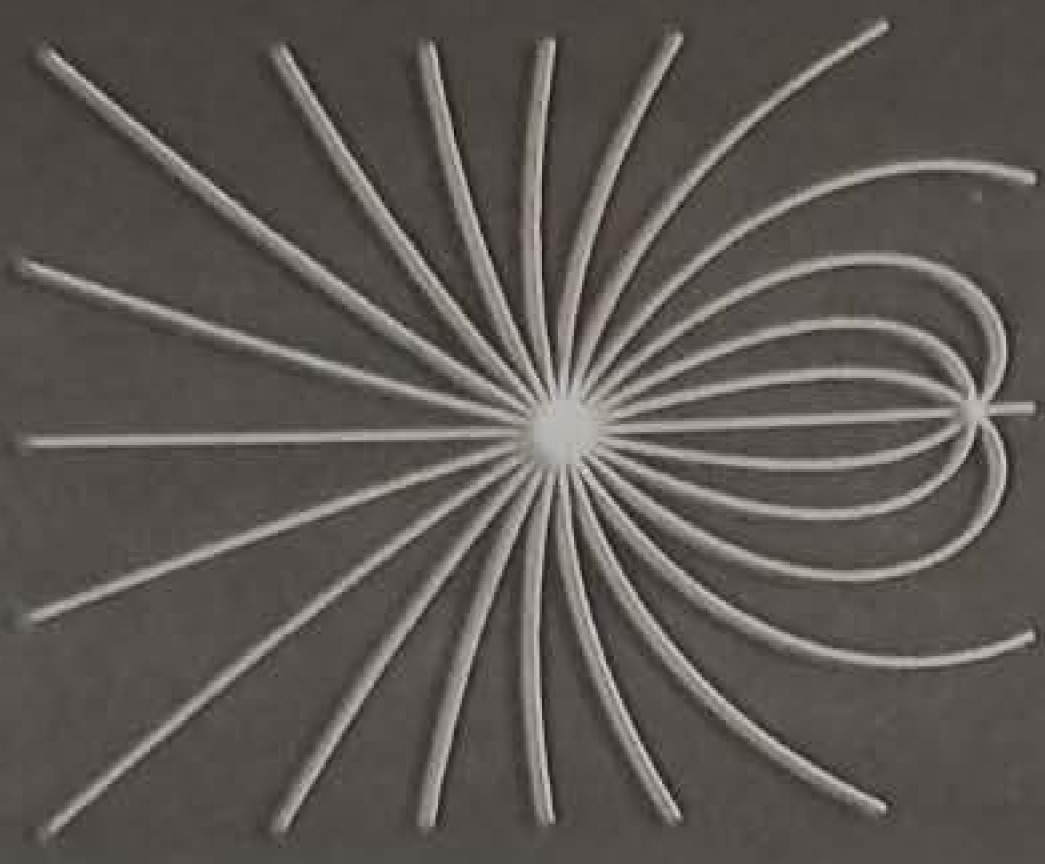


۷ میدان مغناطیسی در فضای آزاد

۷-۱ قانون بیو-ساوار

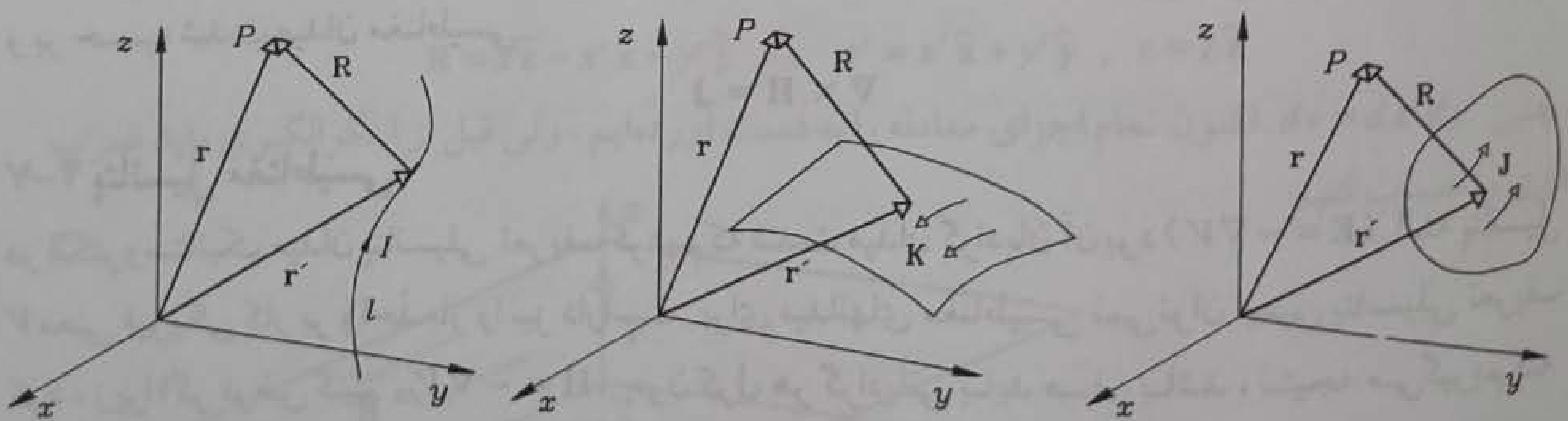
منبع میدان مغناطیسی جریان است. رابطهٔ میدان و منبع توسط قانون بیو-ساوار به صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{R}\, dv}{R^3} \qquad (۱-۷)$$

وضعیت هندسی در شکل ۷-۱ نشان داده شده است. این شکل قانون بیو-ساوار را برای جریانهای سطحی و خطی نیز نشان می‌دهد.

نام میدان $\mathbf{B}$ **چگالی شار مغناطیسی** است. جریانی می‌تواند میدان مغناطیسی **ساکن** تولید کند که دیورژانس آن صفر باشد، یعنی برای آن

$$\nabla \times \mathbf{J} = 0$$



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{R}\, dl}{R^3} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{R}\, ds}{R^3} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{R}\, dv}{R^3}$$

شکل ۷-۱ وضعیت هندسی قانون بیوساوار برای جریانهای حجمی، سطحی، و خطی.

مفهوم فیزیکی این معادله این است که مکانیسم تولید کنندهٔ جریان نباید تغییرات زمانی داشته باشد. معادله (۱-۷) میدان مغناطیسی را در فضای آزاد بیان می‌کند و در آن $\mu_\circ$ **تراوایی فضای آزاد** نام دارد، و مقدار آن در سیستم یکاهای SI برابر $4\pi \times 10^{-7}$ H/m است. میدان مغناطیسی دیگری نیز به نام **شدت میدان مغناطیسی** وجود دارد که در فضای آزاد به صورت $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_\circ$ تعریف می‌شود.

۷-۲ شار مغناطیسی و دیورژانس B

چون **B** چگالی شار (با یکای وبر بر متر مربع $\mathrm{Wb/m^2}$) است، انتگرال آن روی یک سطح **شار مغناطیسی** گذرنده از آن سطح را به دست می‌دهد

$$\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \tag{۷-۲}$$

چون خطوط میدان مغناطیسی بسته هستند، اگر سطح بسته‌ای را در نظر بگیریم هر خط شار وارد شده به آن از آن خارج هم می‌شود؛ به عبارت دیگر کل شار خارج شده از یک سطح بسته صفرست یا

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{۷-۳}$$

با اعمال قضیهٔ دیورژانس به این معادله به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{۷-۴}$$

۷-۳ قانون آمپر

همانند قضیهٔ گوس که انتگرال میدان الکتریکی را به منبع میدان ارتباط می‌داد و می‌توانست حل مسائل دارای تقارن را ساده کند، قانون آمپر نیز انتگرال میدان مغناطیسی روی یک مسیر بسته را به کل جریانی که از داخل این مسیر می‌گذرد مرتبط می‌کند

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_\circ I = \mu_\circ \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \tag{۷-۵}$$

بر حسب شدت میدان مغناطیسی داریم

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

جهت عبور جریان از سطح و جهت انتگرال مسیر سمت چپ معادله توسط قانون دست راست به هم مربوط می‌شوند. با اعمال قضیهٔ استوکس به معادلهٔ (۷-۵) به دست می‌آوریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_\circ \mathbf{J} \tag{۷-۶}$$

و بر حسب شدت میدان مغناطیسی

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

۷-۴ پتانسیل مغناطیسی

در الکتروستاتیک میدان پتانسیلی تعریف کردیم که شدت میدان گرادیان آن بود ($\mathbf{E} = -\nabla V$). البته پتانسیل V معنی فیزیکی کار بر واحد بار را نیز داراست. برای میدانهای مغناطیسی نمی‌توان چنین پتانسیلی تعریف کرد، زیرا اگر فرض کنیم $\mathbf{H} = -\nabla V_m$، چون کرل هر گرادیانی باید صفر باشد، نتیجه می‌گیریم که $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ که بر خلاف قانون آمپر است.

ولی دیورژانس **B** صفرست و دیورژانس هر کرلی نیز صفرست، پس می‌توان **B** را کرل یک میدان

برداری دانست

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{۷-۷}$$

A **پتانسیل مغناطیسی برداری** نام دارد و از معادلهٔ پواسون زیر به دست می‌آید

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{۸-۷}$$

که در آن $\nabla^2 \mathbf{A}$ لاپلاسین برداری است

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

به توجه به شباهت مولفه‌های معادلهٔ برداری (۷-۸) و معادلهٔ پواسون در الکتروستاتیک می‌توانیم برای جریانهای فضای آزاد پتانسیل را به صورت زیر بیابیم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\, dv}{R} \tag{۹-۷}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}\, ds}{R} \tag{۱۰-۷}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}\, dl}{R} \tag{۱۱-۷}$$

حل مسئله

قانون بیو-ساوار به قانون کولن بسیار شبیه است، ولی در آن یک ضرب برداری نیز وجود دارد که قبل از پرداختن به انتگرالگیری باید آن را محاسبه کرد.

مثال ۱

جریان سطحی $\mathbf{K} = K_0 \hat{\mathbf{x}}$ از صفحهٔ بینهایت $z = 0$ می‌گذرد. میدان را در نقاط بالای صفحهٔ جریان بیابید.

حل

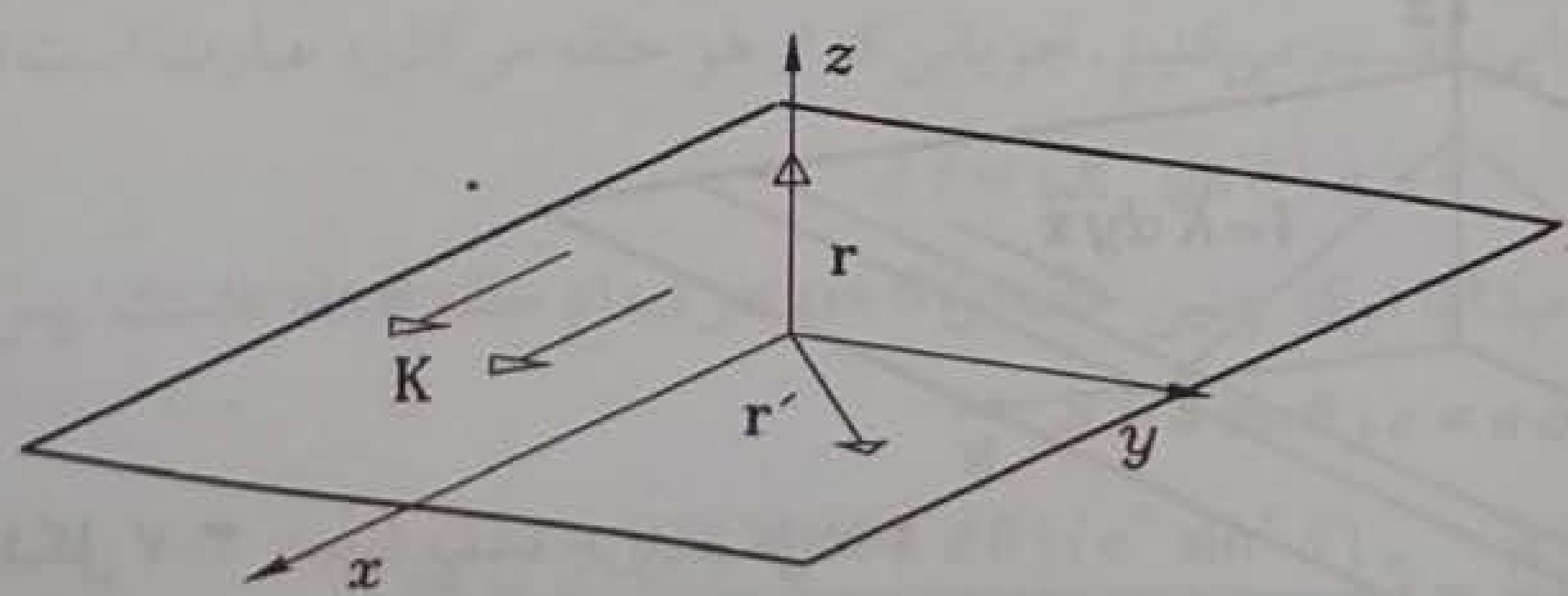
میدان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{R}\, ds}{R^3}$$

که در آن $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. دستگاه مختصات را طوری برمی‌گزینیم که محور z از نقطه‌ای که می‌خواهیم میدان را در آن بیابیم بگذرد. در این صورت

$$\mathbf{R} = z\hat{\mathbf{z}} - x'\hat{\mathbf{x}} - y'\hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} \;,\; \mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$$

همچنین $ds = dx'\,dy'$. اکنون تمام اجزای معادله را به دست آورده‌ایم، ولی قبل از انتگرالگیری باید ضرب برداری را حساب کنیم



شکل ۷-۲ صفحهٔ جریان.

$$\mathbf{K}\times\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ K_\circ & \circ & \circ\\ -x' & -y' & z\end{vmatrix}=-K_\circ z\hat{\mathbf{y}}-K_\circ y'\hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\mathbf{B}=\frac{-K_\circ\mu_\circ}{۴\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\hat{\mathbf{y}}+y'\hat{\mathbf{z}}}{(x'^۲+y'^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,dx'\,dy'$$

در محاسبهٔ مولفهٔ zداریم

$$B_z=\frac{-K_\circ\mu_\circ}{۴\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y'}{(x'^۲+y'^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,dy'$$

انتگرال داخلی تابع فردی روی یک فاصلهٔ متقارن نسبت به مبدا است، بنابراین صفرست. پس

$$\mathbf{B}=\frac{-K_\circ\mu_\circ}{۴\pi}z\hat{\mathbf{y}}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy'}{(x'^۲+y'^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$=\frac{-K_\circ\mu_\circ}{۴\pi}z\hat{\mathbf{y}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۲\,dx'}{x'^۲+z^۲}$$

$$=\frac{-K_\circ\mu_\circ z\hat{\mathbf{y}}}{۲\pi}\left[\frac{۱}{z}\tan^{-۱}\frac{x'}{z}\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{-K_\circ\mu_\circ}{۲}\hat{\mathbf{y}}$$

به علت پیچیدگی نسبی انتگرالهای میدان مغناطیسی هر گونه استفاده از تقارن و تجزیهٔ منبع که بتواند به ساده شدن حل مسئله بانجامد مغتنم است. مثال زیر چگونگی کار را نشان می‌دهد.

مثال ۲

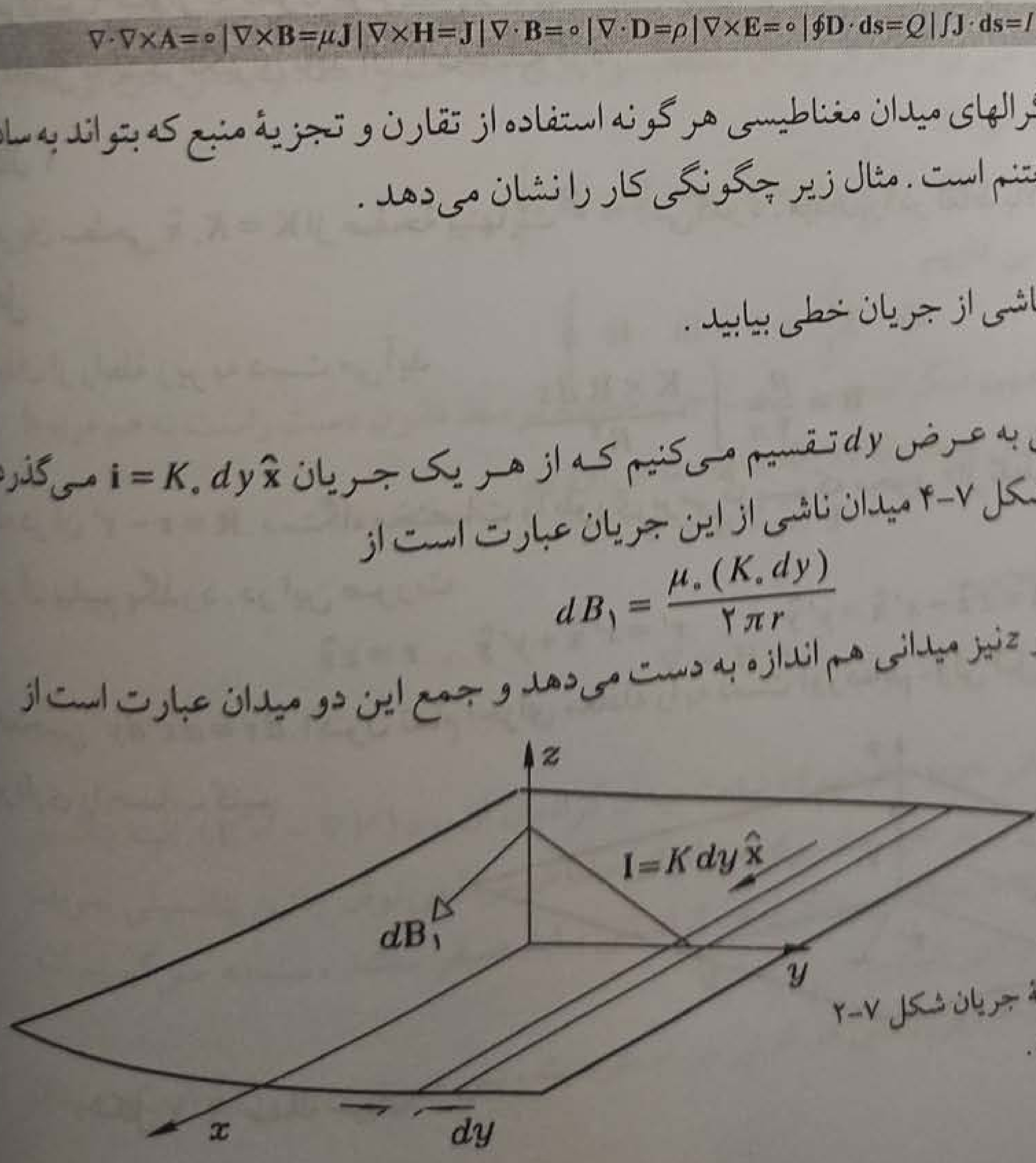
مثال ۱ را با توجه به میدان ناشی از جریان خطی بیابید.

حل

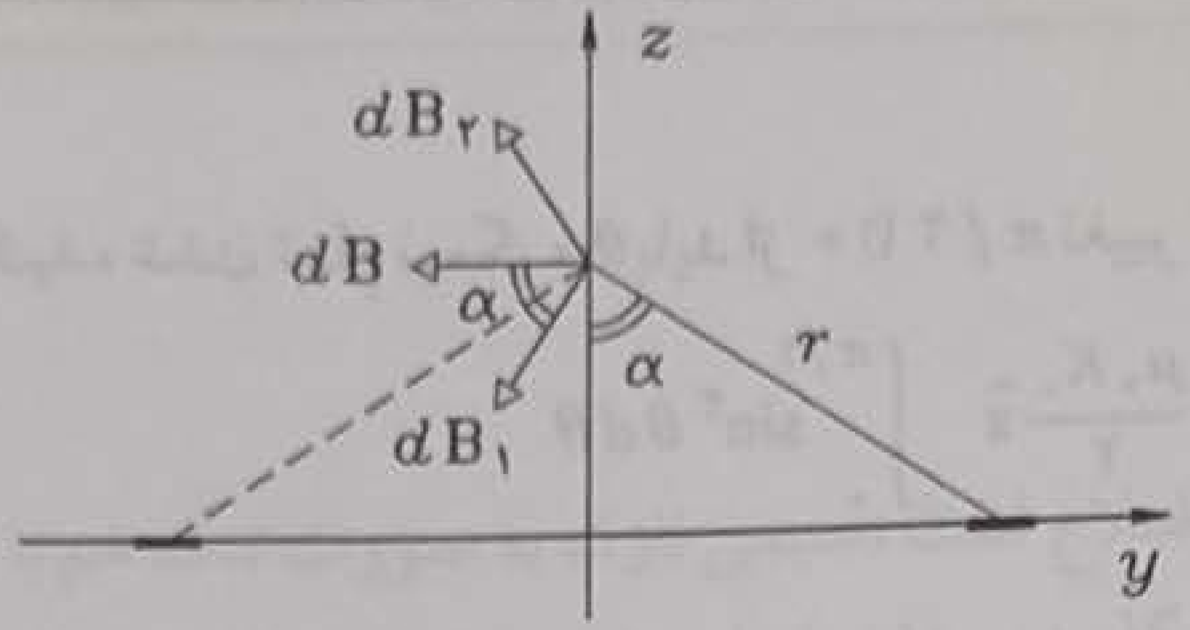
سطح را به نوارهای باریکی به عرض dy تقسیم می‌کنیم که از هر یک جریان $\mathbf{i}=K_\circ\,dy\,\hat{\mathbf{x}}$ می‌گذرد (شکل ۷-۳). با توجه به شکل ۷-۴ میدان ناشی از این جریان عبارت است از

$$dB_۱=\frac{\mu_\circ(K_\circ dy)}{۲\pi r}$$

نوار متقارن نسبت به محور zنیز میدانی هم اندازه به دست می‌دهد و جمع این دو میدان عبارت است از



شکل ۷-۳ تجزیهٔ صفحهٔ جریان شکل ۷-۲ به نوارهای موازی محور x.



شکل ۷-۴ میدانهای نوارهای جریان شکل ۷-۳.

$$\mathbf{dB_1} + \mathbf{dB_2} = 2\,dB_1 \cos\alpha\,(-\hat{\mathbf{y}})$$

چون $\cos\alpha = z/r$ و $r^2 = z^2 + y^2$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K_0}{\pi}(-\hat{\mathbf{y}})\int_0^\infty \frac{z\,dy}{z^2+y^2} = \frac{\mu_0 K_0}{\pi}(-\hat{\mathbf{y}})\left[\tan^{-1}\frac{y}{z}\right]\Bigg|_0^\infty = \frac{\mu_0 K_0}{2}(-\hat{\mathbf{y}})$$

توجه کنید که حدود انتگرال از ۰ تا ∞ است، زیرا به ازای هر y مثبت قبلاً اثر نوار واقع در $-y$ نیز منظور شده است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

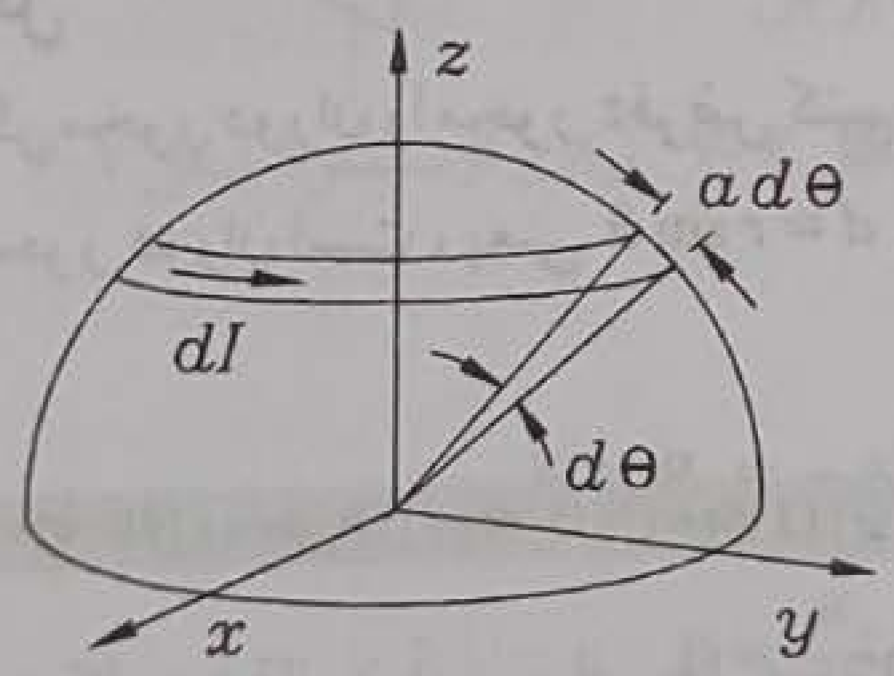
تجزیهٔ جریان به قطعاتی که میدان مغناطیسی‌شان را می‌دانیم همیشه به این سادگی نیست، و در مواردی دقت خاصی را می‌طلبد. مثال زیر را ببینید.

مثال ۳

روی سطح نیمکرهٔ شکل ۷-۵ چگالی جریان $K_0 \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ وجود دارد. می‌خواهیم میدان مغناطیسی در مبدا را به دست آوریم. می‌دانیم که یک حلقه جریان روی محورش میدانی با چگالی شار زیر ایجاد می‌کند

$$\mathbf{B} = \mu_0 I \frac{R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{z}}$$

که در آن R شعاع حلقه و z فاصله نقطه مشاهده تا مرکز حلقه است.



شکل ۷-۵ تقسیم سطح کرهٔ حامل جریان سطحی به نوارهای حامل جریان خطی.

حل

نیمکره را مطابق شکل ۷-۵ به حلقه‌هایی تقسیم می‌کنیم. جریانی که از هر حلقه می‌گذرد عبارت است از

$$dI = (K_0 \sin\theta)\,a\,d\theta$$

زیرا عرض حلقه $a\,d\theta$ است، فاصلهٔ مبدا تا مرکز چنین حلقه‌ای $a\cos\theta$ و شعاع حلقه $a\sin\theta$ است. پس در معادلهٔ میدان حلقه قرار می‌دهیم $z = a\cos\theta$ و $R = a\sin\theta$

$$d\mathbf{B} = \mu_0 \frac{(K_0 \sin\theta\, a\,d\theta)(a^2\sin^2\theta)}{2a^3}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 K_0}{2}\sin^3\theta\,d\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

برای پوشیده شدن تمام نیمکره θ باید از ۰ تا $\pi/2$ تغییر کند، پس

$$\mathbf{B} = \int_0^{\pi/2} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K_0}{2}\hat{\mathbf{z}} \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\mu_0 K_0}{3}\hat{\mathbf{z}}$$

یکی از گامهای لازم برای حل بعضی مسائل، تبدیل بارهای متحرک به چگالی جریان معادل است. برای این کار از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{K}=\sigma\mathbf{v} \ , \quad \mathbf{I}=\lambda\mathbf{v} \qquad (12)$$

که در آنها $\mathbf{v}$ سرعت بارست. این بارهای متحرک به شرطی میدان مغناطیسی ساکن تولید می‌کنند که با حرکتشان وضعیت بارها تغییر نکند. مثلاً اگر کره‌ای که روی آن بار سطحی یکنواختی با چگالی σ قرار دارد حول محوری که از مرکزش می‌گذرد دوران کند، در تمام لحظات توزیع بار الکتریکی یکسانی در فضا داریم. ولی اگر این کره حول محوری بچرخد که از مرکزش نمی‌گذرد، توزیع بار در فضا تغییر می‌کند، این توزیع بار متغیر میدان الکتریکی متغیر با زمانی ایجاد می‌کند که خود منجر به ایجاد میدان مغناطیسی می‌شود، بنابراین در این حالت با میدانهای متغیر با زمان سروکار خواهیم داشت.

مثال ۳

کره‌ای با بار حجمی یکنواخت ρ C/m^3 حول محوری که از مرکزش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. چگالی جریان معادل را بیابید.

