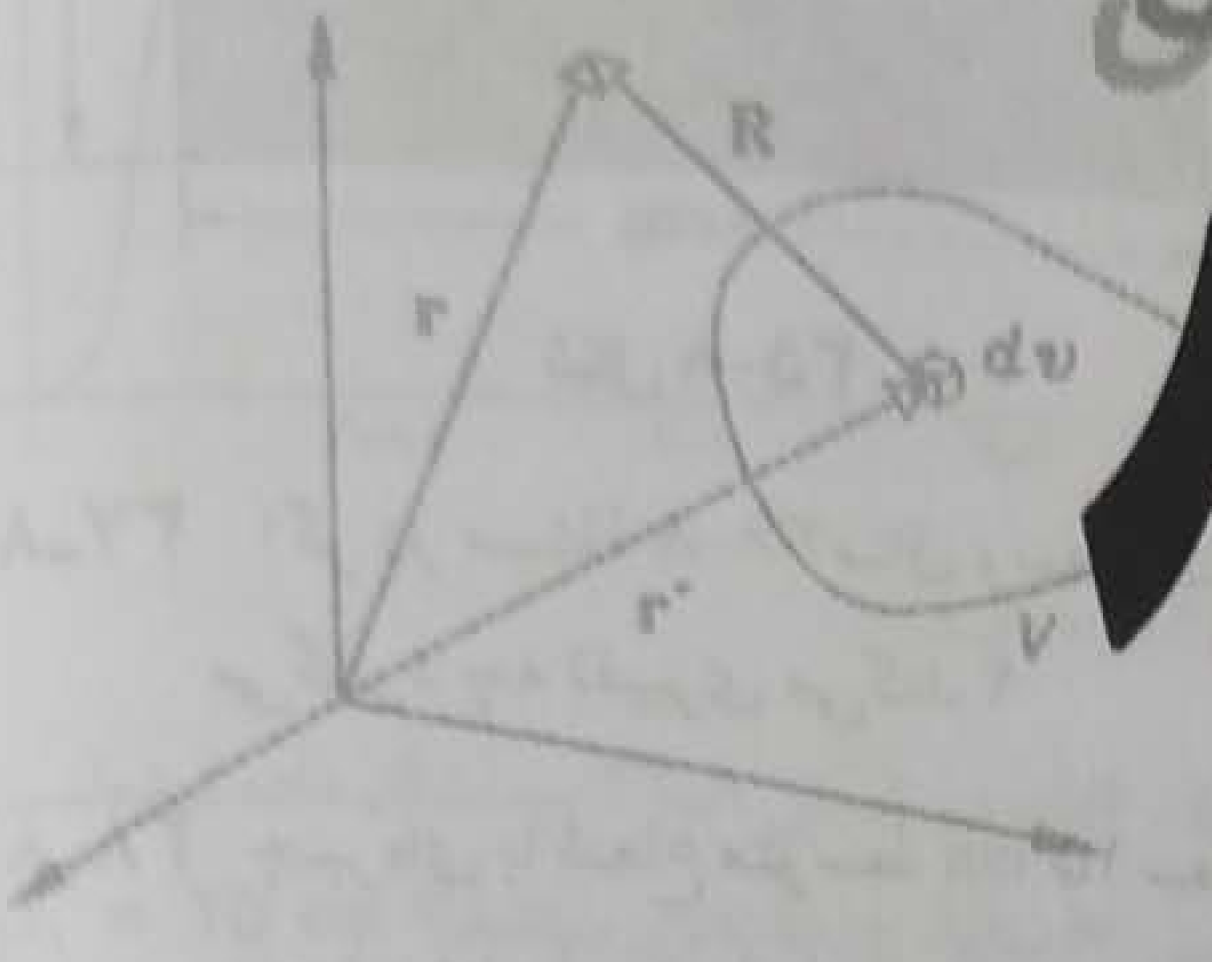


۸ـ۴۲ روی سطح جانبی استوانه‌ای نازک به شعاع R و ارتفاع L باری با چگالی σ قرار دارد. این استوانه با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می‌چرخد. میدان مغناطیسی حاصل در نقطهٔ P را بیابید. این نقطه به فاصلهٔ r از محور استوانه و در صفحهٔ عمود منصف استوانه قرار دارد و $R \ll r$.

شکل ۸-۴۲

حل مسایل فصل

۸



۸-۱ چون نیرو حاصلضرب جریان در **B** است، و **B** در آهن قویتر از مس است ، زیرا μ_R آهن از μ_R مس بزرگترست، نیروی وارد بر سیم آهنی بزرگترست.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۸-۲ اگر نمونه به سمت راست (میدانهای قویتر) منحرف شود پارامغناطیس است، زیرا مواد پارامغناطیس به سمت میدانهای قویتر حرکت می‌کنند. میدانهای مغناطیسی مواد دیامغناطیس را دفع می‌کنند، بنابراین نمونه‌ای از جنس دیامغناطیس به سمت چپ حرکت می‌کند. نوار فرومغناطیس شدیداً به سمت میدانهای قویتر حرکت می‌کنند. بنابراین این مواد به قطب تیز (سمت راست) می‌چسبند .

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۸-۳ در هر دو حالت در $|x| > ۲$ مغناطش صفرست. در حالت الف

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{۰/۱\,\hat{\mathbf{x}}}{۵\mu_۰} = ۱۵۹۲۰\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_۰} - \mathbf{H} = ۷۹۶۰۰\,\hat{\mathbf{x}} - ۱۵۹۲۰\,\hat{\mathbf{x}} = ۶۳۶۸۰\,\hat{\mathbf{x}}$$

در حالت ب

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_۰} - \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_۰} - \frac{\mathbf{H}(۱ + x^۲)}{۵\mu_۰} = ۱۵۹۲۰\,(۴ - x^۲)\,\hat{\mathbf{x}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۸-۴ به سادگی می‌توان H و B را در نقاط مختلف به دست آورد

$x < ۰$

$$\mathbf{B} = \mu_۰\mathbf{H} = ۱۸۸/۵\,\mu\mathrm{T}\,\hat{\mathbf{z}} \Leftarrow \mathbf{H} = \frac{۱}{۲}(۵۰۰ + ۱۰۰ - ۳۰۰)\,\hat{\mathbf{z}} = ۱۵۰\,\hat{\mathbf{z}}$$

$0 < x < 3$
$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(-500 + 100 - 300)\,\hat{\mathbf{z}} = -350\,\hat{\mathbf{z}} \Leftarrow \mathbf{B} = 2.5\mu_0\mathbf{H} = -1099\,\mu\mathrm{T}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$3 < x < 5$
$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(-500 - 100 - 300)\,\hat{\mathbf{z}} = -450\,\hat{\mathbf{z}} \Leftarrow \mathbf{B} = 4\mu_0\mathbf{H} = -2262\,\mu\mathrm{T}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$x < 5$
$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(-500 - 100 + 300)\,\hat{\mathbf{z}} = -150\,\hat{\mathbf{z}} \Leftarrow \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = -188.5\,\mu\mathrm{T}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۸ جریان را به لایه‌های نازک تقسیم می‌کنیم. جریان سطحی معادل هر لایه $12000\,dy\,\hat{\mathbf{z}}$ است. این لایه‌ها در فضا بالای خود میدان $-6000\,dy\,\hat{\mathbf{x}}$ و در زیر خود میدان $6000\,dy\,\hat{\mathbf{x}}$ را ایجاد می‌کنند. پس برای $y > 0.2$

$$\mathbf{H} = -6000\,\hat{\mathbf{x}}\int_{-0.1}^{0.2} dy = -1800\,\hat{\mathbf{x}}\ \ \mathrm{A/m} \qquad y > 0.2$$

و برای $y < -0.1$

$$\mathbf{H} = 6000\,\hat{\mathbf{x}}\int_{-0.1}^{0.2} dy = 1800\,\hat{\mathbf{x}}\ \ \mathrm{A/m} \qquad y < -0.1$$

میدان در $-0.2 < y < -0.1$ را نیز می‌توان به همین صورت یافت ولی روش دیگری را پی می‌گیریم. در $0.2 < y < 0.1$ داریم $\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}$. چون میدان تنها در جهت x مولفه دارد و تمام مشتقها نسبت به x و z صفرند

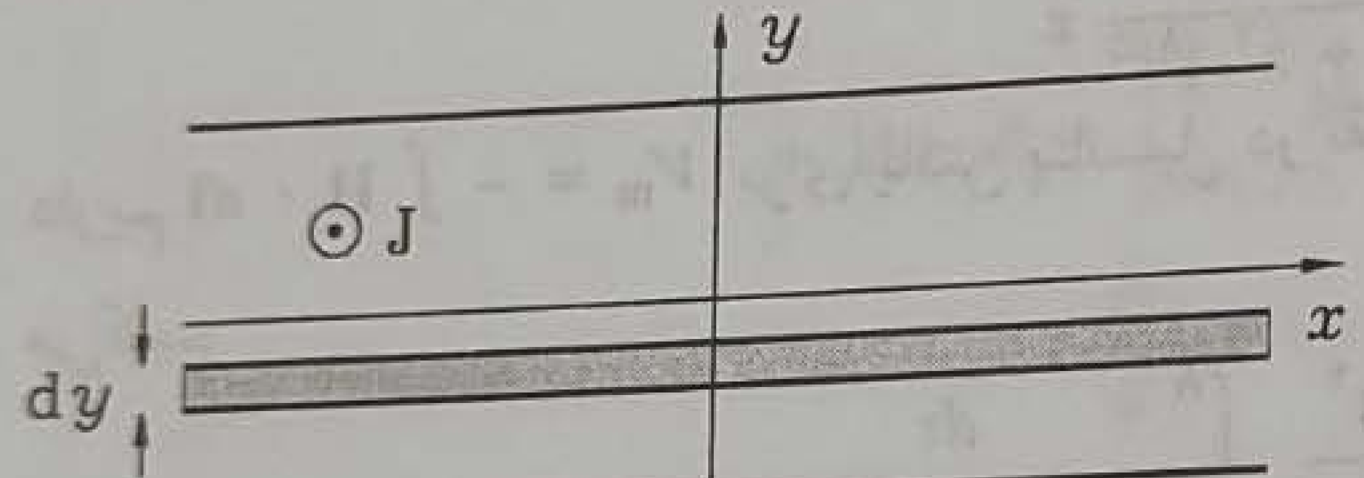
$$-\frac{\partial H_x}{\partial y}\,\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{J} = 12000\,\hat{\mathbf{z}}$$

