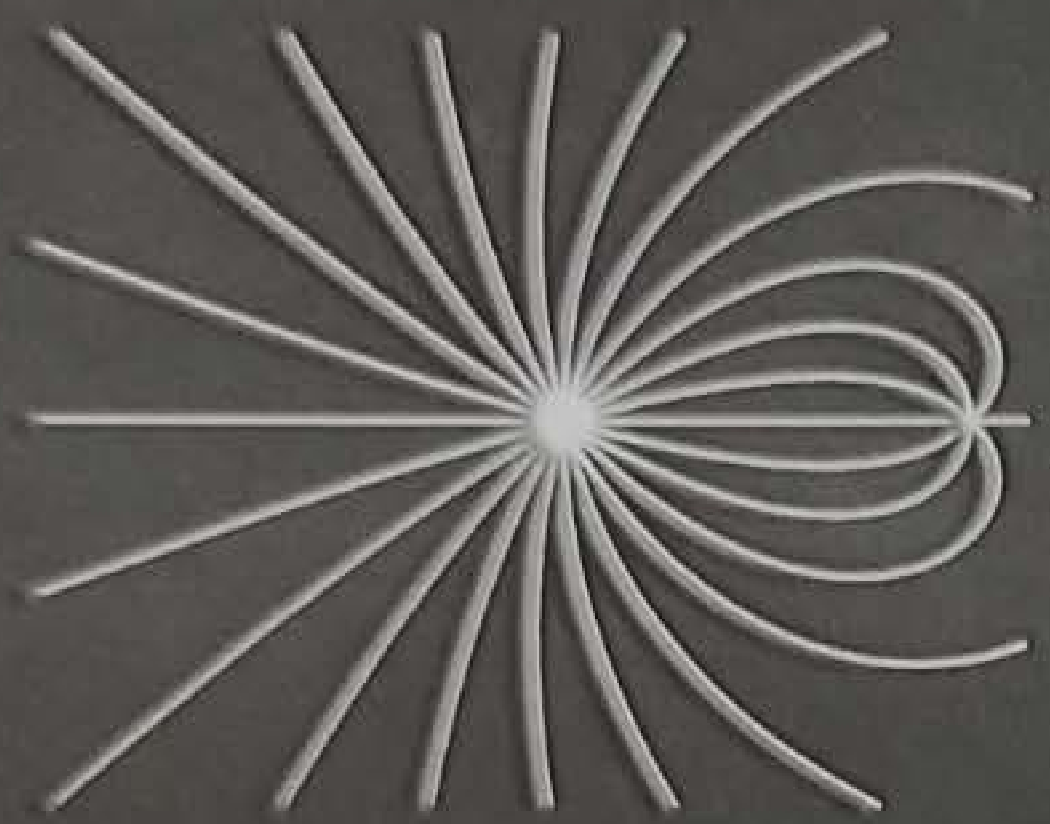


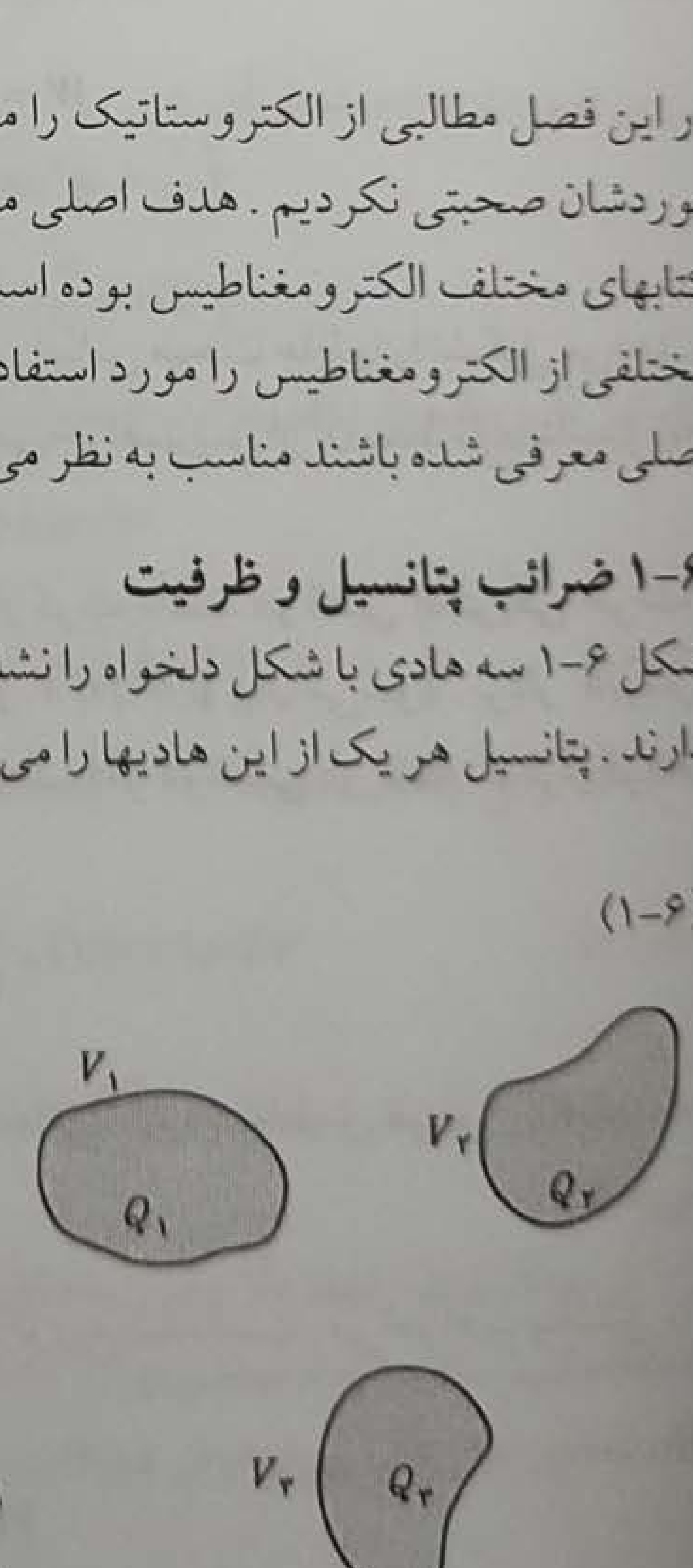
۶
مسائلی از الکتروستاتیک

در این فصل مطالبی از الکتروستاتیک را مورد بحث قرار می‌دهیم که در فصول قبل به صورت مستقل در موردشان صحبتی نکردیم. هدف اصلی ما از این کار ساده کردن فصل‌بندی کتاب و دادن قابلیت تطبیق با کتابهای مختلف الکترومغناطیس بوده است. به هر حال مسائلی وجود دارد که برای حل آنها باید مفاهیم مختلفی از الکترومغناطیس را مورد استفاده قرار دهیم و جای دادن آنها در محلی که قبل از آن تمام مفاهیم اصلی معرفی شده باشند مناسب به نظر می‌رسد.

۶-۱ ضرائب پتانسیل و ظرفیت

شکل ۶-۱ سه هادی با شکل دلخواه را نشان می‌دهد که روی آنها به ترتیب بارهای Q_1، Q_2، و Q_3 قرار دارند. پتانسیل هر یک از این هادیها را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$
\begin{aligned}
V_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 \\
V_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 \\
V_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3
\end{aligned}
\qquad (۶-۱)
$$



شکل ۶-۱ سه هادی دلخواه با بارهای Q_1، Q_2، و Q_3 و پتانسیلهای V_1، V_2، و V_3.

که در آن P_{ij} **ضرائب پتانسیل** نامیده می‌شوند، و به شکل هادیها، محل قرار گرفتنشان در فضا، و گذردهی محیط بین آنها بستگی دارد و مستقل از مقدار بارهاست. این رابطه را می‌توان به هر تعداد هادی دلخواهی تعمیم داد. اگر محیط بین هادیها خطی باشد، می‌توان نشان داد که

$$P_{ij} = P_{ji}$$

چون رابطهٔ ولتاژها و بارها خطی است، بارها را نیز می‌توان بر حسب ولتاژها بیان کرد. برای شکل ۶-۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} Q_۱ &= C_{۱۱}V_۱ + C_{۱۲}V_۲ + C_{۱۳}V_۳ \\ Q_۲ &= C_{۲۱}V_۱ + C_{۲۲}V_۲ + C_{۲۳}V_۳ \\ Q_۳ &= C_{۳۱}V_۱ + C_{۳۲}V_۲ + C_{۳۳}V_۳ \end{aligned} \qquad (۶-۲)$$

که در آن C_{ij} **ضرائب ظرفیت** نامیده می‌شوند.

انرژی چنین آرایشی را می‌توان بر حسب این ضرائب به صورت زیر نوشت

$$W = \frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{N}\sum_{k=۱}^{N} P_{jk}\, Q_j\, Q_k \qquad (۶-۳)$$

$$W = \frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{N}\sum_{k=۱}^{N} C_{jk}\, V_j\, V_k \qquad (۶-۴)$$

۶-۲ دو قطبی الکتریکی

قبلاً در مورد دو قطبی مطالبی دیده‌ایم، و در واقع دو قطبی الکتریکی اساس مبحث عایقها را تشکیل می‌دهد. انتخاب این بخش برای بحث کاملتر راجع به دو قطبی این است که می‌خواهیم پس از آن بسط تابع پتانسیل به چند قطبی ها را مطرح کنیم.

دو بار الکتریکی ناهمنام و مساوی q که به فاصلهٔ d از هم قرار گرفته باشند **دو قطبی الکتریکی** خوانده می‌شوند. کمیت $q\,d$ **گشتاور دو قطبی** نام دارد و به صورت بردار $\mathbf{p} = q\,d\,\hat{\mathbf{a}}$ بیان می‌شود. بردار $\hat{\mathbf{a}}$ بردار یکه‌ای است که امتداد دو بار، از بار منفی به بار مثبت را نشان می‌دهد. اگر دو قطبی در نقطهٔ $\mathbf{r}'$ قرار گرفته باشد، میدان آن در نقطهٔ $\mathbf{r}$ عبارت است از

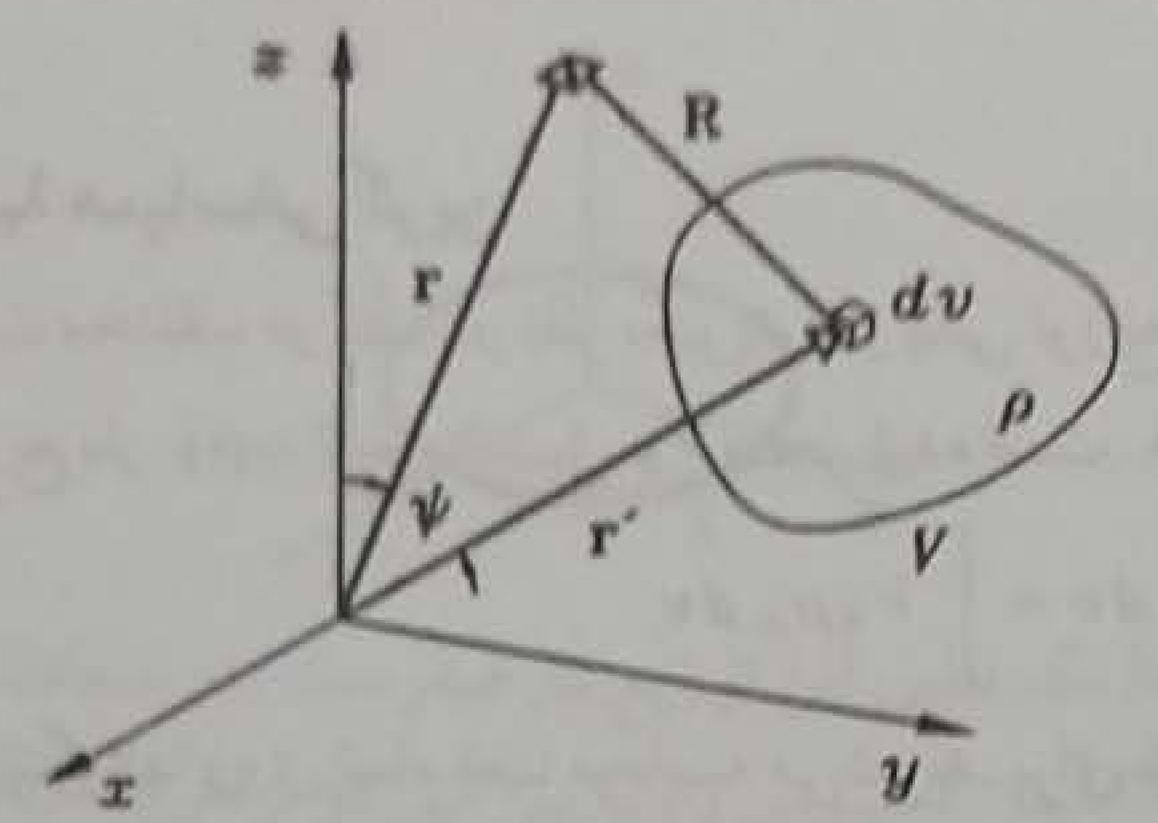
$$V(\mathbf{r}) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^۳} \qquad (۶-۵)$$

که در آن طبق معمول $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. اثبات رابطهٔ بالا را در تمام کتابهای الکترومغناطیس می‌توان یافت.