حل

اگر محور دوران را محور z فرض کنیم، سرعت هر نقطهٔ داخل کره برابرست با $\mathbf{v} = d\omega\hat{\boldsymbol{\phi}}$ که d فاصلهٔ نقطه تا محور دوران است، یعنی $d = r\sin\theta$. پس

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} = \rho r \sin\theta\, \omega\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

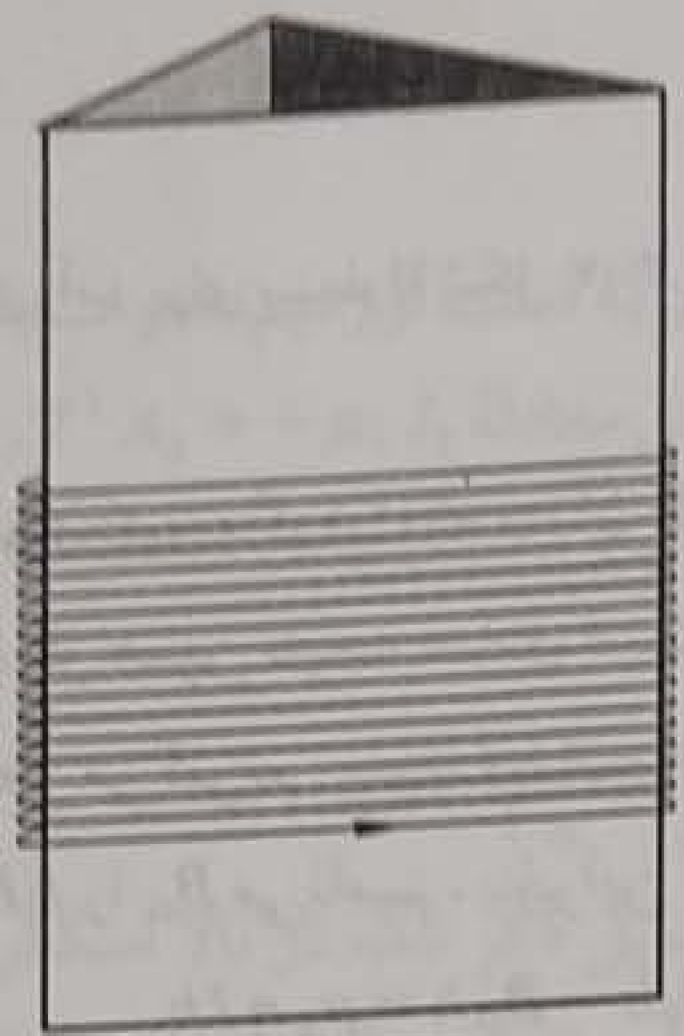
کاربرد قانون آمپر برای حل مسائل میدانهای مغناطیسی نیز مانند قانون گوس مستلزم داشتن اطلاعات پیشینی راجع به میدان (مولفه‌ها و متغیرهای آن) است. در صورت لزوم بخش مربوط به قانون گوس فصل ۳ را مرور کنید. یکی از مهمترین وضعیتهایی که در آن می‌توان قانون آمپر را به کار برد به توزیع جریانهای دارای تقارن محوری مربوط می‌شود. در مسئلهٔ ۷–۲۳ اطلاعات لازم برای حل این گونه مسائل به دست می‌آید. مشخصاً این که نشان می‌دهیم اگر جریان در جهت z و مستقل از ϕ باشد. میدان تنها در جهت $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ مولفه دارد و این مولفه نیز مستقل از ϕ است.

یکی از متداولترین روشهای ایجاد میدان مغناطیسی استفاده از سیم پیچهاست. این سیم پیچها یا روی استوانه پیچیده می‌شوند یا به صورت چنبره. مسائل ۷–۲۶ و ۷–۲۸ نیز اطلاعات بسیار خوبی راجع به میدان

داخل و خارج این سیم پیچها به ما می‌دهند.

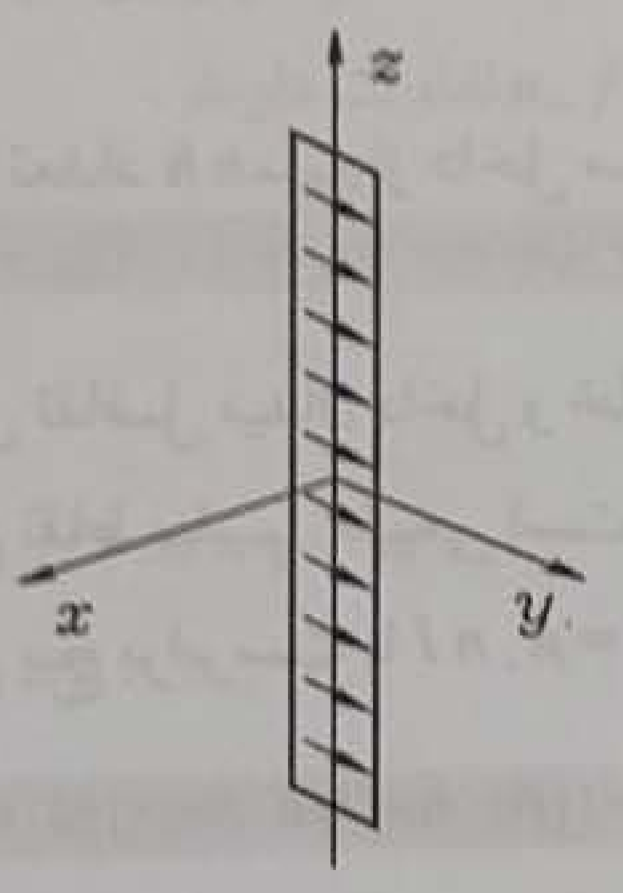
مثال ۴

روی منشوری که قاعدهٔ آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، سیمی نازک به صورت تنگ هم با n دور در واحد طول پیچیده شده است و از آن جریان I می‌گذرد. میدان داخل و خارج منشور را بیابید.



شکل ۷-۶ سیملولهٔ با مقطع مثلثی.

حل



شکل ۷-۷ نواری از سیملولهٔ شکل ۷-۶.

نواری از استوانه را برمی‌گزینیم (شکل ۷-۷ را ببینید). این تقسیم غریبی است ولی هدفمان از این تقسیم با تقسیمهای قبل منابع تفاوت دارد. می‌خواهیم نشان دهیم که این نوار تنها می‌تواند میدانی در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ ایجاد کند. به علت بینهایت بودن نوار میدان تابعی از z نیست، بنابراین نقطهٔ مشاهده را در صفحهٔ $z=0$ برمی‌گزینیم. همچنین محورها را طوری برمی‌گزینیم که نوار در صفحهٔ $x=0$ واقع شود، یعنی $\mathbf{K}=K_0\hat{\mathbf{y}}$. بنابراین

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{K}\times\mathbf{R}}{R^3}\,ds$$

که در آن $ds=dy'\,dz'$ و $\mathbf{R}=x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}-z'\hat{\mathbf{y}}$، پس

$$\mathbf{K}\times\mathbf{R}=-K_0x\hat{\mathbf{z}}+K_0z'\hat{\mathbf{x}}$$

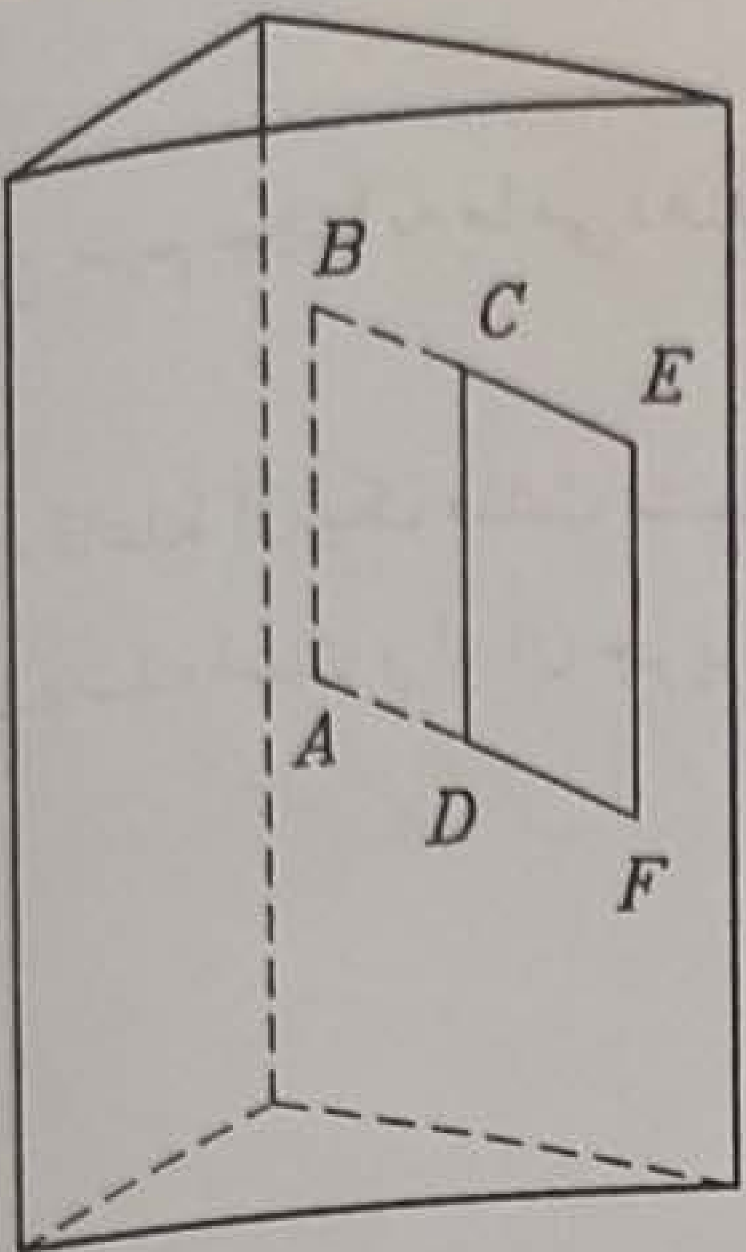
$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_0x\hat{\mathbf{z}}-K_0z'\hat{\mathbf{x}}}{(x^2+y^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy'\,dz'$$

چون مولفهٔ x انتگرال تابع فردی روی یک فاصلهٔ متقارن حول صفرست، حاصل انتگرال صفر می‌شود و تنها مولفهٔ z باقی می‌ماند. پس سیم پیچ بیان شده تنها در جهت z میدان تولید می‌کند.

حال مسیر $ABCDA$ شکل ۷-۸ را به عنوان مسیر آمپر در نظر می‌گیریم. میدان روی ضلع AB را $\mathbf{B}_1$ و میدان روی ضلع CD را $\mathbf{B}_2$ می‌نامیم، و چون میدان تنها در جهت z است می‌نویسیم

$$\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=B_1h-B_2h=0$$

که در آن h طول ضلع AB است. معادلهٔ فوق می‌گوید که $B_1=B_2$ و چون هیچ محدودیتی روی مسیر



شکل ۷-۸ مسیرهای آمپر برای سیملولهٔ شکل ۷-۶.

انتخاب شده وجود ندارد، می‌توان نتیجه گرفت که میدان داخل یکنواخت است. اگر مسیر $ABCDA$ کاملاً خارج منشور قرار داشته باشد، باز همین نتیجه صادق است، پس میدان خارج نیز یکنواخت است.

حال مسیر $ABEFA$ را در نظر می‌گیریم. چون میدان داخل و خارج یکنواخت هستند، میدان روی ضلع AB را B_i و میدان روی ضلع EF را B_o می‌نامیم، بنابراین

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = B_i h - B_o h = \mu_\circ n I h$$

زیرا تعداد nh سیم از داخل مسیر می‌گذرد و کل جریان گذرنده از مسیر nIh است. پس

$$B_i - B_o = \mu_\circ n I$$

یعنی تفاضل میدان داخل و خارج $\mu_\circ n I$ است، و اگر مقدار میدان را در یک نقطه بدانیم می‌توانیم میدان را در تمام نقاط بیابیم. طبیعی است که میدان در خارج و در فواصل دور از سیم پیچ صفر باشد، پس میدان داخل سیم پیچ برابر است با $B_i = \mu_\circ n I$.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ \,|\, \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ$$

یافتن پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ مستلزم حل معادلهٔ پواسون (یا لاپلاس) برداری $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_\circ \mathbf{J}$ است. البته $\mathbf{A}$ بر خلاف پتانسیل الکتریکی V نه مفهوم فیزیکی دارد و نه به عنوان یک گام میانی برای یافتن میدان مغناطیسی چندان به کار می‌آید، مگر در مسائل مربوط به میدانهای تشعشعی آنتنها، که در آن $\mathbf{A}$ به عنوان یک میدان واسط برای یافتن میدانهای الکترومغناطیسی ناشی از توزیع جریان روی آنتن به کار می‌رود. در این مسائل $\mathbf{A}$ را با استفاده از معادلات (۷-۹) تا (۷-۱۱) به دست می‌آورند.

معادلهٔ برداری $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_\circ \mathbf{J}$ در دستگاه مختصات قائم به سه معادلهٔ پواسون (یا لاپلاس) اسکالر $\nabla^2 A_x = -\mu_\circ J_x$، $\nabla^2 A_y = -\mu_\circ J_y$، $\nabla^2 A_z = -\mu_\circ J_z$ تجزیه می‌شود، که سه معادلهٔ جدا از هم هستند و می‌توان آنها را جدا جدا حل کرد. این کار در دستگاههای مختصات دیگر ممکن نیست، و بسط معادلهٔ برداری به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل سه مجهولی تبدیل می‌شود. البته تجزیهٔ بالا در دستگاه مختصات قائم ما را مجبور نمی‌کند که معادلات حاصل را در این دستگاه حل کنیم، بلکه هر یک از سه معادلهٔ فوق را می‌توان در هر دستگاه مختصات مناسبی حل کرد. مثلاً در مسئلهٔ ۷-۳۴ پس از تجزیهٔ بالا تنها معادلهٔ غیر متحد با صفر را در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل کرده‌ایم.

روش دیگر یافتن پتانسیل مغناطیسی استفاده از تناظر موجود بین میدانهای مغناطیسی و میدانهای الکتریکی است.

مثال ۵

از دو سیم موازی که به فاصلهٔ d از هم قرار دارند جریان I در دو جهت مخالف می‌گذرد. پتانسیل مغناطیسی را بیابید.

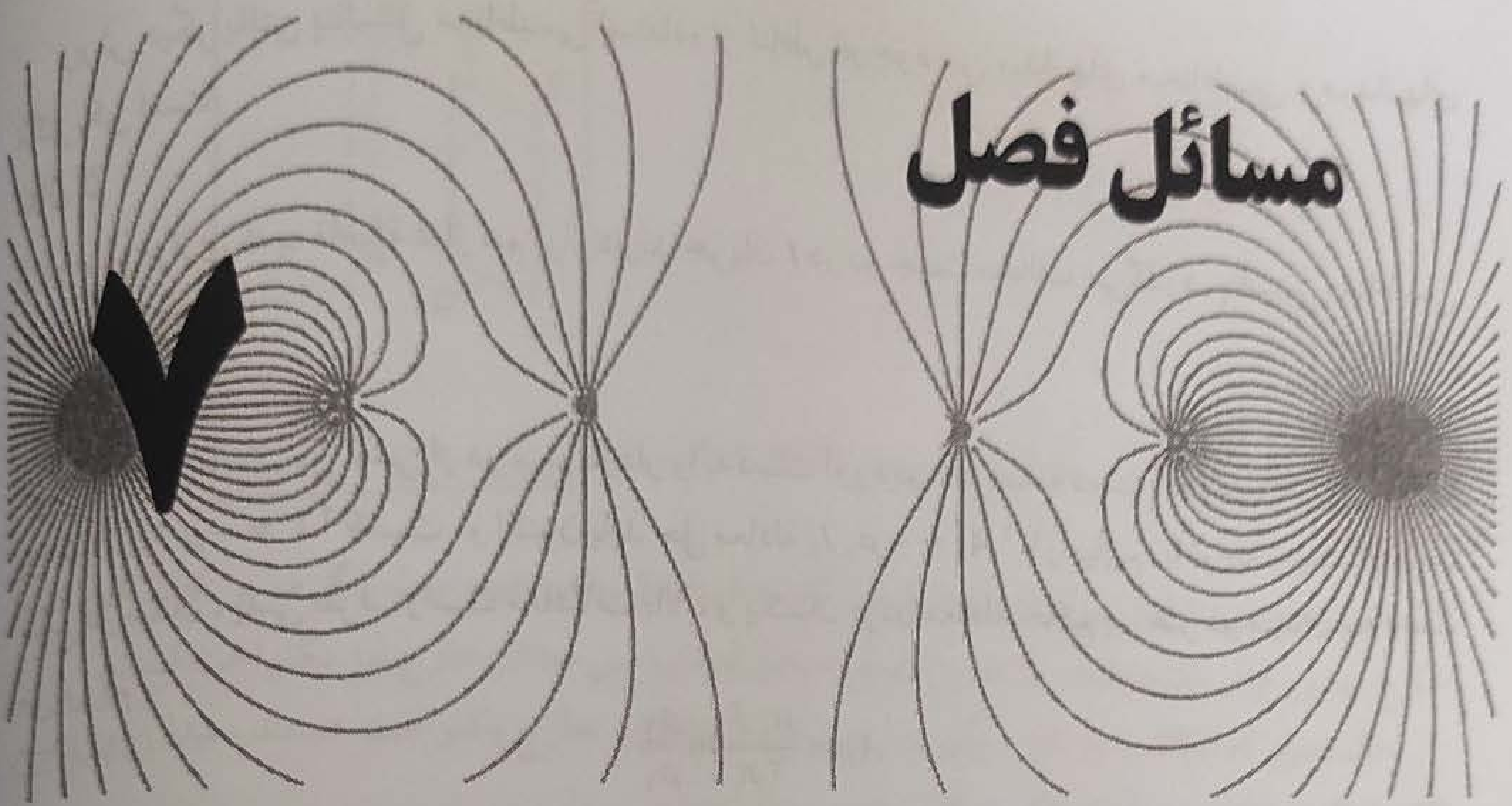
حل

در مسئلهٔ ۲-۵۷ پتانسیل ناشی از دو سیم باردار را به دست آوردیم. جواب به دست آمده در واقع حل معادلهٔ پواسون $\nabla^{2} V = -\rho / \varepsilon_{\circ}$ است، و اکنون باید حل معادلهٔ $\nabla^{2} A_z = -\mu_{\circ} J_z$ را بیابیم. با توجه به یکسان بودن منابع دو میدان، یعنی طرف راست معادلات بالا، و یکسان بودن معادلهٔ حاکم بر هر دو میدان به دست می‌آوریم

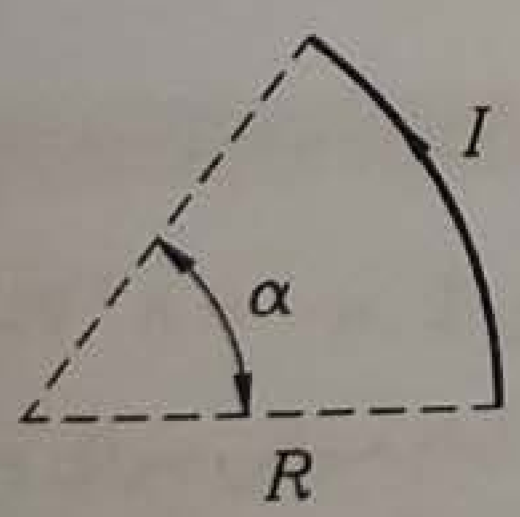
$$A_z = \frac{\mu_{\circ} I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

توجه کنید که طرف راست هر دو معادلهٔ دیفرانسیل ذکر شده در بالا اسکالر هستند، هر دو روی دو خط تعریف شده‌اند، یکی منفی و دیگری مثبت است و تنها در یک عدد ثابت $\mu_{\circ} / \varepsilon_{\circ}$ تفاوت دارند.

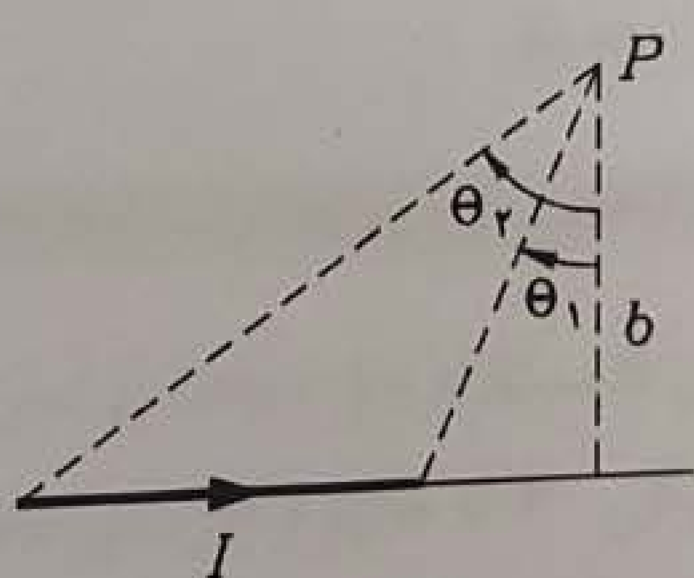
مسائل فصل ۷



۷-۱ میدان مغناطیسی ناشی از قطعه جریان I را در نقطهٔ P، برحسب زاویه‌های θ_1 و θ_2 به دست آورید. جواب را به ازای $\theta_1 = -90^\circ$، $\theta_2 = 90^\circ$ (که با یک سیم جریان بی‌نهایت متناظرست) به دست آورید.



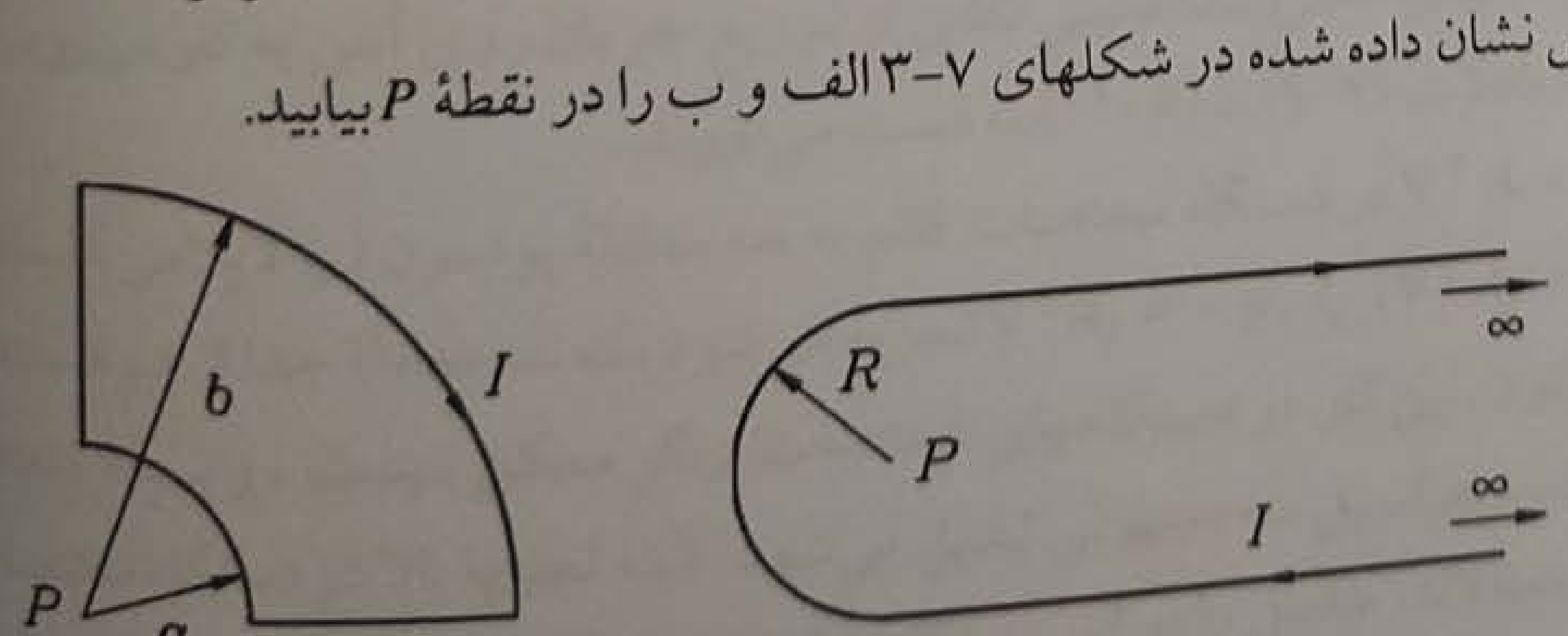
شکل ۷-۲



شکل ۷-۱

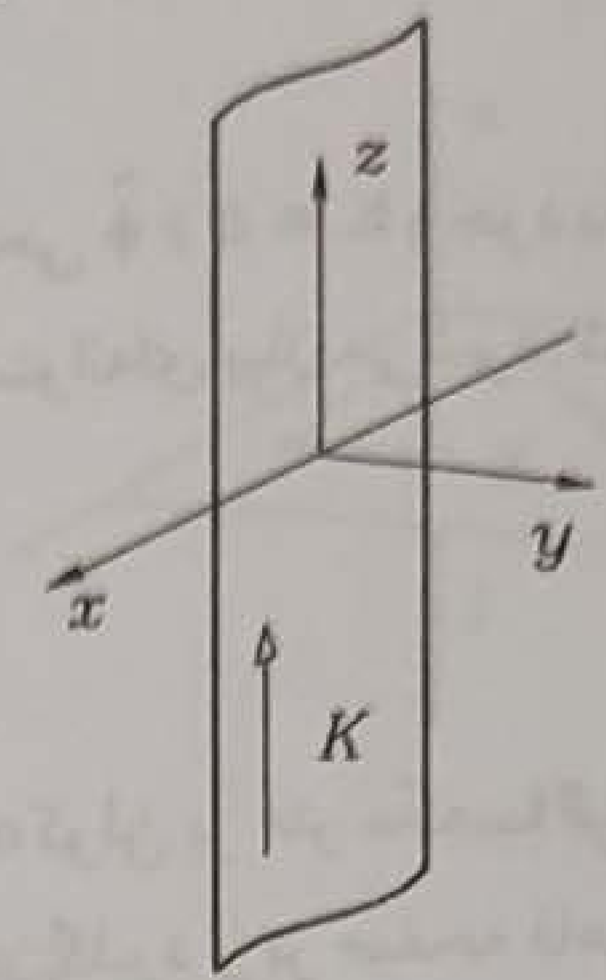
۷-۲ میدان مغناطیسی جریانی راکه از کمانی به شعاع R و زاویهٔ مرکزی α می‌گذرد، در مرکز کمان بیابید.

۷-۳ برای جریانهای خطی نشان داده شده در شکلهای ۷-۳ الف و ب را در نقطهٔ P بیابید.

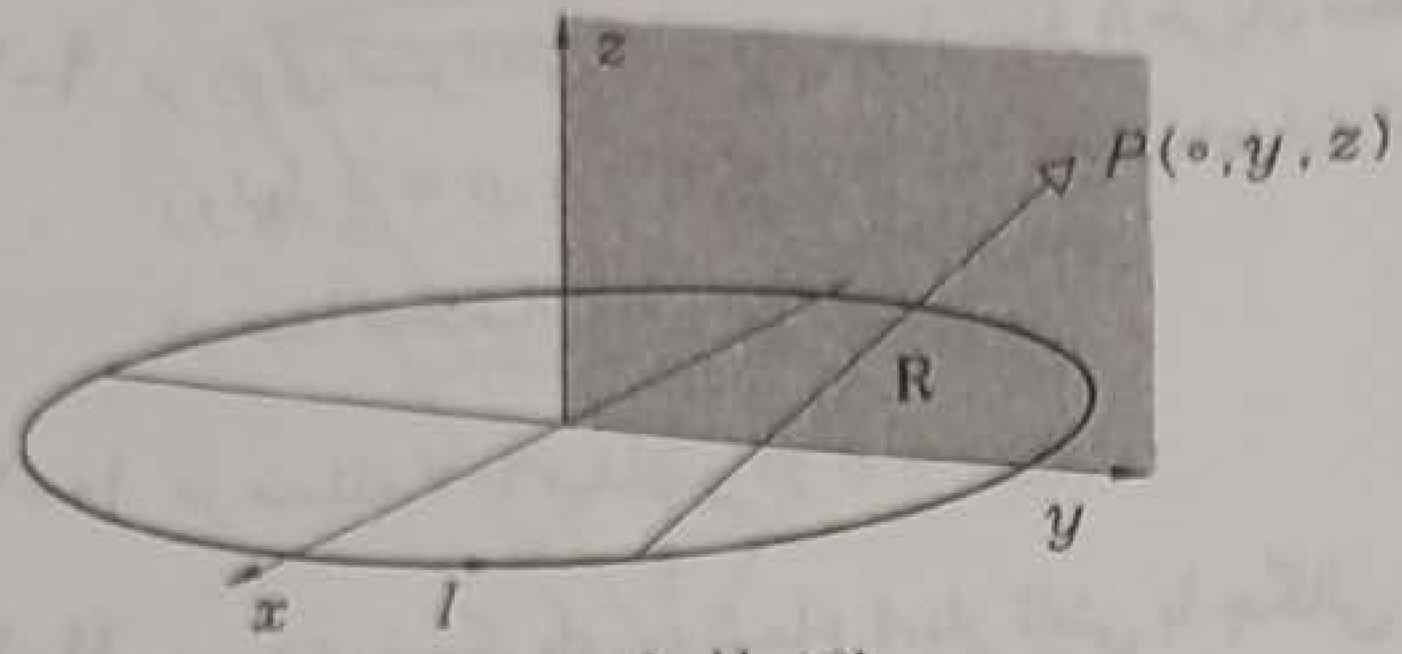


شکل ۷-۳

۷-۴ از روی نواری به عرض $2a$، که به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۴ در صفحهٔ $y = 0$ قرار داشته، و محور z از وسط آن می‌گذرد، جریان سطحی $\mathbf{K} = |x|\,\hat{\mathbf{z}}$ می‌گذرد. میدان $\mathbf{B}$ را در روی محور y به دست آورید.