که حل آن عبارت است از

$$H_x = -12000y + K$$

با توجه به پیوستگی میدان مغناطیسی، اعمال شرط مرزی در $y = 0.2$ یا $y = -0.1$ نتیجه می‌دهد $K = 600$ و

$$\mathbf{H} = (600 - 12000y)\,\hat{\mathbf{x}}$$



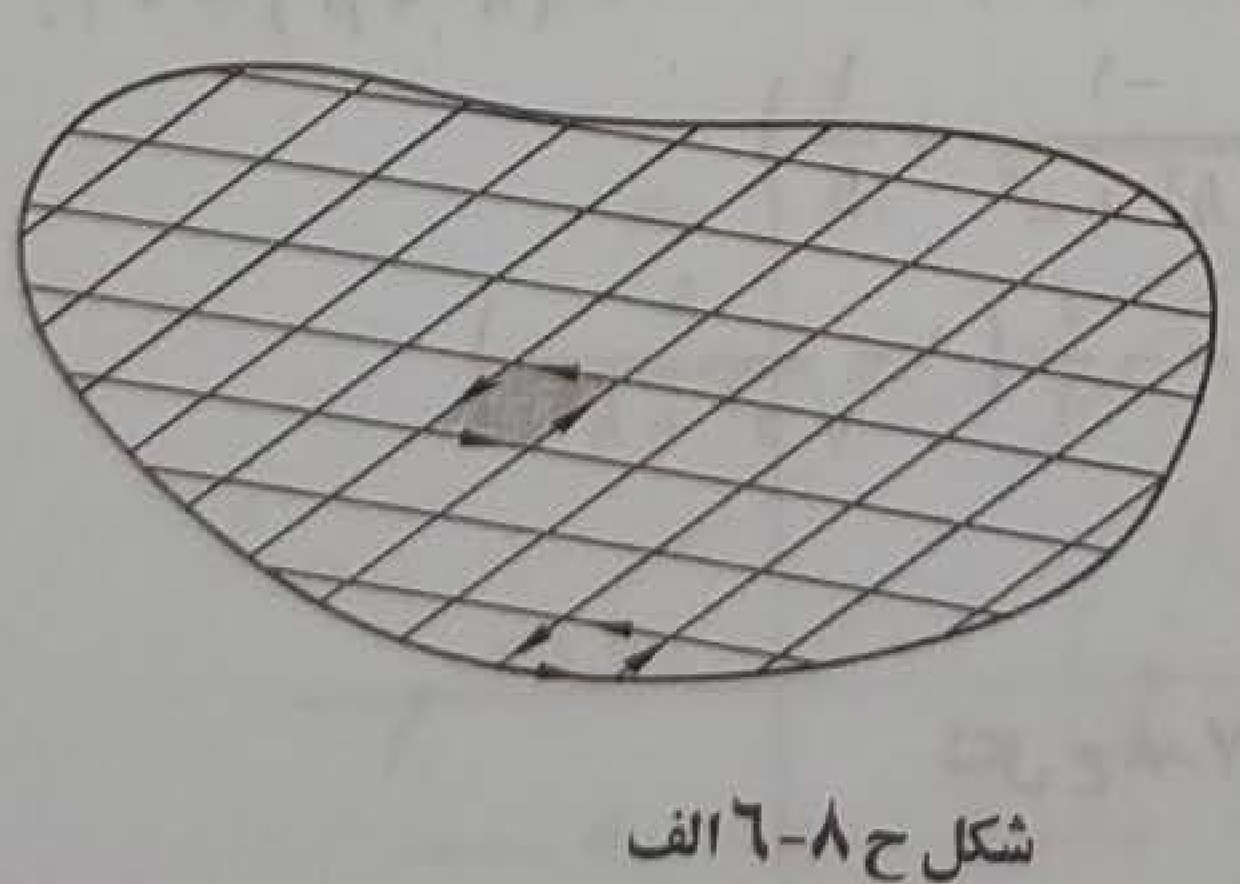
شکل ح ۸-۵

چون $\mathbf{M} = (\mu_R - 1)\,\mathbf{H}$

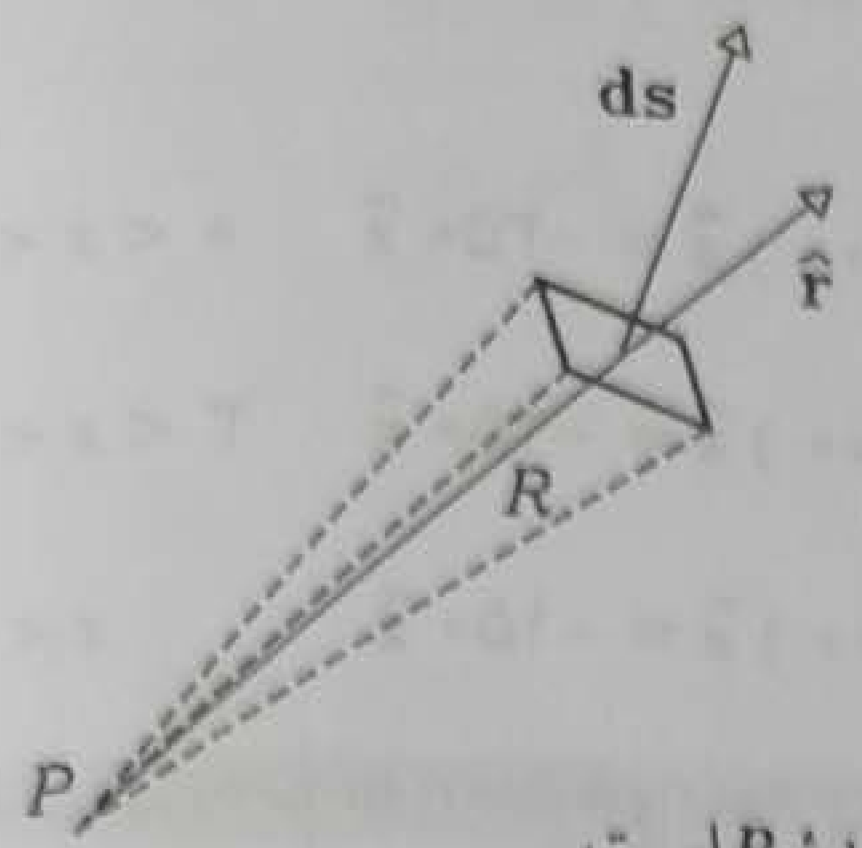
$$\mathbf{M} = 0.25\times(-1800\,\hat{\mathbf{x}}) = -450\,\hat{\mathbf{x}} \qquad y > 0.2$$
$$\mathbf{M} = 1.5\times(600 - 12000y)\,\hat{\mathbf{x}} = (900 - 18000y)\,\hat{\mathbf{x}} \qquad -0.1 < y < 0.2$$
$$\mathbf{M} = 0.25\times(1800\,\hat{\mathbf{x}}) = 450\,\hat{\mathbf{x}} \qquad y < -0.1$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۶-۸ حلقه را به سطوح بسیار کوچک تقسیم می‌کنیم، فرض می‌کنیم از محیط هر سطح جریان I می‌گذرد. هر ضلع این سطوح، بجز اضلاع واقع در محیط حلقه، بین دو خانهٔ مجاور قرار دارند و جریان از آنها در دو جهت مخالف می‌گذرد، پس فرض این جریانها، جریانهای اضافی به مسئله وارد نمی‌کند. پتانسیل در نقطهٔ P جمع پتانسیلهای ناشی از این دو قطبی‌هاست.



شکل ح ۸-۶الف



شکل ح ۸-۶ ب

$$dV_m = \frac{۱}{۴\pi}\ \frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{R}}{R^۳}$$

که $\mathbf{m} = I\ \mathbf{ds}$ بردار دو قطبی، و R بردار واصل بین دو قطبی و نقطهٔ مشاهدهٔ P است.
برای سطح کوچک $\mathbf{ds}$ زاویهٔ فضایی که این سطح تحت آن از نقطهٔ p دیده می‌شود برابرست با $d\Omega = \mathbf{ds}\cdot\hat{r}/R^۲$ (شکل ح ۸-۶ب را ببینید). با توجه به این تعریف داریم

$$dV_m = \frac{I}{۴\pi}\ \frac{\mathbf{ds}\cdot\mathbf{R}}{R^۳} = -\frac{I}{۴\pi}\, d\Omega$$

پس

$$V_m = \int dV_m = -\frac{I}{۴\pi}\int d\Omega = -\frac{I\,\Omega}{۴\pi}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۸-۷ میدان روی محور حلقهٔ جریان (محور z) عبارت است از

$$\mathbf{H} = \frac{I\,a^۲}{۲\,(a^۲+z^۲)^{۱/۵}}\,\hat{\mathbf{z}}$$

داریم $V_m = -\int \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$. برای یافتن پتانسیل در نقطهٔ P روی محور z از بی‌نهایت به سمت P حرکت می‌کنیم

$$V_m = -\int_\infty^h \mathbf{H}\cdot dz\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{I\,a^۲}{۲}\int_\infty^h \frac{dz}{(a^۲+z^۲)^{۱/۵}}$$

$$= \frac{I\,a^۲}{۲}\left[\frac{z}{a^۲\,(a^۲+z^۲)^{۰/۵}}\right]\Bigg|_\infty^h = -\frac{I}{۲}\left(۱-\frac{h}{\sqrt{a^۲+h^۲}}\right)$$

برای استفاده از رابطهٔ مسئله ۸-۶ باید زاویهٔ فضایی Ω را بیابیم.