۶-۳ بسط چند قطبی

شکل ۶-۲ بار محدودی را نشان می‌دهد که با چگالی ρ در حجم V توزیع شده است. می‌خواهیم پتانسیل را در نقطهٔ $\mathbf{r}$ بیابیم. می‌دانیم که

$$V(\mathbf{r}) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_V \frac{\rho\, dv'}{|\mathbf{R}|} \qquad (۶-۶)$$



شکل ۶-۲ یک توزیع بار محدود و کمیتهای به کار رفته در بسط چند قطبی.

که در آن

$$\frac{۱}{|\mathbf{R}|}=\frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=(r^{۲}+r'^{۲}-۲rr'\cos\psi)^{-\frac{۱}{۲}}$$

پس

$$V(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int_V\frac{\rho\,dv'}{r}\left(۱+\frac{r'^{۲}}{r^{۲}}-۲\frac{r'}{r}\cos\psi\right)^{-\frac{۱}{۲}} \qquad (۷-۶)$$

توجه کنید که در این انتگرال r ثابت و r' و ψ متغیرند. عبارت داخل پرانتز را بسط می‌دهیم. برای این کار از بسط دوجمله‌ای زیر استفاده می‌کنیم

$$(۱-x)^{-\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۸}x^{۲}-\frac{۵}{۱۶}x^{۳}+\cdots \qquad (۸-۶)$$

در این صورت به دست می‌آوریم

$$\left(۱+\frac{r'^{۲}}{r^{۲}}-۲\frac{r'}{r}\cos\psi\right)^{-\frac{۱}{۲}}=۱+\frac{r'}{r}\cos\psi+\left(\frac{r'}{r}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۲}\cos^{۲}\psi-\frac{۱}{۲}\right)$$
$$+\left(\frac{r'}{r}\right)^{۳}\left(\frac{۵}{۲}\cos^{۳}\psi-\frac{۳}{۲}\cos\psi\right)+\cdots \qquad (۹-۶)$$

بنابراین تابع پتانسیل را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$V(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{r}\int\rho\,dv'+\frac{۱}{r^{۲}}\int r'\cos\psi\rho\,dv'\right.$$
$$\left.+\frac{۱}{r^{۳}}\int r'^{۲}\left(\frac{۳}{۲}\cos^{۲}\psi-\frac{۱}{۲}\right)\rho\,dv'+\cdots\right] \qquad (۱۰-۶)$$

به کمک توابع لژاندر جدول ۶-۱ (جدول ۵-۲) می‌توان عبارت بالا را به صورت جمع و جور زیر نوشت

$$V(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{r^{n+۱}}\int r'^{n}\mathrm{P}_n(\cos\psi)\rho\,dv' \qquad (۱۱-۶)$$

جملهٔ اول این بسط را **جملهٔ تک قطبی**، جملهٔ دوم را **جملهٔ دو قطبی**، جملهٔ سوم را **جملهٔ چهار قطبی** و ... می‌نامند.

توجه کنید که رابطهٔ بالا یک رابطهٔ تقریبی نیست؛ البته در مواردی که بخواهیم از این عبارت در عمل استفاده کنیم، باید تعداد محدودی از جملات را در نظر بگیریم که به نوعی تقریب منجر می‌شود. در فاصله‌های دور غالباً می‌توان از جملات مرتبه بالا چشم پوشید و تقریب خوبی از پتانسیل به دست آورد.

۶-۴ قضیهٔ همپاسخی گرین

دو وضعیت مختلف در فضا در نظر بگیرید، در یکی توزیع بار ρ_a تابع پتانسیل V_a را ایجاد کرده است، و در دومی توزیع بار ρ_b به تابع پتانسیل V_b منجر شده است. می‌توان نشان داد که

$$\int V_a \rho_b \, dv = \int V_b \rho_a \, dv$$

که در آن انتگرالها روی تمام فضا محاسبه می‌شوند. برای بارهای خطی، سطحی، و نقطه‌ای $\rho \, dv$ به ترتیب به $\lambda \, dl$، $\sigma \, ds$، و q تبدیل می‌شود. توجه کنید که دو وضعیت a و b هیچ ارتباطی با هم ندارند و اصلاً می‌توانند به دو فضای مختلف مربوط باشند. اثبات این قضیه به سادگی با استفاده از قضیهٔ گرین زیر ثابت می‌شود

$$\int_V (T\nabla^2 U - U\nabla^2 T) \, dv = \oint_S (T\nabla U - U\nabla T) \cdot \mathbf{ds}$$

به همین خاطر این قضیه را **قضیهٔ همپاسخی گرین** می‌نامند.

در حالتی که بارها روی هادیهای کامل قرار دارند، چون هادی یک سطح همپتانسیل است تمام آن دارای ولتاژ یکسانی است و روی هر هادی

$$\int V_a \sigma_b \, ds = V_a \int \sigma_b \, ds = V_a Q_b$$

پس

$$\Sigma V_a Q_b = \Sigma V_b Q_a$$

یعنی مجموع حاصلضرب پتانسیلهای هادیها در وضعیت a در بار هادیها در وضعیت b با مجموع حاصلضرب پتانسیلهای هادیها در وضعیت b در بار هادیها در وضعیت a برابرست.

حل مسئله

مثال ۱

دو هادی با شکل نامعین در فضای آزاد قرار دارند. هادی یک به زمین (پتانسیل ۰) وصل شده است، و روی هادی دو بار خالصی وجود ندارد. نشان دهید که بار روی هادی اول صفر و پتانسیل هادی دوم نیز صفرست.

حل

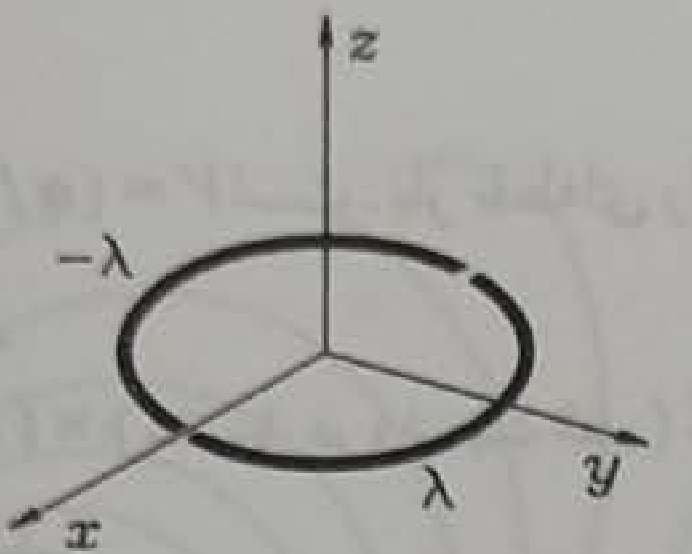
با توجه به معادلات (۶-۱) داریم

$$V_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2$$
$$V_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2$$

که در آنها $V_1 = 0$ و $Q_2 = 0$. با این جایگذاری‌ها معادلهٔ اول نشان می‌دهد که باید داشته باشیم $Q_1 = 0$ و معادلهٔ دوم به دست می‌دهد $V_2 = 0$.

مثال ۲

حلقه‌ای به شعاع a در صفحهٔ $x = 0$ قرار دارد. روی نیمهٔ واقع در $y > 0$ باری با چگالی λ C/m و روی نیمهٔ دیگر باری با چگالی $-\lambda$ C/m قرار دارد. پتانسیل نقاط دور از حلقه را بیابید.



شکل ۶-۳ توزیع بار مثال ۲.

حل

چون مجموع بارهای روی حلقه صفرست، جملهٔ تک قطبی این توزیع بار صفرست. در معادلهٔ (۶-۱۰) زاویهٔ ψ زاویهٔ بین بردار منبع $\mathbf{r}'$ و بردار میدان $\mathbf{r}$ است. کسینوس زاویهٔ بین این دو بردار با حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار یکه‌ای که امتداد این دو بردار را نشان می‌دهد برابرست. یعنی

$$\cos\psi = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}' = \hat{\boldsymbol{\rho}}' = \cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}}$. پس

$$\begin{aligned}\cos\psi &= (\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}}) \\ &= \sin\theta\cos\phi\cos\phi' + \sin\theta\sin\phi\sin\phi' \\ &= \sin\theta\cos(\phi - \phi')\end{aligned}$$

حال باید این انتگرال را حساب کنیم

$$\begin{aligned}\int r'\cos\psi\lambda\,dl' &= \int_0^{\pi} a\cos\psi\lambda\,(a\,d\phi') - \int_{\pi}^{2\pi} a\cos\psi\lambda\,(a\,d\phi') \\ &= a^2\lambda\sin\theta\left[\int_0^{\pi}\cos(\phi-\phi')\,d\phi' - \int_{\pi}^{2\pi}\cos(\phi-\phi')\,d\phi'\right] \\ &= 4a^2\lambda\sin\theta\sin\phi\end{aligned}$$

اگر از جملات چهار قطبی و بالاتر چشم بپوشیم، داریم

$$V = \frac{4a^2\lambda\sin\theta\sin\phi}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{a^2\lambda\sin\theta\sin\phi}{\pi\varepsilon_0 r^2}$$

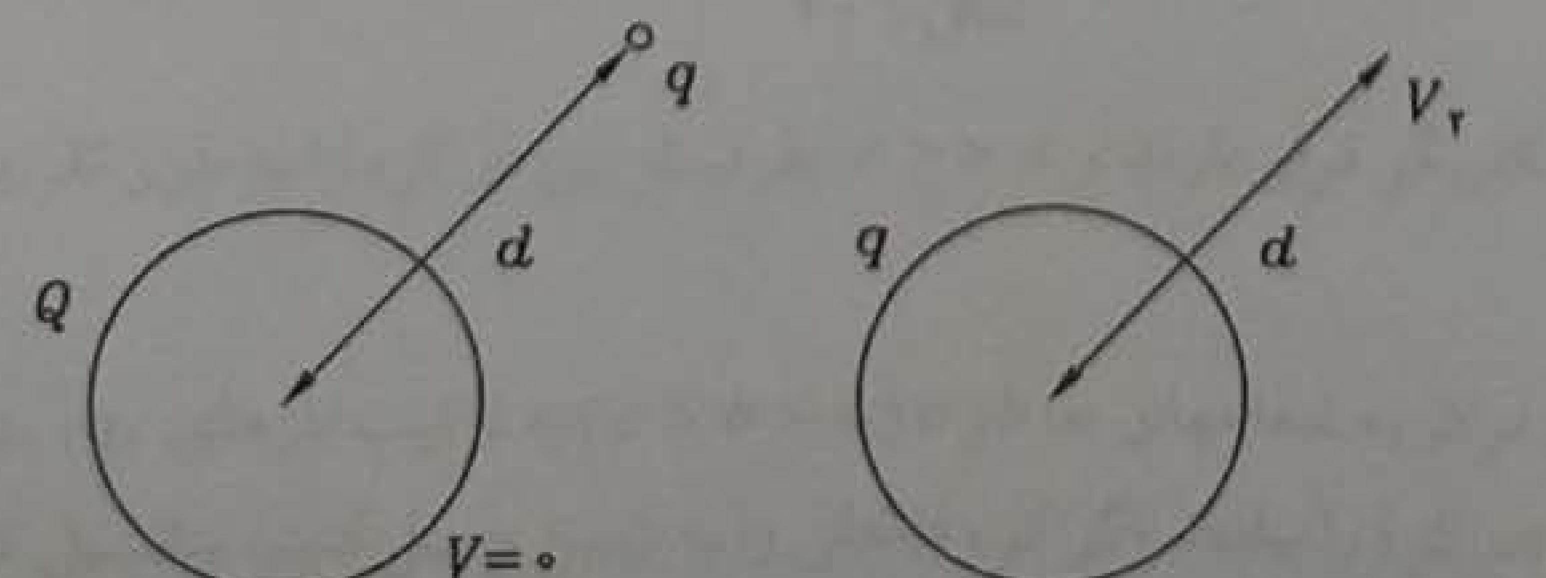
$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۳

بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ b از مرکز یک کرهٔ هادی زمین شده‌ای به شعاع a قرار دارد ($a < b$). کل بار القا شده بر روی کرهٔ هادی را بیابید.

حل

این دو وضعیت را در نظر بگیرید: (الف) بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ d از مرکز کرهٔ هادی واقع در پتانسیل ۰ قرار دارد، روی کرهٔ هادی بار Q القا شده است؛ (ب) بار q روی کره هادی قرار دارد و پتانسیل در فاصلهٔ b از



شکل ۶-۴ وضعیت هندسی مثال ۳.