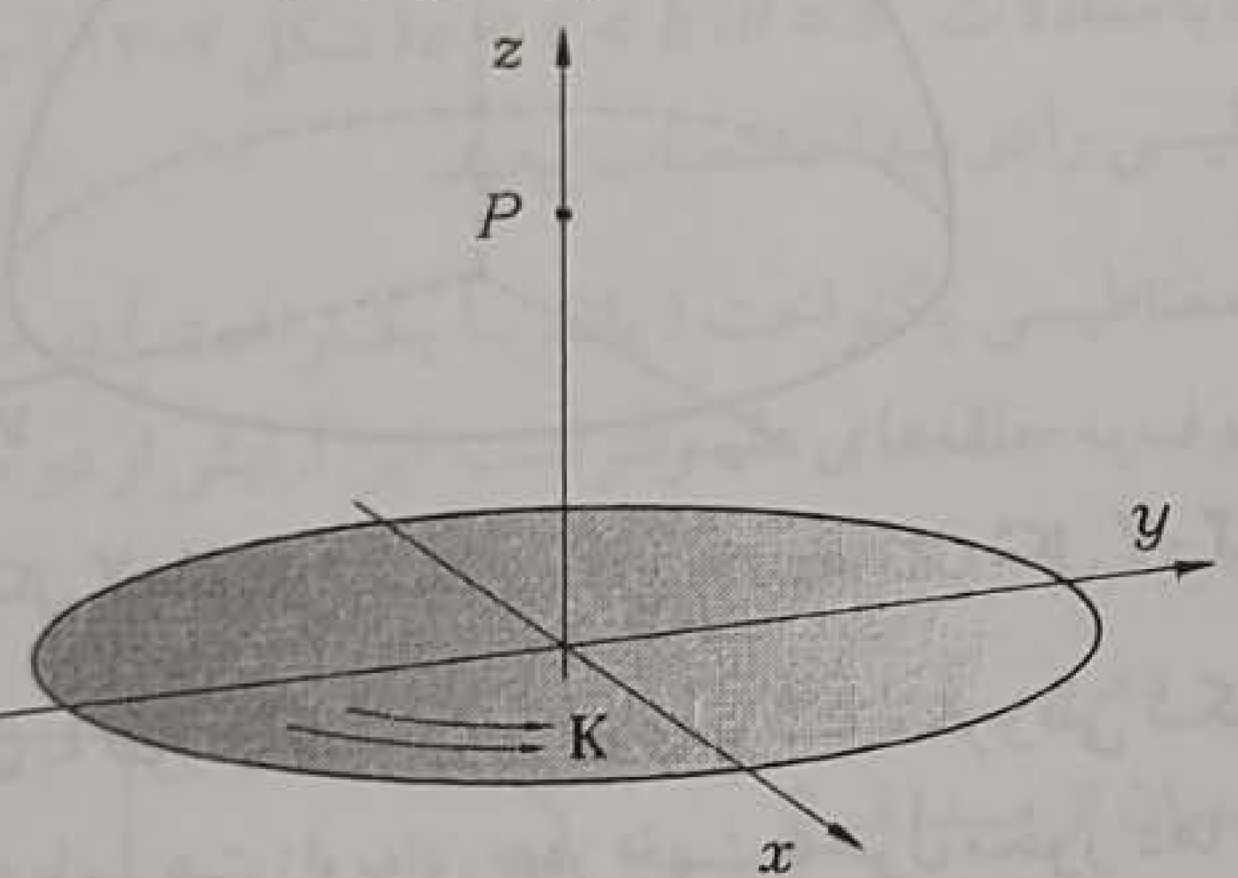
شکل ۷-۴



شکل ۷-۵

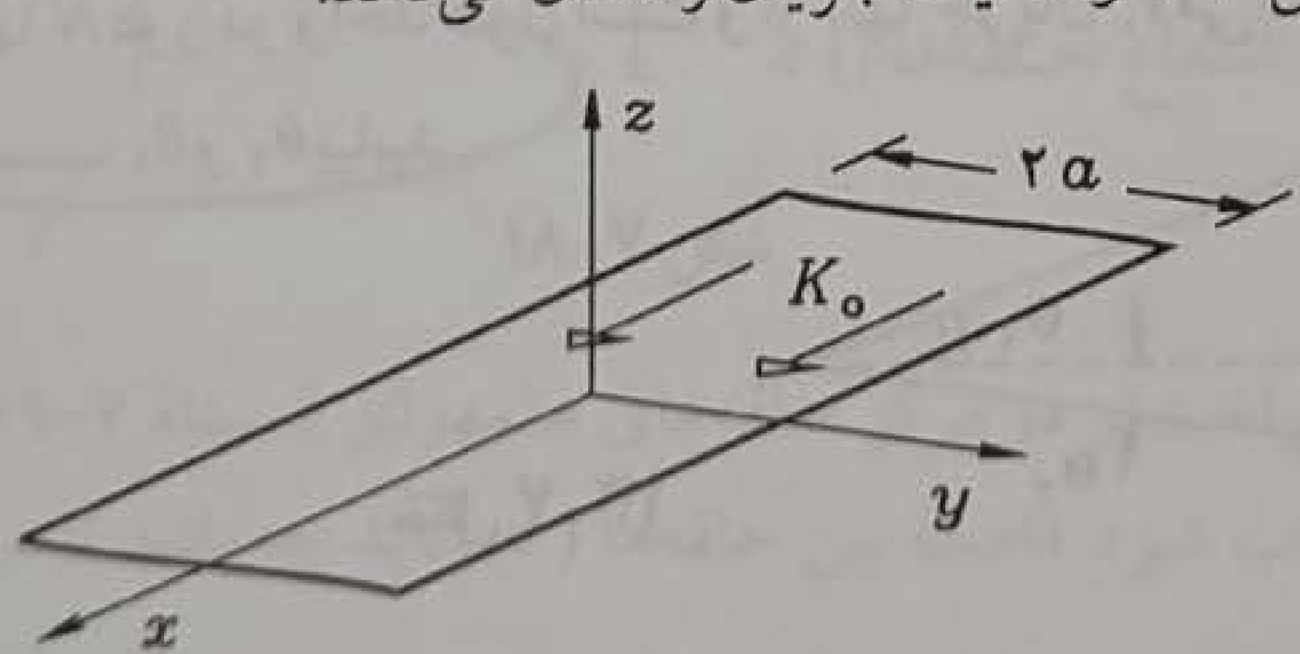
۷-۵ حلقه‌ای به شعاع a در صفحهٔ $z = \circ$ و به مرکز مبدا قرار دارد و از آن جریان I در جهت $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ می‌گذرد (شکل ۷-۵). نقطهٔ P در صفحهٔ yz قرار دارد. B_x را در این نقطه به دست آورید.

۷-۶ جریان سطحی $\mathbf{K} = ۵\rho\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ روی قرصی به شعاع $R = ۲$ وجود دارد. میدان را روی محور قرص (نقطهٔ P شکل ۷-۶) بیابید. کل جریان گذرنده از خط $\phi = \circ$ چقدر است؟



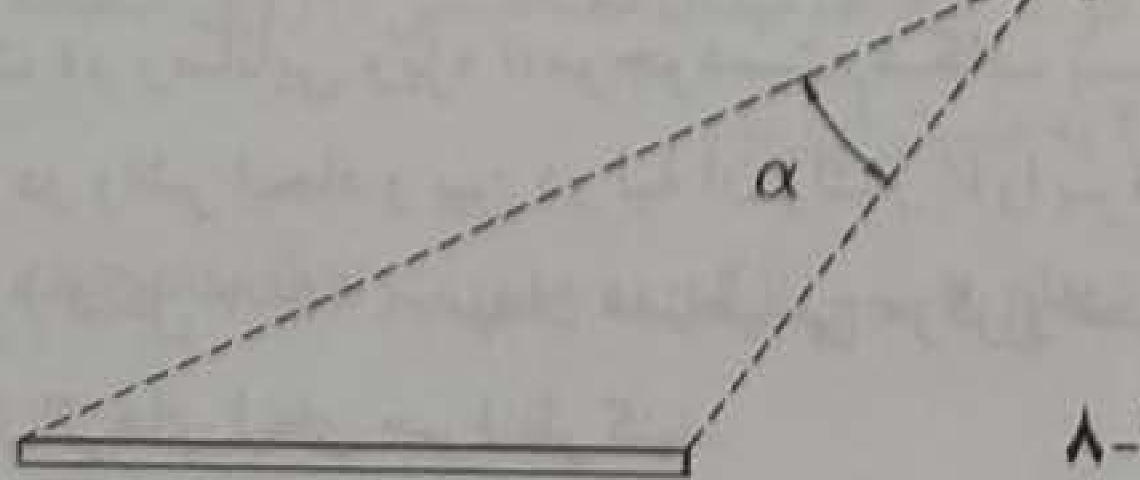
شکل ۷-۶

۷-۷ از روی نواری به عرض $۲a$، واقع در صفحهٔ $z = \circ$ جریان سطحی $K_\circ\hat{\mathbf{x}}$ می‌گذرد. نوار نسبت به محور x متقارن است. مؤلفهٔ z میدان مغناطیسی در نقطهٔ دلخواه P را بر حسب فاصلهٔ آن نقطه تا لبه‌های نوار به دست آورید. شکل ۷-۷ وضعیت جریان را نشان می‌دهد.



شکل ۷-۷

۷-۸ در مسئله ۷-۷ مولفهٔ y میدان مغناطیسی را بیابید. ساده‌ترین رابطه، با بیان B_y بر حسب زاویهٔ α نشان داده شده در شکل ۷-۸ به دست می‌آید.

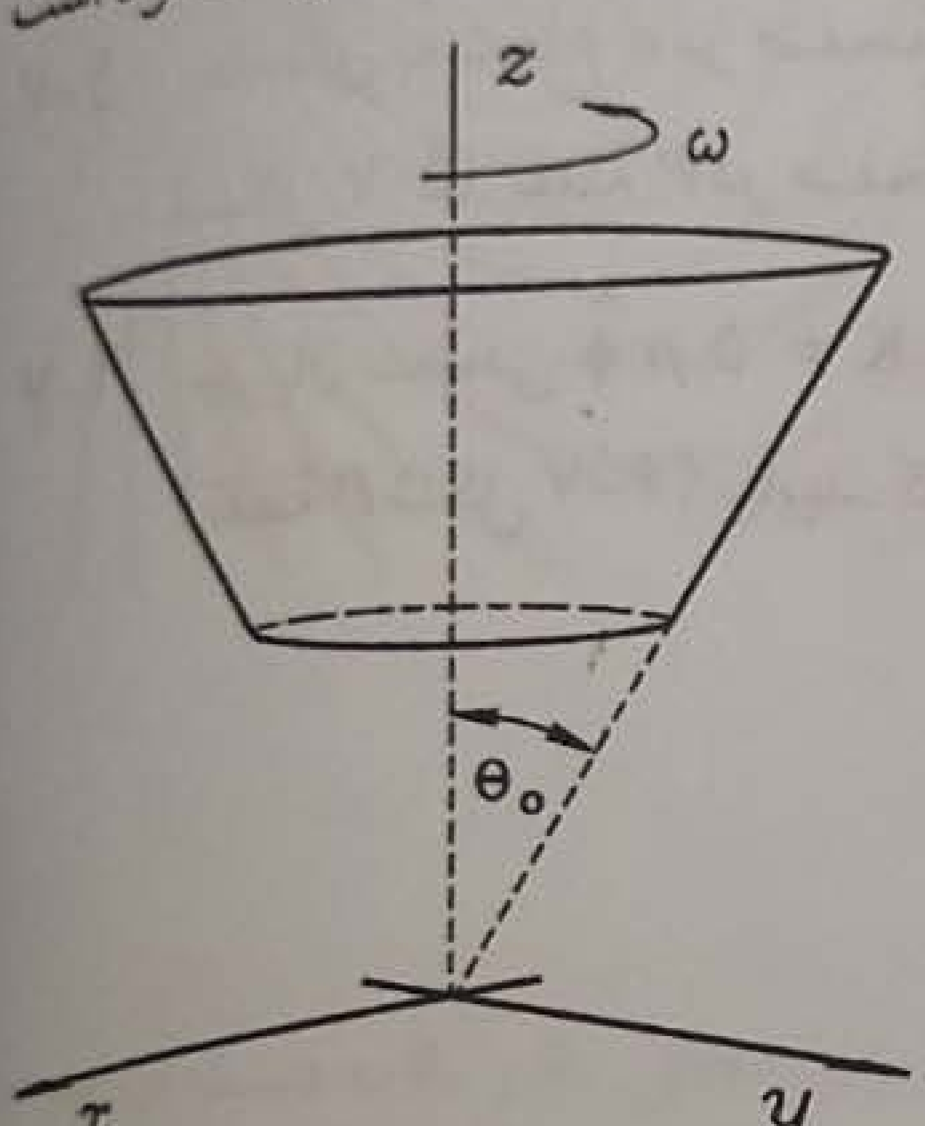


شکل ۷-۸

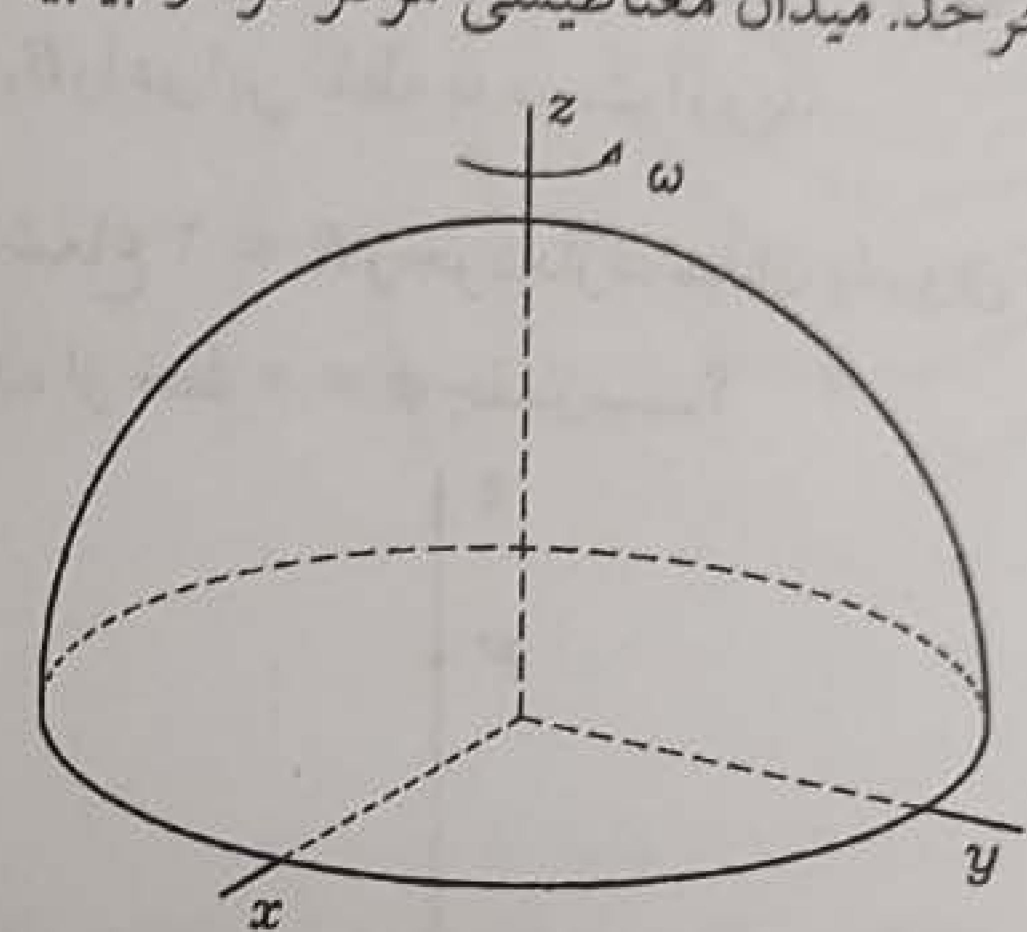
۷-۹ بر روی استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع h جریان سطحی $\mathbf{K} = b\,z\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ وجود دارد. سطح استوانه توسط روابط $\rho = a$، $0 < z < h$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان می‌شود. شدت میدان مغناطیسی را در مبدأ مختصات به دست آورید.

۷-۱۰ در مسئله ۷-۹ میدان را در $z = h$ بیابید.

۷-۱۱ بر روی نیمکره‌ای به شعاع A بار ثابتی با چگالی σ کولن بر متر مکعب قرار دارد. این نیمکره با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از مرکز کره می‌گذرد و بر صفحه قاعده نیمکره عمود است می‌چرخد. میدان مغناطیسی مرکز کره را بیابید.



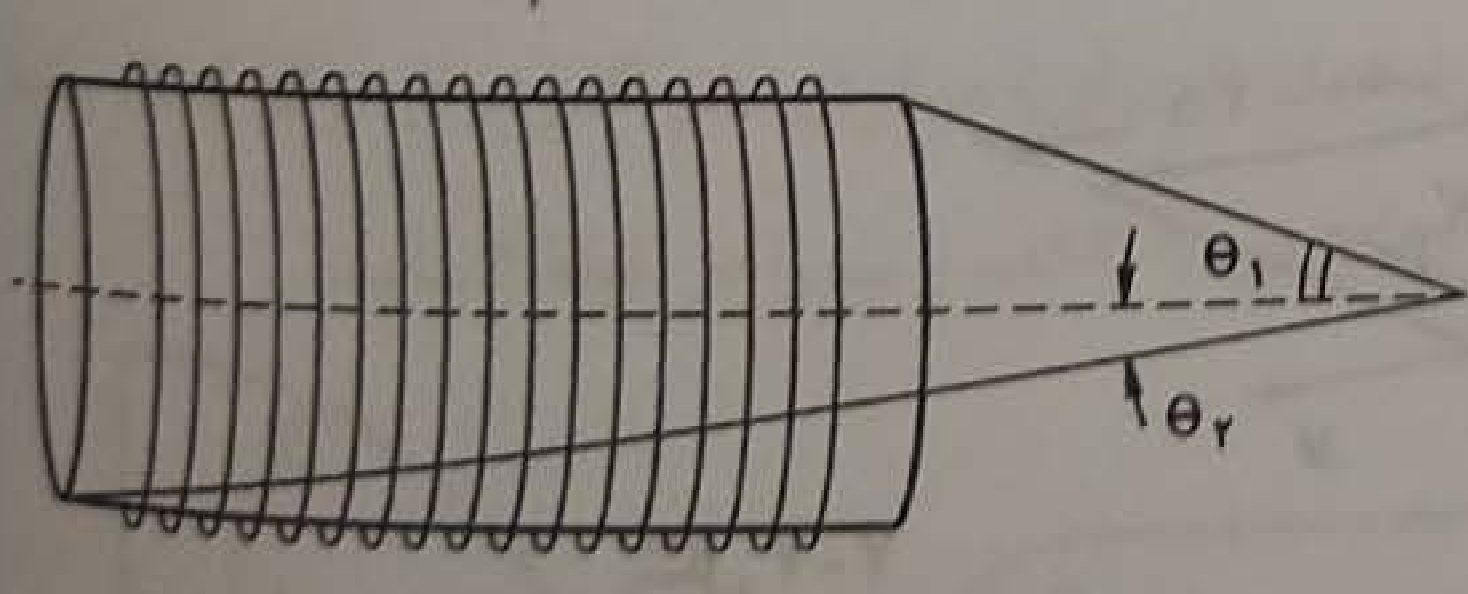
شکل ۷-۱۲



شکل ۷-۱۱

۷-۱۲ بار Q به طور یکنواخت بر روی پوسته مخروطی شکل $\theta = \theta_0$، $a \le r \le b$ توزیع شده است و پوسته با سرعت زاویه‌ای ω در جهت $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ حول محور zها می‌چرخد. چگالی جریان سطحی و میدان B در مبدا مختصات را بیابید.

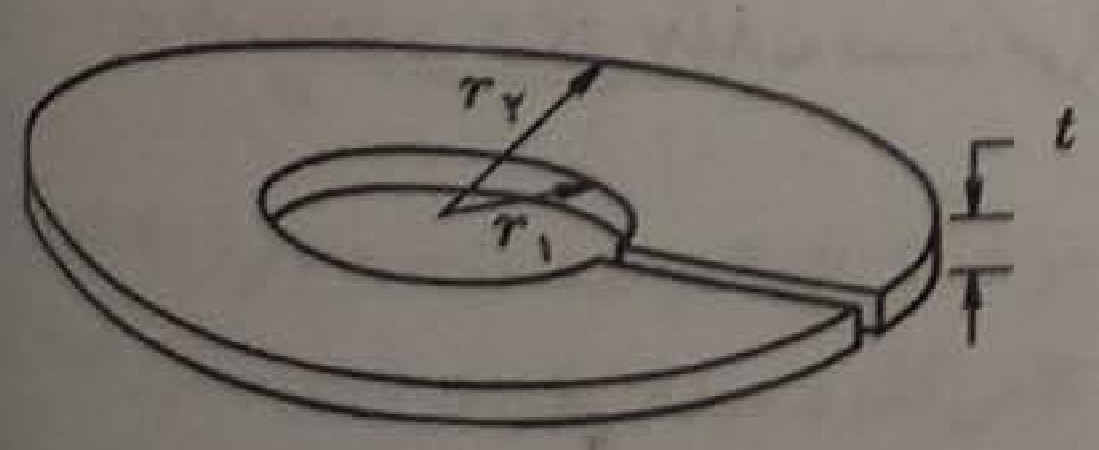
۷-۱۳ سیملولهٔ شکل ۷-۱۳ از سیمهای نازک و تنگ هم تشکیل شده است. شعاع استوانه R و تعداد دور سیمها N دور در واحد طول است و از آنها جریان I می‌گذرد. شدت میدان $\mathbf{B}$ را روی محور استوانه بر حسب θ_1 و θ_2 بیابید.



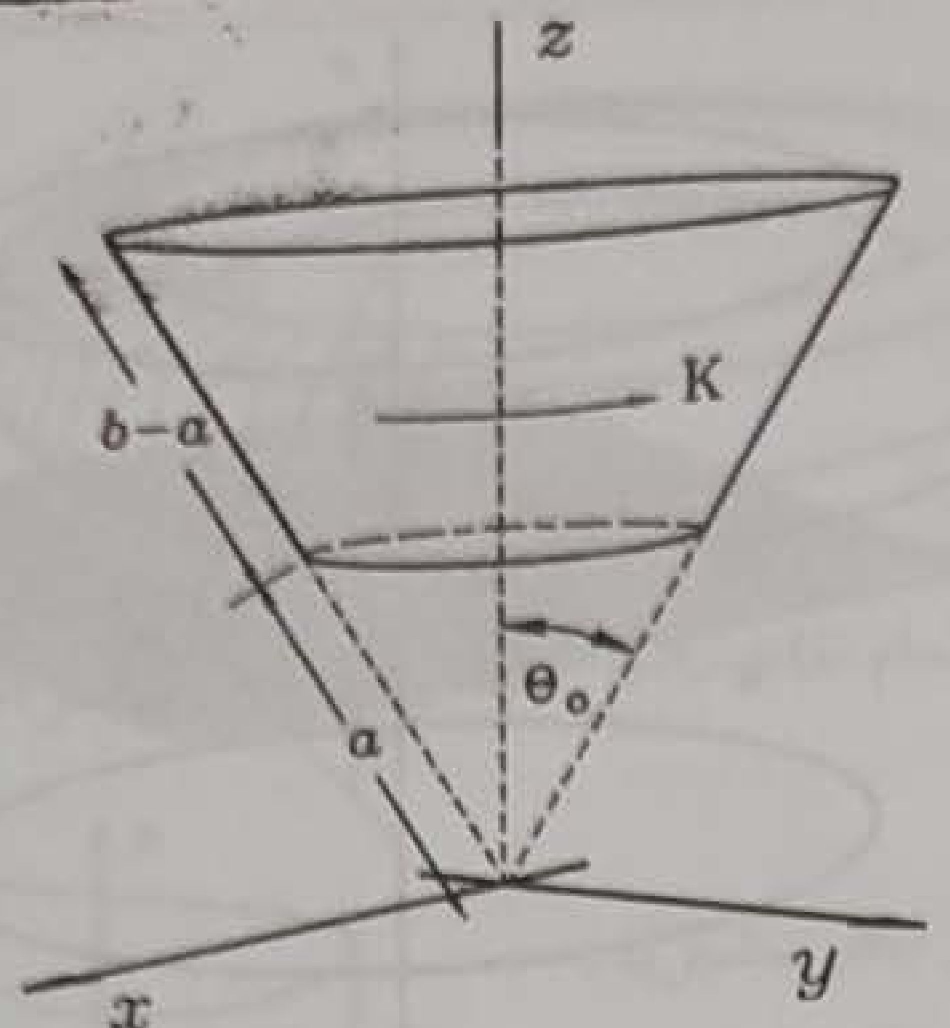
شکل ۷-۱۳

۷-۱۴ با استفاده از نتیجهٔ مسئله ۷-۱۳ میدان روی محور یک سیملولهٔ بی‌نهایت را بیابید.

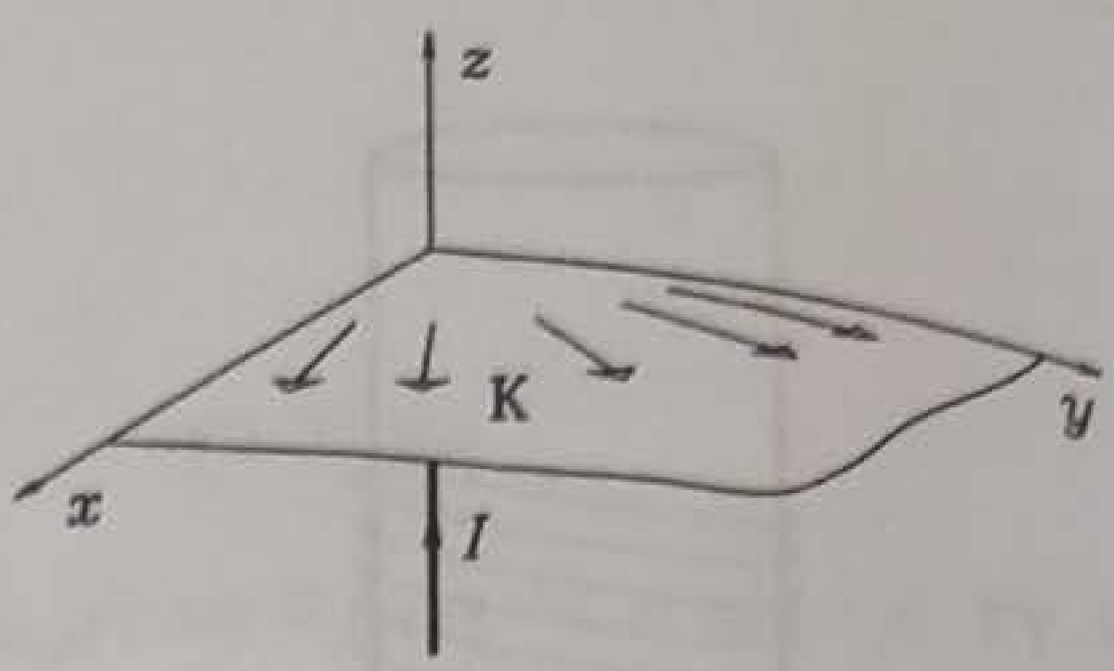
۷-۱۵ یک واشر به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2، ضخامت t و رسانایی ویژه σ موجودست. شکاف بسیار باریکی در واشر ایجاد و بین دو لبهٔ آن ولتاژ V را برقرار می‌کنیم (شکل ۷-۱۵). میدان مغناطیسی مرکز واشر را بیابید. از اثرهای لبه‌ای صرفنظر کنید.