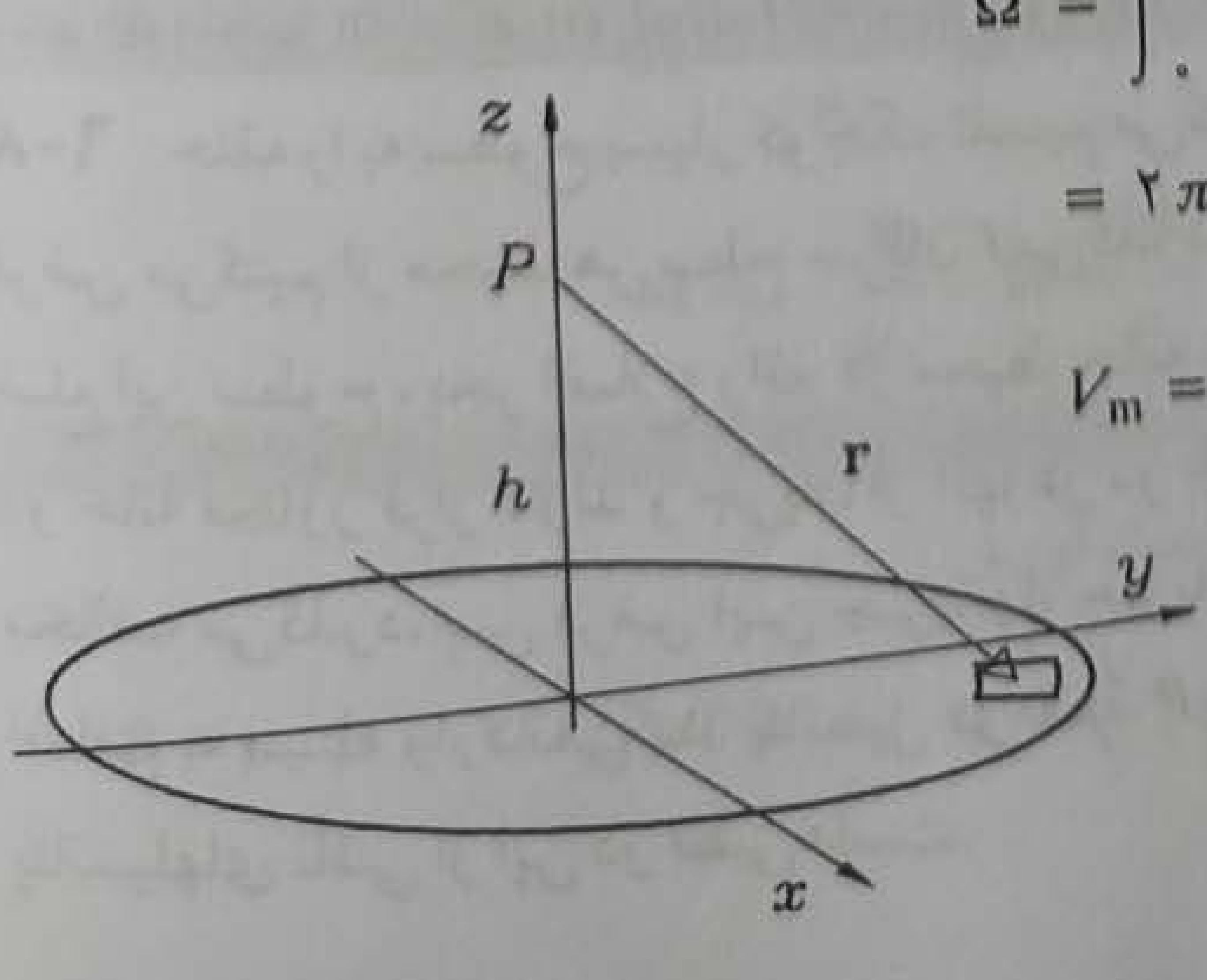
$$\Omega = \int \frac{\mathbf{ds}\cdot\mathbf{r}}{r^۳}$$

که در آن (با کار دستگاه مختصات استوانه‌ای) $\mathbf{r} = -h\,\hat{\mathbf{z}} + \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$، $\mathbf{ds} = -\rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{\mathbf{z}}$ و $r^۲ = h^۲+\rho^۲$

$$\Omega = \int_۰^a\int_۰^{۲\pi} \frac{h\,\rho\,d\rho\,d\phi}{(h^۲+\rho^۲)^{۱/۵}} = ۲\pi h\left[\frac{-۱}{(h^۲+\rho^۲)^{۰/۵}}\right]\Bigg|_۰^a$$

$$= ۲\pi h\left(\frac{-۱}{\sqrt{h^۲+a^۲}}+\frac{۱}{h}\right)$$

$$V_m = -\frac{I\,\Omega}{۴\pi} = -\frac{I}{۲}\left(۱-\frac{h}{\sqrt{a^۲+h^۲}}\right)$$



شکل ح ۸-۷

۸-۹ چون I تنها در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ وجود دارد، $A_x = A_y = 0$. معادلهٔ لاپلاس در همه جا بجز محور z صادق است. به علت پیوستگی A در مرز می‌توان فرض کرد $\mathbf{A}$ مستقل از ϕ است (در حل معادلات دیفرانسیل هر فرضی که منجر به جوابی قابل قبول شود جایزست، زیرا یکتایی جواب می‌گوید با هر فرضی به جواب رسیدیم، آن تنها جواب مسئله است).

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) = 0$$

$$A_z = C_1 \ln\rho + C_2$$

ثابت C_2 را صفر فرض می‌کنیم. پس در ناحیهٔ ۱ داریم $\mathbf{A}_1 = C_{11}\ln\rho\,\hat{\mathbf{z}}$ و در ناحیهٔ ۲ داریم $\mathbf{A}_2 = C_{12}\ln\rho\,\hat{\mathbf{z}}$. پیوستگی $\mathbf{A}$ در مرز نتیجه می‌دهد $C_{11} = C_{12}$ و بنابراین در تمام محیط

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = C\ln\rho\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla\times\mathbf{A}_1 = -\frac{C}{\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{B}_2 = \nabla\times\mathbf{A}_2 = -\frac{C}{\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

برای یافتن C یک مسیر دایروی در صفحهٔ $z = 0$ و به مرکز محور z در نظر می‌گیریم

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathbf{H}_1\cdot d\mathbf{l} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\mathbf{H}_2\cdot d\mathbf{l} = I$$

$$\frac{B_1}{\mu_1}(\pi\rho) + \frac{B_2}{\mu_2}(\pi\rho) = I$$

$$\frac{C}{\mu_1} + \frac{C}{\mu_2} = -\frac{I}{\pi}$$

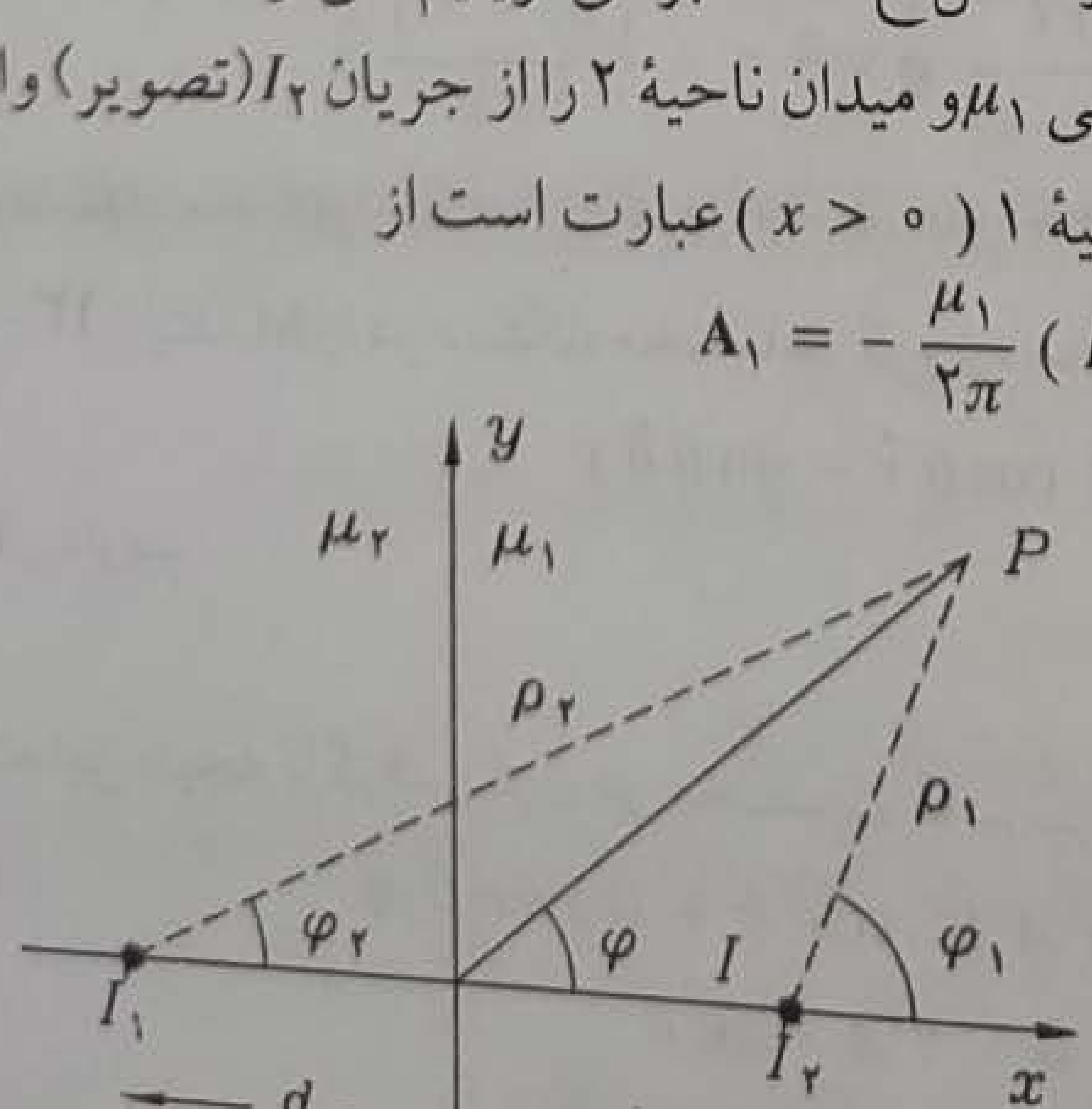
که نتیجه می‌دهد

$$C = -\frac{I}{\pi}\,\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=$

۸-۱۰ دستگاه مختصات را به صورت نشان داده شده در شکل ح ۸-۱۰ بر می‌گزینیم. می‌توان میدان ناحیهٔ ۱ را از جریانهای I و I_1 (تصویر) واقع در ناحیه‌ای با تراوایی μ_1 و میدان ناحیهٔ ۲ را از جریان I_2 (تصویر) واقع در ناحیه‌ای با تراوایی μ_2 ناشی دانست. پس میدان در ناحیهٔ ۱ ($x > 0$) عبارت است از

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{\mu_1}{2\pi}\left(I\ln\rho_1 + I_1\ln\rho_2\right)\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۸-۱۰

مثال ۵ فصل ۷ را ببینید. و در ناحیه ۲ ($x > 0$)

$$\mathbf{A}_2 = -\frac{\mu_2}{2\pi} I_2 \ln \rho_1 \hat{\mathbf{z}}$$

در مرز ($x = 0$) مولفه‌های مماسی A باید پیوسته باشد. چون در مرز $\rho_2 = \rho_1$

$$\mu_1 I + \mu_1 I_1 = \mu_2 I_2$$

(۱)

معادلهٔ دوم با برابر قرار دادن مولفهٔ مماسی H به دست می‌آید. داریم $\rho_1^2 = (x-d)^2 + y^2$ و $\rho_2^2 = (x+d)^2 + y^2$، چون $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$، و A تنها مولفه z دارد و تنها مولفهٔ y را می‌خواهیم

$$B_{1y} = -\frac{\partial A_{1z}}{\partial x} = \frac{\mu_1}{2\pi}\left[I \frac{x-d}{\rho_1^2} + I_1 \frac{x+d}{\rho_2^2} \right]$$

$$B_{2y} = -\frac{\partial A_{2z}}{\partial x} = \frac{\mu_2}{2\pi} I_2 \frac{x-d}{\rho_1^2}$$