مرکز کره $(q/4\pi\varepsilon_\circ b)=V$ است. بار نقطه‌ای را باری توزیع شده روی کره‌ای بسیار کوچک فرض کنید.

طبق اصل همپاسخی

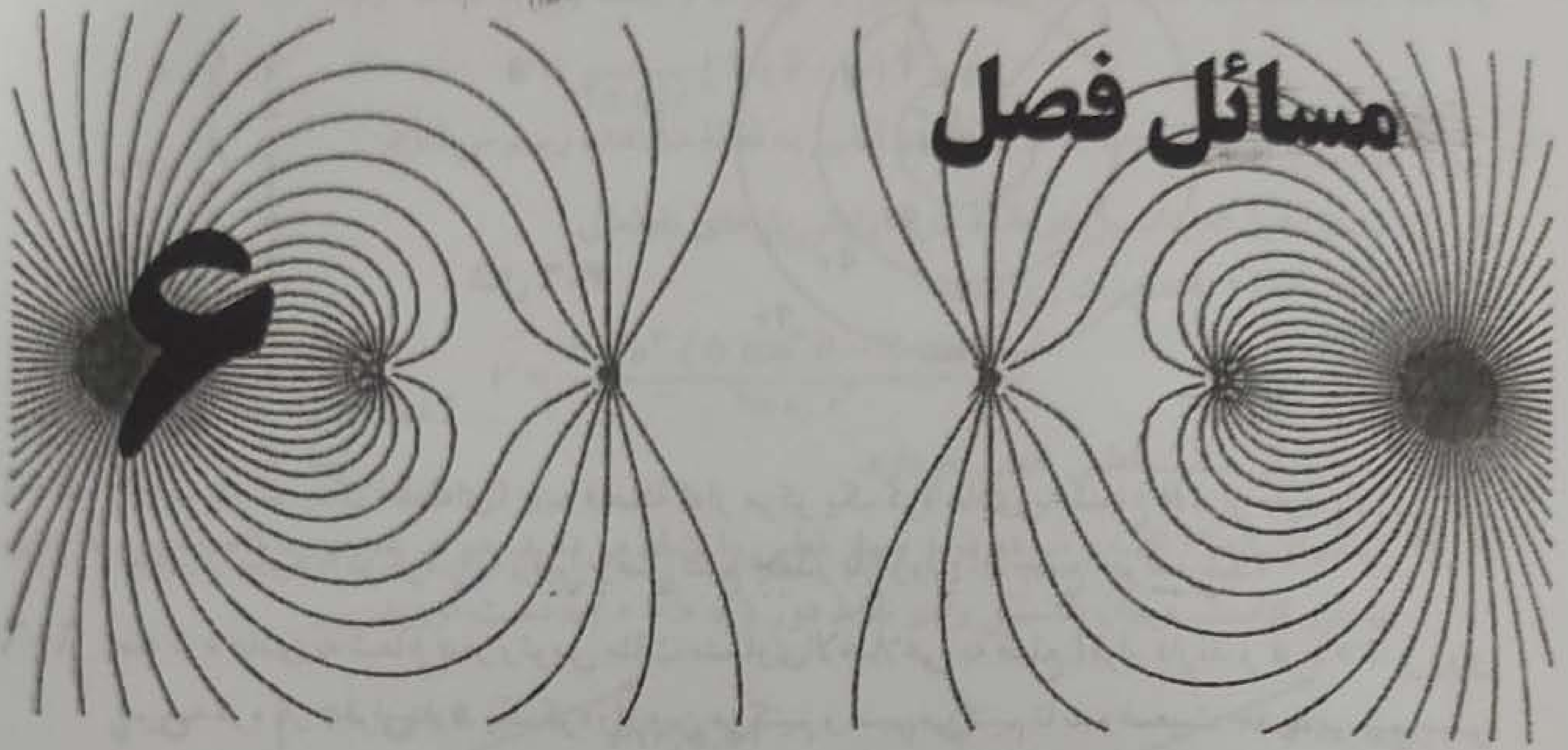
(بار در وضعیت ب) × (پتانسیل در وضعیت الف) $\sum$ = (بار در وضعیت الف) × (پتانسیل در وضعیت ب) $\sum$

شکل ۶-۴ را نگاه کنید

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ b}\times q+\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ a}\times Q=\circ\times q+V_a\times\circ$$

که V_a پتانسیل در محل بار نقطه‌ای در وضعیت الف است. این رابطه نتیجه می‌دهد

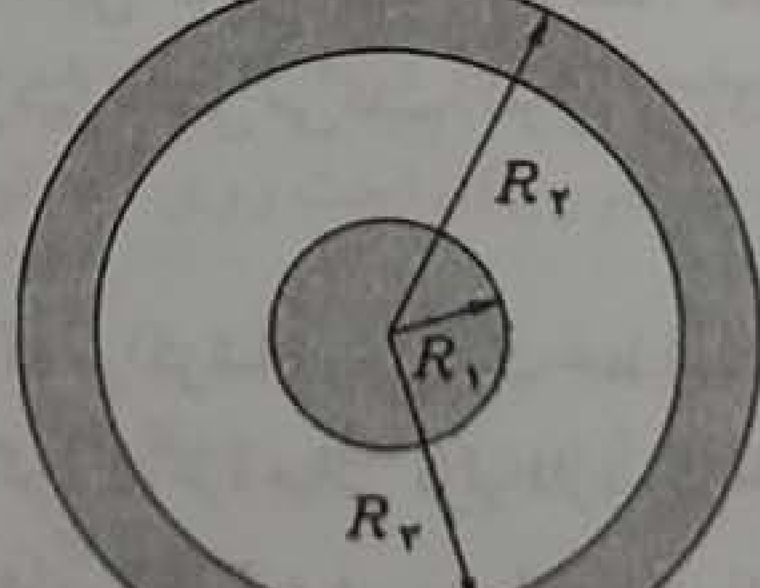
$$Q=-\frac{qa}{b}$$



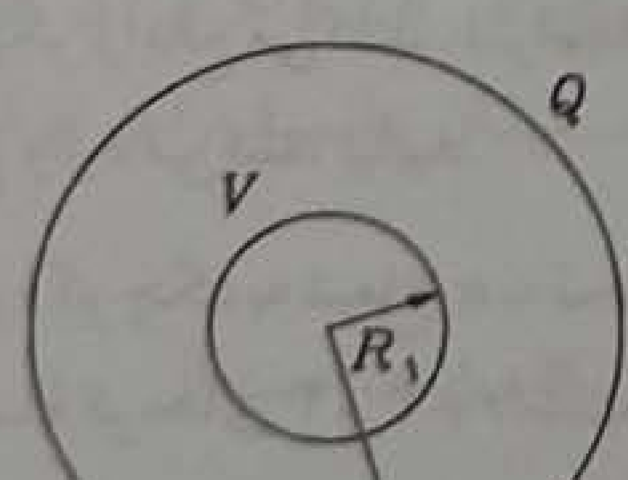
۶ مسائل فصل

۶-۱ کره‌ای هادی به شعاع R_1 هم مرکز با یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی R_3 و شعاع خارجی R_2 قرار دارد. ضرایب پتانسیل بین دو هادی را بیابید.

۶-۲ یک کره هادی به شعاع R_1 در پتانسیل V نگهداشته شده است. یک پوستهٔ کروی هادی به شعاع R_2 هم مرکز با کرهٔ هادی قرار دارد و روی آن بار Q گذاشته شده است. بار روی کره داخلی و پتانسیل کرهٔ بیرونی را بیابید.



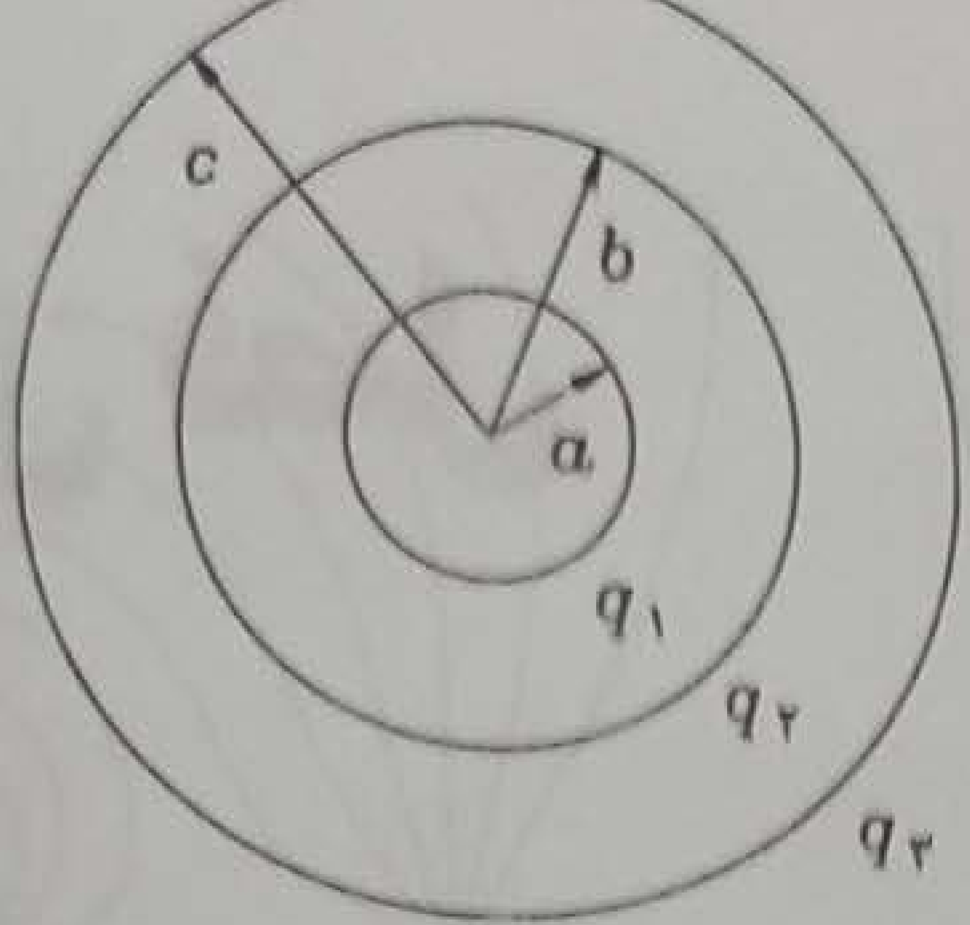
شکل ۶-۱



شکل ۶-۲

۶-۳ دو کره با شعاع a به فاصله r از یکدیگر قرار دارند و $a << r$. ظرفیت بین دو کره را به طور تقریبی بیابید.

۶-۴ روی سه پوستهٔ کروی هادی هم مرکز به شعاعهای a، b و c ($c > b > a$) به ترتیب بارهای q_1، q_2 و q_3 گذاشته شده است. پتانسیل هر کره را بیابید. اگر کره داخلی را به زمین وصل کنیم، پتانسیل کرهٔ



شکل ۶-۴

بیرونی چه خواهد شد؟

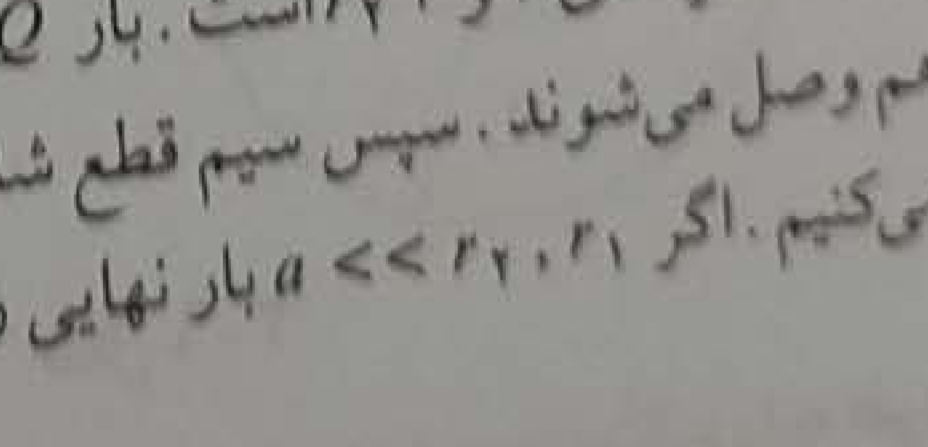
۵-۶ بار بسیار کوچک (نقطه‌ای) q به فاصلهٔ d از مرکز یک کرهٔ هادی به شعاع R قرار دارد. پتانسیل کرهٔ هادی را بیابید. اگر کره را به زمین وصل کنیم چقدر بار روی آن جمع خواهد شد؟

۶-۶ سه کرهٔ هادی به شعاع a در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع l قرار دارند و $a << l$. بر روی هر سه کره بار q قرار دارد. یک کره را زمین می‌کنیم و صبر می‌کنیم تا به وضعیت جدید برسیم. سپس کرهٔ دوم را به زمین وصل کرده، صبر می‌کنیم تا به تعادل برسیم. سرانجام این کار را در مورد کرهٔ سوم تکرار می‌کنیم. بار نهایی روی سه کره را بیابید.