شکل ۷-۱۵



شکل ۷-۱۷



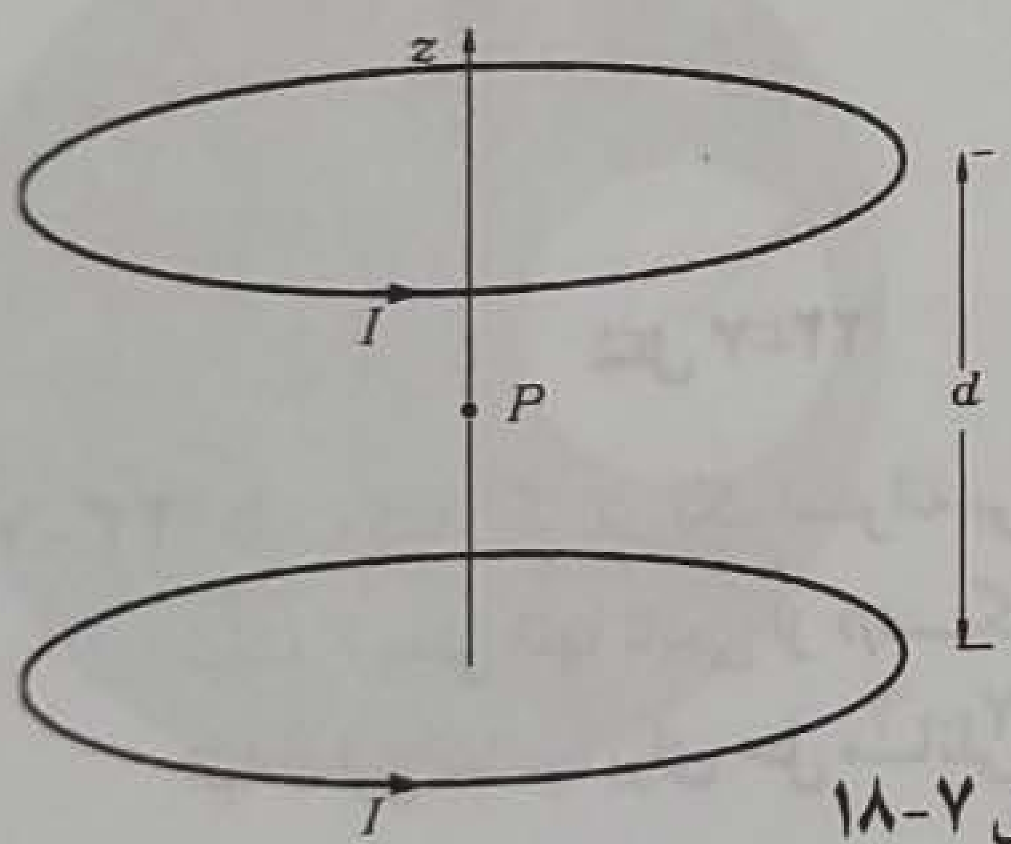
شکل ۷-۱۶

۷-۱۶ جریان I از سیم نازکی روی بخش منفی محور z ها در جهت مثبت z می‌گذرد و در مبدا روی ربع صفحهٔ $z = 0$، $x \geq 0$، $y \geq 0$ به صورت شعاعی و یکنواخت پخش می‌شود. چگالی جریان سطحی **K** را یافته، میدان **B** را روی بخش مثبت محور z به دست آورید.

۷-۱۷ روی مخروط ناقص توصیف شده با معادلات $\theta = \theta_0$، $a < r < b$ (شکل ۷-۱۷) جریان سطحی $\mathbf{K} = K_0 r \hat{\boldsymbol{\phi}}$ می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در مبدا مختصات بیابید.

۷-۱۸ یکی از روشهای ایجاد میدانهای مغناطیسی یکنواخت (یاتقریباً یکنواخت) در محیطهای باز استفاده از آرایش شکل ۷-۱۸، معروف به **حلقه‌های هلمولتز** است. این آرایش از دو حلقهٔ هم اندازه که محور مشترکی دارند و از آنها جریانی در یک جهت می‌گذرد تشکیل شده است.

محور مشترک دو حلقه را محور z فرض کنید، به نحوی که دو حلقه به فاصله‌ای یکسان از مبدا قرار داشته باشند. میدان را روی محور z به دست آورید و نشان دهید که در مبدا مختصات $\partial \mathbf{B} / \partial z = 0$ نقطهٔ P یعنی **B** در حوالی این نقطه تغییر چندانی ندارد و میدان تقریباً یکنواخت است. شعاع حلقه‌ها را a فرض کنید.

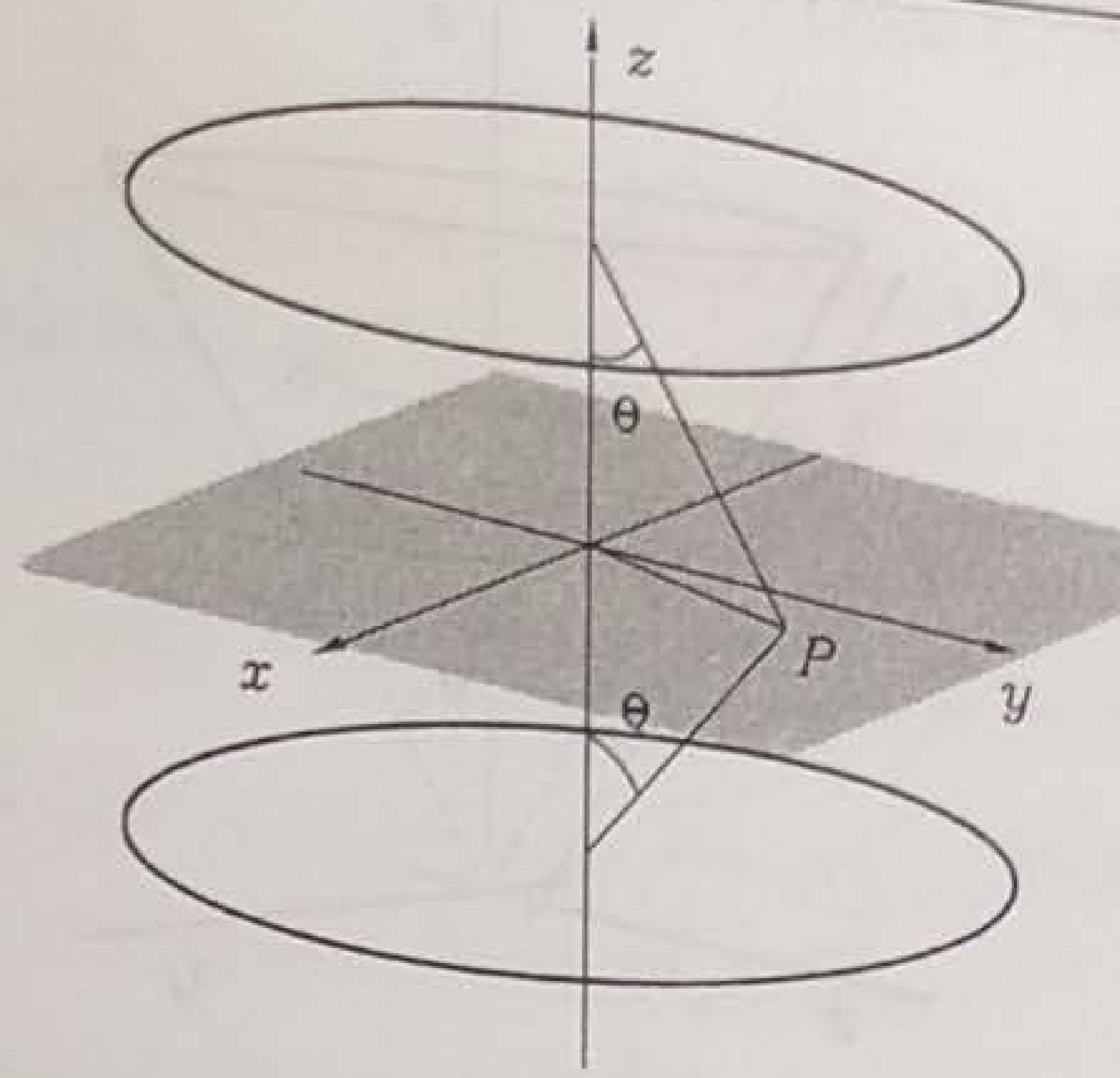


شکل ۷-۱۸

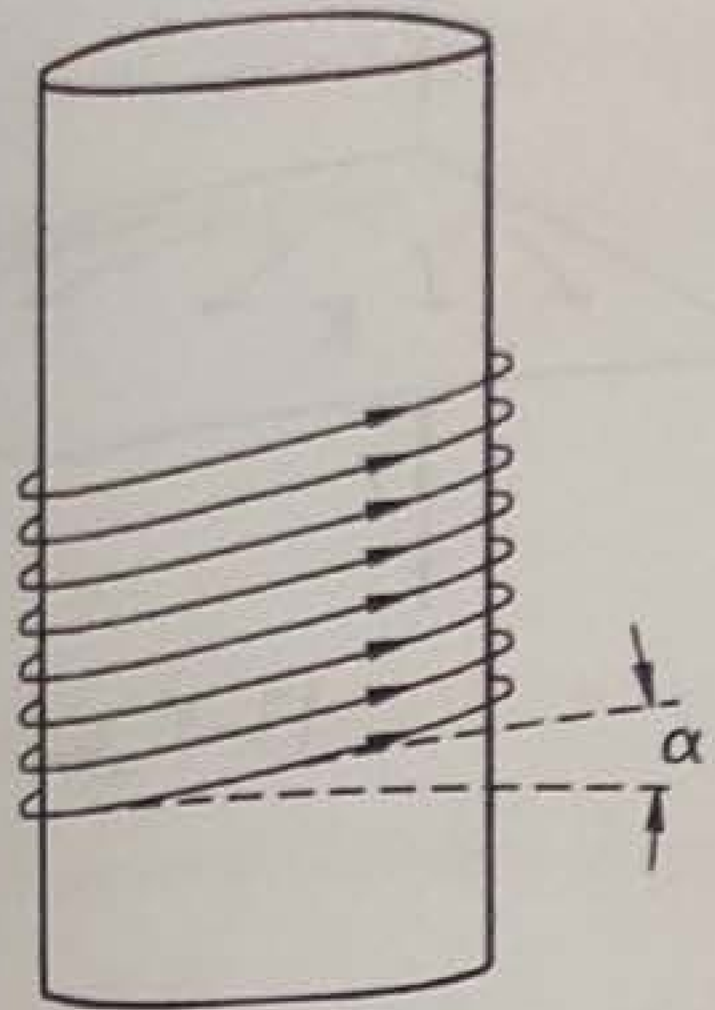
۷-۱۹ برای به دست آوردن میدان یکنواخت‌تر در مرکز حلقه‌های هلمهولتز (مسئلهٔ ۷-۱۹) باید فاصلهٔ بین حلقه‌ها به نحو مناسبی انتخاب شود. فاصلهٔ بین حلقه‌ها (d) باید چه باشد تا در $z = 0$ داشته باشیم $\partial^2 \mathbf{B} / \partial z^2 = 0$ ؟

۷-۲۰ دو قرص به شعاع a به موازات صفحهٔ $z = 0$ قرار دارند، یکی در $z = d$ و یکی در $z = -d$. بر روی هر دو قرص جریان $K = K_0 \hat{\boldsymbol{\phi}}$ وجود دارد. اگر $a >> d$، میدان مغناطیسی را روی صفحهٔ $z = 0$ بر حسب زاویهٔ θ نشان داده شده در شکل ۷-۲۰ به دست آورید.

۷-۲۱ روی استوانه‌ای بسیار بلند (بی‌نهایت) به شعاع a سیم نازکی به صورت نشان داده شده در شکل



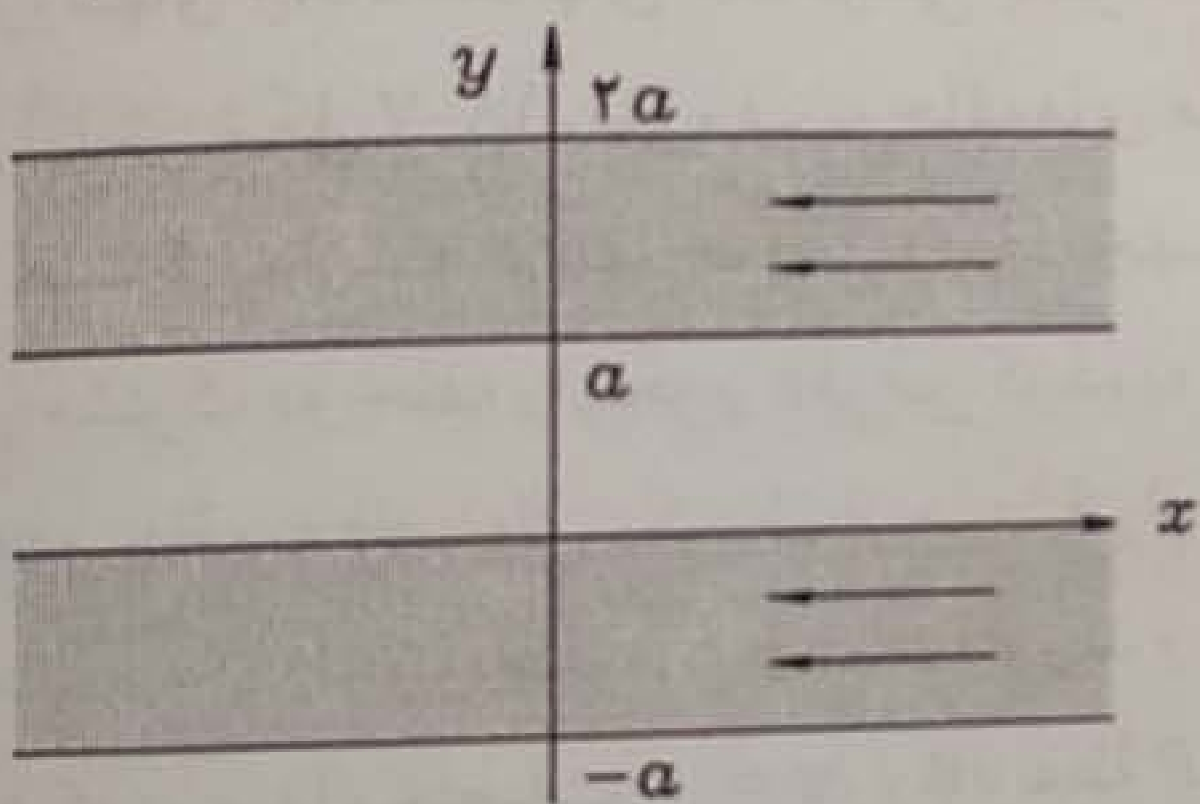
شکل ۷-۲۰



شکل ۷-۲۱

۷-۲۱ پیچیده شده است. سیمها کاملاً کنار هم هستند و دورها با افق زاویهٔ α می‌سازند. اگر تعداد دور در واحد طول n باشد و از آنها جریان I بگذرد، چگالی جریان سطحی معادل و چگالی شار مغناطیسی داخل و خارج استوانه را بیابید.

۷-۲۲ در نواحی $a < y < ۲a$ و $-a < y < ۰$ جریانی با چگالی $\mathbf{J} = -۲J_{۰}\,\hat{\mathbf{x}}$ داریم. میدان مغناطیسی را در تمام نقاط فضا بیابید.



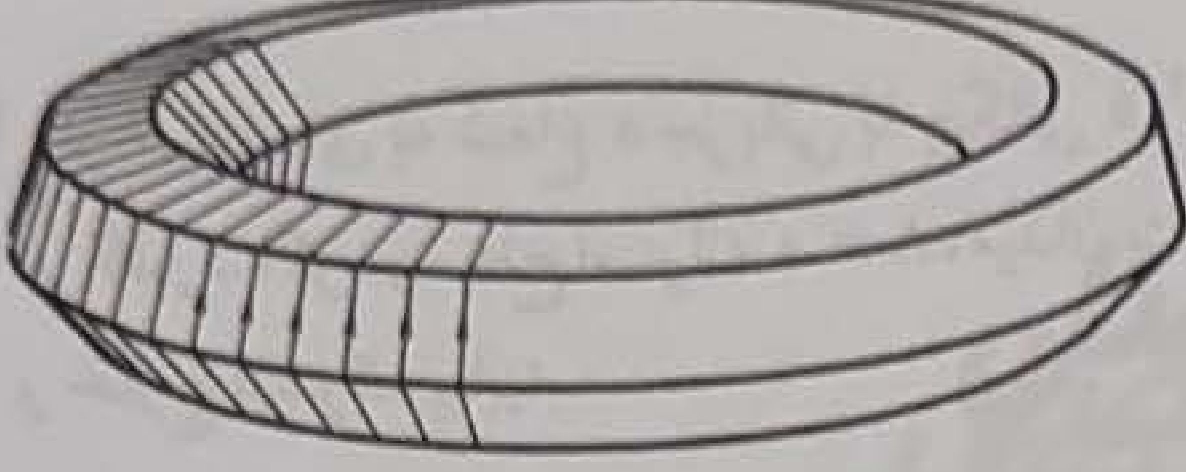
شکل ۷-۲۲

۷-۲۳ ثابت کنید اگر در یک استوانه بی‌نهایت جریان در جهت z باشد و چگالی جریان تابعی از z و ϕ نباشد (یعنی تنها تابعی از ρ دستگاه استوانه‌ای باشد) میدان مغناطیسی تنها در جهت $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ مؤلفه دارد. اثبات این مطلب برای حل مسائلی این گونه به کمک قانون آمپر ضروری است.

۷-۲۴ از استوانه‌ای به شعاع a جریانی با چگالی $\mathbf{J} = A\,e^{-k\rho}\,\hat{\mathbf{z}}$ می‌گذرد. محور استوانه روی محور zها قرار دارد. $\mathbf{B}$ را در داخل و خارج استوانه بیابید.

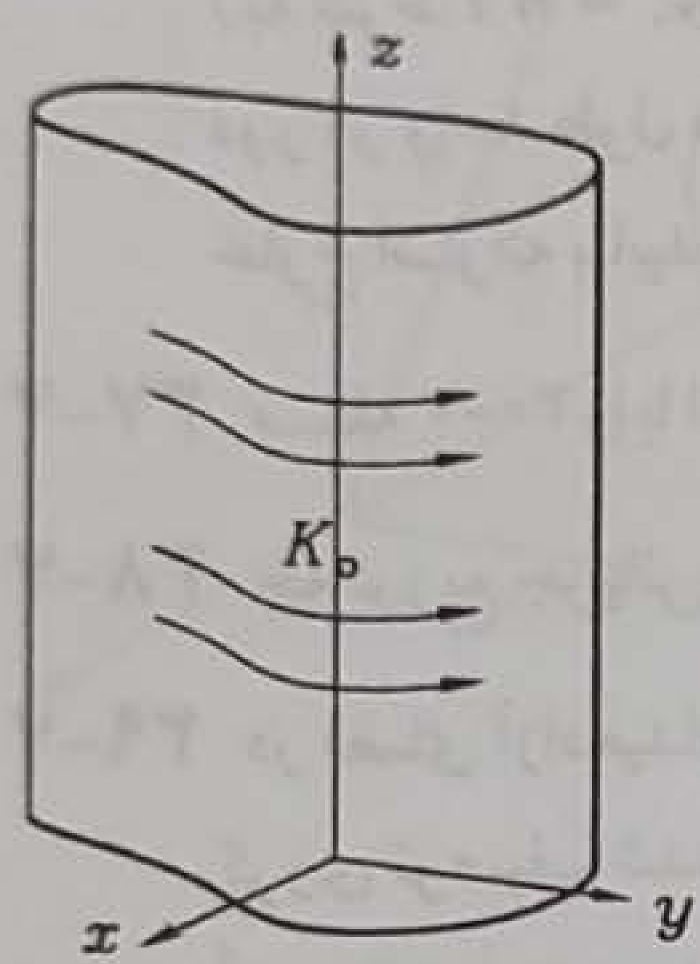
۷-۲۵ از استوانه‌ای به شعاع a جریانی با چگالی $J_{۰}\,(\rho - a)^{۲}\,\hat{\mathbf{z}}$ می‌گذرد. میدان $\mathbf{B}$ را داخل و خارج استوانه بیابید.

۷-۲۶ روی چنبره‌ای که از گردش سطحی با شکل دلخواه حول محور z به وجود آمده است، n دور سیم پیچیده‌ایم. سیمها بسیار نازک‌اند و تنگ هم پیچیده شده‌اند و از آنها جریان I می‌گذرد. بیان ریاضی جریان خیلی مشکل است ولی مطمئناً در جهت $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ مختصات استوانه‌ای مولفه ندارد. میدان مغناطیسی را در داخل و خارج چنبره بیابید.



شکل ۷-۲۶

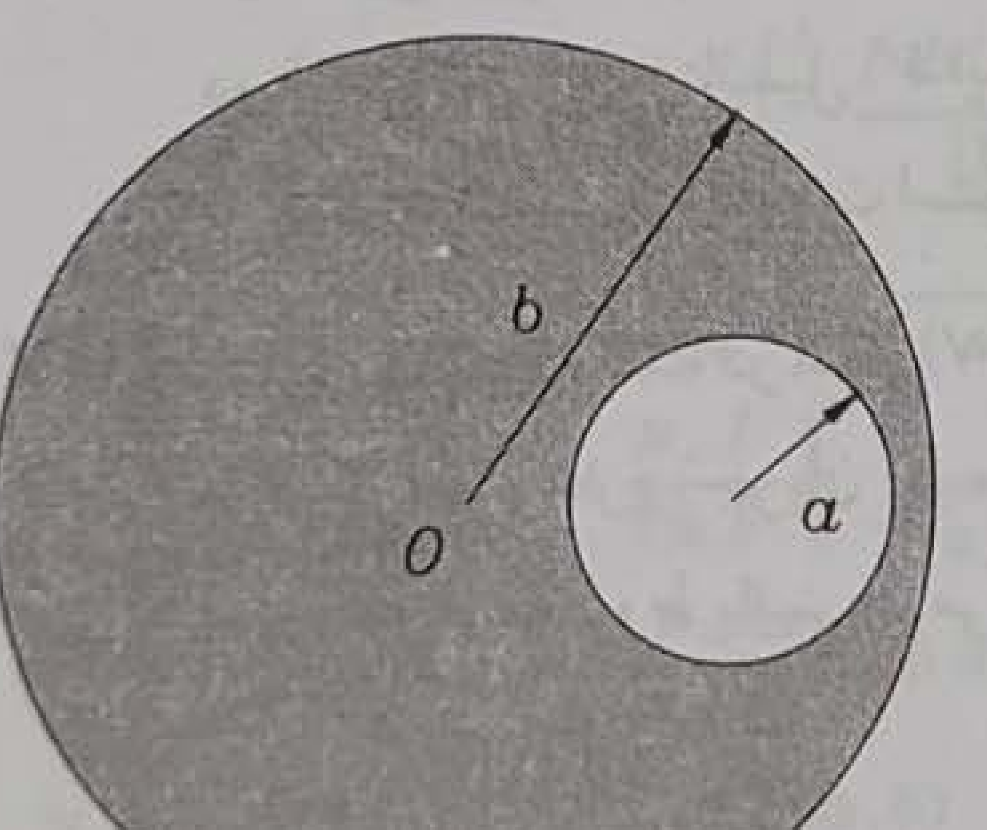
۷-۲۷ ثابت کنید در یک سیملولهٔ بلند (بی‌نهایت) در تمام نقاط داخل سیملوله میدان یکنواخت و در نقاط خارج سیملوله میدان صفرست.



شکل ۷-۲۸

۷-۲۸ استوانهٔ بسیار بلندی با سطح مقطعی دلخواه در نظر بگیرید. جریان روی سطح این استوانه مؤلفه z ندارد و بقیهٔ مولفه‌هایش نیز تابعی از z نیستند. این جریان می‌تواند از پیچیده شدن سیم نازکی با تعداد دور زیاد و کنار هم به وجود آمده باشد. میدان داخل و خارج استوانه را بیابید.

۷-۲۹ در استوانهٔ بلندی به شعاع R جریان حجمی $\mathbf{J} = K_o \hat{\boldsymbol{\phi}}$ وجود دارد. میدان داخل و خارج استوانه را بیابید.



شکل ۷-۳۰

۷-۳۰ در استوانه‌ای به شعاع b، حفره‌ای استوانه‌ای به شعاع a ایجاد شده است. محور حفره با محور استوانه موازی است، شکل ۷-۳۰ مقطع استوانه را نشان می‌دهد. اگر از استوانه جریانی با چگالی یکنواخت $\mathbf{J}$ در جهت محور بگذرد، میدان مغناطیسی در حفره چقدرست؟ استوانه را بسیار بلند فرض کنید.

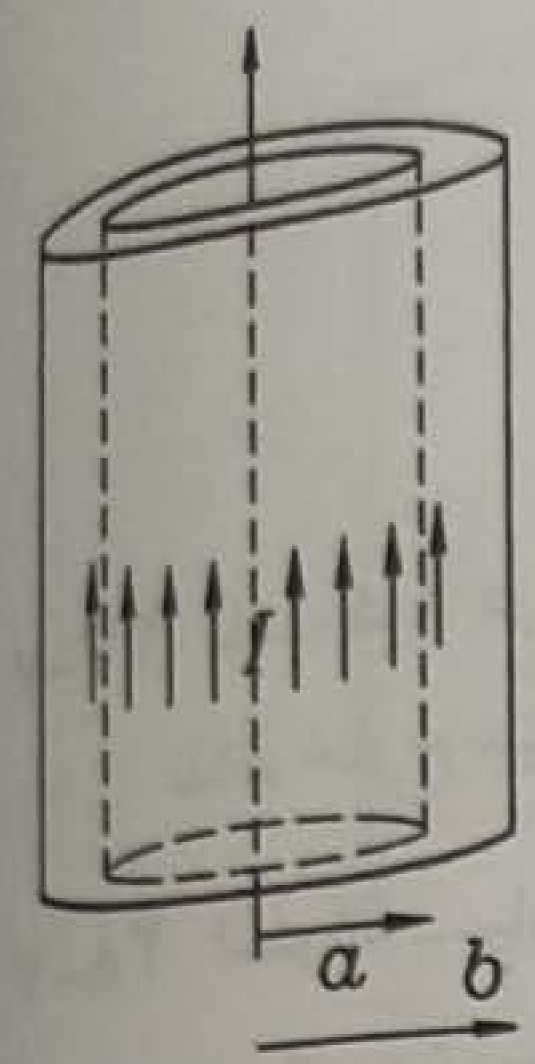
۷-۳۱ کدام یک از میدانهای زیر می‌توانند یک میدان مغناطیسی باشند. برای هر کدام $\mathbf{J}$ را بیابید.

(الف) $\mathbf{B}_1 = a\, r\, \hat{\mathbf{r}}$ (ب) $\mathbf{B}_2 = a\,(x\,\hat{\mathbf{y}} - y\,\hat{\mathbf{x}})$ (ج) $\mathbf{B}_3 = a\,(x\,\hat{\mathbf{x}} - y\,\hat{\mathbf{y}})$ (د) $\mathbf{B}_4 = a\,\rho\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$

۷-۳۲ از استوانه‌ای به شعاع a که محور آن بر روی محور zها منطبق است جریان I با توزیع یکنواخت و در جهت $z+$ می‌گذرد. اگر A روی سطح استوانه صفر باشد، A داخل و خارج استوانه را بیابید. استوانه را بسیار بلند فرض کنید.

۷-۳۳ روی صفحهٔ $z = 0$ چگالی جریان سطحی $K_o \hat{\mathbf{x}}$ وجود دارد. پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ را در $z > 0$ بیابید.

۷-۳۴ جریان I به طور یکنواخت از پوسته‌ای استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b می‌گذرد (شکل ۷-۳۴ را ببینید). پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را بیابید.



شکل ۷-۳۴

۷-۳۵ از استوانه‌ای به شعاع a جریانی با چگالی $J_\circ\,(\rho - a^2)\,/\,a^2\,\hat{\mathbf{z}}$ می‌گذرد. اگر در سطح استوانه $\mathbf{A} = \circ$، میدان پتانسیل $\mathbf{A}$ را در داخل و خارج استوانه بیابید.

۷-۳۶ از سطح استوانه‌ای به شعاع R جریانی با چگالی $K_\circ\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ می‌گذرد. (به شرط $K_\circ = n\,I$، این جریان با سیملوله‌ای دارای جریان I و n دور در واحد طول معادل است). پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ را در داخل و خارج استوانه بیابید.