در $x = 0$ باید داشته باشیم $H_{t1} = H_{t2}$، پس

$$-I + I_1 = -I_2$$

(۲)

حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌دهد

$$I_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \quad \text{و} \quad I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۱۱ چگالی جریان عبارت است از $J = I/\pi a^2$. با استفاده از قانون آمپر به صورت $\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I$ به دست می‌آوریم

$$2\pi\rho H_\phi = \pi\rho^2 J$$

پس

$$\mathbf{H} = \frac{J\rho}{2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{I}{2\pi a^2}\rho\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

چون $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}$ و $\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$، پس $\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}$. اکنون داریم

$$\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\frac{I}{\pi a^2}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{M}\times\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a^2} a\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{(\mu_r - 1)}{2\pi a}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۱۲ ابتدا M را در دستگاه مختصات کروی بیان می‌کنیم

$$\mathbf{M} = (A r^2 \cos^2\theta + B)(\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

حال داریم

$$\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} = 0$$

البته این نتیجه با گرفتن کرل در مختصات قائم نیز به راحتی حاصل می‌شود

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{r}} = (A R^2\cos^2\theta + B)\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

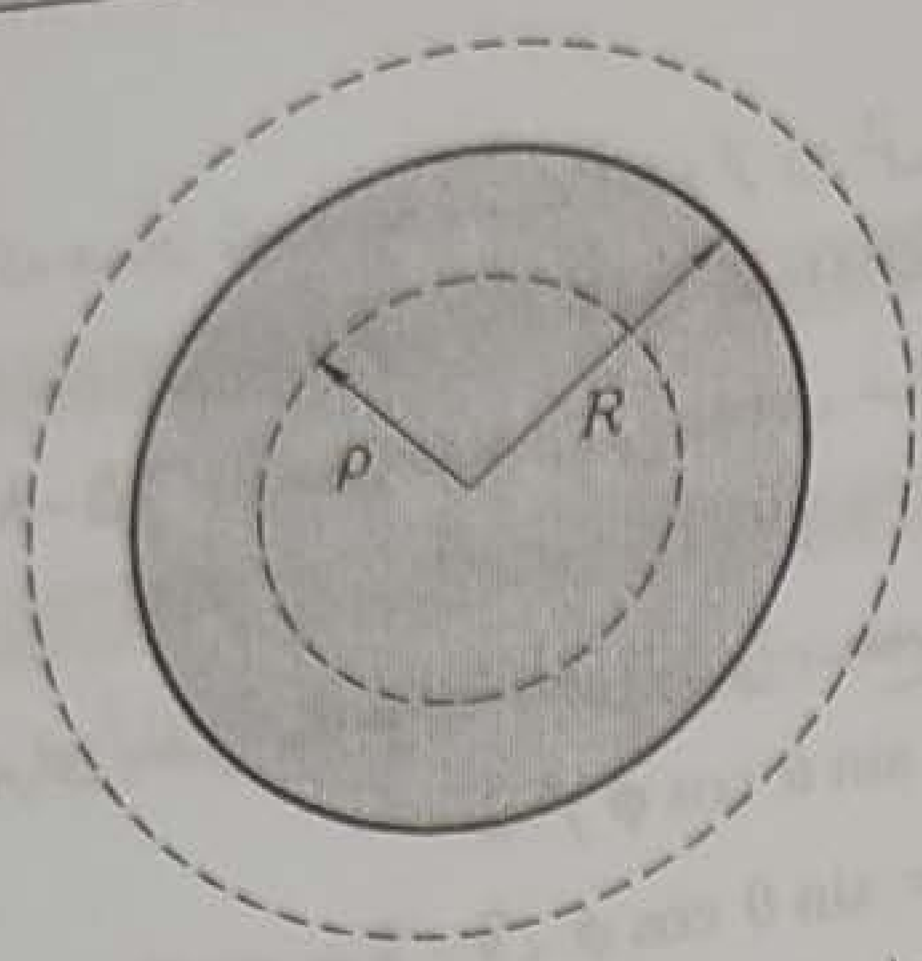
$$\rho_m = -\nabla\cdot\mathbf{M} = -2Az = -2Ar\cos\theta$$

$$\sigma_m = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{r}} = (A R^2\cos^2\theta + B)\cos\theta$$

۸-۱۳ ابتدا جریانهای مقید را می‌یابیم

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho M_\phi)\,\hat{\mathbf{z}} = 3K\rho\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = KR^2\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -KR^2\,\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۸-۱۳

تقارن مسئله نشان می‌دهد که میدان تنها در جهت ϕ وجود دارد (مسئله ۷-۲۳ را ببینید). برای یافتن B مسیرهای آمپر دایره‌ای را داخل و خارج استوانه در نظر می‌گیریم. در هر دو مسیر

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_\phi$$

برای مسیر داخل استوانه، جریانی که از داخل مسیر می‌گذرد برابرست با

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int 3K\rho\,\rho\, d\phi\, d\rho$$

$$= 3K(2\pi)\int_0^\rho \rho^2\, d\rho = 2\pi K\rho^3 \qquad (1)$$

پس در داخل استوانه

$$\mathbf{B} = \mu_0 K\rho^2\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

جریانی که از مسیر آمپر بیرون استوانه می‌گذرد، مجموع جریان حجمی گذرنده از استوانه و جریان سطحی گذرنده از روی استوانه است. مولفهٔ اول با توجه به رابطهٔ (۱) برابر $2\pi KR^3$ است. مولفهٔ دوم عبارت است از

$$\int (\mathbf{K}_b \cdot \hat{\mathbf{z}})\, dl = \int -KR^2 R\, d\phi = -2\pi KR^3$$

پس کل جریان صفرست و در خارج استوانه $\mathbf{B} = 0$. راه حل دیگر این مسئله را در حل مسئلهٔ ۸-۱۴ ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۱۴ به خاطر تقارن استوانه‌ای مسئله و صفر بودن جریان آزاد داریم

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_\phi = 0$$

که نشان می‌دهد در درون و بیرون استوانه $\mathbf{H} = 0$.

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0\mathbf{M}$$

پس در خارج استوانه $\mathbf{B} = 0$ و در داخل استوانه $\mathbf{B} = \mu_0 K\rho\,\hat{\mathbf{z}}$. جریانهای مقید عبارت‌اند از

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} = -K\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{M} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = KR\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

با توجه به حل مسئلهٔ ۷-۲۹ میدان در بیرون استوانه صفرست. میدان داخل جمع میدانهای ناشی از جریانهای مقید حجمی و جریان مقید سطحی است. باز با توجه به حل مسئلهٔ ۷-۲۹ داریم

$$\mathbf{B} = -\mu_0 K(R-\rho)\,\hat{\mathbf{z}} + \mu_0 KR\,\hat{\mathbf{z}} = \mu_0 K\rho\,\hat{\mathbf{z}}$$

که همان نتیجه به دست آمده از روش ساده قانون آمپرست.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۱۵ بارهای مغناطیسی معادل عبارت‌اند از

$$\rho_m = -\nabla\cdot\mathbf{M} = -2\,(a_2 x + a_1 y)$$

$$\sigma_m = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{r}}$$

برای یافتن σ_m مولفهٔ M_r را روی سطح کره می‌یابیم زیرا

$$\mathbf{M} = [\,a_1\,(r\sin\theta\sin\phi)^2 + b_1\,]\,\hat{\mathbf{y}} + a_2\,(r\sin\theta\cos\phi)^2\,\hat{\mathbf{x}}$$

$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi$ ، $\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\sin\phi$. پس

$$\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{r}} = [\,a_1\,(r\sin\theta\sin\phi)^2 + b_1\,]\sin\theta\sin\phi + a_2\,(r\sin\theta\cos\phi)^3$$

در $r = R$

$$\sigma_m = a_1 R^2\,(\sin\theta\sin\phi)^3 + b_1\sin\theta\sin\phi + a_2\,(R\sin\theta\cos\phi)^3$$

جریانهای معادل عبارت‌اند از

$$\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} = 0$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{r}} = \frac{z\,(a_1 y^2 + b_1)}{R}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{a_2 z x^2}{R}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{a_2 x^2 y - x\,(a_1 y^2 + b_1)}{R}\,\hat{\mathbf{z}}$$

که در آن x، y، z به نقاط روی سطح کره مربوط‌اند ، یا به بیان دیگر عبارت بالا تنها برای مقادیری از x، y، z صادق است که شرط $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ را ارضا کنند .

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۱۶ با استفاده از قانون آمپر برای تمام فضای $\rho > a$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

در $a < \rho < b$ و $\rho > c$ فضای آزاد داریم و $\mathbf{B}_1 = \mu_0\,\mathbf{H}$. در $b < \rho < c$ تراوایی $5000\,\mu_0$ است و

$$\mathbf{B}_2 = \frac{5000\,\mu_0\,I}{2\pi\rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

در این محیط مغناطش عبارت است از

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \mathbf{H} = \frac{4999\,I}{2\pi\rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

جریانهای مقید عبارت‌اند از

$$\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho M_\phi)\,\hat{\mathbf{z}} = 0$$

$$\mathbf{K}_{mb} = \mathbf{M}\times(-\hat{\boldsymbol{\rho}}) = \frac{4999\,I}{2\pi b}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{K}_{mc} = \mathbf{M}\times\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{4999\,I}{2\pi c}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۱۷ اگر محور استوانه را روی محور z فرض کنیم، $\mathbf{M} = M_0\,\hat{\mathbf{z}}$ جریانهای مقید عبارت‌اند از

$$\mathbf{J}_b = \nabla\times\mathbf{M} = 0$$

$$\mathbf{K}_b = M_\circ\, \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = M_\circ\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

پس میدان چنین استوانه‌ای همانند سیملوله‌ای است که روی آن جریان سطحی $M_\circ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ می‌گذرد، یعنی داخل استوانه $\mathbf{B} = \mu_\circ M_\circ \hat{\mathbf{z}}$ و بیرون استوانه $\mathbf{B} = 0$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۱۸ در فضای اطراف سیم حامل جریان I تقارن استوانه‌ای داریم. بنابراین با استفاده از قانون آمپر به دست می‌آوریم

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

با توجه به تعریف $\mu = B / H$ داریم

$$\mu = \frac{\mu_\circ}{a}\rho$$

برای یافتن جریانهای مقید $\mathbf{M}$ را می‌یابیم

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_\circ} - \mathbf{H} = \left(\frac{I}{2\pi a} - \frac{I}{2\pi\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{I}{2\pi a \rho}\,\hat{\mathbf{z}}$$