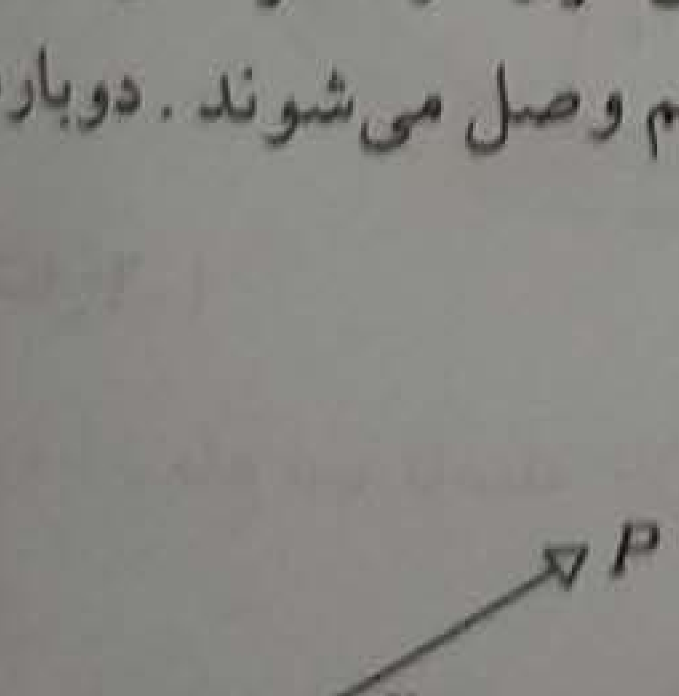
۷-۶ سه کرهٔ هادی هم اندازه در سه راس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. کره اول را توسط یک باتری به پتانسیل V وصل کرده و سپس آن را از باتری جدا می‌کنیم. بار Q_1 روی این کره باقی می‌ماند. سپس کرهٔ دوم را به پتانسیل V وصل کرده و آن را جدا می‌کنیم بار Q_2 روی این کره باقی می‌ماند. حال اگر کره سوم را به پتانسیل V وصل کرده و آن را از باتری جدا کنیم چه باری روی آن خواهیم داشت؟

۸-۶ دو کرهٔ هادی مشابه S_1 و S_2 به شعاع a به نحوی قرار دارند که فاصلهٔ مرکز تا مرکزشان r است. روی کرهٔ S_1 بار Q_1 را قرار می‌دهیم، پتانسیل S_1 به V می‌رسد و با نیروی F کرهٔ دوم را جذب می‌کند. سپس بار Q_2 را روی کرهٔ S_2 قرار می‌دهیم تا پتانسیل آن کره هم به V برسد. اکنون دو کره با نیروی F همدیگر را دفع می‌کنند. سرانجام کرهٔ S_1 را به زمین وصل می‌کنیم. بار روی S_1 و نیرویی را که دو کره به هم وارد می‌کنند بیابید.

۹-۶ سه کرهٔ کوچک به شعاع a به نحوی قرار دارند که مراکزشان روی یک خط است. فاصلهٔ کرهٔ ۱ و ۲، r_1 و فاصلهٔ کره‌های ۲ و ۳، r_2 است. بار Q روی کرهٔ ۲، کرهٔ میانی قرار دارد. کره‌های ۲ و ۱ با سیمی به هم وصل می‌شوند. سپس سیم قطع شده کره‌های ۲ و ۳ به هم وصل می‌شوند. دوباره سیم را قطع می‌کنیم. اگر $r_1, r_2 >> a$ بار نهایی روی کرهٔ ۳ را بیابید.



شکل ۶-۹

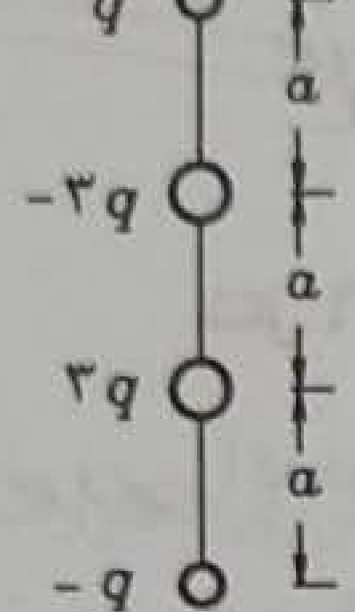


شکل ۶-۱۰

۶-۱۰ نشان دهید که میدان دور یک دو قطبی را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r^3}\left[3 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p} \right]$$

$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ برداری است که از محل دو قطبی به نقطهٔ مشاهده رسم می‌شود.



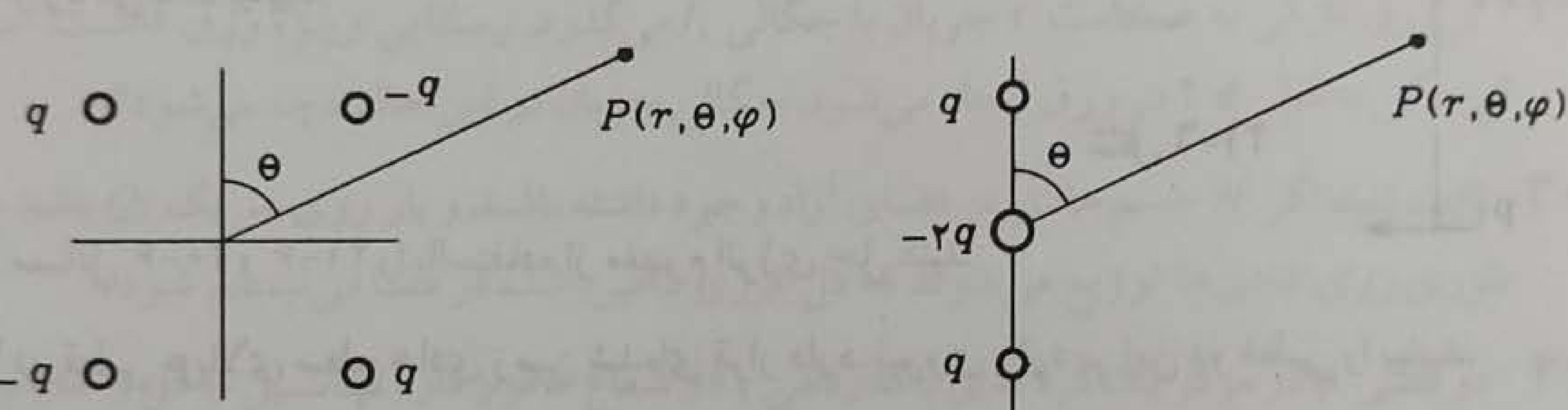
شکل ۶-۱۱

۶-۱۱ نشان دهید که پتانسیل در نقاط دور آرایش بارهای نقطه‌ای شکل ۶-۱۱ به صورت زیرست

$$V = \frac{3 q a^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{4\pi \varepsilon_0 r^4}$$

این آرایش هشت قطبی خطی نام دارد.

۶-۱۲ شکلهای ۶-۱۲ الف و ب دو نوع چهار قطبی را نشان می‌دهند. در هر دو مورد فاصلهٔ بین بارهای مجاور d است. میدان پتانسیل را در نقاط دور ($r >> d$) به دست آورید.



شکل ۶-۱۲

۶-۱۳ بر روی یک کره به شعاع A باری با چگالی $\sigma = \sigma \cos\theta$ قرار دارد. گشتاور دو قطبی این توزیع بار را بیابید و میدان پتانسیل ناشی از آن را به دست آورید.

۶-۱۴ روی نیمکره‌ای به شعاع R بار سطحی با چگالی یکنواخت σ قرار دارد. گشتاور دو قطبی این توزیع بار را بیابید. مرکز نیمکره را مبدأ بگیرید.

۶-۱۵ دو حلقهٔ هم صفحه (هر دو در $z = 0$) و هم مرکز به شعاعهای a و b ($a > b$) در نظر بگیرید که بارهای q و $-q$ به طور یکنواخت روی آنها توزیع شده باشد. میدان پتانسیل را در فواصل دور به دست آورید.

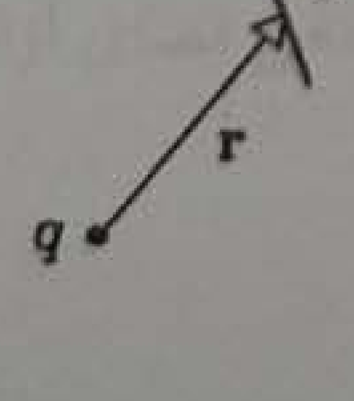
۶-۱۶ ثابت کنید نیروی وارد بر دو قطبی $\mathbf{p}$ واقع در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ عبارت است از

$$\mathbf{f} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

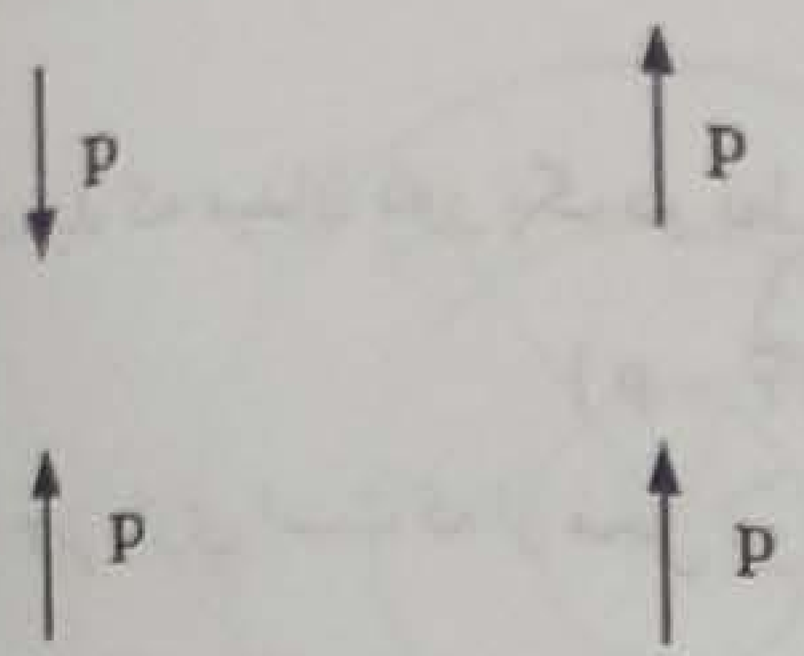
۶-۱۷ ثابت کنید نیروی وارد بر دو قطبی $\mathbf{p}$ واقع در میدان الکتروستاتیک $\mathbf{E}$ را می‌توان از رابطهٔ $\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ یافت. ***راهنمایی:*** از اتحاد برداری زیر استفاده کنید

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

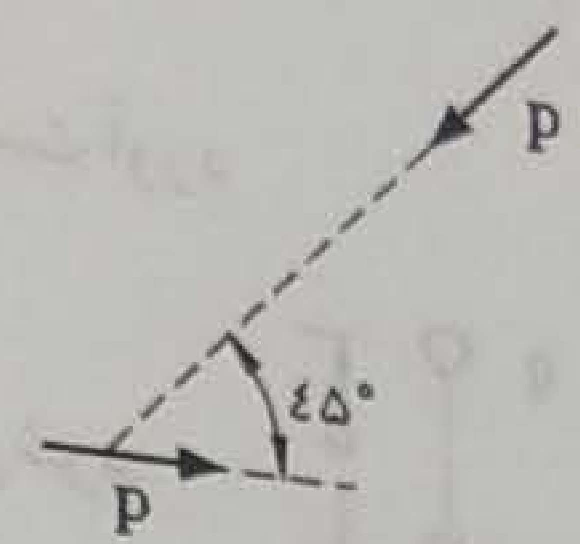
۶-۱۸ دو قطبی $\mathbf{p}$ به فاصله r از بار نقطه‌ای q قرار گرفته است. نیرو و گشتاور وارد بر دو قطبی را بیابید.



شکل ۶-۱۸



شکل ۶-۲۰



شکل ۶-۱۹

۶-۱۹ نیرویی را که دو قطبی‌های شکل ۶-۱۹ به هم وارد می‌کنند بیابید. فاصلهٔ دو قطبی‌ها r است.