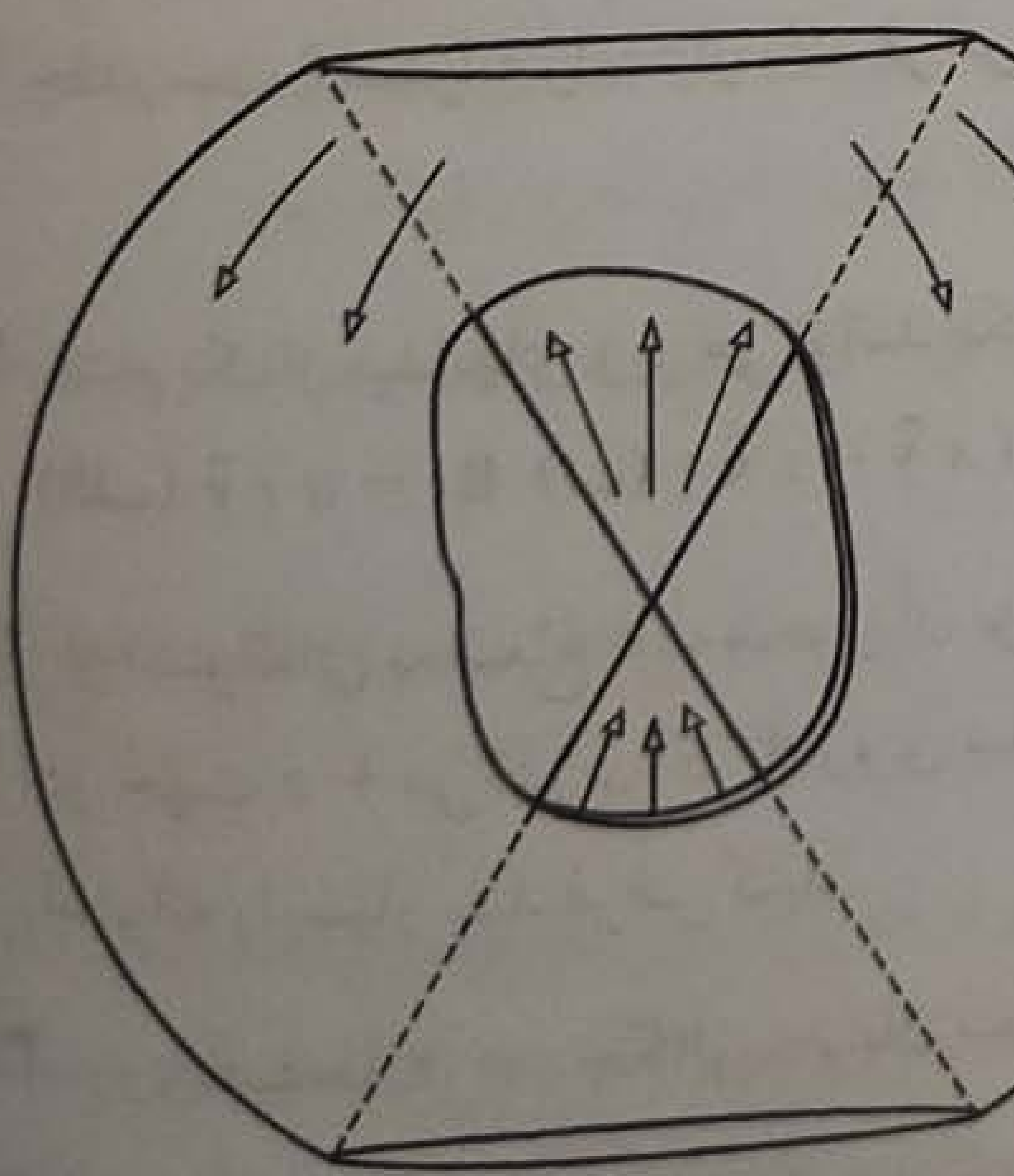
۷-۳۷ مسئله ۷-۳۰ را با استفاده از بردار پتانسیل مغناطیسی $\mathbf{A}$ حل کنید.

۷-۳۸ چه توزیع جریانی پتانسیل برداری $\mathbf{A} = K\hat{\boldsymbol{\phi}}$ را ایجاد می‌کند؟

۷-۳۹ در فضای آزاد میدان مغناطیسی به صورت $\mathbf{B} = r\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ داده شده است. جریانی را که از عرقچین کروی توصیف شده با معادلات $r = 1$، $\circ < \phi < 2\pi$، $\circ < \theta < \pi\,/\,6$ می‌گذرد به دو طریق به دست آورید.

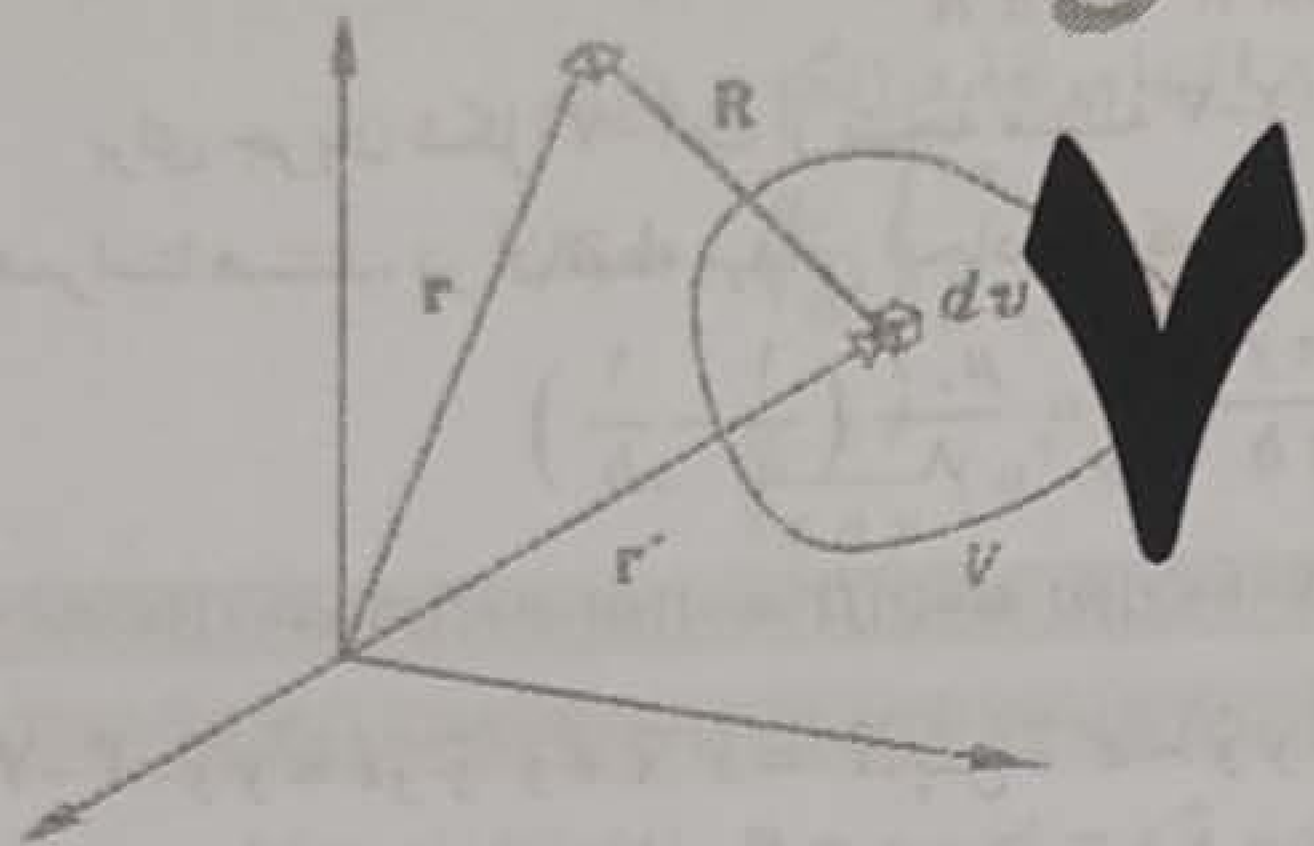
۷-۴۰ رسانایی ویژهٔ استوانه‌ای به ارتفاع l و شعاع a تابعی از فاصلهٔ شعاعی تا محور استوانه است. بین دو قاعده اختلاف پتانسیل V ایجاد شده و میدان مغناطیسی ناشی از جریان گذرنده از استوانه $\mathbf{B} = k\rho^2\hat{\boldsymbol{\phi}}$ است. مقاومت استوانه و رسانایی ویژهٔ نقاط مختلف آن را بیابید.

۷-۴۱ سازهٔ نشان داده شده در شکل ۷-۴۱ از یک مخروط و یک کره تشکیل شده است. راس مخروط در مرکز کره قرار دارد. جریان I از مخروط بالایی به سمت کره می‌رود، از روی پوستهٔ کروی به پایین می‌رود و از مخروط پایینی برمی‌گردد. میدان مغناطیسی را در داخل و خارج این سازه بیابید.



شکل ۷-۴۱

حل مسایل فصل ۷



۱-۷ دستگاه مختصات را به صورت نشان داده شده در شکل ح ۷-۱ برمی‌گزینیم. در این صورت

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (a\,\hat{\mathbf{x}} + b\,\hat{\mathbf{y}}) - x'\,\hat{\mathbf{x}} = (a - x')\,\hat{\mathbf{x}} + b\,\hat{\mathbf{y}}$$

بنابراین

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l \frac{I\,dx'\,\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

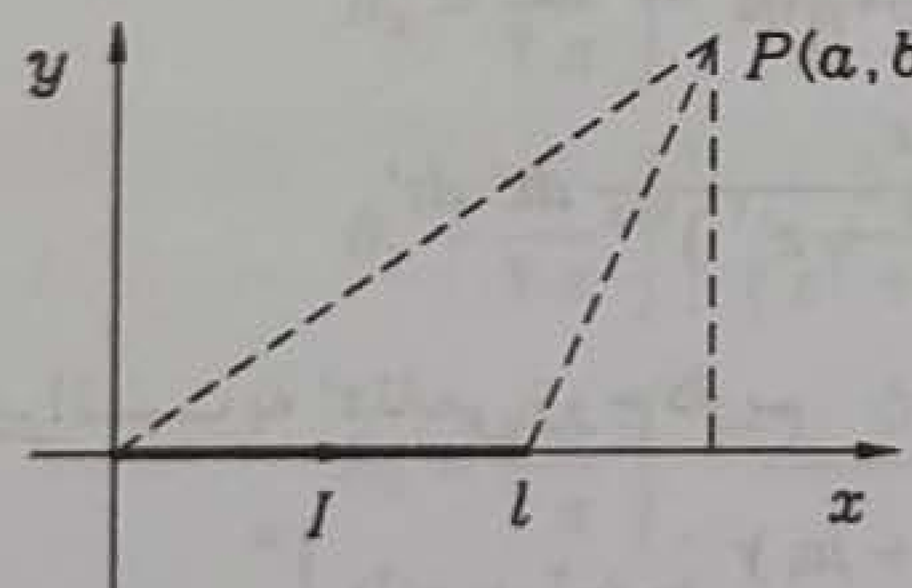
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l \frac{b\,I\,dx'\,\hat{\mathbf{z}}}{[(a-x')^2 + b^2]^{1/5}} = \frac{\mu_0 I\,\hat{\mathbf{z}}}{4\pi b}\,\frac{(x'-a)}{\sqrt{(a-x')^2 + b^2}}\Bigg|_0^l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left[\frac{l-a}{\sqrt{(a-l)^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\,\hat{\mathbf{z}}$$

به ازای $\theta_2 = 90^\circ$، $\theta_1 = -90^\circ$ داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\,\hat{\mathbf{z}}$$



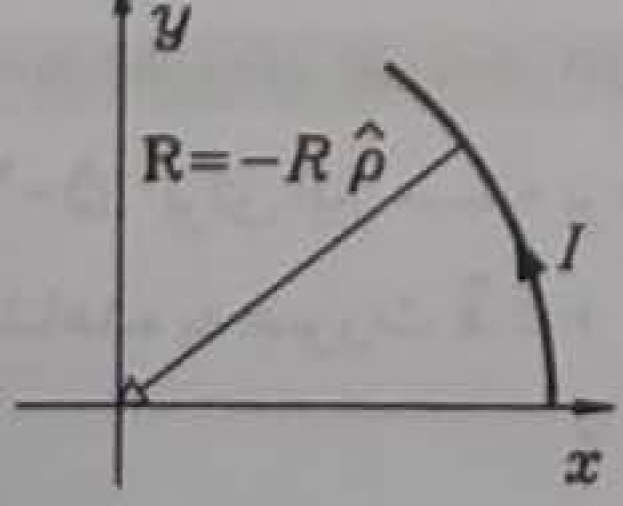
شکل ح ۷-۱

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۷ با انتخاب دستگاه مختصاتی به صورت نشان داده شده در شکل ح ۷-۲ داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}' \times (-R\,\hat{\boldsymbol{\rho}}')}{R^3}\,R\,d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^\alpha \hat{\mathbf{z}}\,d\phi = \frac{\mu_0 I\alpha}{4\pi R}\,\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۷-۲

۷-۳ برای جریان شکل ۷-۱ الف از نتایج مسائل ۷-۱ و ۷-۲ استفاده می‌کنیم. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_۱ + \mathbf{B}_۲ + \mathbf{B}_۳$ که در آن $B_۱$ میدان ناشی از جریان نیم خط بالایی، $B_۲$ میدان ناشی نیمدایره، و $B_۳$ میدان ناشی از جریان نیم خط پایینی است. هر سه میدان در جهت عمود بر کاغذ و همراستا هستند، پس

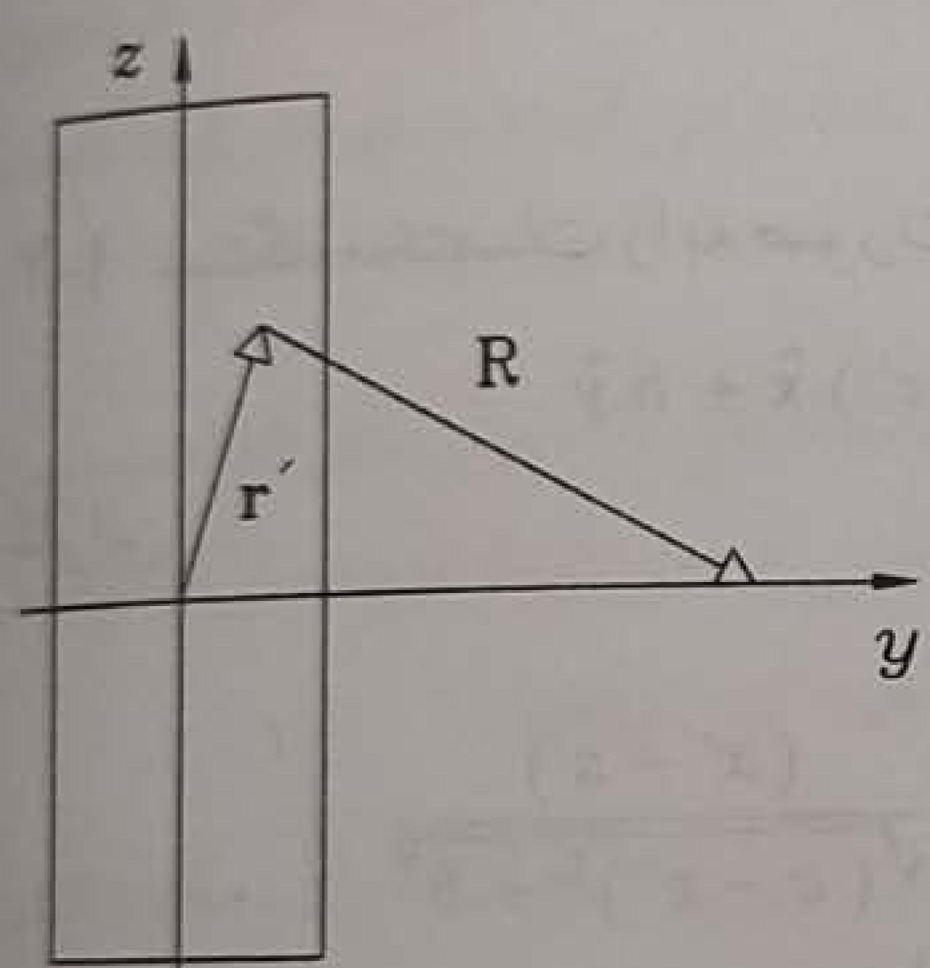
$$B = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R} + \frac{\mu_\circ I \pi}{۴\pi R} + \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R} = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}(۲ + \pi)$$

برای جریان شکل ۷-۳ ب از نتیجهٔ مسئلهٔ ۷-۲ استفاده می‌کنیم. چون دو پاره خط با نقطهٔ مشاهده همراستا هستند، در آن نقطه میدانی ایجاد نمی‌کنند و تنها جریان کمانها میدان ایجاد می‌کند

$$B = \frac{\mu_\circ I(\pi/۲)}{۴\pi a} - \frac{\mu_\circ I(\pi/۲)}{۴\pi b} = \frac{\mu_\circ I}{۸}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۷-۴ $\mathbf{r} = y\,\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{r}}' = x'\,\hat{\mathbf{x}} + y'\,\hat{\mathbf{y}}$، پس $\mathbf{R} = -x'\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} - z'\,\hat{\mathbf{z}}$ و $|\mathbf{R}| = \sqrt{x'^۲ + y^۲ + z'^۲}$. بنابراین



شکل ح ۷-۴

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{\mathbf{K}\times\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^۳}\,ds$$
$$= \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{|x'|\,(-x'\,\hat{\mathbf{y}} - y\,\hat{\mathbf{x}})\,dx'\,dz'}{(x'^۲ + y^۲ + z'^۲)^{۱/۵}}$$

برای مؤلفهٔ y داریم

$$B_y = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{-|x'|\,x'}{(x'^۲ + y^۲ + z'^۲)^{۱/۵}}\,dx'\,dz' = \circ$$

زیرا تابع داخل انتگرال یک تابع فرد است و انتگرال روی یک فاصلهٔ متقارن حول مبدا گرفته می‌شود. برای مؤلفهٔ x

$$B_x = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\circ}^{a}\frac{-|x'|\,y}{(x'^۲ + y^۲ + z'^۲)^{۱/۵}}\,dx'\,dz'$$
$$= \frac{-\mu_\circ y}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{x'}{(x'^۲ + y^۲ + z'^۲)^{۱/۵}}\,dx'\,dz'$$

زیرا نسبت به x' تابعی زوج داریم

$$B_x = \frac{-\mu_\circ y}{۲\pi}\int_{\circ}^{a}\frac{۲x'}{y^۲ + x'^۲}\,dx' = \frac{-\mu_\circ y}{۲\pi}\ln(y^۲ + x'^۲)\Big|_{\circ}^{a}$$
$$= \frac{\mu_\circ y}{۲\pi}\ln\frac{y^۲}{y^۲ + a^۲}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۷-۵ برای این مسئله بردار منبع عبارت است از $\mathbf{r}' = a\,\hat{\boldsymbol{\rho}}' = a\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + a\sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}}$؛ همچنین بردار مشاهده به صورت $\mathbf{r} = y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$ است، پس

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + (y - a\sin\phi')\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$|\mathbf{R}|^{۲} = a^{۲} + y^{۲} - ۲\, a\, y \sin\phi' + z^{۲}$$

جریان خطی به صورت $\mathbf{I} = I\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -I\sin\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + I\cos\phi'\,\hat{\mathbf{y}}$ است و $dl = R\,d\phi'$. اکنون تمام اجزای معادلهٔ زیر را داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\int \frac{\mathbf{I}\times\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^{۳}}\,dl$$

و چون تنها مؤلفهٔ x را می‌خواهیم، از حاصلضرب $\mathbf{I}\times\mathbf{R}$ تنها مؤلفهٔ x را نگه می‌داریم

$$B_x = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_۰^{۲\pi} \frac{z\, I\cos\phi'}{(a^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - ۲ay\sin\phi')^{۱/۵}}\,R\,d\phi'$$

$$= \frac{\mu_۰\, z\, I}{۴\pi\, a\, y}\,(a^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - ۲ay\sin\phi')^{-۰/۵}\Big|_۰^{۲\pi} = ۰$$

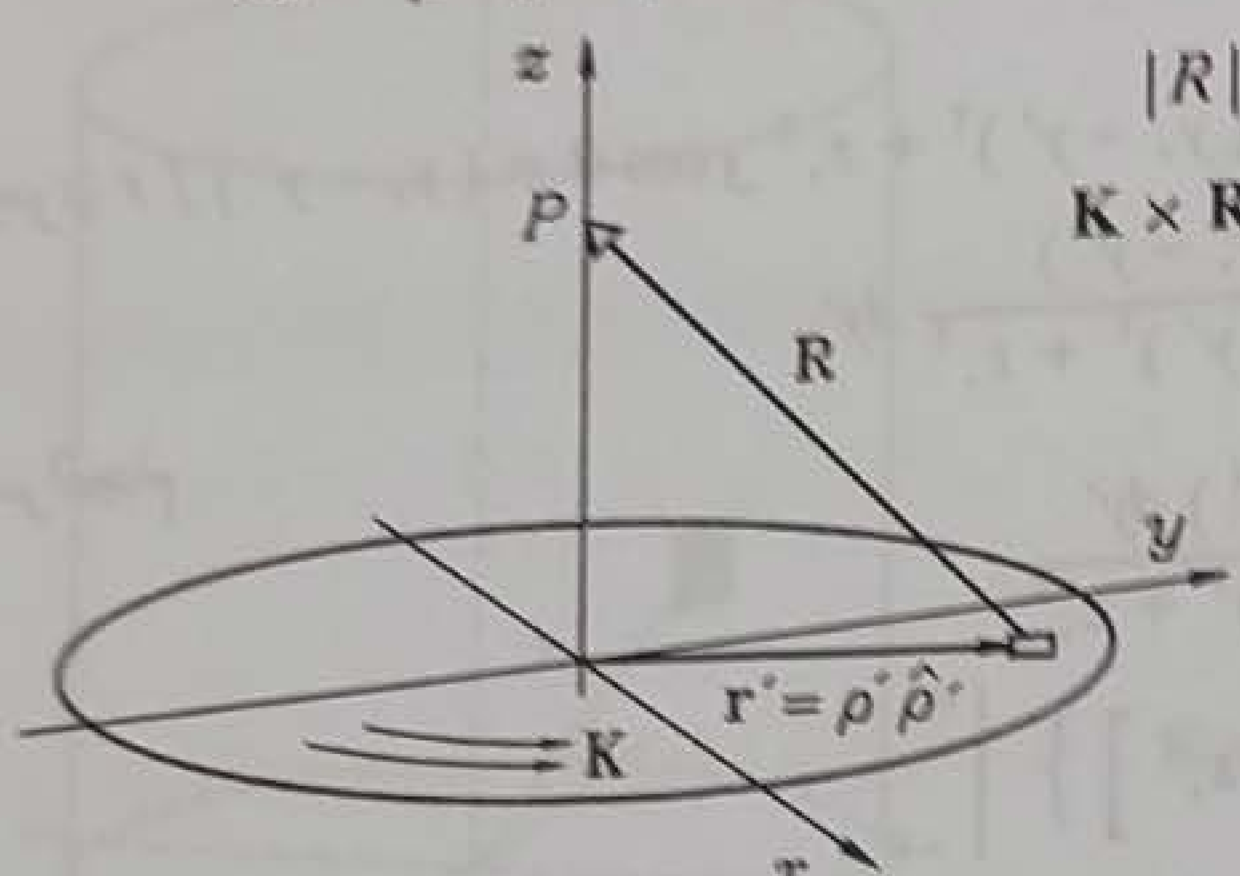
$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۷-۶ در معادلهٔ $\mathbf{B} = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\int \frac{\mathbf{K}\times\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^{۳}}\,ds$ داریم $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\,\hat{\mathbf{z}} - \rho'\,\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ ، $ds' = \rho'\,d\rho'\,d\phi'$

$$|R| = \sqrt{z^{۲} + \rho'^{۲}}$$

$$\mathbf{K}\times\mathbf{R} = ۵\rho'^{۲}\,\hat{\mathbf{z}} + ۵\rho' z\,\hat{\boldsymbol{\rho}}'$$

$$= ۵\rho'^{۲}\,\hat{\mathbf{z}} + ۵\rho' z\,(\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}})$$



شکل ح ۷-۶

چون $\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ برداری متغیرست ، برای انتگرالگیری باید آن را به دستگاه مختصات قائم می‌بردیم

$$B_x = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_۰^{۲} \frac{۵\rho'^{۲} z}{(z^{۲} + \rho'^{۲})^{۳/۲}}\,d\rho' \int_۰^{۲\pi}\cos\phi'\,d\phi' = ۰$$

$$B_y = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_۰^{۲} \frac{۵\rho'^{۲} z}{(z^{۲} + \rho'^{۲})^{۳/۲}}\,d\rho' \int_۰^{۲\pi}\sin\phi'\,d\phi' = ۰$$

$$B_z = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_۰^{۲} \frac{۵\rho'^{۳}}{(z^{۲} + \rho'^{۲})^{۳/۲}}\,d\rho' \int_۰^{۲\pi} d\phi'$$

$$= \frac{۵}{۲}\mu_۰\,\frac{\rho'^{۲} + ۲z^{۲}}{\sqrt{z^{۲} + \rho'^{۲}}}\Big|_۰^{۲} = \mu_۰\left(\frac{۴z^{۲} + ۱۰}{\sqrt{۴ + z^{۲}}} - ۵z\right)$$

جریانی که از یک خط می‌گذرد از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$I = \int (\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,dl$$

که $\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر خط است ، در این مسئله $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ ، و $dl = d\rho$

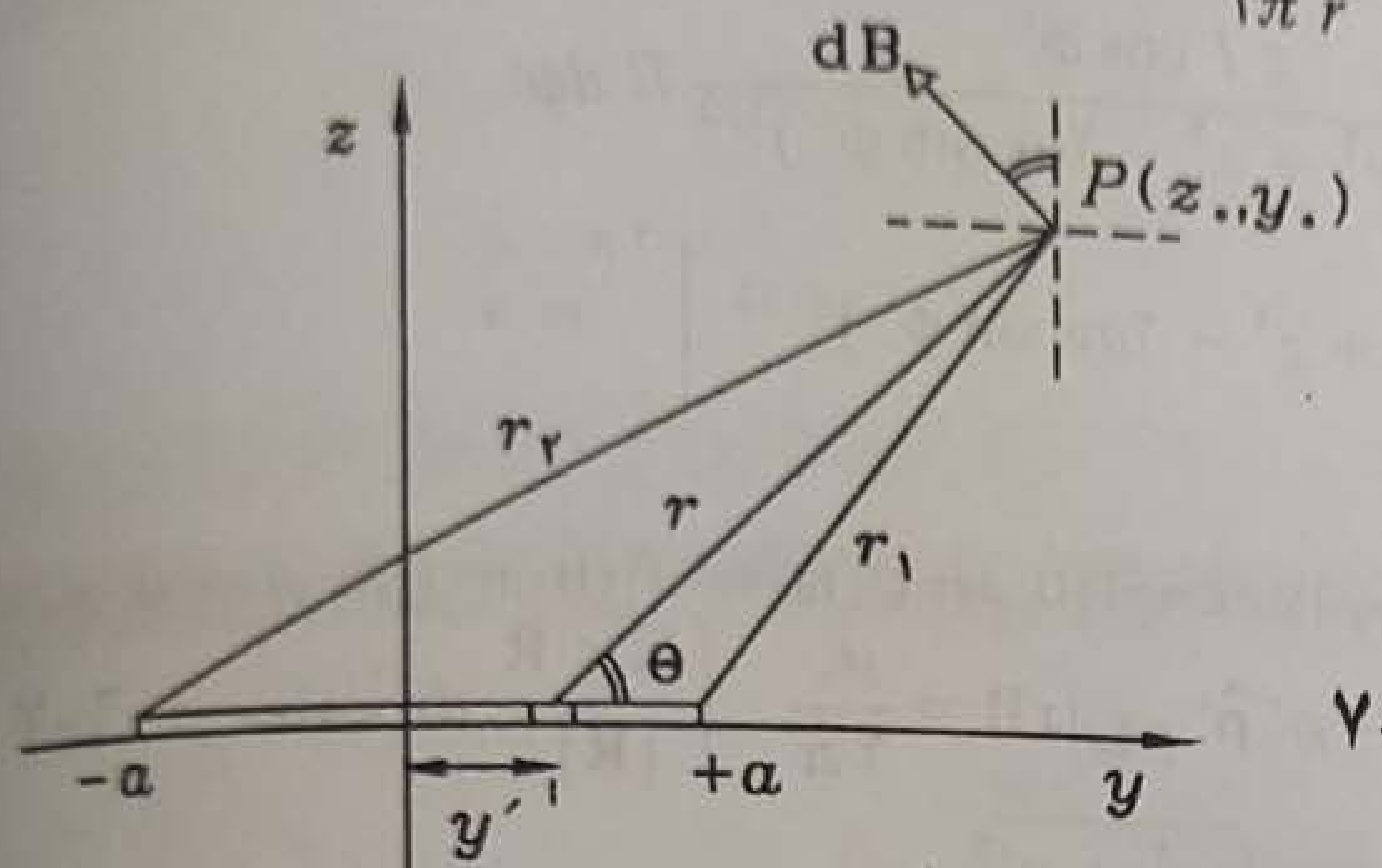
$$I = \int_۰^{۲} ۵\rho\,d\rho = ۲/۵\rho^{۲}\Big|_۰^{۲} = ۱۰\text{ A}$$

۷-۷ نوار را به سیمهای نازکی به عرض dy' تقسیم می‌کنیم، جریان هر یک از این نوارها $K_\circ dy'$ و میدان ناشی از هر یک به صورت زیر است

$$dB = \frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi r} dy'$$

این میدان در شکل ح ۷-۷ نشان داده شده است. با توجه به این شکل مولفهٔ z میدان عبارت است از

$$dB_z = \frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi r} dy' \cos\theta$$



شکل ح ۷-۷

چون $\cos\theta = (y_\circ - y')/r$ و $r^2 = (y_\circ - y')^2 + z_\circ^2$ به دست می‌آوریم

$$dB_z = \frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi} \frac{(y_\circ - y')}{(y_\circ - y')^2 + z_\circ^2} dy'$$

سرانجام

$$B_z = \int_{-a}^{a} dB_z = \frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{(y_\circ - y')\, dy'}{(y_\circ - y')^2 + z_\circ^2}$$

$$= \frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \ln\left[(y_\circ - y')^2 + z_\circ^2 \right] \right\} \Big|_{-a}^{a}$$