چون در $\rho = a$، $\mathbf{M} = 0$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = 0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۱۹ چون جریان آزاد وجود ندارد در تمام فضا، از جمله $1 < z < 2$، $\mathbf{H} = \frac{B_\circ}{\mu_\circ}\hat{\mathbf{x}}$. $\mathbf{M}$ در ماده مغناطیسی عبارت است از

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\,\mathbf{H} = \chi_m \mathbf{H} = \frac{z B_\circ}{4\mu_\circ}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{B_\circ}{4\mu_\circ}\hat{\mathbf{y}}$$

در سطح $z = 1$، $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{z}}$ و

$$\mathbf{K}_{m1} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{B_\circ}{4\mu_\circ}\hat{\mathbf{x}} \times (-\hat{\mathbf{z}}) = \frac{B_\circ}{4\mu_\circ}\hat{\mathbf{y}}$$

در سطح $z = 2$، $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ و

$$\mathbf{K}_{m2} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{2B_\circ}{4\mu_\circ}\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\frac{B_\circ}{2\mu_\circ}\hat{\mathbf{y}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۲۰ داریم $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$، $\mathbf{B}_1 = \mu_\circ \mathbf{H}_1$ و $\mathbf{B}_2 = \mu_\circ \mathbf{H}_2 + \mu_\circ \mathbf{M}_2$، پس

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mu_\circ \mathbf{H}_1 - \mu_\circ \mathbf{H}_2 - \mu_\circ \mathbf{M}_2) = 0$$

که نتیجه می‌دهد

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}_2$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸-۲۱ بارهای مغناطیسی عبارت‌اند از

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \qquad \sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = M_\circ \cos\phi$$

چون داخل و خارج استوانه بار صفرست، باید معادلهٔ لاپلاس را در دو محیط حل کنیم. پتانسیل مستقل از

z است، پس

$$V_{m1} = A\rho\cos\phi \qquad \rho < R$$

$$V_{m2} = B\cos\phi/\rho \qquad \rho < R$$

چون بار مغناطیسی تنها به صورت $\cos\phi$ است، بقیهٔ جملات بسط پتانسیل ضرایبی برابر صفر دارند. با توجه به پیوستگی پتانسیل روی مرز داریم

$$AR = \frac{B}{R} \quad \Rightarrow \quad B = AR^2 \qquad (1)$$

همچنین روی مرز $B_{n1} = B_{n2}$ یا $B_{\rho1} = B_{\rho2}$. داریم

$$H_{\rho1} = -\frac{\partial V_{m1}}{\partial\rho} = -A\cos\phi$$

چون $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$

$$B_{\rho1} = \mu_0(H_{\rho1} + M_\rho) = \mu_0(-A\cos\phi + M_0\cos\phi)$$

همچنین در بیرون استوانه

$$H_{\rho2} = -\frac{\partial V_{m2}}{\partial\rho} = B\cos\phi/\rho^2$$

و $B_{\rho2} = \mu_2 H_{\rho2}$. در $\rho = R$ داریم

$$\mu_0(-A + M_0)\cos\phi = \frac{\mu_2 B}{R^2}\cos\phi \qquad (2)$$

حل همزمان معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌دهد $A = \frac{\mu_0 M_0}{\mu_0 + \mu_2}$ و $B = \frac{\mu_0 M_0 R^2}{\mu_0 + \mu_2}$. پس

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1(-\nabla V_{m1}) = \frac{-\mu_1\mu_0 M_0}{\mu_0 + \mu_2}\hat{\mathbf{x}}$$

(زیرا $\rho\cos\phi = x$) و

$$\mathbf{B}_2 = \mu_2(-\nabla V_{m2}) = \frac{\mu_2\mu_0 M_0 R^2}{(\mu_0 + \mu_2)\rho^2}(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$

۸-۲۲ از روش پتانسیل اسکالر و بارهای مغناطیسی استفاده می‌کنیم

$$\rho_m = -\nabla\cdot\mathbf{M} = 0 \qquad \sigma_m = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}} = M_0\cos\theta$$

پتانسیل داخل و خارج کره را برحسب توابع لژاندر می‌نویسیم. چون بار روی کره تنها تابع $\cos\theta$ است انتظار داریم تنها جملات شامل $\cos\theta$ در حل باقی بمانند

$$V_{m1} = A_1 r\cos\theta + \frac{B_1\cos\theta}{r^2} \qquad r < R$$

$$V_{m2} = A_2 r\cos\theta + \frac{B_2\cos\theta}{r^2} \qquad r > R$$

چون در بی‌نهایت باید پتانسیل محدود باشد، $A_2 = 0$. همچنین برای محدود بودن پتانسیل در مرکز کره $B_1 = 0$. در سطح کره پتانسیل باید پیوسته باشد

$$A_1 R\cos\theta = \frac{B_2\cos\theta}{R^2} \quad \Rightarrow \quad B_2 = A_1 R^3$$

پیوستگی B_n در سطح کره آخرین شرط مرزی است

$$-\mu_0 \frac{\partial V_{m1}}{\partial r} + \mu_0 M_0 \cos\theta = -\mu_0 \frac{\partial V_{m2}}{\partial r}$$

که نتیجه می‌دهد $-A_1 + M_0 = 2B_2 / R^3$. حل همزمان این دو معادله به دست می‌آوریم

$$A_1 = \frac{1}{3} M_0 \qquad B_2 = \frac{1}{3} M_0 R^3$$

$$V_{m1} = \frac{1}{3} M_0 r \cos\theta \qquad V_{m2} = \frac{1}{3} M_0 R^3 \frac{\cos\theta}{r^2}$$

چون $z = r\cos\theta$ داریم

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla V_{m1} = -\frac{1}{3} M_0 \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{H}_2 = -\nabla V_{m2} = \frac{1}{3} M_0 \left(\frac{R^3}{r^3}\right)(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

به عنوان راه حلی دیگر روش به کار رفته در مثال ۲ را دنبال می‌کنیم. در آنجا دیدیم که $\mathbf{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{M} \times \mathbf{E}$ که در آن $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی کره‌ای با بار حجمی $1\ \mathrm{C/m^3}$ است. میدان داخل چنین کره‌ای عبارت است از $\mathbf{E} = (r/3\varepsilon_0)\,\hat{\mathbf{r}}$ پس

$$\mathbf{A} = \mu_0 M_0\, \hat{\mathbf{z}} \times \frac{r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} = \mu_0 \frac{M_0 r}{3} \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

حال میدان را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 M_0}{3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - 2\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

باکمی عملیات جبری می‌توان نشان داد که $\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{z}}$ و همان جواب بالا را به دست آورد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲۳-۸ در مرز $(r = R)$ باید داشته باشیم $B_{n1} = B_{n2}$. چون $\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$، $B_{in} = B_{on}$ نتیجه می‌دهد

$$C_1 \cos\theta = \frac{C_2}{R^3}(-2\cos\theta)$$

همچنین در مرز داریم

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}$$

پس

$$\hat{\mathbf{r}} \times [C_1 \hat{\mathbf{z}} - \frac{C_2}{R^3}(\hat{\mathbf{z}} - 3\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}})] = \mu_0 k_0 \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ پس

$$-C_1 \sin\theta - \frac{C_2}{R^3}\sin\theta = \mu_0 k_0 \sin\theta$$

با حل دو معادلهٔ $-2C_2 = R^3 C_1$ و $C_2 = R^3(C_1 + \mu_0 k_0)$ به دست می‌آوریم

$$C_2 = \frac{1}{3}\mu_0 k_0 R^3 \qquad C_1 = -\frac{2}{3}\mu_0 k_0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲۴-۸ بردار عمود بر مرز عبارت است از $\mathbf{N} = \nabla(y + z)$، پس

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$$

مولفهٔ عمود بر مرز $\mathbf{B}_1$ عبارت است از

$$B_{n1} = \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مولفهٔ مماسی $\mathbf{B}_1$ عبارت است از

$$\mathbf{B}_{t1} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_{n1}$$
$$= (2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) - \tfrac{1}{2}(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) = 2\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{y}} - \tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{z}}$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم، $B_{n2} = B_{n1}$ ، پس $\mathbf{B}_{n2} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$. همچنین $H_{t1} = H_{t2}$ پس

$$\mathbf{B}_{t2} = \mu_2 \mathbf{H}_{t2} = \mu_2 \mathbf{H}_{t1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\mathbf{B}_{t1}$$
$$= \frac{6\mu_0}{4\mu_0}(2\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{y}} - \tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{z}}) = 3\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{3}{4}\hat{\mathbf{y}} - \tfrac{3}{4}\hat{\mathbf{z}}$$
$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{n2} + \mathbf{B}_{t2} = 3\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{5}{4}\hat{\mathbf{y}} - \tfrac{1}{4}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸ـ۲۵ بردار عمود بر مرز $\hat{\mathbf{z}}$ است. داریم $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}$ پس

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_1 - \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_2 = 2\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}}$$
$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_2 = \hat{\mathbf{z}} \times (H_{2x}\hat{\mathbf{x}} + H_{2y}\hat{\mathbf{y}} + H_{2z}\hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_1 - 2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}}$$
$$= (6\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}}) - 2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} = H_{2x}\hat{\mathbf{y}} - H_{2y}\hat{\mathbf{x}}$$

پس $H_{2x} = 4$ و $H_{2y} = -8$. همچنین مولفهٔ عمودی B باید پیوسته باشد. یعنی $B_{2z} = B_{1z}$ یا

$$B_{2z} = B_{1z} = \mu_1 H_{1z} = 4\mu_0$$

سرانجام

$$\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 = 2\mu_0 \mathbf{H}_2 = \mu_0 (8\hat{\mathbf{x}} - 16\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}})$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸ـ۲۶ داریم $\mu = B/H$ پس $\mu = \mu_0 H$ که نشان می‌دهد این ماده غیر خطی است، یعنی تراوایی آن مستقل از شدت میدان اعمال شده به آن نیست.. همچنین $M = (B/\mu_0) - H$ پس

$$M = H^2 - H$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸ـ۲۷ با توجه به شرایط مرزی داریم $B_{n1} = B_{n2}$ و $H_{t1} = H_{t2}$ یا $B_{t1}/\mu_1 = B_{t2}/\mu_2$. همچنین

$$\tan\alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_{n1}} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_{n2}}$$

پس

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{B_{t1}}{B_{n1}}\frac{B_{n2}}{B_{t2}} = \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