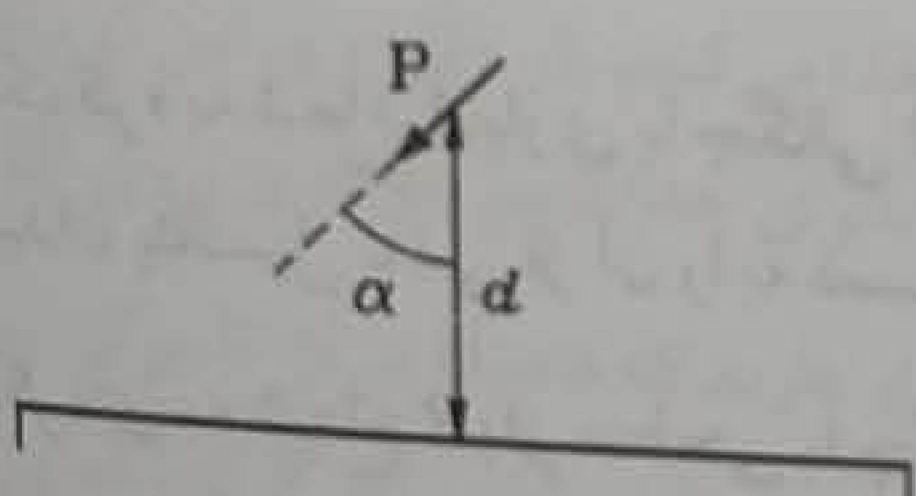
۶-۲۰ نیرویی که دو قطبی هم اندازه و همراستا به هم وارد می‌کنند را بیابید. هر دو حالت نشان داده شده در شکل ۶-۲۰ را در نظر بگیرید.

۶-۲۱ دو دو قطبی $\mathbf{p}_1$ و $\mathbf{p}_2$ به موازات هم و به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند. نیرویی را که دو قطبیها به هم وارد می‌کنند بیابید.

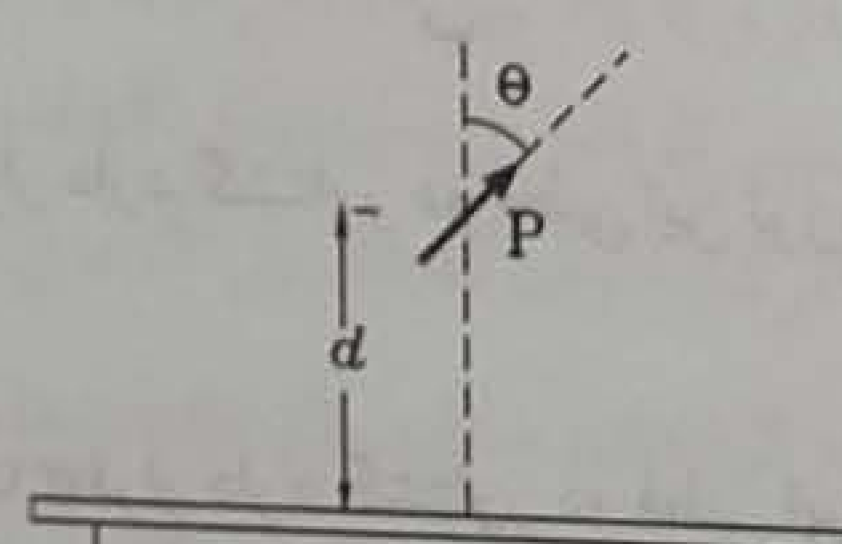
شکل ۶-۲۱

۶-۲۲ مسائل ۶-۲۰ و ۶-۲۱ را بااستفاده از مفهوم انرژی حل کنید.

۶-۲۳ دو قطبی $\mathbf{p}$ بالای سطح هادی زمین شده‌ای قرار دارد. نیروی وارد بر این دو قطبی را بیابید.



شکل ۶-۲۴

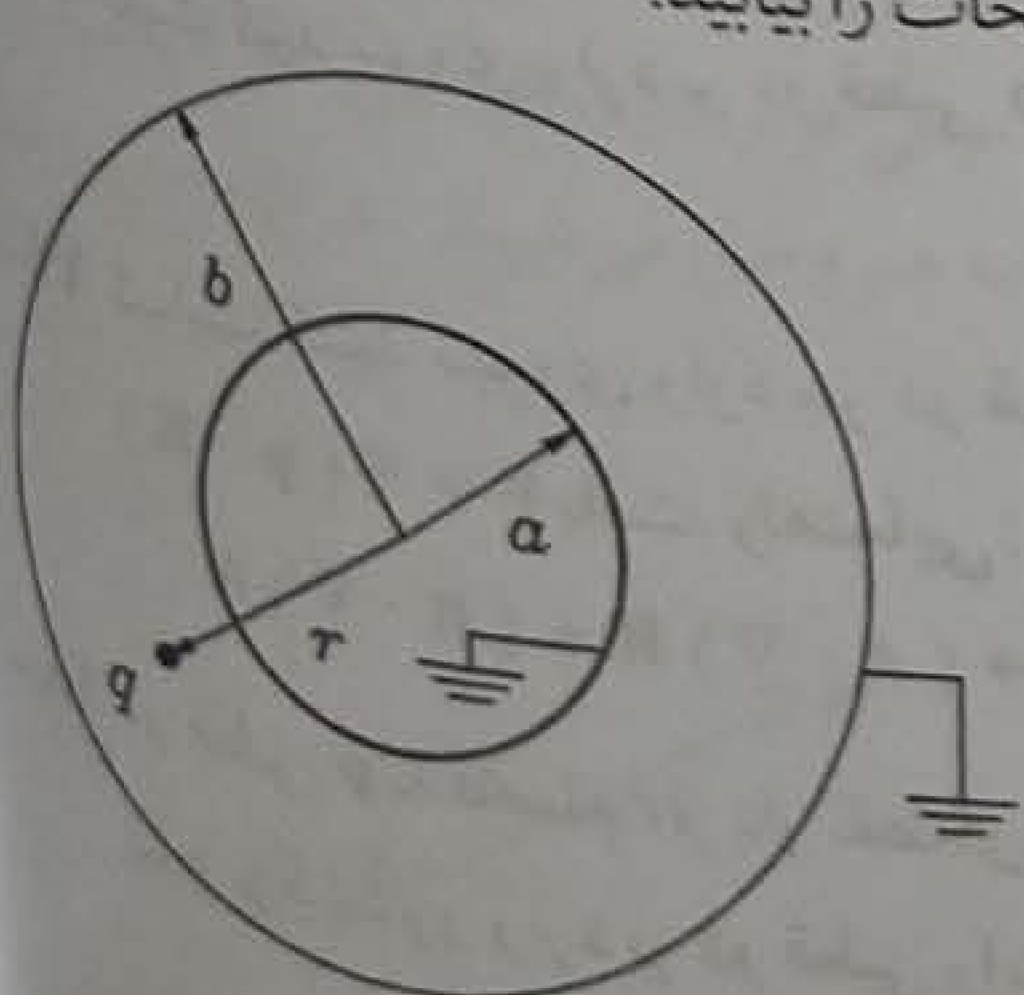


شکل ۶-۲۳

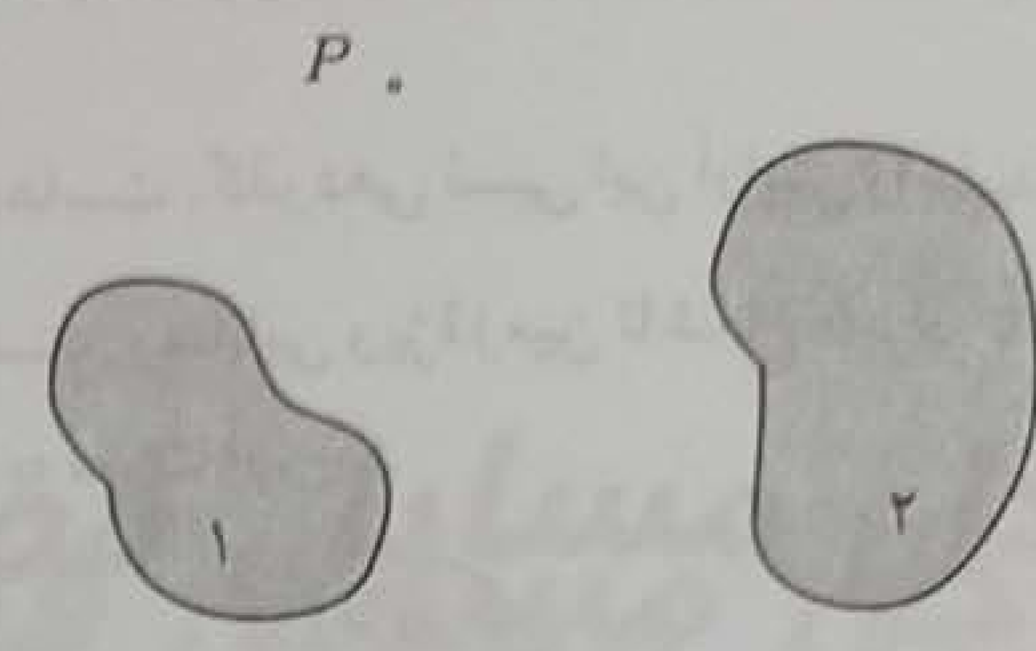
۶-۲۴ دو قطبی $\mathbf{p}$ به فاصلهٔ d از یک سطح هادی کامل قرار دارد. گشتاوری وارد بر دو قطبی را بیابید.

۶-۲۵ دو صفحه یک خازن مسطح به پتانسیل صفر وصل شده‌اند و بار q به فاصلهٔ x از یکی از صفحات قرار دارد. فاصله بین دو صفحه d است. بار القا شده روی صفحات را بیابید.

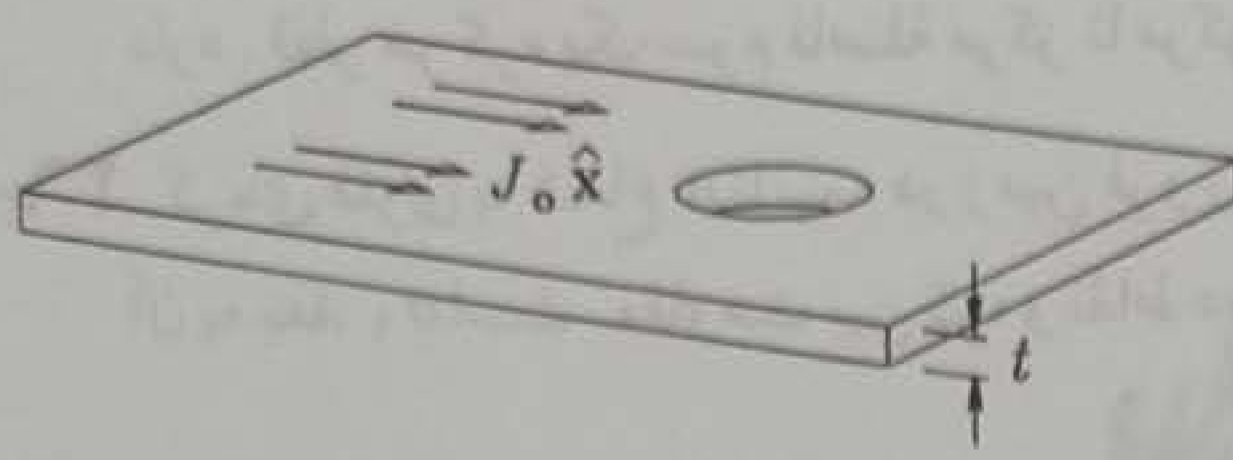
۶-۲۶ دو پوسته کروی تشکیل دهندهٔ خازن کروی شکل ۶-۲۶ را به پتانسیل صفر وصل کرده‌ایم. بار نقطه‌ای q را در فاصلهٔ r از مرکز دو کره قرار داده‌ایم. بار القا شده روی پوستهٔ کروی داخلی را بیابید.



شکل ۶-۲۶



شکل ۶-۲۸



شکل ۶-۲۹

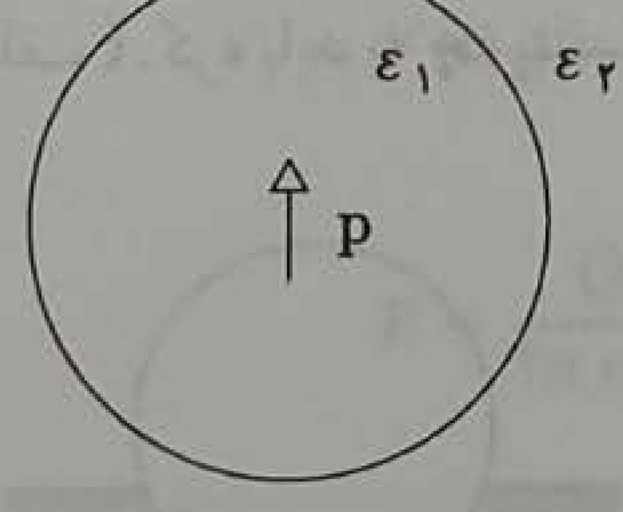
۶-۲۷ دو کرهٔ هادی به شعاع R و بار q_1 و q_2 به فاصلهٔ r از هم قرار دارند و $r >> R$. انرژی الکترواستاتیک سیستم را بیابید.