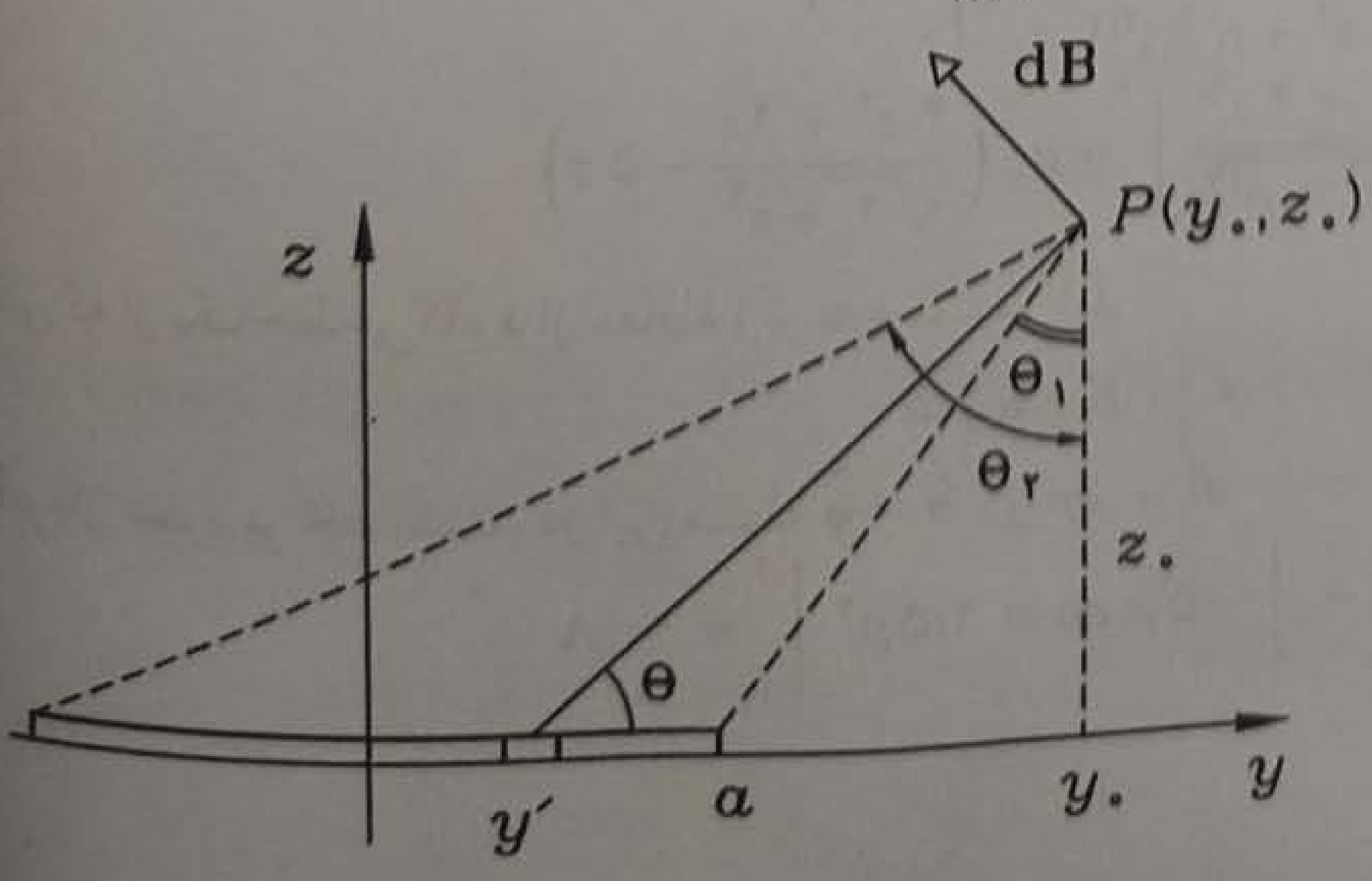
$$= \frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \{ (y_\circ + a)^2 + z_\circ^2 \} - \frac{1}{2} \ln \{ (y_\circ - a)^2 + z_\circ^2 \} \right]$$

$$= \frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi} \frac{1}{2} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۸-۷ با توجه به حل مسئله ۷-۷ مولفهٔ y میدان عبارت است از

$$dB_y = -\frac{\mu_\circ K_\circ}{2\pi r} dy' \sin\theta$$



شکل ح ۷-۸

چون $\sin\theta = z_{۰} / r$ داریم

$$dB_y = -\frac{\mu_{۰} K_{۰}}{۲\pi} \frac{z_{۰}}{(y_{۰} - y')^{۲} + z_{۰}^{۲}} dy'$$

$$B_y = -\frac{\mu_{۰} K_{۰} z_{۰}}{۲\pi} \int_{-a}^{a} \frac{dy'}{(y_{۰} - y')^{۲} + z_{۰}^{۲}}$$

$$= -\frac{\mu_{۰} K_{۰} z_{۰}}{۲\pi} \left[-\frac{۱}{z_{۰}} \tan^{-۱} \frac{y_{۰} - y'}{z_{۰}} \right] \Bigg|_{-a}^{+a}$$

$$= -\frac{\mu_{۰} K_{۰}}{۲\pi} \left[\tan^{-۱} \frac{y_{۰} + a}{z_{۰}} - \tan^{-۱} \frac{y_{۰} - a}{z_{۰}} \right]$$

$$= \frac{\mu_{۰} K_{۰}}{۲\pi} (\theta_{۱} - \theta_{۲}) = - = -\frac{\mu_{۰} K_{۰}}{۲\pi} \alpha$$

۷-۹ باید از معادلهٔ زیر استفاده کنیم

$$\mathbf{H} = \frac{۱}{۴\pi} \int \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{R}}{R^{۳}} ds$$

برای این مسئله اجزای معادلهٔ بالا عبارت‌اند از

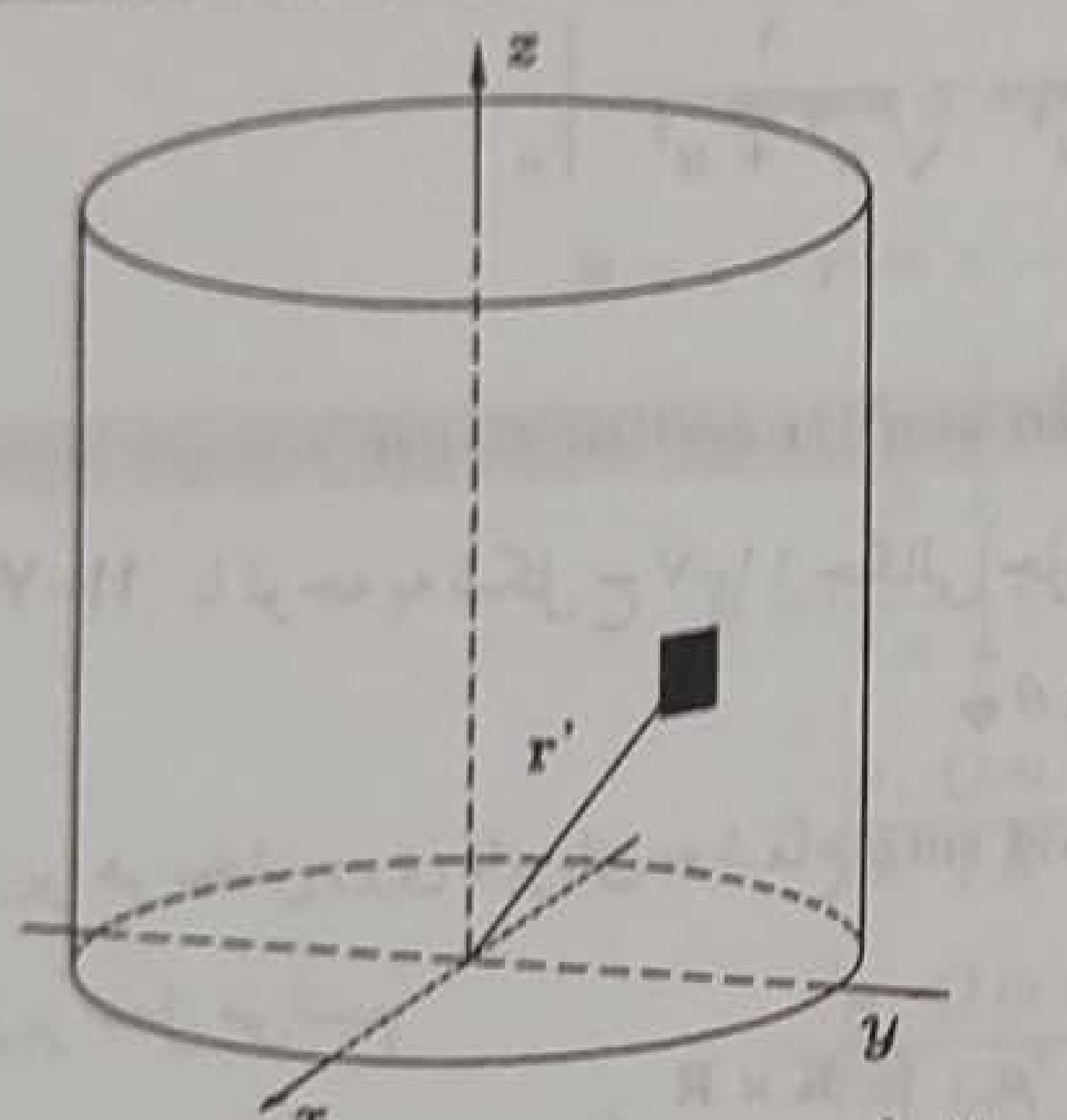
$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = ۰ - (a \hat{\boldsymbol{\rho}}' + z' \hat{\mathbf{z}})$$

$$|R| = (a^{۲} + z'^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$ds = a\, d\phi'\, dz'$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{R} = b z' \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times (-a \hat{\boldsymbol{\rho}}' - z' \hat{\mathbf{z}})$$

$$= b a z' \hat{\mathbf{z}} - b z'^{۲} \hat{\boldsymbol{\rho}}'$$



شکل ح ۷-۹

پس

$$\mathbf{H} = \frac{۱}{۴\pi} \int \frac{b a z' \hat{\mathbf{z}} - b z'^{۲} (\cos\phi' \hat{\mathbf{x}} + \sin\phi' \hat{\mathbf{y}})}{(a^{۲} + z'^{۲})^{۳/۲}} a\, d\phi'\, dz'$$

چون $\int_{۰}^{۲\pi} \sin\phi'\, d\phi' = \int_{۰}^{۲\pi} \cos\phi'\, d\phi' = ۰$ مولفه‌های x و y صفرند و

$$\mathbf{H} = \frac{b a^{۲}}{۴\pi} \hat{\mathbf{z}} \int_{۰}^{h} \int_{۰}^{۲\pi} \frac{z'\, d\phi'\, dz'}{(a^{۲} + z'^{۲})^{۳/۲}}$$

$$= \frac{b a^{۲}}{۲} \hat{\mathbf{z}} \int_{۰}^{h} \frac{z'\, dz'}{(a^{۲} + z'^{۲})^{۳/۲}}$$

$$= \frac{b a^{۲}}{۲} \hat{\mathbf{z}} \left[-(a^{۲} + z'^{۲})^{-\frac{۱}{۲}} \right] \Bigg|_{۰}^{h}$$

$$= \frac{b a^{۲}}{۲} \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{۱}{a} - \frac{۱}{\sqrt{a^{۲} + h^{۲}}} \right] = \frac{b}{۲} \left[a - \frac{a^{۲}}{\sqrt{a^{۲} + h^{۲}}} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=۰ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=۰ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=۰ \,|\, \oint E\cdot dl=۰$

۷-۱۰ تنها تفاوت این مسئله با مسئله ۷-۹ این است که اکنون داریم

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = h\,\hat{\mathbf{z}} - (a\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z'\,\hat{\mathbf{z}})$$

$$|R| = [(h-z')^{2} + a^{2}]^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{b\,a\,z'\,\hat{\mathbf{z}}}{[(h-z')^{2}+a^{2}]^{3/2}}$$

$$= \frac{b\,a^{2}}{2}\,\hat{\mathbf{z}}\int_{0}^{h}\frac{z'\,dz'}{[(h-z')^{2}+a^{2}]^{3/2}}$$

با تغییر متغیر $h - z' = u$ داریم

$$\int_{0}^{h}\frac{z'\,dz'}{[(h-z')^{2}+a^{2}]^{3/2}} = \int_{h}^{0}\frac{-(h-u)\,du}{(u^{2}+a^{2})^{3/2}}$$

$$= \frac{-h\,u}{a^{2}\sqrt{a^{2}+u^{2}}} - \frac{1}{\sqrt{a^{2}+u^{2}}}\Bigg|_{h}^{0}$$

$$\mathbf{H} = \frac{b}{2}\left(\sqrt{a^{2}+h^{2}} - a\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷-۱۱ با توجه به شکل ح ۷-۱۱ چگالی جریان سطحی روی نیمکره عبارت است از

$$\mathbf{K} = \sigma\,\mathbf{v} = \sigma\,A\,\omega\,\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

زیرا هر بخش روی دایره‌ای به شعاع $A\sin\theta$ می‌چرخد و سرعت خطی آن $A\,\omega\,\sin\theta$ است. حال به صورت زیر عمل می‌کنیم

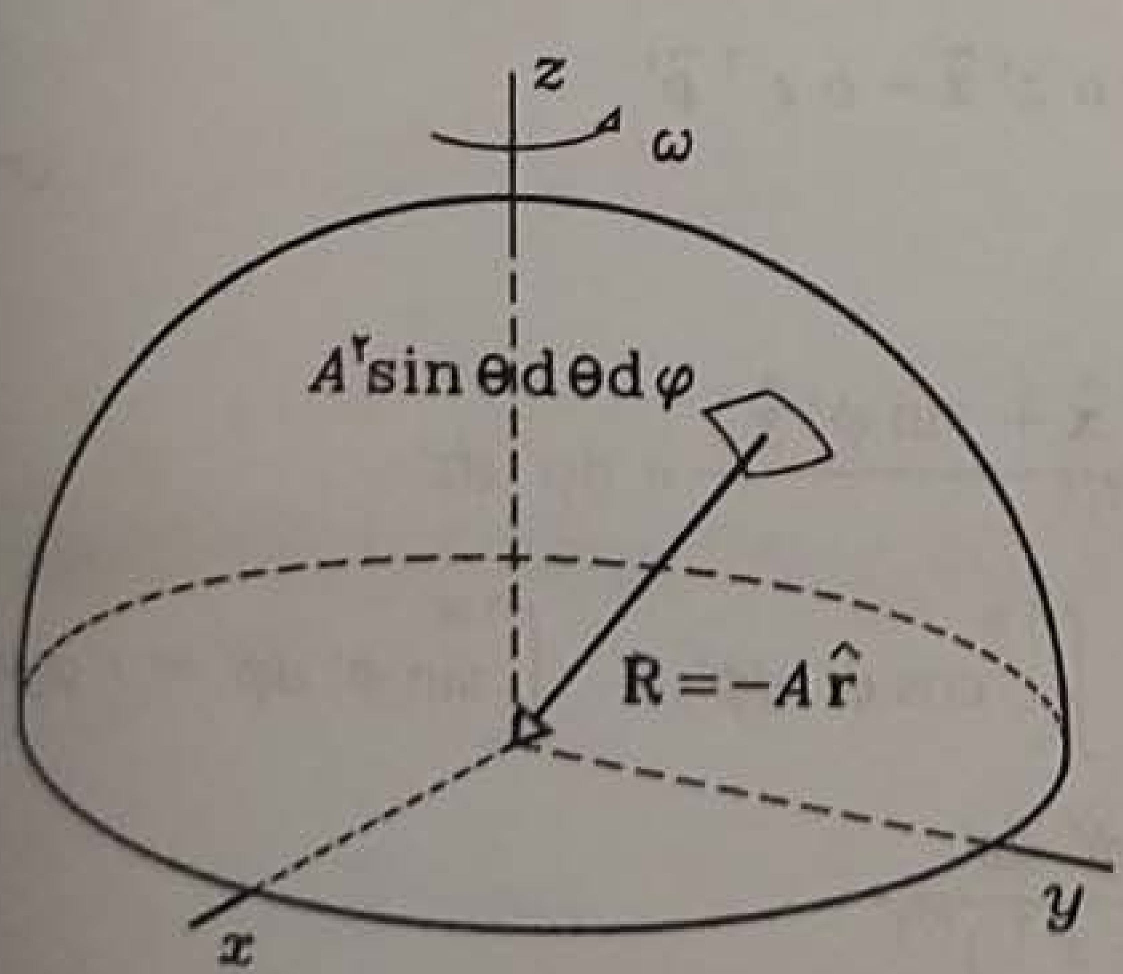
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{K}\times\mathbf{R}}{R^{3}}\,ds$$

که در آن $\mathbf{R} = -A\,\hat{\mathbf{r}}$ و $ds = A^{2}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$. پس

$$\mathbf{K}\times\mathbf{R} = \mathbf{K}\times(-A\,\hat{\mathbf{r}})$$

$$= -\sigma A^{2}\,\omega\,\sin\theta\,(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{r}})$$

$$= -\sigma A^{2}\,\omega\,\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



شکل ح ۷-۱۱

اکنون به محاسبهٔ انتگرال می‌پردازیم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{-\sigma A^{4}\,\omega\,\sin^{2}\theta\,d\theta\,d\phi}{A^{3}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \frac{-\mu_0\,\sigma\,A\,\omega}{4\pi}\int\sin^{2}\theta\,d\theta\,d\phi\,(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}})$$

چون $\int_{0}^{2\pi}\sin\phi'\,d\phi' = \int_{0}^{2\pi}\cos\phi'\,d\phi' = 0$ ، B مولفه x و y ندارد و

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ \sigma A \omega}{4\pi} \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{z}}$$

$$= \frac{\mu_\circ \sigma A \omega}{2} \hat{\mathbf{z}} \int_\circ^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{2}{3} \mu_\circ \sigma A \pi \omega \, \hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=\circ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=\circ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=\circ \mid \oint E\cdot dl=\circ$

۱۲-۷ برای یافتن چگالی بار باید مساحت مخروط را به دست آوریم

$$S = \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^{b} r \sin\theta_\circ \, d\phi \, dr = \pi \sin\theta_\circ \, (b^2 - a^2)$$

بنابراین چگالی بار سطحی عبارت است از

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi \sin\theta_\circ \, (b^2 - a^2)}$$

چگالی جریان سطحی ناشی از دوران مخروط به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} = \sigma \omega r \sin\theta_\circ \, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{Q \omega r}{\pi (b^2 - a^2)} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

دریافتن میدان B از قانون بیوساوار استفاده می‌کنیم که در آن $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \circ - r\hat{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{R}}{R^3} ds$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi} \int \frac{Q \omega r \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times (- r \hat{\mathbf{r}})}{\pi (b^2 - a^2) r^3} r \sin\theta_\circ \, dr \, d\phi$$

$$= \frac{\mu_\circ Q \omega \sin\theta_\circ}{4\pi^2 (b^2 - a^2)} \int \int \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times (-\hat{\mathbf{r}}) \, dr \, d\phi$$

$$= \frac{\mu_\circ Q \omega \sin\theta_\circ}{4\pi^2 (b^2 - a^2)} \int_\circ^{2\pi} \int_a^{b} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \, dr \, d\phi$$

برای محاسبهٔ این انتگرال باید $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ را در مختصات قائم بیابیم

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta \cos\phi \, \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta \sin\phi \, \hat{\mathbf{y}} - \sin\theta \, \hat{\mathbf{z}}$$

چون انتگرال $\sin\phi$ و $\cos\phi$ روی یک دورهٔ تناوب صفر است، میدان مولفهٔ x و y ندارد و

$$\int_\circ^{2\pi} \int_a^{b} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \, dr \, d\phi = \int_\circ^{2\pi} \int_a^{b} \sin\theta_\circ \, dr \, d\phi \, \hat{\mathbf{z}} = 2\pi \sin\theta_\circ \, (b - a) \, \hat{\mathbf{z}}$$

پس

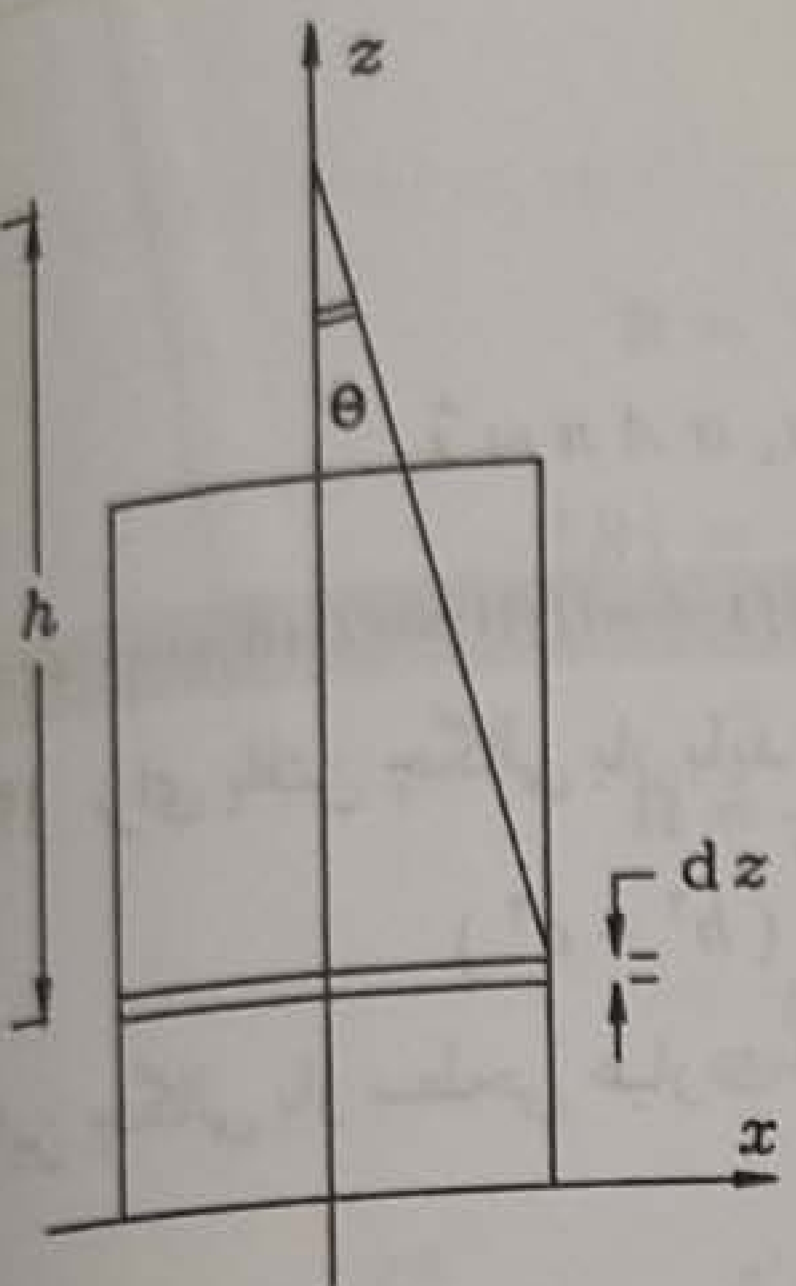
$$B = \frac{\mu_\circ Q \omega \sin^2\theta_\circ}{2\pi (b + a)} \hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=\circ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=\circ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=\circ \mid \oint E\cdot dl=\circ$

۱۳-۷ دستگاه مختصاتی به صورت شکل ح ۷-۱۳ برمی‌گزینیم. سیملوله را به صورت مجموعه‌ای از حلقه‌های به عرض dz در نظر می‌گیریم. از هر حلقه جریان $dI = N I_\circ \, dz$ می‌گذرد. میدان ناشی از هر حلقه عبارت است از

$$dB = \frac{\mu_\circ \, dI \, R^2}{2 (R^2 + h^2)^{3/2}}$$

چون $R = h \tan\theta$، $dz = dh = \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$. همچنین داریم



$$\sin\theta = \frac{R}{(R^{2}+h^{2})^{1/2}}$$

پس

$$dB = \frac{\mu_0 N I_0\, dh}{2R}\sin^{3}\theta = \frac{\mu_0 N I_0}{2}\sin\theta\, d\theta$$

با توجه به تعریف θ_1 و θ_2 در شکل مسئله داریم

$$B = \frac{\mu_0 N I_0}{2}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 N I_0}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

شکل ح ۷-۱۳

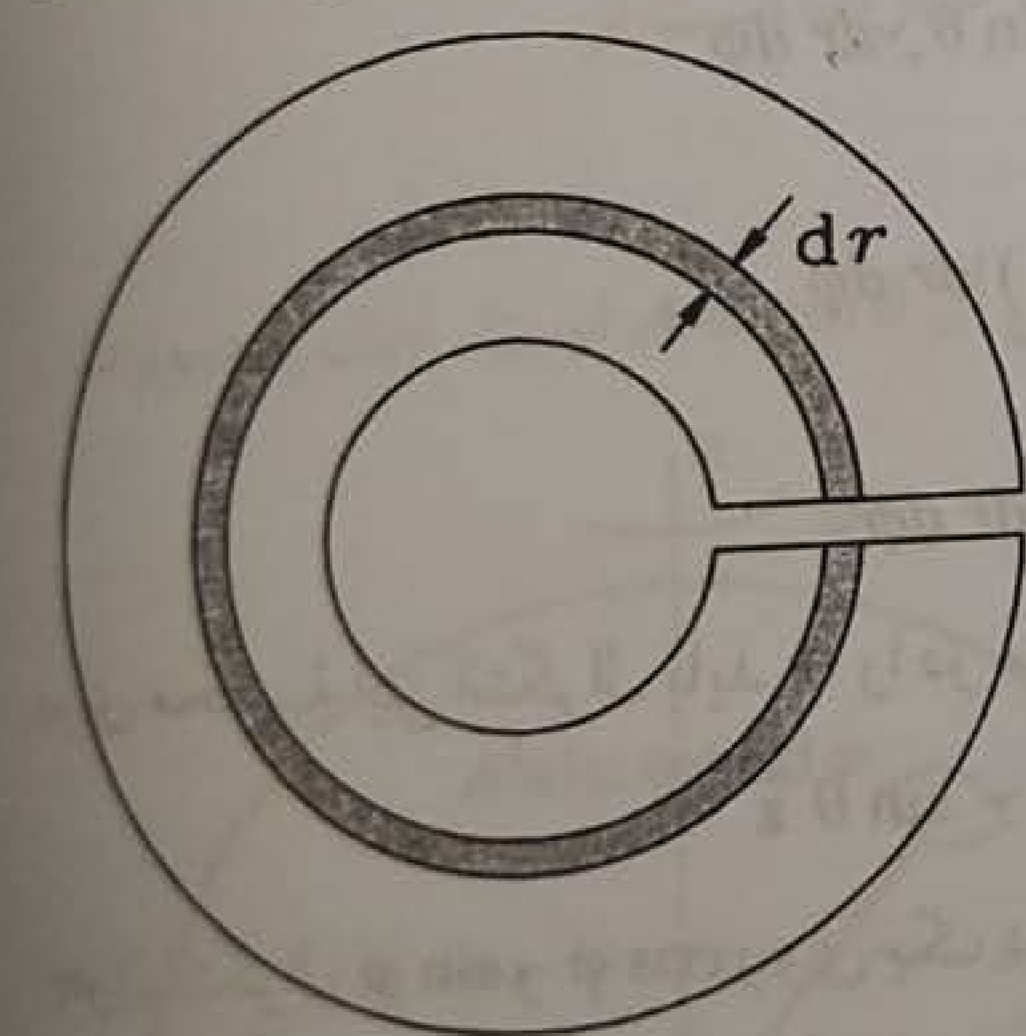
$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۷-۱۴ در صورت بی‌نهایت بودن طول سیملوله $\theta_2 = 0$ و $\theta_1 = \pi$، پس

$$B = \frac{\mu_0 N I_0}{2}(\cos 0 - \cos\pi) = \mu_0 N I_0$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۷-۱۵ واشر را به حلقه‌هایی به ضخامت dr تقسیم می‌کنیم. چون میدان الکتریکی در امتداد این حلقه‌هاست مقاومت هر حلقه را می‌توان به صورت زیر یافت



$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{2\pi r}{\sigma\, dr\, t}$$