به ازای $\mu_1 << \mu_2$ باید $\tan\alpha_1$ مقداری بسیار کوچک باشد یعنی $\alpha_1 \approx 0$. پس روی محیطهای دارای تراوایی بسیار بزرگ میدان مغناطیسی تقریباً عمودی است (شبیه میدان الکتریکی روی هادی کامل). به نحوی دیگر می‌توان گفت مولفهٔ مماسی میدان ناحیهٔ با تراوایی بزرگ به ناحیهٔ با تراوایی کوچک نفوذ نمی‌کند و همین امر امکان استفاده از مفاهیم مدارهای مغناطیسی را ممکن می‌کند.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸ـ۲۸ از معادلهٔ به دست آمده در مسئلهٔ ۸ـ۲۷ استفاده می‌کنیم

$$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} = 8000 \tan\alpha_2$$

پس

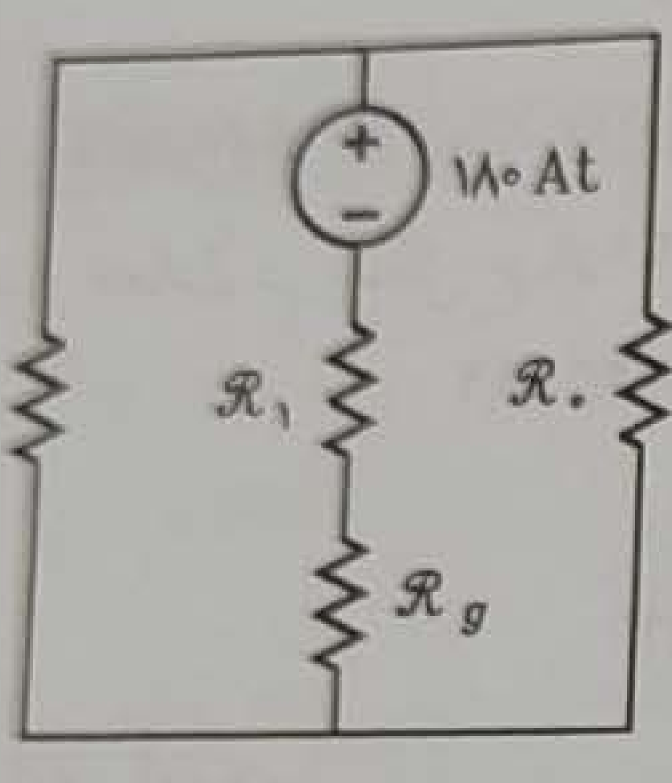
$$\alpha_2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0.0072^\circ \quad \Leftarrow \quad \alpha_1 = 45^\circ$$
$$\alpha_2 = 0.0124^\circ \quad \Leftarrow \quad \alpha_1 = 60^\circ$$
$$\alpha_2 = 0.137^\circ \quad \Leftarrow \quad \alpha_1 = 87^\circ$$

توضیح حل مسئلهٔ ۸–۲۷ را ببینید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸ـ۲۹ مدار مغناطیسی در شکل ح ۸ـ۲۹ نشان داده شده است که در آن

$$\mathcal{R}_0 = \frac{15\times10^{-2}}{4000\,\mu_0 \times 2\times10^{-4}} = 149.2 \text{ kAt/Wb}$$



شکل ح ۸-۲۹

$$\mathcal{R}_1 = \frac{5\times10^{-2}}{4000\,\mu_0 \times 2.5\times10^{-4}} = 39.79 \text{ kAt/Wb}$$

$$\phi_0 = BS = 1.2\times2.5\times10^{-4} = 3\times10^{-4} \text{ At/Wb}$$

باترکیب دو مقاومت $\mathcal{R}_0$ رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\phi_0 = \frac{180}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_0 / 2}$$

و با حل آن به دست می‌آوریم

$$\mathcal{R}_g = 485.61 \text{ kAt/Wb} = \frac{l_g}{\mu_0 S}$$

$$l_g = \mu_0 S\mathcal{R}_g = 4\pi\times10^{-7}\times2.5\times10^{-4}\times485.61\times10^{3} = 0.15 \text{ mm}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸ـ۳۰ $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ در داخل چنبره در امتداد محور چنبره ($\hat{\boldsymbol{\varphi}}$) هستند. طبق شرایط مرزی $B_0 = B_2$ زیرا هر دو در وجوه تشکیل دهندهٔ فاصلهٔ هوایی مولفهٔ عمودی به حساب می‌آیند. روی مسیری که از وسط چنبره می‌گذرد داریم

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H_2 L + H_0 l = 0$$

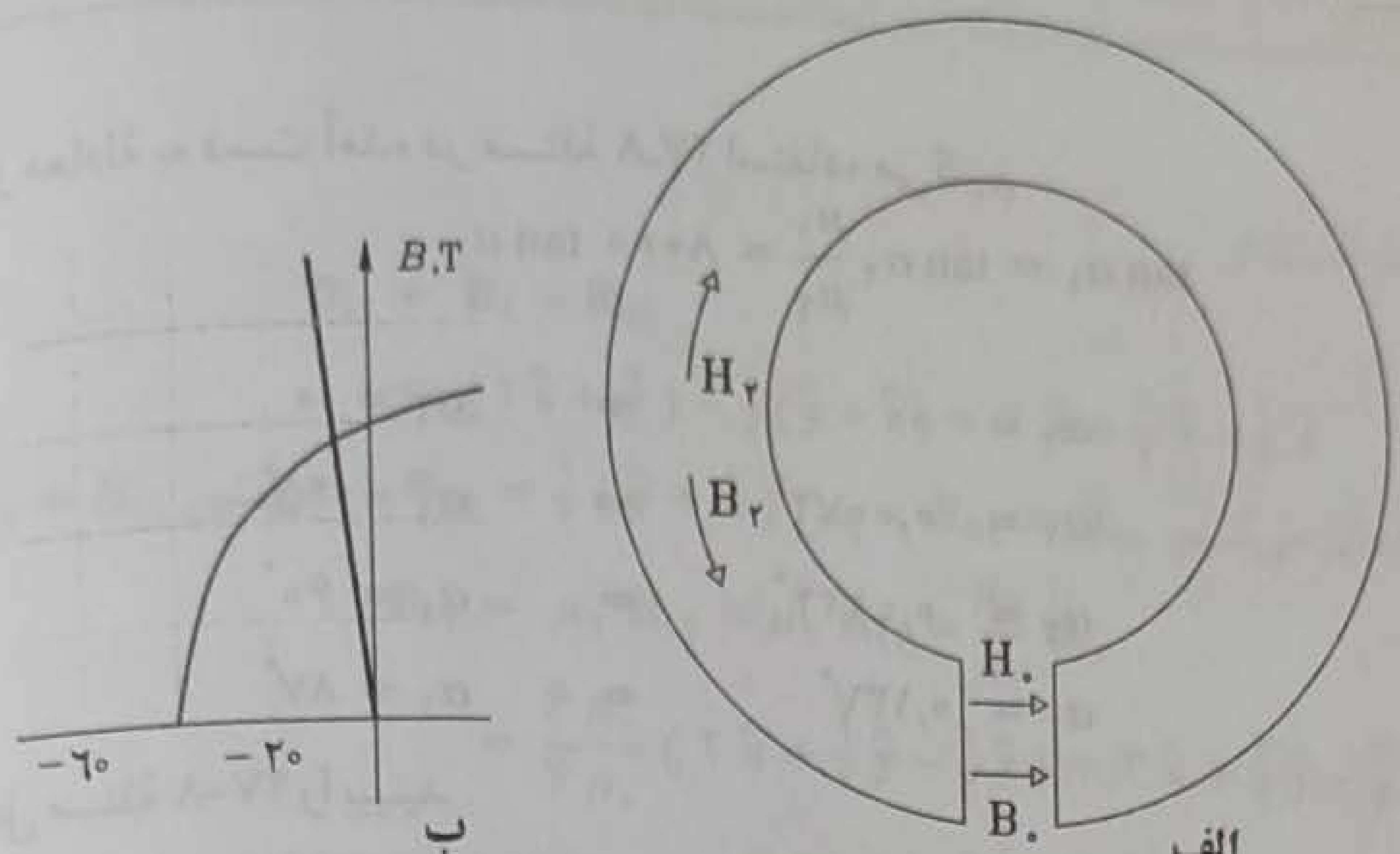
همچنین داریم $H_0 = B_0 / \mu_0 = B_2 / \mu_0$. پس

$$H_2 L + \frac{B_2}{\mu_0} l = 0$$

یا

$$B_2 = \frac{-H_2 L \mu_0}{l} = -100\,\mu_0 H_2 = -1.25\times10^{-4} H_2$$

اکنون باید این رابطه را با رابطهٔ H - B مادهٔ مغناطیسی حل کنیم. چون رابطهٔ تحلیلی مادهٔ مغناطیسی را نمی‌دانیم از روش ترسیمی استفاده می‌کنیم. خط $B_2 = -1.125\times10^{-4} H_2$ را روی منحنی مغناطیسی رسم می‌کنیم. با توجه به شکل ح ۸ـ۳۰ ب به دست می‌آوریم $B_2 \approx 0.75$ T. پس $B_0 = 0.75$ T، و $H_2 \approx -6000$ A/m



شکل ح ۸-۳۰

$$H_۰ = \frac{B_۰}{\mu_۰} \approx ۶۰۰۰۰۰ \text{ A/m}$$

$$M = \frac{B_۲}{\mu_۰} - H_۲ = ۶۰۶۰۰۰ \text{ A/m}$$

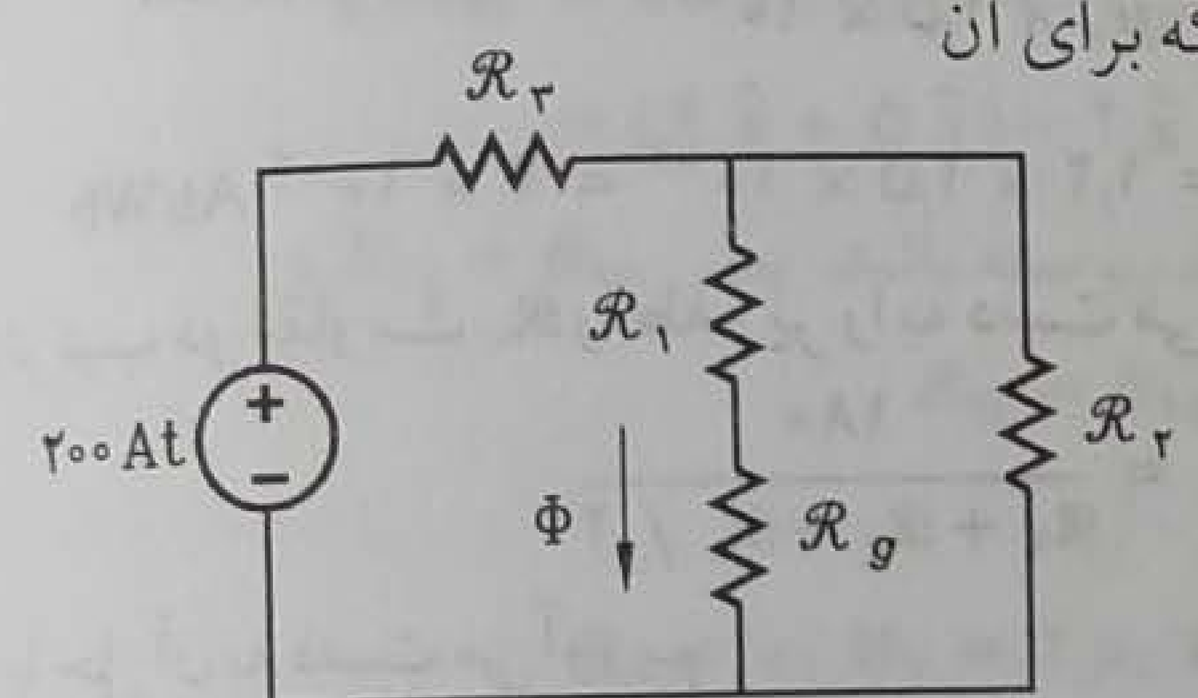
$\nabla\cdot\nabla\times A=۰\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=۰\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=۰\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=۰\,|\,\oint E\cdot dl=۰$