۶-۲۸ اگر دو هادی ۱ و ۲ در پتانسیلهای V_1 و V_2 قرار داشته باشند، پتانسیل نقطهٔ P برابر V_P می‌شود. اگر دو هادی را به زمین وصل کنیم و در نقطهٔ P بار Q قرار دهیم، چه باری روی هادیها القا می‌شود؟

۶-۲۹ از ورق نازکی به ضخامت t جریان با چگالی J_0 می‌گذرد. رسانایی ویژهٔ ورق σ است. سوراخ کوچکی به قطر $2d$ در ورق ایجاد می‌شود. چگالی جریان در این حالت چه می‌شود؟

۶-۳۰ ثابت کنید اگر N جسم هادی در فضای آزاد وجود داشته باشند و بار روی هر یک Q_i باشد، بارها طوری روی هادی‌ها توزیع می‌شوند که کل انرژی ذخیره شده در فضا می‌نیمم شود.

۶-۳۱ دو قطبی $\mathbf{p}$ در مرکز یک کرهٔ عایق با گذردهی ε_1 و شعاع a قرار دارد. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.



شکل ۶-۳۱

۶-۳۲ روی حلقه‌ای به شعاع a واقع در صفحهٔ $z = 0$ و به مرکز مبدا باری با توزیع خطی زیر قرار دارد

$$\lambda = k \cos\phi \quad \text{C/m}$$

پتانسیل را در نقاط دور از حلقه بیابید.

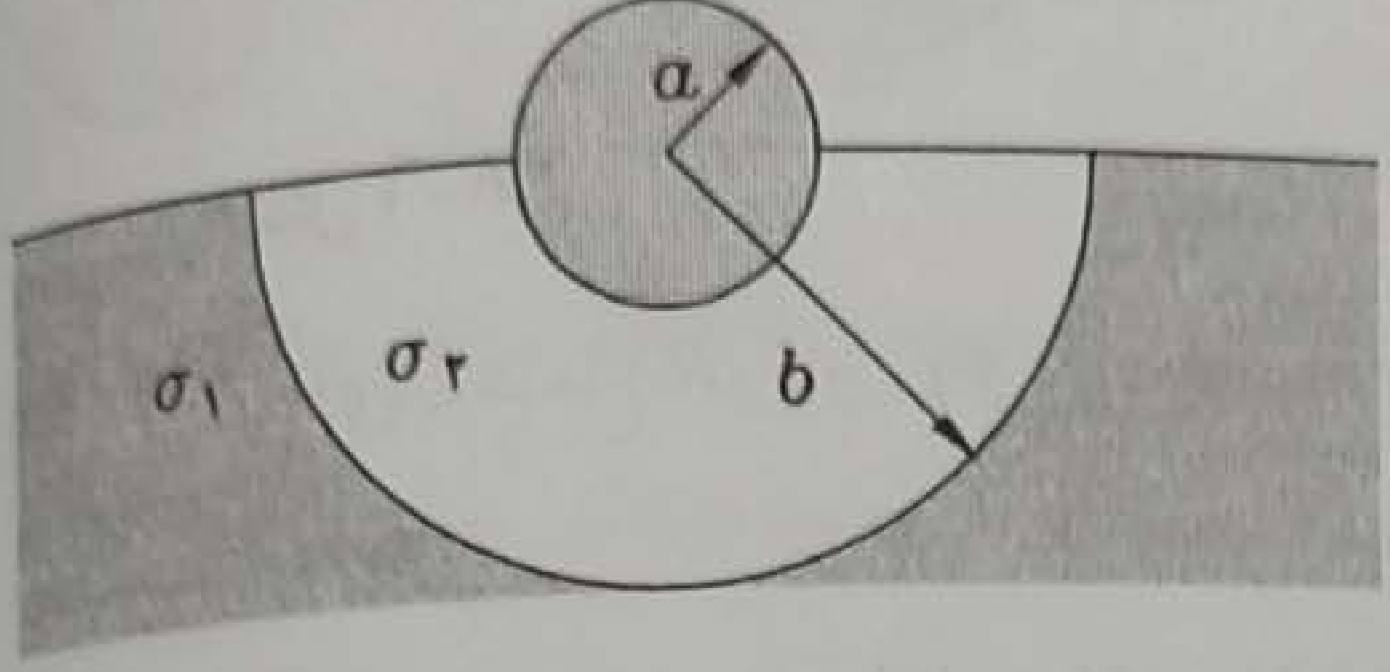
۶-۳۳ روی حلقهٔ مسئلهٔ قبل باری با چگالی یکنواخت λ C/m قرار دارد. پتانسیل را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

۶-۳۴ در محیطی با رسانایی ویژهٔ σ چگالی جریان یکنواخت وجود دارد. حفره‌ای کروی به شعاع a در این محیط ایجاد می‌کنیم. چگالی جریان به چه صورتی در می‌آید؟ این مسئله مشابه سه بعدی مسئلهٔ ۶-۲۸ است.

۶-۳۵ آرایه‌ای سه بعدی از کره‌های فلزی در ماده‌ای سبک با گذردهی همانند گذردهی فضای آزاد قرار

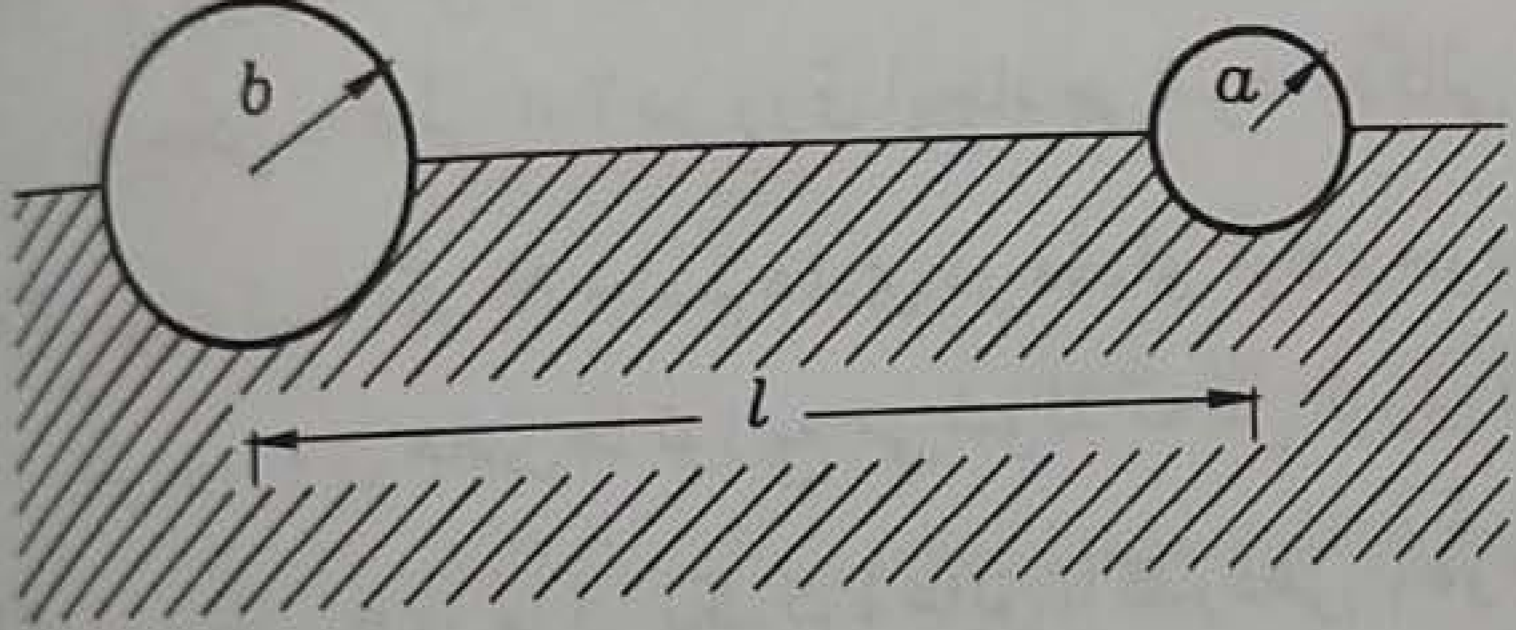
دارد. قطر هر کره یک سوم فاصلهٔ مرکز تا مرکز کره‌هاست. گذردهی نسبی این آرایش را بیابید.

۶-۳۶ کره‌ای فلزی به شعاع a تا نیمه در زمین فرو رفته است. رسانایی ویژهٔ زمین تا شعاع b برابر σ_2 و از آن به بعد σ_1 است. مقاومت بین کره و نقاط دور را به دست آورید.



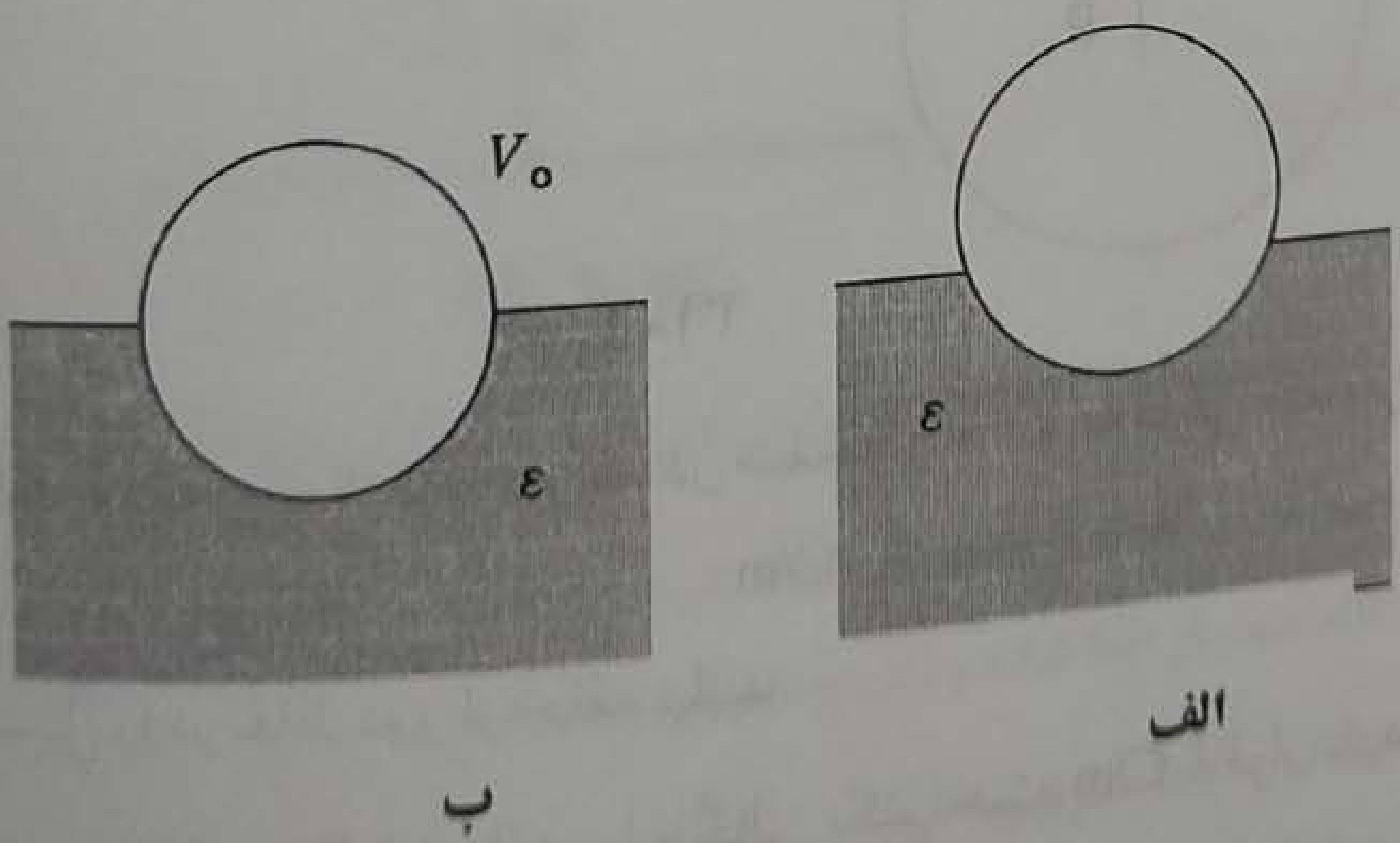
شکل ۶-۳۶

۶-۳۷ دو کرهٔ فلزی به شعاعهای a و b تا نیمه در زمین فرو رفته‌اند. رسانایی ویژهٔ زمین σ و فاصلهٔ مرکز تا مرکز کره‌ها l است؛ $l >> a,b$. مقاومت بین دو کره را بیابید.