جریانی که از این حلقه می‌گذرد برابرست با

$$dI = \frac{V}{R} = \frac{V\sigma t\, dr}{2\pi r}$$

میدانی ناشی از این جریان در مرکز حلقه برابرست با

$$dB = \frac{\mu_0\, dI}{2r} = \frac{\mu_0 V\sigma t\, dr}{4\pi r^{2}}$$

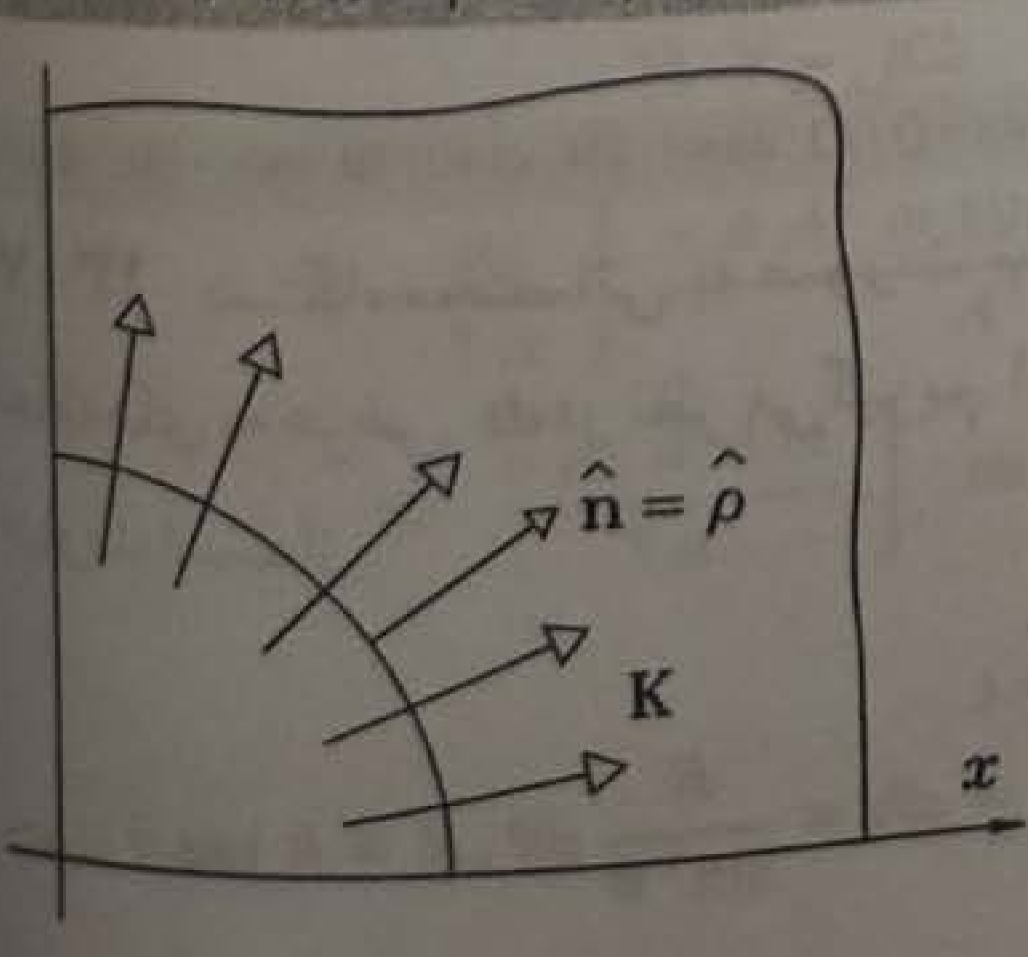
و سرانجام

$$B = \frac{\mu_0 \sigma t V}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\sigma t V}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

شکل ح ۷-۱۵

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۷-۱۶ چون فرض شده که جریان سطحی شعاعی و یکنواخت (مستقل از ϕ) است، $\mathbf{K} = K\hat{\rho}$ که در آن K تنها تابعی از ρ است. جریانی که از ربع دایرهٔ نشان داده شده در شکل مقابل می‌گذرد باید برابر I باشد، پس



$$I = \int(\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,dl = \int_0^{\pi/2}(K\hat{\rho}\cdot\hat{\rho})\rho\, d\phi = K\rho\frac{\pi}{2}$$

که نتیجه می‌دهد $\mathbf{K} = \frac{2I}{\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$. جریان روی محور zهیچ میدانی روی محور zایجاد نمی‌کند، پس میدان فقط از جریان سطحی Kناشی می‌شود. در معادلهٔ بیوساوار برای جریان سطحی داریم $ds = \rho'\, d\rho'\, d\phi'$؛

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\hat{\mathbf{z}} - \rho'\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ و $|\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + \rho'^2}$

$$\mathbf{K}\times\mathbf{R} = \frac{2I}{\pi\rho'}\hat{\boldsymbol{\rho}}' \times (z\hat{\mathbf{z}} - \rho'\hat{\boldsymbol{\rho}}') = -\frac{2I}{\pi\rho'}\hat{\boldsymbol{\varphi}}' = \frac{2I}{\pi\rho'}(\sin\phi'\,\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi'\,\hat{\mathbf{y}})$$

اکنون تمام اجزای معادلهٔ بیوساوار را داریم و به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I z}{2\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\frac{\sin\phi'\,\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi'\,\hat{\mathbf{y}}}{(z^2 + \rho'^2)^{1/5}}\,d\rho'\,d\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 z}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=0|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=0|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۷-۷ در معادلهٔ بیوساوار برای جریان سطحی داریم $ds = r\sin\theta_0\, d\phi\, dr$ و $\mathbf{R} = -r\hat{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}\times\mathbf{R} &= -K_0 r^2\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\mathbf{r}} \\
&= -K_0 r^2(\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\phi\,\hat{\mathbf{x}})\times(\sin\theta_0\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} \\
&\quad + \sin\theta_0\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta_0\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta_0\,\hat{\mathbf{z}}) \\
&= -K_0 r^2(\cos\theta_0\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta_0\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta_0\,\hat{\mathbf{z}})
\end{aligned}$$

انتگرال روی $a < r < b$ ، $0 < \phi < 2\pi$ گرفته می‌شود و چون انتگرال $\sin\phi$ و $\cos\phi$ روی یک دوره تناوب صفر است $B_x = B_y = 0$ و

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{k_0 r^2\sin\theta_0}{r^3}\,r\sin\theta_0\,d\phi\,dr \\
&= \frac{\mu_0 K_0\sin^2\theta_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_a^b dr \\
&= \frac{\mu_0 K_0}{2}\sin^2\theta_0\,(b-a)
\end{aligned}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=0|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=0|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۸-۷ با توجه به میدان مغناطیسی روی محور یک حلقهٔ جریان داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left\{\frac{1}{[(d/2+z)^2 + a^2]^{1/5}} - \frac{1}{[(d/2-z)^2 + a^2]^{1/5}}\right\}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z} = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left\{-\frac{3[(d/2)+z]}{[(d/2)+z)^2 + a^2]^{2/5}} + \frac{3[(d/2)-z]}{[(d/2)-z)^2 + a^2]^{2/5}}\right\}\hat{\mathbf{z}}$$

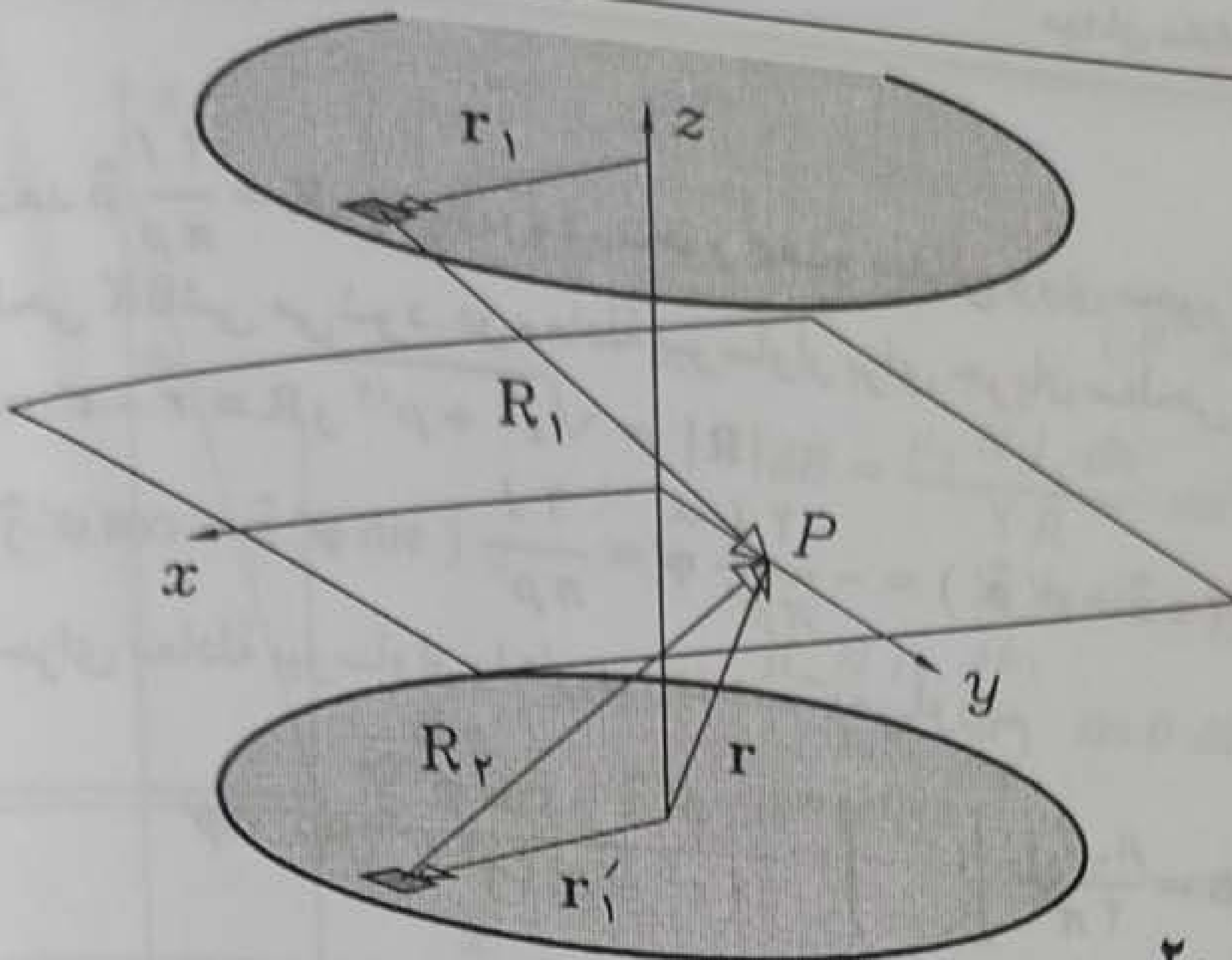
و در $z = 0$ ، $\partial\mathbf{B}/\partial z = 0$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=0|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=0|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۹-۷ $d = a$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=0|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=0|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲۰-۷ چون نسبت به ϕتقارن داریم، نقطهٔ مشاهده را بر روی محور yبر می‌گزینیم، بدون این که از کلیت



شکل ح ۷-۲۰

جواب کاسته شود. اثر دو عنصر جریان واقع بر روی دو قرص را، که یکی درست بالای سر دیگری است به طور همزمان به دست می‌آوریم

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} \frac{\mathbf{K}\, ds \times \mathbf{R}_۲}{|\mathbf{R}_۲|^۳}$$

چون برای هر دو $\mathbf{K}$، ds یکسان است و $|\mathbf{R}_۱| = |\mathbf{R}_۲|$

$$\mathbf{R}_۲ = (y\,\hat{\mathbf{y}} + d\hat{\mathbf{z}}) - \mathbf{r}' = (y\,\hat{\mathbf{y}} + d\hat{\mathbf{z}}) - (\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}})$$
$$= -\rho\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + (y - \rho\sin\phi)\,\hat{\mathbf{y}} + d\hat{\mathbf{z}}$$

همچنین $\mathbf{R}_۱ = -\rho\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + (y - \rho\sin\phi)\,\hat{\mathbf{y}} - d\hat{\mathbf{z}}$. پس

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi\,|\mathbf{R}_۱|^۳}\,[\,\mathbf{K} \times (\mathbf{R}_۱ + \mathbf{R}_۲)\,]\,ds$$

چون $\mathbf{K} = K_\circ\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\phi\,K_\circ\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,K_\circ\,\hat{\mathbf{y}}$، و $\mathbf{R}_۱ + \mathbf{R}_۲ = -۲\rho\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + (y - \rho\sin\phi)\hat{\mathbf{y}}$ داریم

$$\mathbf{K} \times (\mathbf{R}_۱ + \mathbf{R}_۲) = ۲K_\circ(\rho - y\sin\phi)\,\hat{\mathbf{z}}$$

و

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{۲\pi\,|\mathbf{R}_۱|^۳} K_\circ(\rho - y\sin\phi)\,\rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\frac{۱}{|\mathbf{R}_۱|^۳} = [\rho^۲\cos^۲\phi + (y - \rho\sin\phi)^۲ + d^۲]^{-۱/۵}$$
$$= (\rho^۲ + y^۲ + d^۲ - ۲y\rho\sin\phi)^{-۱/۵} = (r^۲ + d^۲ - ۲y\rho\sin\phi)^{-۱/۵}$$
$$= (r^۲ + d^۲ - ۲r\sin\theta\,\rho\sin\phi)^{-۱/۵}$$
$$= \frac{۱}{r^۳}\left(۱ - \frac{۲\sin\theta\sin\phi\,\rho}{r} + \frac{d^۲}{r^۲}\right)^{-۱/۵}$$

چون $r >> d$ می‌توان از تقریب $(۱ - x)^{-۱/۵} \approx ۱ + ۱/۵\,x$ برای xهای کوچک استفاده کرد

$$\frac{۱}{|R_۱|^۳} = \frac{۱}{r^۳}\left(۱ + \frac{۳\sin\theta\sin\phi\,\rho}{r}\right)$$
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ K_\circ}{۲\pi r^۳}(\rho - y\sin\phi)\left(۱ + \frac{۳\sin\theta\sin\phi\,\rho}{r}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

با گذاشتن $y = r\sin\theta$ در معادلهٔ فوق داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ K_\circ}{۲\pi r^۳}\,\hat{\mathbf{z}} \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{a} \left(\rho - r\sin\theta\sin\phi + \frac{۳\sin\theta\,\rho^۲}{r}\sin\phi - ۳\sin^۲\theta\sin^۲\phi\,\rho^۲\right)\rho\,d\rho\,d\phi$$

چون $\int_{\circ}^{۲\pi} \sin\phi \, d\phi = \circ$ جملات دوم و سوم انتگرالی برابر صفر دارند و

$$B = \frac{\mu_\circ K_\circ}{۲\pi r^۳}\frac{a^۳}{۳}(۲\pi - ۳\pi \sin^۲\theta) = \frac{\mu_\circ K_\circ a^۳}{۶ r^۳}(۲ - ۳\sin^۲\theta)\,\hat{\mathbf{z}}$$

۲۱-۷ چگالی جریان سطحی معادل عبارت است از

$$\mathbf{K} = n\, I \cos\alpha\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + n\, I \sin\alpha\, \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{K}_۱ + \mathbf{K}_۲$$

میدان ناشی از این دو مؤلفه جریان را می‌توان به راحتی به دست آورد. میدان ناشی از $\mathbf{K}_۱ = n\, I\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ مانند میدان یک سیملوله به دست می‌آید، که در خارج استوانه $(\rho > a)$ برابر صفر و در داخل استوانه $(\rho < a)$ برابر مقدار زیرست

$$\mathbf{B}_۱ = \mu_\circ\, n\, I \cos\alpha\, \hat{\mathbf{z}}$$

میدان ناشی از $K_۲$ را می‌توان با استفاده از قانون آمپر به دست آورد

$$\mathbf{B}_۲ = \begin{cases} \circ & \rho < a \\ \dfrac{\mu_\circ\, n\, I \sin\alpha}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \rho > a \end{cases}$$

می‌بینیم که در حد $\alpha \longrightarrow \infty$ میدان حاصل به میدان یک سیملوله میل می‌کند. همچنین در مورد سیملوله‌های واقعی که a حتماً مقداری غیر صفر دارد، باز میدان داخل سیملوله یک میدان یکنواخت در جهت z است.

۲۲-۷ اگر فضای حامل جریان را به صفحات نازکی به ضخامت dy تقسیم کنیم، روی این صفحات جریان معادل $۲\,J_\circ\, dy\,\hat{\mathbf{x}}$ - را به صورت جریان سطحی خواهیم داشت. چنین جریانی در فضای بالای خود میدان $-J_\circ\, dy\,\hat{\mathbf{z}}$ و در فضای پایین خود میدان $J_\circ\, dy\,\hat{\mathbf{z}}$ را ایجاد می‌کند. برای $y > ۲a$، تمام صفحات جریان زیر نقاط مورد نظرند، پس

$$\mathbf{B} = -J_\circ\,\hat{\mathbf{z}}\left[\int_a^{۲a} dy + \int_{-a}^{\circ} dy\right] = -۲\,a\,J_\circ\,\hat{\mathbf{z}} \qquad y > ۲a$$

در $y < -a$ تمام صفحات جریان بالای نقاط مورد نظرند، و به نحوی مشابه به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = ۲\,a\,J_\circ\,\hat{\mathbf{z}} \qquad y < -a$$

در $\circ < y < a$ نیمی از صفحات بالا و نیمی از صفحات زیر نقاط مورد نظرند و

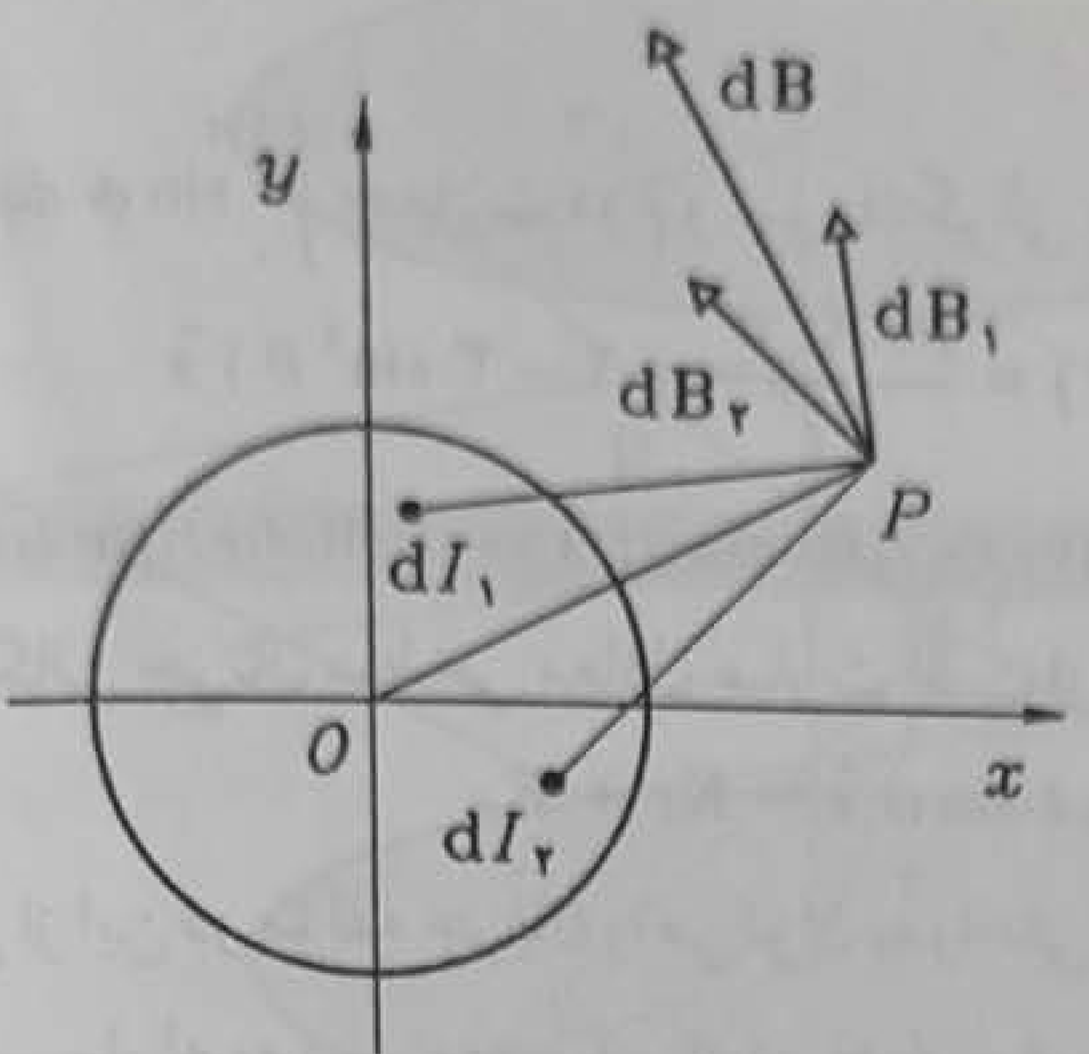
$$\mathbf{B} = \circ \qquad \circ < y < a$$

در $a < y < ۲a$، با توجه به صفحات زیر و بالای نقطهٔ مورد نظر داریم

$$\mathbf{B} = -J_\circ\,\hat{\mathbf{z}}\left[\int_{-a}^{\circ} dy + \int_a^{y} dy - \int_y^{۲a} dy\right] = ۲\,(a - y)\,J_\circ\,\hat{\mathbf{z}} \qquad a < y < ۲a$$

در $-a < y < \circ$ نیز به نحوی مشابه به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = -J_\circ\,\hat{\mathbf{z}}\left[\int_{-a}^{y} dy - \int_y^{\circ} dy - \int_a^{۲a} dy\right] = -۲\,y\,J_\circ\,\hat{\mathbf{z}} \qquad a < y < ۲a$$



شکل ح ۷-۲۳

۷-۲۳ برای یافتن میدان در نقطهٔ P، جریان داخل استوانه را به رشته‌های جریان تقسیم می‌کنیم و هنگامی در نظر گرفتن اثر هر رشته مانند dI_1 نشان داده شده در شکل ح ۷-۲۳ اثر رشتهٔ dI_2 را نیز، که تصویر آینه‌ای dI_1 در خطی که از P و محور استوانه می‌گذرد است، در نظر می‌گیریم. همانطور که در شکل نشان داده شده است جمع اثر این دو جریان در جهت عمود بر خط PO، یعنی جهت $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷-۲۴ چون جریان در جهت z است و تابعی از ϕ و z نیست، میدان تنها مولفهٔ ϕ دارد. حلقه‌ای به شعاع ρ به موازات صفحهٔ $z = 0$ و به مرکز واقع روی محور z ها را به عنوان مسیر آمپر در نظر می‌گیریم. چون میدان تنها در جهت ϕ است

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\rho\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = 2\pi\rho\,B_\phi$$

این انتگرال طبق قانون آمپر با $\mu_0 I$ برابرست، که I کل جریانی است که از مسیر آمپر می‌گذرد. در $\rho < a$

$$I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} A\,e^{-k\rho}\,\hat{\mathbf{z}}\cdot\rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$= 2\pi A\int_0^{\rho} e^{-k\rho}\rho\,d\rho = \frac{2\pi A}{K^2}\left[e^{-k\rho}(-K\rho-1)\right]\Big|_0^{\rho}$$

$$= \frac{2\pi A}{K^2}\left[1-(1+K\rho)\,e^{-k\rho}\right]$$

برای $\rho > a$ انتگرال فوق در جهت ρ تنها از ۰ تا a محاسبه می‌شود و $I = \frac{2\pi A}{K^2}\left[1-(1+K\rho)\,e^{-k\rho}\right]$ پس

$$B_\phi = \begin{cases} \dfrac{A}{K^2\rho}\left[1-(1+K\rho)\,e^{-k\rho}\right] & \rho < a \\[2ex] \dfrac{A}{K^2\rho}\left[1-(1+K\rho)\,e^{-k\rho}\right] & \rho > a \end{cases}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷-۲۵ از قانون آمپر استفاده می‌کنیم. با توجه به مسئله ۷-۲۳ می‌دانیم تنها در جهت ϕ مولفه دارد. پس اگر مسیر آمپر دایره‌ای به شعاع ρ باشد

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho\,B_\phi$$

به ازای $\rho < a$ جریانی که از مسیر آمپر می‌گذرد عبارت است از

$$I_1 = \int \mathbf{J} \cdot ds = \frac{J_\circ}{a^2} \int (\rho - a)^2 \rho \, d\rho \, d\phi$$
$$= \frac{2\pi J_\circ}{a^2} \int_\circ^\rho (\rho^3 - 2a\rho^2 + a^2\rho)\, d\rho = \frac{2\pi J_\circ}{a^2}\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{2}{3}a\rho^3 + \frac{a^2\rho^2}{2}\right)$$

در $a > \rho$ انتگرال بالا باید از ۰ تا a حساب شود و $I_2 = \pi J_\circ a^4 / 6$، پس

$$\mathbf{B}_\phi = \begin{cases} \dfrac{\mu_\circ J_\circ}{a^2}\left(\dfrac{\rho^3}{4} - \dfrac{2}{3}a\rho^2 + \dfrac{a^2\rho}{2}\right) & \rho < a \\[2ex] \dfrac{\mu_\circ J_\circ a^3}{12\rho} & \rho > a \end{cases}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=0 \mid \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \mid \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷-۲۶ نقطهٔ A را روی سطح چنبره در نظر می‌گیریم که مختصات آن $A(\rho, \phi, z)$ است. نقطهٔ مشاهده را در صفحهٔ $y = 0$ بر می‌گزینیم، در واقع تقارن مسئله نشان می‌دهد که نقطهٔ مشاهده هر جا باشد می‌توان دستگاه مختصات را طوری برگزید که آن نقطه در صفحهٔ $y = 0$ باشد. پس $P(x_\circ, 0, z_\circ)$ و بردار $\mathbf{R}$ عبارت است از

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x_\circ - \rho\cos\phi)\,\hat{\mathbf{x}} - \rho\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + (z_\circ - z)\,\hat{\mathbf{z}}$$

چون جریان مولفهٔ ϕ ندارد می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{K} = K_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + K_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

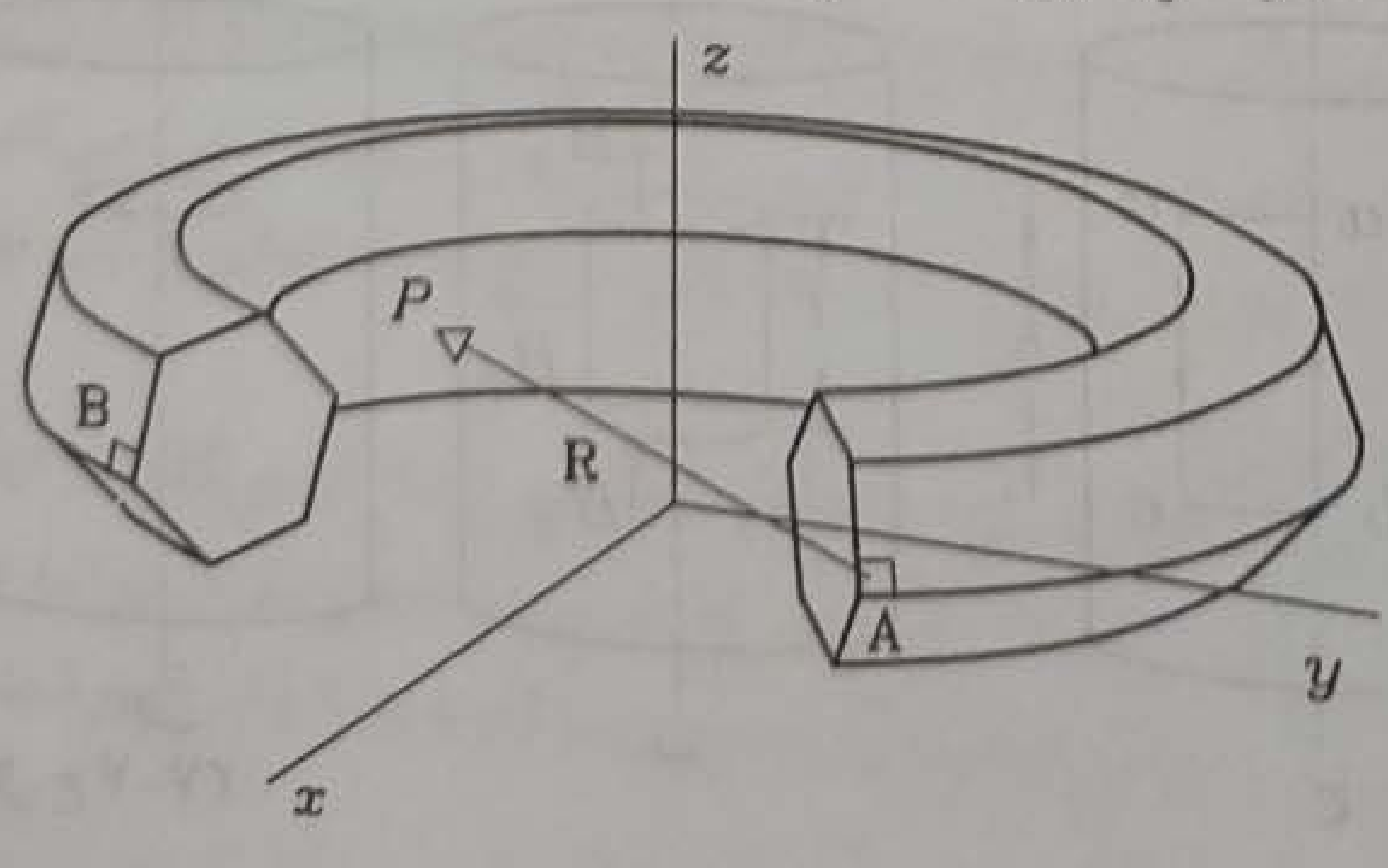
پس میدان ناشی از عنصری واقع در نقطهٔ A عبارت است از

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{\mathbf{K}\times\mathbf{R}}{|R|^3}\,ds \qquad (1)$$

$$\mathbf{K}\times\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \cos\phi\, K_\phi & \sin\phi\, K_\rho & K_z \\ x_\circ - \rho\cos\phi & -\rho\sin\phi & (z_\circ - z) \end{vmatrix} = M_x\,\hat{\mathbf{x}} + M_y\,\hat{\mathbf{y}} + M_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$M_x = \sin\phi\,[\,K_\rho(z_\circ - z) + \rho K_z$$
$$M_y = K_z(x_\circ - \rho\cos\phi)\;\; K_\rho\cos\phi\,(z_\circ - z)$$
$$M_z = -K_\rho\, x_\circ \sin\phi$$

حال نقطهٔ B را با مختصات $B\ (\rho, -\phi, z)$ در نظر بگیرید، که قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به صفحه $y = 0$ است.