۸-۳۱ مدار معادل در شکل ح ۸-۳۱ نشان داده شده است که برای آن

$$\mathcal{R}_۲ = \mathcal{R}_۳ = ۲۵۱۸۲$$

$$\mathcal{R}_۱ = ۸۵۶۲$$

$$\mathcal{R}_g = ۷۶۳۵۱$$



شکل ح ۸-۳۱

حال به دست می‌آوریم

$$\Phi = ۲۰۰ \; \frac{۱}{\mathcal{R}_۳ + [\mathcal{R}_۲ \parallel (\mathcal{R}_۱ + \mathcal{R}_g)]} \times \frac{\mathcal{R}_۲}{\mathcal{R}_۱ + \mathcal{R}_g} = ۴{,}۵۸ \times ۱۰^{-۳}$$

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{۴{,}۵۸ \times ۱۰^{-۳}}{۷{,}۹ \times ۱۰^{-۳}} = ۱۲۹ \text{ mT}$$

$$H = \frac{B}{\mu_۰} = ۱{,}۰۳ \times ۱۰^۵ \text{ A/m}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=۰\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=۰\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=۰\,|\,\oint E\cdot dl=۰$

۸-۳۲ در شکاف هوایی $H_g = (۰{,}۶\text{ T})/\mu_۰ = ۴{,}۷۷ \times ۱۰^۵$، پس آمپر دور لازم برای آن عبارت است از

$$F_۱ = H_g\, l_g = ۴{,}۷۷ \times ۱۰^۵ \times ۰{,}۰۰۲ = ۹۵۵ \text{ At}$$

در بازوهای به طول $l_۱$ برای $B = ۰{,}۶$ T باید با توجه به منحنی شکل ۸-۳۲ ب داشته باشیم $H_۱ = ۱۰۰$ A/m. پس آمپر دور لازم برای دو بازو برابر است با

$$F_۲ = ۲\, l_۱\, H_۱ = ۸۰ \text{ At}$$

شار شکاف هوایی و بازوها عبارت است از

$$\phi = B\,A = ۰{,}۶ \times ۱۰ \times ۱۰^{-۴} = ۰{,}۶ \text{ mWb}$$

شاری که سیم‌پیچ باید ایجاد کند جمع این شار و شار نشتی است، یعنی $\phi_c = ۰{,}۶ + ۰{,}۰۱ = ۰{,}۶۱$ mWb.

پس میدان سیم‌پیچ عبارت است از

$$B_۲ = \frac{\phi_c}{A_۲} = \frac{۰٫۶۱ \times ۱۰^{-۳}}{۵ \times ۱۰^{-۴}} = ۱٫۲۲ \text{ T}$$

منحنی مغناطیسی نشان می‌دهد که برای این میدان باید داشته باشیم $H_۲ = ۴۱۰$ A/m. یعنی mmf روی میله‌ای که سیم‌پیچ روی آن بسته شده باید $H_۲\, l_۲ = ۴۱$ At باشد. پس کل mmf عبارت است از

$$F_۲ = ۹۵۶ + ۸۰ + ۴۱ = ۱۰۷۶ \text{ At}$$

چون $N = ۱۰۰$ جریان لازم برای ایجاد این mmf برابر ۱۰٫۷۶ A است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳۳ـ۸ mmf لازم برای ایجاد میدان مطلوب در هر قسمت را می‌یابیم. در فاصلهٔ هوایی

$$\text{mmf}_۱ = H_g\, l_g = \frac{B}{\mu_۰}\, l_g = ۱۵۹۲ \text{ At}$$

برای داشتن $B = ۱٫۰$ T در هسته باید داشته باشیم $H = ۲۰۰$ A/m. mmf لازم برای دو بخش دارای طول $l_۱$ عبارت است از

$$\text{mmf}_۲ = ۲\, l_۱\, H = ۱۰۰ \text{ At}$$

شار بخش $l_۲$ با شار بخش $l_۱$ برابر است، یعنی $B_۲ A_۲ = B_۱ A_۱$ پس

$$B_۲ = B_۱ \frac{A_۱}{A_۲} = ۰٫۲۵ \text{ T}$$

با توجه به منحنی مغناطیسی باید داشته باشیم $H_۲ = ۷۰$ At و

$$\text{mmf}_۳ = l_۲\, H_۲ = ۷ \text{ At}$$

کل نیروی محرکهٔ مغناطیسی لازم برابر $۱۵۹۲ + ۱۰۰ + ۷ = ۱۶۹۹$ At است و باید داشته باشیم $N = ۱۷۰$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳۴ـ۸ مقاومت شکاف هوایی عبارت است از

$$\mathcal{R}_g = \frac{۰٫۱ \times ۱۰^{-۳}}{\mu_۰ \times ۰٫۸ \times ۱۰^{-۴}} = ۹۹۵۰۰۰ \text{ At / Wb}$$

برای این مدار می‌توان نوشت

$$۱۰۰ = \mathcal{R}_g\, \phi + ۰٫۰۵\, H_s$$

که در آن H_s شدت میدان در شکاف هوایی است و

$$\phi = S\, B_s = ۰٫۸ \times ۱۰^{-۴}\, B_s$$

چون H در شکاف و در داخل مادهٔ مغناطیسی یکسان است، رابطهٔ H_s و B_s به صورت زیر است

$$B_s = \frac{۱٫۲\, H_s^۲}{(H_s^۲ + ۱۰۰۰۰)}$$

باید معادلهٔ بالا را با معادلهٔ $۹۹۵ \times ۱۰^۳ \times ۰٫۸ \times ۱۰^{-۴}\, B_s + ۰٫۰۵\, H_s = ۱۰۰$ حل کنیم. با سعی و خطا به دست می‌آوریم $H_s = ۲۹۱$ و $B_s = ۱٫۰۷۴$، که نتیجه می‌دهد

$$\phi = ۰٫۸ \times ۱۰^{-۴}\, B_s = ۸۶\ \mu\text{Wb}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۸ـ۳۵ میدانهای داخل فاصلهٔ هوایی را H_o و B_o، داخل بخش آهنی را H_i و B_i، و داخل آهنربای دائم را H_r و B_r می‌نامیم. پس جدول داده شده در صورت مسئله در واقع رابطهٔ H_r و B_r را تعیین می‌کند. چون emf خارجی وجود ندارد، قانون آمپر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H_o \times (۱\ \text{cm}) + H_i \times (۱۰\ \text{cm}) + H_r \times (۸\ \text{cm}) + H_i \times (۱۰\ \text{cm}) = ۰$$

یا $H_o + ۲۰\ H_i + ۸\ H_r = ۰$. چون سطح مقطع تمام بخشها یکی است و شار داخل حلقهٔ مدار از تمام بخشها می‌گذرد $B_o = B_i = B_r$. بنابراین

$$\frac{B_o}{\mu_۰} + ۲۰\ \frac{B_i}{۵۰۰۰\mu_۰} + ۸\ H_r = ۰$$

و باگذاشتن B_r به جای B_i و B_o به دست می‌آوریم

$$۷۹۸۹۵۸\ B_r + ۸\ H_r = ۰ \qquad (۱)$$

با رسم منحنی $B_r - H_r$ داده شده در جدول و خط معادلهٔ می‌توانیم محل برخورد را بیابیم. جوابی که از این روش به دست می‌آید $B_o = B_r = ۰٫۴\ \text{Wb/m}^۲$ است.

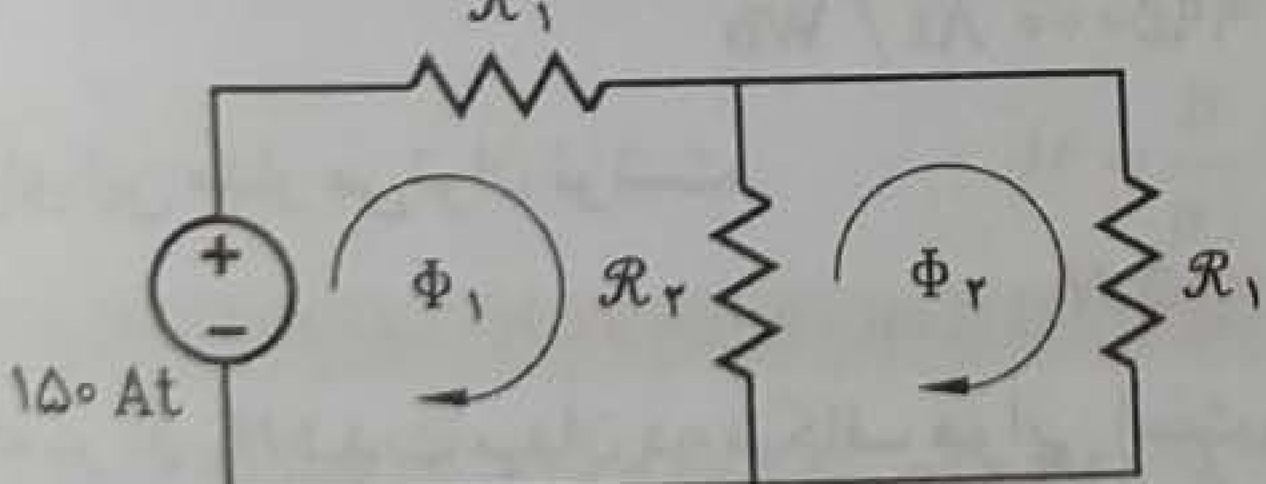
اگر بخشهای بین نقاط داده شده در جدول را با خط راست تقریب بزنیم، با توجه به این که محل برخورد بین دو نقطهٔ انتهایی داده شده در جدول است، معادلهٔ این بخش منحنی را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$۵۰۰۰\ B_r = ۰٫۸\ H_r + ۳۶۰۰۰ \qquad (۲)$$

حل همزمان معادلات (۱) و (۲) به دست می‌دهد $B_r = ۰٫۴۲\ \text{Wb/m}^۲$ و $H_r = -\ ۴۲۳۵۰\ \text{A/m}$.