شکل ۶-۳۷

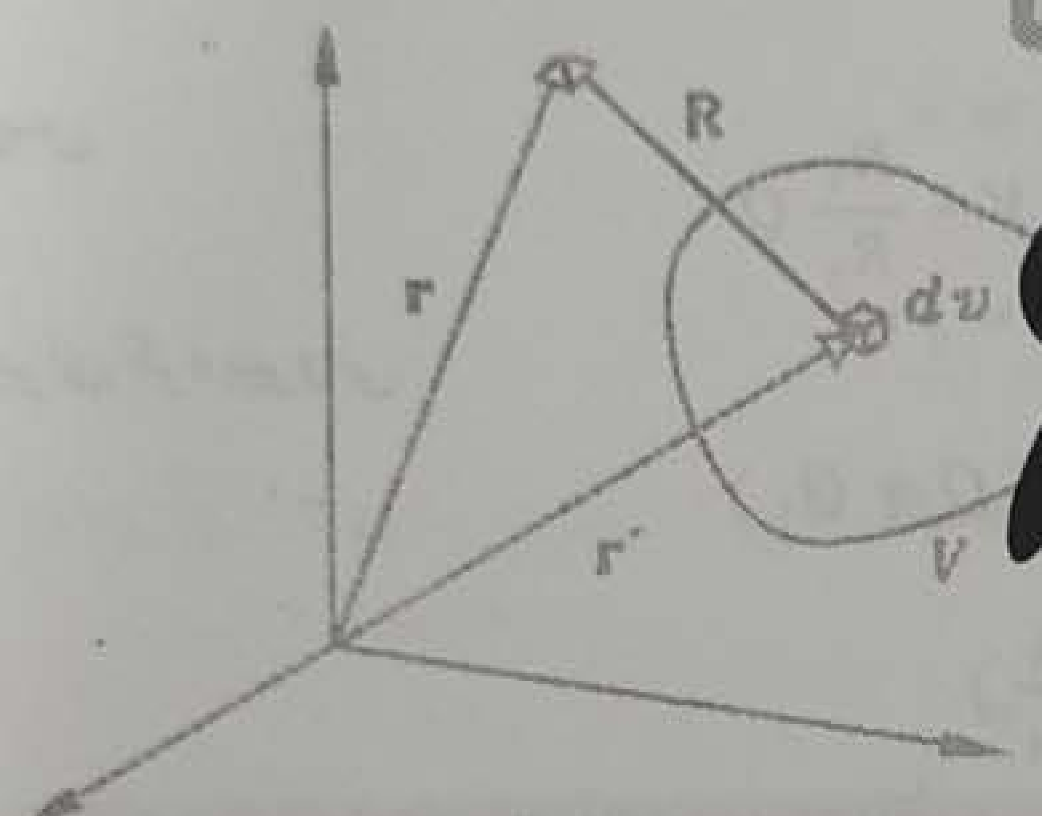
۶-۳۸ کره‌ای هادی به وزن W در مایع دی‌الکتریکی با گذردهی ε قرار گرفته و یک چهارم آن در مایع فرو رفته است (شکل ۶-۳۸ الف). کره باید به چه پتانسیلی رسانده شود تا نیمی از آن در مایع فرو رود (شکل ۶-۳۸ ب)؟



شکل ۶-۳۸

حل مسایل فصل

۶



۶-۱ روی هادی داخلی بار Q_1 و روی هادی خارجی بار Q_2 را قرار می‌دهیم. میدان خارج پوسته، $r > R_2$
مانند میدان یک بار نقطه‌ای $Q_1 + Q_2$ واقع در مرکز کره‌هاست، پس

$$V_2 = V(R_2) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi \varepsilon_0 R_2}$$

میدان بین دو هادی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

پس

$$V_1 = V(R_1) = -\int_{R_2}^{R_1} E \cdot dr + V(R_2)$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi \varepsilon_0 R_2}$$

چون $V_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2$ و $V_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2$

$$P_{11} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$P_{21} = P_{12} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 R_2}$$

$$P_{22} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 R_2}$$

۶-۲ ضرایب پتانسیل بین دو هادی موجود در این مسئله عبارت‌اند از (کره داخلی را هادی در نظر

می‌گیریم)

$$P_{۱۱} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ R_۱}$$

$$P_{۱۲} = P_{۲۲} = P_{۲۱} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ R_۲}$$

برای کره داخلی داریم

$$V = P_{۱۱}\, Q_۱ + P_{۱۲}\, Q$$

پس

$$Q_۱ = \frac{V - P_{۱۲}\, Q}{P_{۱۱}} = ۴\pi \varepsilon_\circ R_۱ V - \frac{R_۱}{R_۲} Q$$

برای کره بیرونی

$$V_۲ = P_{۲۱}\, Q + P_{۲۲}\, Q_۱ = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ R_۲}(Q + Q_۱)$$

$$= \frac{R_۱}{R_۲} V + \frac{Q}{۴\pi \varepsilon_\circ R_۲}\left(۱ - \frac{R_۱}{R_۲}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=\circ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=\circ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=\circ \,|\, \oint E\cdot dl=\circ$

۶-۳ چون $a << r$، ضرایب پتانسیل دو کره عبارت‌اند از

$$P_{۱۲} = P_{۲۱} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ r} \quad ، \quad P_{۱۱} = P_{۲۲} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ a}$$

اگر بار Q را روی کرهٔ ۱ و بار $Q-$ روی کرهٔ ۲ قرار گیرد

$$V_۱ = P_{۱۱}\, Q + P_{۱۲}(-Q)$$

$$V_۲ = P_{۲۱}\, Q + P_{۲۲}(-Q)$$

اختلاف پتانسیل بین دو کره $V = V_۱ - V_۲$ است

$$V = V_۱ - V_۲ = Q(P_{۱۱} + P_{۲۲} - ۲P_{۱۲})$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{۱}{P_{۱۱} + P_{۲۲} - ۲P_{۱۲}} = ۲\pi \varepsilon_\circ \frac{ar}{r - a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=\circ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=\circ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=\circ \,|\, \oint E\cdot dl=\circ$

۶-۴ می‌دانیم که

$$P_{۱۱} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ a}$$

$$P_{۱۲} = P_{۲۱} = P_{۲۲} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ b}$$

پس

$$P_{۱۳} = P_{۳۱} = P_{۲۳} = P_{۳۲} = P_{۳۳} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ c}$$

$$V_۱ = P_{۱۱}\, q_۱ + P_{۱۲}\, q_۲ + P_{۱۳}\, q_۳$$

$$= \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_\circ}\left(\frac{q_۱}{a} + \frac{q_۲}{a} + \frac{q_۳}{a}\right)$$

$$V_۲ = P_{۲۱}\, q_۱ + P_{۲۲}\, q_۲ + P_{۲۳}\, q_۳$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{b}+\frac{q_2}{b}+\frac{q_3}{b}\right)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1+q_2+q_3}{c}\right)$$

وقتی پتانسیل کرهٔ داخلی را صفر می‌کنیم، بار روی آن تغییر می‌کند، اگر مقدار بار جدید را q'_1بنامیم خواهیم داشت

$$0 = P_{11}q'_1 + P_{12}q_2 + P_{13}q_3$$

که نتیجه می‌دهد

$$q'_1 = -a\left(\frac{q_2}{b}+\frac{q_3}{c}\right)$$

پس پتانسیل کره بیرونی برابر است با

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(q'_1+q_2+q_3)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{q_2(b-a)}{b}+\frac{q_3(c-a)}{c}\right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۶-۵ اگر کرهٔ هادی را جسم ۱ و جسمی را که بار روی آن قرار دارد جسم ۲ بنامیم خواهیم داشت

$$V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2$$

$$V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2$$

که در آن $Q_1 = 0$ و $Q_2 = q$. اگر بار qروی کره قرار داشته باشد، پتانسیل در محل بار نقطه‌ای $q / 4\pi\varepsilon_0 d$ خواهد بود، پس $P_{12} = P_{21} = 1 / 4\pi\varepsilon_0 d$ و

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

اگر کرهٔ هادی را به زمین وصل کنیم خواهیم داشت $V_1 = 0$ و برای یک کره $P_{11} = 1 / 4\pi\varepsilon_0 R$ پس $0 = P_{11}Q_1 + P_{12}q$ یا

$$Q_1 = -\frac{P_{12}q}{P_{11}} = -q\frac{R}{d}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۶-۶ چون $a << l$، ضرایب پتانسیل عبارت‌اند از

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad،\quad P_{12} = P_{13} = P_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

در پایان آزمایش اول $V_1 = 0$ و $Q_2 = q$ ، $Q_3 = q$ پس

$$0 = P_{11}Q_1 + P_{12}q + P_{13}q$$

$$Q_1 = \frac{-q(P_{12}+P_{13})}{P_{11}} = \frac{-2a}{l}q$$

در پایان آزمایش دوم $V_2 = 0$ ، $Q_3 = q$ ، $Q_1 = (-2aq)/l$ ، پس $0 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}q$ و

$$Q_2 = -\frac{P_{21}Q_1 + P_{23}q}{P_{22}} = -\frac{qa}{l}\left(1-\frac{2a}{l}\right)$$

و به همین ترتیب

$$Q_3 = -\frac{P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2}{P_{33}} = \frac{q\,a^2}{l^2}\left(3 - \frac{2a}{l}\right)$$

∇·∇×A=0 | ∇×B=μJ | ∇×H=J | ∇·B=0 | ∇·D=ρ | ∇×E=0 | ∮D·ds=Q | ∫J·ds=I | ∮H·dl=I | ∮B·ds=0 | ∮E·dl=0

۶-۷ می‌دانیم که

$$V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3$$
$$V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3$$
$$V_3 = P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3$$

که در آنها P_{ij}ها ضرایب پتانسیل هستند. در مرحله اول

$$V = P_{11}Q_1$$

در مرحلهٔ دوم

$$V = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2$$

در مرحلهٔ آخر

$$V = P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3$$

چون $P_{11} = P_{22} = P_{33}$ و $P_{13} = P_{23} = P_{12} = P_{21} = P_{32} = P_{31}$ داریم

$$V = P_{21}(Q_1 + Q_2) + P_{33}Q_3$$

معادلهٔ اول نتیجه می‌دهد $P_{11} = V/Q_1$ و معادله دوم نتیجه می‌دهد $P_{21} = \frac{V}{Q_1}\left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)$. پس

$$V = \frac{V}{Q_1}\left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)(Q_1 + Q_2) + \frac{VQ_3}{Q_1}$$

که نتیجه می‌دهد

$$Q_3 = \frac{Q_2^2}{Q_1}$$

∇·∇×A=0 | ∇×B=μJ | ∇×H=J | ∇·B=0 | ∇·D=ρ | ∇×E=0 | ∮D·ds=Q | ∫J·ds=I | ∮H·dl=I | ∮B·ds=0 | ∮E·dl=0

۶-۸ در پایان آزمایش اول داریم

$$V_1 = V = P_{11}Q_1 + (P_{12} \times 0)$$

پس $P_{11} = V/Q_1$ و چون دو کره مشابه‌اند $P_{22} = P_{11}$. در این حالت انرژی کل برابرست با $U = \frac{1}{2}Q_1V_1$ یا $F = -\partial U/\partial r$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}P_{11}Q_1^2\right) = -\frac{1}{2}Q_1^2\frac{\partial P_{11}}{\partial r}$$

به دست می‌آوریم

در پایان آزمایش دوم $V_2 = V = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2$، و با استفاده از $P_{22} = V/Q_1$ به دست می‌آوریم

$$P_{21} = P_{12} = \frac{V - P_{22}Q_2}{Q_1} = V\left(\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1^2}\right)$$

انرژی سیستم در این حالت عبارت است از $U_2 = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V$ که در آن $V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2$

پس

$$-F = -\frac{\partial U_2}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}\left(P_{11}Q_1^2 + 2P_{12}Q_2Q_1 + P_{22}Q_2^2\right)\right]$$

اکنون با استفاده از برابری P_{22} و P_{11}، و $\partial P_{11}/\partial r = -2F/Q_1^2$، با کمی عملیات ریاضی می‌توان به دست آورد

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial r} = \frac{2Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^3 Q_2} F$$

در وضعیت نهایی داریم $V_1 = 0 = P_{11}Q'_1 + P_{12}Q_2$ یا

$$Q'_1 = -\frac{P_{12}Q_2}{P_{11}} = \frac{Q_2}{Q_1}\left(Q_2 - Q_1\right)$$

انرژی سیستم عبارت است از

$$U' = \frac{1}{2}Q_2V_2 = \frac{1}{2}Q_2\left(P_{21}Q'_1 + P_{22}Q_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}Q_2^2P_{22} + Q'_1Q_2P_{21} - \frac{1}{2}Q'_1Q_2P_{22}$$

$$= \frac{1}{2}Q_2^2P_{22} + Q'_1Q_2P_{21} - \frac{1}{2}Q'_1Q_2\left(-P_{11}Q'_1/Q_2\right)$$

و با کمی عملیات ریاضی به دست می‌آوریم

$$F' = -\frac{\partial U'}{\partial r} = F\frac{Q_2\left(2Q_1^2 - Q_2^2\right)}{Q_1^3}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

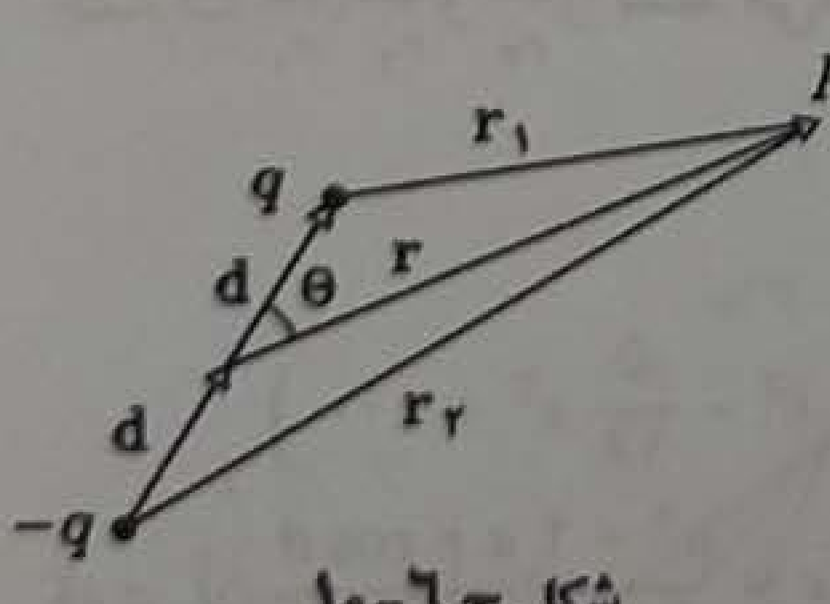
۶-۹

$$Q_3 = \frac{Q}{4}\left[\frac{ar_2^2}{r_1(r_1+r_2)(r_2-a)} + 1\right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۶-۱۰ دو قطبی را دو بار نقطه‌ای $q-$ و q فرض می‌کنیم که به فاصلهٔ $2d$ از هم قرار دارند، پس $\mathbf{p} = 2q\mathbf{d}$.