شکل ح ۷-۲۶

میدان ناشی از این عنصر را $d\mathbf{B}_2$ می‌نامیم و $d\mathbf{B}_1 + d\mathbf{B}_2$ را می‌یابیم. رابطهٔ $d\mathbf{B}_2$ شبیه رابطهٔ (۱) است، چون ϕ منفی شده است و $\sin(-\phi) = -\sin\phi$ و $\cos\phi = \cos(-\phi)$ داریم

$$d\mathbf{B}_1 + d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2\,M_y}{|R|^3}\,ds\,\hat{\mathbf{y}}$$

چون برای هر نقطهٔ روی چنبره، نقطهٔ قرینه‌ای وجود دارد، میدان در صفحهٔ y تنها در جهت y مولفه دارد، یا با بیان در دستگاه مختصات استوانه‌ای میدان تنها در جهت ϕ مولفه دارد.

اکنون که ثابت کرده‌ایم میدان تنها در جهت ϕ مولفه دارد، یافتن مقدار میدان بسیار ساده است. کافی است مسیری دایروی به عنوان مسیر آمپر در نظر گرفته، قانون آمپر را اعمال کنیم. به سادگی می‌توان دید که اگر مسیر داخل چنبره باشد

$$\oint \mathbf{B}\cdot dl = \int B_\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\rho\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 2\pi\rho\,B_\phi = \mu_0\,n\,I$$

یا

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\,n\,I}{2\pi\rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

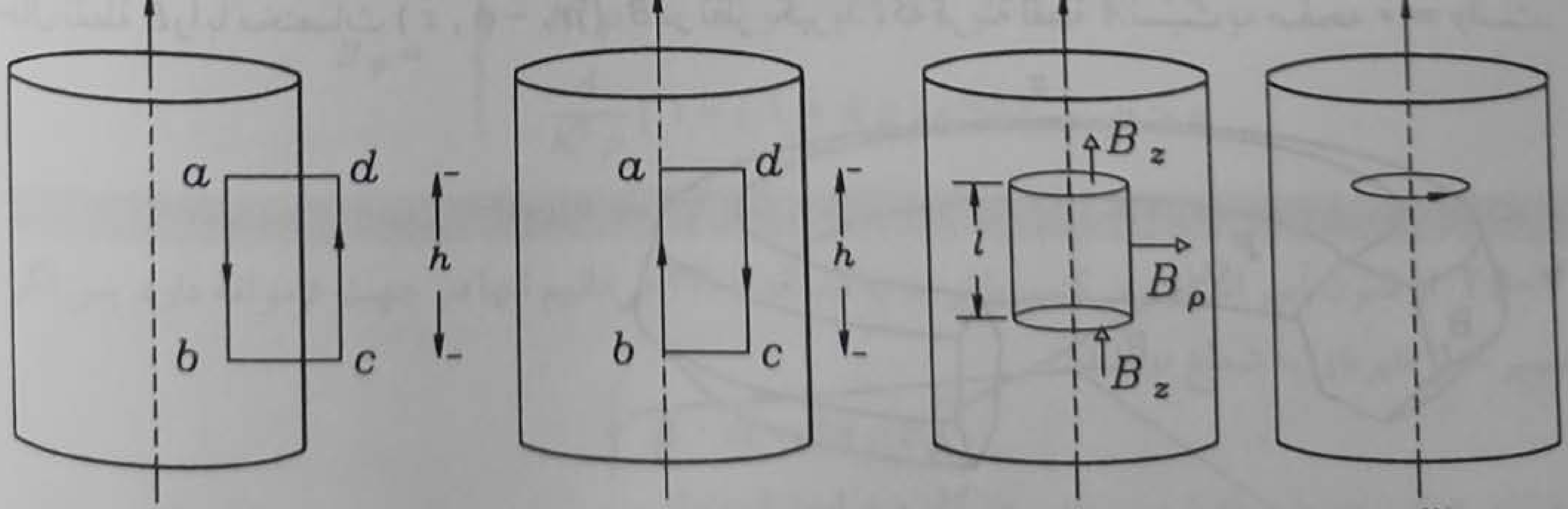
و اگر مسیر آمپر در خارج چنبره باشد، چون جریانی از آن نمی‌گذرد $B = 0$.

۷-۲۷ ابتدا ثابت می‌کنیم $\mathbf{B}$ نمی‌تواند مولفهٔ B_ρ و B_ϕ داشته باشد. تقارن مسئله نشان می‌دهد که اگر چنین مولفه‌هایی وجود داشته باشند باید مقدارشان مستقل از ϕ باشد. مسیر آمپری مطابق شکل ح ۷-۲۷ الف بر می‌گزینیم. داریم $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 0$ زیرا جریانی از این مسیر نمی‌گذرد (چه مسیر داخل سیملوله باشد و چه خارج آن). با توجه به تقارن مسئله

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi\,r\,B_\phi$$

که در آن r شعاع مسیر آمپر است. صفر بودن انتگرال فوق نشان می‌دهد که $B_\phi = 0$. سطح استوانه‌ای نشان داده شده در شکل ح ۷-۲۷ ب را در نظر بگیرید. چون $\oint \mathbf{B}\cdot ds = 0$، شار خارج شده از این سطح باید صفر باشد. چون مسئله در جهت z تقارن دارد هر شاری از قاعدهٔ پایینی وارد استوانه شود از قاعدهٔ بالایی آن خارج می‌شود پس $\int \mathbf{B}\cdot ds$ روی سطح جانبی باید صفر باشد، و چون

$$\int \mathbf{B}\cdot ds = 2\pi\,r\,l\,B_\rho = 0$$



شکل ح ۷-۲۷

پس $B_\rho = 0$، حال صفر بودن $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ روی مسیر مستطیلی شکل ح ۷–۲۷ ج نشان می‌دهد که

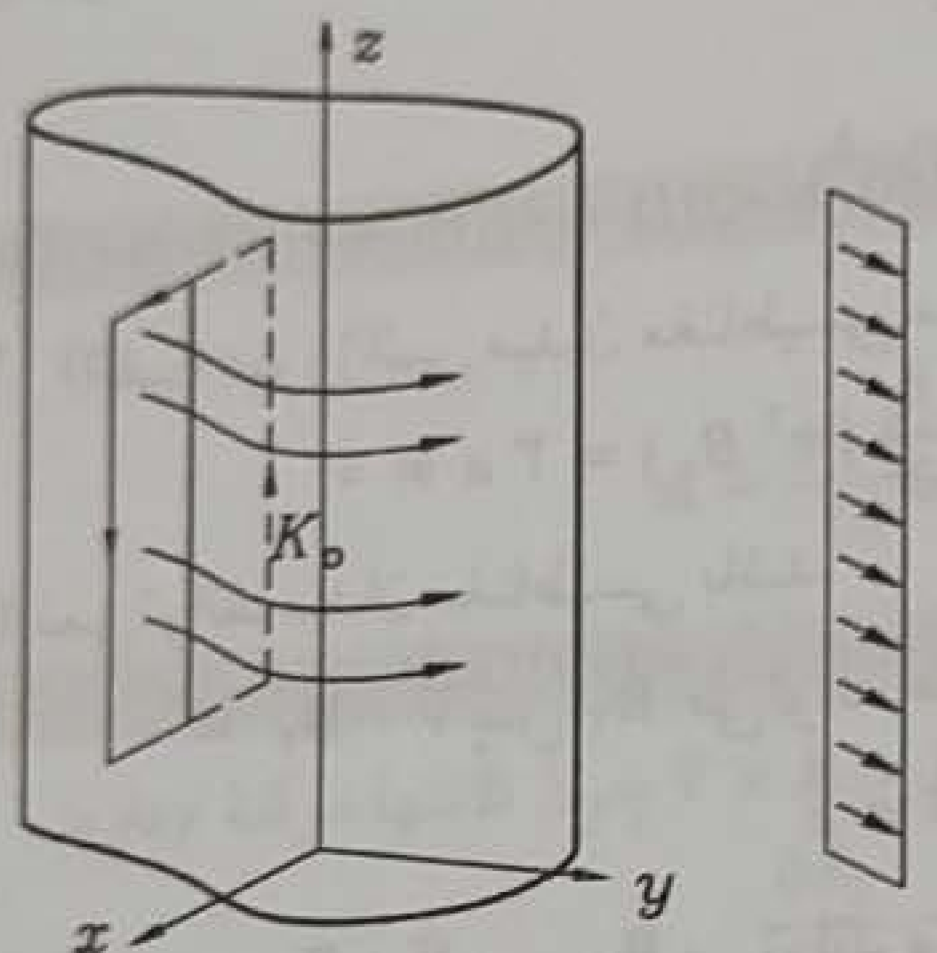
$$B_z(\rho = 0) - B_z(\rho = \rho_0) = 0$$

یعنی B_z در تمام نقاط همان مقدار روی محور سیملوله را دارد که عبارت است از $\mu_0 N I_0$. سرانجام با محاسبهٔ $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ روی مسیر نشان داده شده در شکل ح ۷–۲۷ د، و با توجه به اینکه جریان گذرنده از این مسیر $N I_0 h$ است، در می‌یابیم که میدان در خارج سیملوله صفر است.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۷-۲۸ ابتدا ثابت کنید که میدان تنها مؤلفهٔ z دارد. به این منظور بدنه استوانه را به نوارهای باریکی در امتداد محور استوانه تقسیم کنید (شکل ح ۷–۲۸) و نشان دهید که چنین نواری با طول بی‌نهایت تنها در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ میدان تولید می‌کند. پس از اثبات این مطلب به سادگی می‌توان نشان داد که میدان داخل استوانه و خارج آن یکنواخت است (مثال ۴ را ببینید). سپس با استفاده از قانون آمپر میدان را بیابید. جواب عبارت است از

$$B = \begin{cases} \mu_0 K_0\, \hat{\mathbf{z}} & \text{داخل} \\ 0 & \text{خارج} \end{cases}$$



شکل ح ۷–۲۸

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۷-۲۹ استوانه را به پوسته‌های استوانه‌ای نازکی به ضخامت dr تقسیم می‌کنیم. جریانی که از این پوسته می‌گذرد $K_0\, dr\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ است. این جریان در داخل پوسته میدان $\mu_0 K_0\, dr\, \hat{\mathbf{z}}$ و در خارج پوسته میدان صفر را ایجاد می‌کند. پس میدان در خارج استوانه صفر است، زیرا نقاط خارج استوانه بیرون تمام این پوسته‌های استوانه‌ای است. در نقطه‌ای داخل استوانه، تنها پوسته‌هایی که این نقطه داخلشان قرار دارد در ایجاد میدان دخیل‌اند. پس

$$\mathbf{B}(\rho) = \int_\rho^R \mu_0 K_0\, dr\, \hat{\mathbf{z}} = \mu_0 K_0\, \hat{\mathbf{z}} \int_\rho^R dr = \mu_0 K_0 (R-\rho)\, \hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۷-۳۰ محور مختصات را به صورت نشان داده شده در شکل ح ۷–۳۰ برمی‌گزینیم. فرض می‌کنیم در حفره دو جریان وجود دارد، هر دو با چگالی J ولی یکی در جهت z و یکی در جهت $-z$. به این ترتیب جریان خالص درون حفره چنانچه باید، صفر باقی می‌ماند.

حال دو استوانه داریم، استوانه‌ای به شعاع b که جریانی با چگالی J در جهت z از آن می‌گذرد و دیگری استوانه‌ای به شعاع a که جریانی با چگالی J در جهت $-z$ از آن می‌گذرد. میدان داخل یک استوانهٔ دارای چگالی جریان یکنواخت $(\mu_0 J\rho/2)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ است، که می‌توان آن را به صورت $(\mu_0 J/2)(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}})$ نوشت. اگر

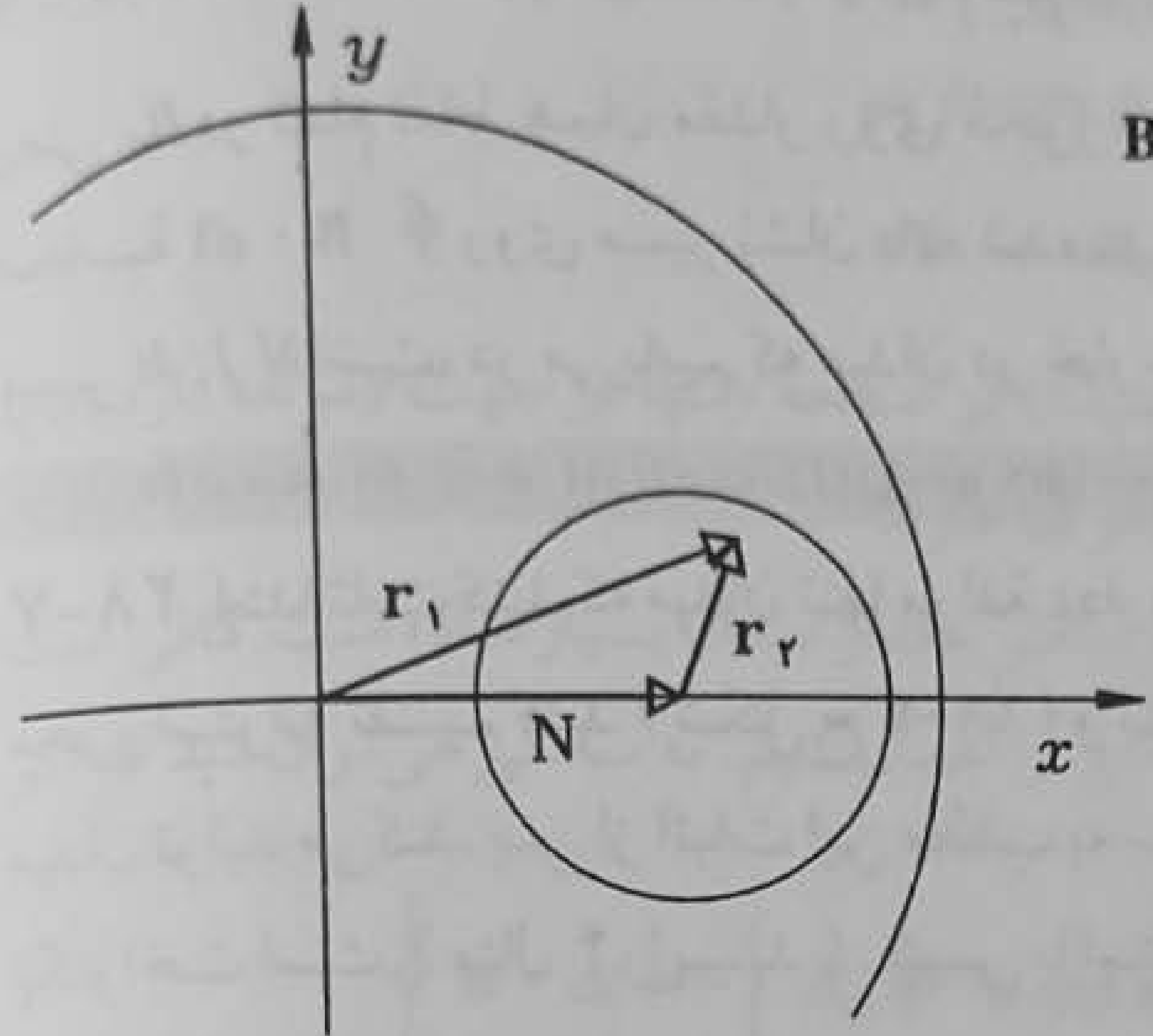
میدان ناشی از جریان استوانهٔ بزرگتر را $\mathbf{B}_1$ و میدان ناشی از جریان استوانهٔ کوچکتر را $\mathbf{B}_2$ بنامیم (با توجه به شکل ح ۷-۳۰) خواهیم داشت

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J}{2}(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_1 - \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}_2)$$

$$= \frac{\mu_0 J}{2}\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$= \frac{\mu_0 J}{2}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{N} = \frac{\mu_0 J N}{2}\hat{\mathbf{y}}$$

که در آن $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{x}}$ برداری است که محور استوانهٔ بزرگ را به محور حفرهٔ استوانه، در جهت عمود بر محورها وصل می‌کند. می‌بینیم که میدان حاصل یک میدان یکنواخت است.



شکل ح ۷-۳۰

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷-۳۱ (الف) دیورژانس میدان مغناطیسی ساکن باید صفر باشد، ولی

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) = 3a \neq 0$$

پس $\mathbf{B}_1$ نمی‌تواند میدان مغناطیسی باشد

(ب) $\nabla \cdot \mathbf{B}_2 = 0$ پس $\mathbf{B}_2$ می‌تواند میدان مغناطیسی باشد و

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}_2 = 2a\,\hat{\mathbf{z}}$$

(ج) $\nabla \cdot \mathbf{B}_3 = 0$ پس $\mathbf{B}_3$ می‌تواند میدان مغناطیسی باشد

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}_3 = 0\ !!$$

منبع میدان فوق چیست؟

(د) $\nabla \cdot \mathbf{B}_4 = 0$ پس $\mathbf{B}_4$ می‌تواند میدان مغناطیسی باشد

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}_4 = \frac{2a}{\mu_0}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷-۳۲ چون $\mathbf{J}$ در جهت z است، بسط معادله پواسون $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$ در دستگاه مختصات قائم نشان می‌دهد که $\mathbf{A}$ هم تنها در جهت z مولفه دارد، پس

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z = -\mu_0 J_z = -\mu_0 \frac{I}{\pi a^2}$$

با استفاده از قانون آمپر به راحتی می‌توانیم میدان داخل و خارج استوانه را به صورت زیر بیابیم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \rho < a$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \rho > a$$

در داخل داریم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times A_z \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\rho}} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

چون مسئله نسبت به ϕ متقارن است جمله اول صفر می‌باشد و داریم

$$\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

که نتیجه می‌دهد

$$A_z = \frac{-\mu_0 I}{2\pi a^2}\frac{\rho^2}{2} + K$$

با توجه به اینکه در سطح استوانه $(\rho = a)$ داریم $A = 0$ پس $K = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$

و

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)\hat{\mathbf{z}} \qquad \rho < a$$

دقیقاً به همین صورت برای $\rho > a$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho + K_2$$

شرط مرزی در $\rho = a$ به دست می‌دهد $K_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln a$ و

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho}\hat{\mathbf{z}} \qquad \rho > a$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷-۳۳ در $z > 0$، $\mathbf{B} = -\frac{1}{2}\mu_0 K_0\hat{\mathbf{y}}$. باید داشته باشیم $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$ چون $\mathbf{B}$ تنها مولفهٔ y دارد

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{1}{2}\mu_0 K_0$$

چون نسبت به x تقارن داریم مشتق نسبت به x صفر است و

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{1}{2}\mu_0 K_0$$

$$A_x = -\frac{1}{2}\mu_0 K_0 z + C$$

که C یک عدد ثابت است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۷-۳۴ میدان خارج استوانه $(\rho > b)$ شبیه میدان مغناطیسی جریان I است که از سیم توپری بگذرد، یعنی $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$، پس با توجه به حل مسئلهٔ ۷-۳۲ داریم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{\rho}\hat{\mathbf{z}}$$

در $a < \rho < b$، چگالی جریان یکنواختی در جهت z داریم. پس

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

چون A_z تابعی از z و ϕ نیست

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) = -\mu_0 J_z$$

با دوبار انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$A_z = -\frac{\mu_0\rho^2 J_z}{4} + K_1\ln\rho + K_2$$

میدان داخل پوسته را با استفاده از قانون آمپر می‌یابیم

$$B = \frac{\mu_\circ (\rho^۲ - a^۲) J_z}{۲\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

که در آن $J_z = I / \pi (b^۲ - a^۲)$. با برابر قرار دادن $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\mu_\circ (\rho^۲ - a^۲) J_z}{۲\rho} = \frac{\mu_\circ \rho J_z}{۲} - \frac{K_۱}{\rho}$$

که نتیجه می‌دهد $K_۱ = \mu_\circ a^۲ J_z / ۲$. حال می‌توانیم با اعمال شرایط مرزی در $\rho = b$ ثابت $K_۲$ را بیابیم.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۷-۳۵ چون J تنها در جهت z مولفه دارد $\mathbf{A}$ نیز تنها در جهت z مولفه دارد، همچنین به علت تقارن مشتق نسبت به ϕ و z صفر است، و

$$\nabla^۲ A_z = \frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) = -\mu_\circ J$$

در خارج استوانه $J = \circ$ و با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$A_{\circ z} = K_۱ \ln\rho + K_۲ \qquad \rho > a$$

در داخل استوانه

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) = \frac{-\mu_\circ J_\circ}{a^۲}(\rho - a)^۲\rho$$

با دو بار انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$A_z = \frac{-\mu_\circ J_\circ}{a^۲}\left[\frac{\rho^۴}{۱۶} - \frac{۲}{۹}a\rho^۳ + \frac{a^۲\rho^۲}{۴}\right] + K_۳\ln\rho + K_۴ \qquad \rho < a$$

باید داشته باشیم $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. $\mathbf{B}$ را در مسئله ۷-۲۵ به دست آوردیم. این کار به دست می‌دهد $K_۱ = -\mu_\circ J_\circ a^۲ / ۱۲$ و $K_۳ = \circ$. با استفاده از شرط مرزی $A(\rho = a) = \circ$ به دست می‌آوریم $K_۲ = -K_۱ \ln b$ و $K_۴ = ۱۳\mu_\circ J_\circ a^۲ / ۱۴۴$. پس

$$A = \begin{cases} \dfrac{\mu_\circ J_\circ a^۲}{۱۲}\ln\dfrac{b}{\rho} \\[2ex] \dfrac{-\mu_\circ J_\circ}{a^۲}\left[\dfrac{\rho^۴}{۱۶} - \dfrac{۲}{۹}a\rho^۳ + \dfrac{a^۲\rho^۲}{۴}\right] + \dfrac{۱۳\mu_\circ J_\circ a^۲}{۱۴۴} \end{cases}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۷-۳۶ A به علت تقارن نمی‌تواند تابعی از z و ϕ باشد. میدان داخل استوانه عبارت است از $\mathbf{B} = \mu_\circ K_\circ \hat{\mathbf{z}}$، و داریم $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. با بسط کرل در مختصات استوانه‌ای به دست می‌آوریم

$$\mu_\circ K_\circ \hat{\mathbf{z}} = \frac{۱}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]$$

و چون $\partial / \partial\phi = \circ$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) = \mu_\circ K_\circ \rho$$

$$\rho A_\phi = \frac{\mu_\circ K_\circ \rho^۲}{۲} + C$$

$$A_\phi = \frac{\mu_\circ K_\circ}{۲}\rho + \frac{C}{\rho}$$

چون در $\rho = ۰$ میدان باید محدود باشد $C = ۰$ و $A_\phi = \mu_\circ K_\circ \rho / ۲$. بقیهٔ مولفه‌های A به خاطر نداشتن جریان در جهتهای z و ρ صفر است. در خارج استوانه $B = ۰$، پس

$$\frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) = ۰$$

و $\rho A_\phi = K$ یا $A_\phi = \frac{K}{\rho}$. با توجه به پیوستگی A در $\rho = R$ داریم

$$\frac{K}{R} = \frac{\mu_\circ K_\circ}{۲} R$$

یا $K = \frac{\mu_\circ K_\circ R^۲}{۲}$ و

$$A_\phi = \frac{\mu_\circ K_\circ R^۲}{۲\rho} \qquad \rho > R$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳۷-۷ باز مانند مسئله ۷-۳۰ فرض می‌کنیم داخل حفره دو جریان در جهتهای z و $-z$ وجود دارد، به نحوی که جریان خالص درون حفره مانند وضعیت اصلی مسئله صفر باشد. میدان پتانسیل ناشی از جریان یکنواخت داخل استوانه به شعاع b را $\mathbf{A}_۱$ و میدان پتانسیل ناشی از جریان استوانهٔ کوچکتر را $\mathbf{A}_۲$ می‌نامیم. طبق نتایج مسئلهٔ ۷-۳۲ و با توجه به شکل ح ۷-۳۰ داریم

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_۱ + \mathbf{A}_۲ = \left(\frac{-\mu_\circ J r_۱^۲}{۴} + C_۱\right)\hat{\mathbf{z}} + \left(\frac{-\mu_\circ J r_۲^۲}{۴} + C_۲\right)\hat{\mathbf{z}}$$
$$= \frac{\mu_\circ J}{۴}(r_۲^۲ - r_۱^۲)\hat{\mathbf{z}} + C_۳\hat{\mathbf{z}}$$

در این معادلات $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ اعدادی ثابت هستند. چون

$$r_۲^۲ - r_۱^۲ = N^۲ - ۲ r_۱ N \cos\phi$$

و چون $r_۱$ همان متغیر ρ دستگاه مختصات استوانه‌ای است داریم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_\circ J}{۴}(N^۲ - ۲\rho N\cos\phi)\hat{\mathbf{z}} + C_۳\hat{\mathbf{z}}$$
$$= \frac{\mu_\circ J}{۴}(N^۲ - ۲xN)\hat{\mathbf{z}} + C_۳\hat{\mathbf{z}}$$

زیرا $\rho\cos\phi = x$. سرانجام

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mu_\circ J N}{۲}\hat{\mathbf{y}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳۸-۷ داریم $\mathbf{A} = K\hat{\boldsymbol{\phi}}$. چون $\nabla^۲\mathbf{A} = -\mu_\circ \mathbf{J}$ باید لاپلاسین برداری $\mathbf{A}$ را بیابیم

$$\nabla^۲\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla\times\nabla\times\mathbf{A}$$

پس کرل و دیورژانس $\mathbf{A}$ را باید بیابیم.

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{۱}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} = ۰$$
$$\nabla\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{۱}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)\right]\hat{\mathbf{z}} = \frac{K}{\rho}\hat{\mathbf{z}}$$

بنابراین $\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times \left(\frac{K}{\rho}\hat{\mathbf{z}}\right) = -\frac{K}{\rho^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{J} = \frac{K}{\mu_0 \rho^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳۹-۷ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ پس

$$J_r = \frac{1}{\mu_0 r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(B_\phi \sin\theta) = \frac{2}{\mu_0}\cos\theta$$

$$I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \int \frac{2}{\mu_0}\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}\cdot(\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{\mathbf{r}}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\frac{2}{\mu_0}\cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{2}{\mu_0}\times\frac{1}{8}\times 2\pi = \frac{\pi}{2\mu_0}$$

روش دوم استفاده از قانون آمپر، $I = \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$ است

$$I = \int \frac{r\sin\theta}{\mu_0}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi}\frac{r\sin\theta}{\mu_0}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

در لبهٔ عرقچین داریم $r=1$ و $\theta = \pi/6$، پس

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\mu_0}r^2\sin^2\theta\, d\phi = \frac{1}{\mu_0}\times\frac{1}{2}\times 2\pi = \frac{\pi}{2\mu_0}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴۰-۷ چگالی جریان در استوانه را از رابطهٔ $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$ به دست می‌آوریم

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\phi)\right]\hat{\mathbf{z}} = \frac{3k}{\rho}\rho^2\,\hat{\mathbf{z}} = 3k\rho\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس $\mathbf{J} = (3k\rho/\mu_0)\,\hat{\mathbf{z}}$. چون شدت میدان الکتریکی $V/l\,\hat{\mathbf{z}}$ است و $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$، به دست می‌آوریم $\sigma = (3kl\rho)/(\mu_0 V)$. جریانی راکه از استوانه می‌گذرد به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\mu_0 I = \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = ka^2\times 2\pi a$$

بنابراین

$$R = \frac{\mu_0 V}{2\pi k a^3}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴۱-۷ گر چه اثبات این مطلب سخت است ولی می‌توان نشان داد که میدان تنها مولفهٔ ϕ دارد، بنابراین می‌توان به سادگی با استفاده از قانون آمپر میدان را به دست آورد. مسیر آمپر را دایره‌ای می‌گیریم که مرکز آن روی محور مخروط قرار داشته، صفحهٔ آن بر محور z عمود باشد

$$\mu_0 I = \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B$$

پس

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

اگر مسیر آمپر را بیرون کره بگیریم، چون کل جریانی که از داخل آن می‌گذرد صفرست، میدان نیز صفر به دست می‌آید. برای اطمینان از درستی این جواب می‌توان نشان داد که این جواب تمام معادلات حاکم بر میدانهای مغناطیسی و شرایط مرزی را ارضا می‌کند.