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۸ـ۳۶ بخش سیم پیچ یک mmf با مقدار $۵۰۰ \times ۰٫۳ = ۱۵۰\ \text{At}$ ایجاد می‌کند. رلوکتانس ساق وسطی $\mathcal{R}_۲$ است، طرف راست ساق وسطی از سه بخش تشکیل شده است، هر یک از این بخشها رلوکتانسی دارد ولی چون تمام این بخشها سری هستند، رلوکتانس کل را با $\mathcal{R}_۱$ مدل می‌کنیم. به همین ترتیب بخشهای سمت چپ ساق وسطی نیز با $\mathcal{R}_۱$ مدل می‌شود. داریم



شکل ح ۸-۳۶

$$\mathcal{R}_۱ = \frac{(۷٫۵ + ۱۰ + ۷٫۵)\ \text{cm}}{۲۵۰۰\mu_۰ \times ۴ \times ۱۰^{-۴}} = ۱۹۸٫۹۴ \times ۱۰^۳$$

$$\mathcal{R}_۲ = \frac{۱۰\ \text{cm}}{۲۵۰۰\mu_۰ \times ۴ \times ۱۰^{-۴}} = ۷۹٫۵۸ \times ۱۰^۳$$

پس مدار مغناطیسی شکل ح ۸-۳۶ به دست می‌آید و برای آن

$$\Phi_۲ \mathcal{R}_۱ + \mathcal{R}_۲ (\Phi_۲ - \Phi_۱) = ۰$$

$$\Phi_۱ \mathcal{R}_۱ + \mathcal{R}_۲ (\Phi_۱ - \Phi_۲) = ۱۵۰$$

حل این دو معادلهٔ به دست می‌دهد $\Phi_۱ = ۰٫۱۶۸\ \text{Wb}$، پس $B_۲ = \Phi_۲ / S = ۴۱۹\ \text{T}$.

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۸ـ۳۷ از طول ساق وسطی ۲ mm کم می‌شود، ولی چون این مقدار در مقابل طول اولیهٔ ساق ناچیز است، رلوکتانس بخش باقیمانده همان $\mathcal{R}_۲$ مسئلهٔ ۸-۳۶ است. ولی رلوکتانس شکاف هوایی باید با $\mathcal{R}_۲$ جمع شود. این رلوکتانس عبارت است از

$$\mathcal{R}_g = \frac{۲\ \text{mm}}{\mu_۰ \times ۴ \times ۱۰^{-۴}} = ۳۹۷۹ \times ۱۰^{۳}$$

با قرار دادن $\mathcal{R}_۲ + \mathcal{R}_g$ به جای $\mathcal{R}_۲$ مدار شکل ح ۸-۳۶، می‌توان به همان شیوهٔ بالا جواب خواسته شده را یافت.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۸-۳۸ mmf برابر At ۷۰۰ و طول مسیر داخل چنبره $۲ \times ۱۵ \times \pi = ۰/۹۴\ \text{m}$ است. حال باید معادلهٔ $۰/۹۴\,H = ۷۰۰$ را بر روی منحنی $B - H$ مادهٔ تشکیل دهندهٔ چنبره رسم کنیم. محل برخورد B و H داخل چنبره را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۸-۳۹ سطح قرص را به حلقه‌هایی به شعاع r و ضخامت dr تقسیم می‌کنیم. بر روی هر حلقه باری برابر $۲\pi r\,dr\,(Q/\pi R^۲)$ قرار دارد. چرخش قرص باعث می‌شود که این بار از هر نقطه ω / ۲π بار در ثانیه عبور کند، بنابراین گویی حلقه‌ای با جریان زیر وجود دارد

$$I = \frac{(Q/\pi R^۲)\,۲\pi r\,dr}{۲\pi/\omega} = \frac{Q\omega r\,dr}{\pi R^۲}$$

گشتاور دو قطبی این حلقه عبارت است از $I\,\pi r^۲$، پس

$$dm = \frac{Q\omega r^۳\,dr}{R^۲}$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$m = \frac{Q\omega}{R^۲}\int_۰^R r^۳\,dr = \frac{Q\omega}{R^۲}\,\frac{R^۴}{۴} = \frac{Q\omega R^۲}{۴}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

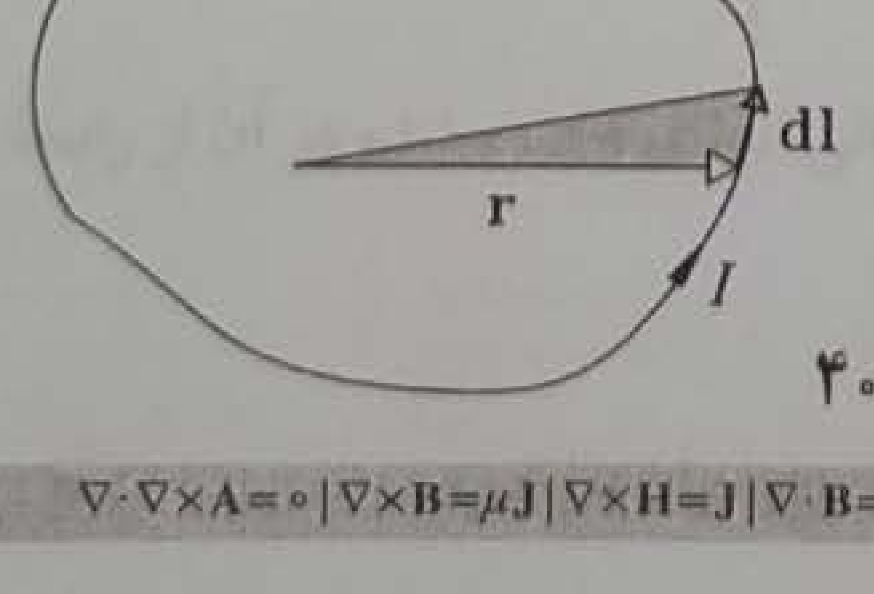
۸-۴۰ داریم

$$\mathbf{m} = \frac{۱}{۲} I \int \mathbf{r}' \times \mathbf{dl}$$

با توجه به شکل ح ۸-۴۰ حاصلضرب خارجی داخل انتگرال با مساحت متوازی الاضلاعی که اضلاع مجاور آن $\mathbf{dl}$ و $\mathbf{r}'$ است، برابرست. با در نظر گرفتن ضریب $\frac{۱}{۲}$ جلوی انتگرال این حاصلضرب با مساحت مثلث نشان داده شده در شکل برابرست. جهت بردار حاصلضرب بر سطح مثلث عمودست؛ چون حلقه مسطح فرض شده تمام بردارهای حاصلضرب هم جهت هستند و باید اندازه‌هایشان (که با مساحت مثلث تشکیل شده از $\mathbf{dl}$ و $\mathbf{r}'$ برابرست) با هم جمع شوند. به این ترتیب به دست می‌آوریم

$$\mathbf{m} = I\,S\,\hat{\mathbf{n}}$$

که $\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر سطح حلقه و S مساحت آن است.



شکل ح ۸-۴۰

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۸ـ۴۱ مطابق شکل ح ۸-۴۱ نواری روی کره در نظر می‌گیریم. عرض این نوار $A\,d\theta$ و شعاع آن $A\sin\theta$ است. اگر چگالی بار سطحی روی کره را σ بنامیم، بار روی این نوار $\sigma(2\pi A\ \sin\theta)(A\,d\theta)$ است. با استدلالی مشابه آنچه در حل مسئلهٔ ۸-۳۹ دیدیم گشتاور مغناطیسی هر یک از این حلقه‌ها عبارت است از

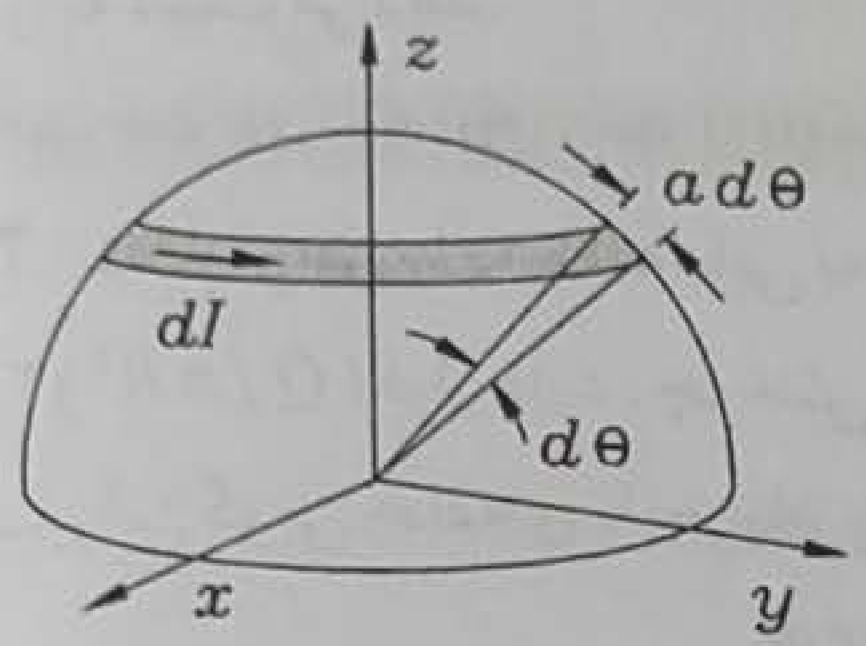
$$d\mathbf{m} = (\sigma A^{2}\ \sin\theta\,\omega\,d\theta)(\pi A^{2}\ \sin^{2}\theta)\,\hat{\mathbf{z}} = \pi\sigma A^{4}\ \sin^{3}\theta\,\omega\,d\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

و سرانجام

$$\mathbf{m} = \int_{0}^{\pi} \pi\sigma A^{4}\ \sin^{3}\theta\,\omega\,d\theta\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{4}{3}\pi\sigma A^{4}\,\omega\,\hat{\mathbf{z}}$$

و اما $Q = \pi A^{2}\sigma$ پس

$$\mathbf{m} = \frac{Q A^{2}\omega}{3}\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۸-۴۱

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۸ـ۴۲ استوانهٔ چرخان را مجموعه‌ای از دو قطبیها در نظر بگیرید

$$B = \frac{\mu_0\,\omega\,\sigma\,L\,R^{3}}{4\left[r^{2}+(L/2)^{2}\right]^{1.5}}$$