میدان در نقطهٔ P عبارت است از



شکل ح ۶-۱۰

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right)$$

که $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{d}$ و $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{d}$. پس

$$r_1^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{d}|^2 = \left(r^2 + d^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}\right)$$

$$r_2^2 = |\mathbf{r} + \mathbf{d}|^2 = \left(r^2 + d^2 + 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}\right)$$

زیرا $\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = r\cos\theta$

$$\frac{1}{r_1^3} = \left(r^2 + d^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{d^2}{r^2} - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

چون $d << r$ از d^2/r^2 در مقابل ۱ چشم می‌پوشیم و از بسط دو جمله‌ای $(1+x)^n \approx 1 - nx$ استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 + 3\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2}\right]$$

به نحوی مشابه به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{r_2^{3}}=\frac{1}{r^{3}}\left[1-3\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^{2}}\right]$$

سرانجام

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\left[(\mathbf{r}-\mathbf{d})\left(1+3\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^{2}}\right)-(\mathbf{r}+\mathbf{d})\left(1-3\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^{2}}\right)\right]$$

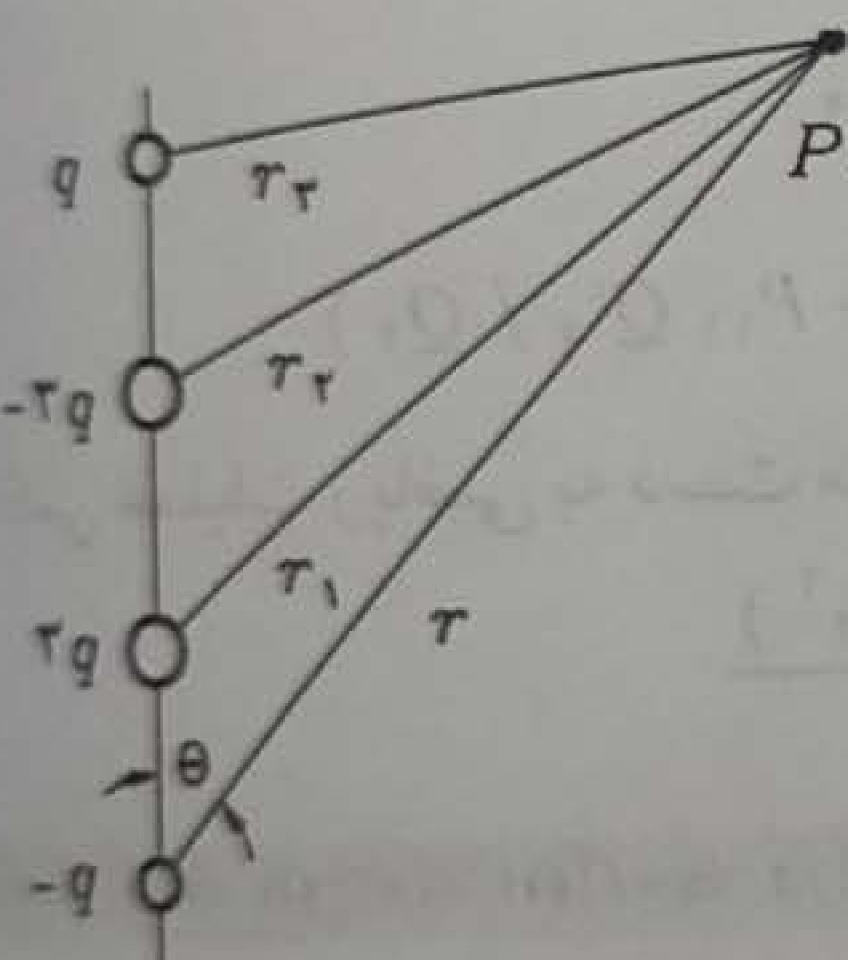
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^{3}}\left[-2\,\mathbf{d}+6\,\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^{2}}(\mathbf{r})\right]$$

با استفاده $\mathbf{p}=2q\,\mathbf{d}$ و $\hat{\mathbf{r}}=\mathbf{r}/r$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{p}\right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-٦ با توجه به شکل ح ۶-۱۱ داریم



شکل ح ٦-۱۱

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}+\frac{3}{r_1}-\frac{3}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$

و

$$r_1=\left(r^{2}+a^{2}-2\,a\,r\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2=\left(r^{2}+4\,a^{2}-4\,a\,r\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_1=\left(r^{2}+9\,a^{2}-6\,a\,r\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

حال با توجه به بسط دو جمله‌ای

$$(1+q)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}q+\frac{3}{8}q^{2}-\frac{5}{16}q^{3}+\cdots$$

جملات $\frac{1}{r_1}$، $\frac{1}{r_2}$ و $\frac{1}{r_3}$ را بسط می‌دهیم. برای $\frac{1}{r_1}$ داریم

$$\frac{1}{r_1}=\left[r^{2}\left(1+\frac{a^{2}-2\,a\,r\cos\theta}{r^{2}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{r}(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^{2}-\frac{5}{16}x^{3}+\cdots\right)$$

که در آن $x=\frac{a^{2}-2\,a\,r\cos\theta}{r^{2}}$. به همین ترتیب

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{y}{2}+\frac{3}{8}y^{2}-\frac{5}{16}y^{3}+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{3}{8}z^{2}-\frac{5}{16}z^{3}+\cdots\right)$$

که در آن $y=\frac{4\,a^{2}-4\,a\,r\cos\theta}{r^{2}}$ و $x=\frac{9\,a^{2}-6\,a\,r\cos\theta}{r^{2}}$. پس

$$V = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{2}(-3x + 3y - z) + \frac{3}{8}(3x^2 - 3y^2 + z^2) - \frac{5}{16}(3x^3 - 3y^3 + z^3) + \cdots\right]$$

با انجام عملیات ریاضی داخل کروشه و چشم‌پوشی از جملاتی که میزان کاهش آنها با فاصله از $\frac{1}{r^3}$ سریعتر است به دست می‌آوریم

$$V = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r}\left[\frac{15 a^3 \cos^3\theta - 9 a^3 \cos\theta}{r^3}\right] = \frac{39 a^3 (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)}{4\pi \varepsilon_0 r^4}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=0 \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=0 \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=0 \mid \oint E\cdot dl=0$

۱۲-۶ پتانسیل چهار قطبی خطی عبارت است از :

$$V = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2}\right)$$

که در آن $r_1^2 = d^2 + r^2 - 2rd\cos\theta$ و $r_2^2 = d^2 + r^2 + 2rd\cos\theta$. داریم

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2d\cos\theta}{r} + \frac{d^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

با استفاده از بسط دو جمله‌ای $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ و حذف جملاتی که با توان سوم r میرا می‌شوند

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d\cos\theta}{r} + \frac{3}{2}\frac{d^2\cos^2\theta}{r^2} - \frac{d^2}{2r^2}\right)$$

به نحوی مشابه به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d\cos\theta}{r} + \frac{3}{2}\frac{d^2\cos^2\theta}{r^2} - \frac{d^2}{2r^2}\right)$$

پس

$$V = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0}\left(\frac{3d^2\cos^2\theta}{r^3} - \frac{d^2}{r^3}\right) = \frac{q d^2}{4\pi \varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

پتانسیل چهار قطبی مربعی را با در نظر گرفتن آنها به صورت دو دو قطبی (شکل ح ۶-۱۲) می‌یابیم. داریم

$$V = \frac{p\cos\theta_1}{4\pi \varepsilon_0 r_1^2} - \frac{p\cos\theta_2}{4\pi \varepsilon_0 r_2^2}$$

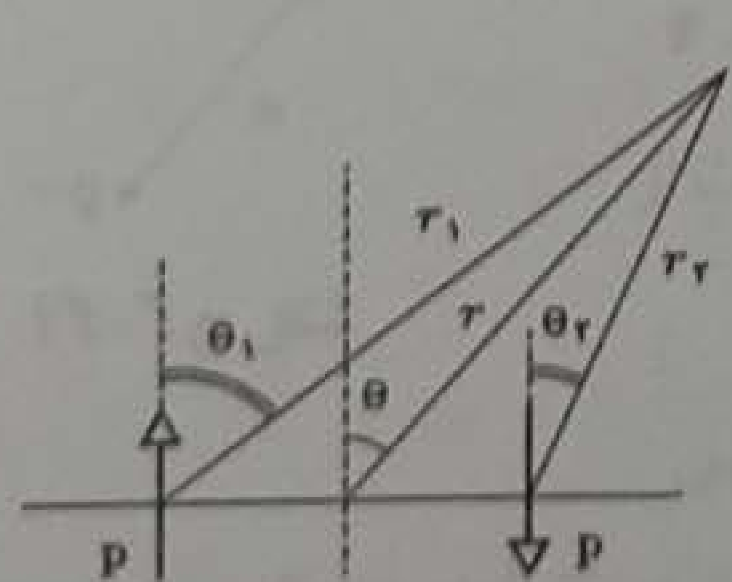
به ازای $r >> d$، $\theta_1 \approx \theta \approx \theta_2$، $r_1 \approx r + \frac{d}{2}\sin\theta$ و $r_2 \approx r - \frac{d}{2}\sin\theta$. پس

$$V = \frac{p\cos\theta_1}{4\pi \varepsilon_0}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = -2rd\sin\theta$$

$$r_1^2 r_2^2 = \left(r^2 - \frac{d^2}{4}\sin\theta\right)^2 \approx r^4$$

$$V = -\frac{p\cos\theta\, d\sin\theta}{2\pi \varepsilon_0 r^3} = -\frac{q d^2 \sin\theta\cos\theta}{2\pi \varepsilon_0 r^3}$$



شکل ح ۶-۱۲

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=0 \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=0 \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=0 \mid \oint E\cdot dl=0$

۱۳-۶ $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}'\, dq$ که برای این مسئله $\mathbf{r}' = A\,\hat{\mathbf{r}}'$ و $dq = ds\,\sigma = \sigma\cos\theta'\,(A^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi')$، پس

$$p = \int A^3\sigma\cos\theta'\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'\,\hat{\mathbf{r}}'$$
$$= A^3\sigma\int \cos\theta'\sin\theta'\,(\sin\theta'\cos\phi'\,\mathbf{x} + \sin\theta'\sin\phi'\,\mathbf{y} + \cos\theta'\,\mathbf{z})\,d\theta'\,d\phi'$$

دو جملهٔ اول و دوم انتگرال نتیجه صفر می‌دهد زیرا $\int_0^{2\pi}\cos\phi'\,d\phi' = \int_0^{2\pi}\sin\phi'\,d\phi' = 0$ ، پس

$$p = \hat{\mathbf{z}}\,A^3\sigma\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta'\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'$$
$$= \hat{\mathbf{z}}\,A^3\sigma\,(2\pi)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi A^3\sigma}{3}\,\mathbf{z}$$

میدان ناشی از دو قطبی به صورت زیر به دست می‌آید

$$V = \frac{\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon R^2} = \frac{A^3\sigma}{3\varepsilon r^2}\,\hat{\mathbf{R}}\cdot\hat{\mathbf{z}}$$

چون مرکز کره را مبدأ مختصات فرض کرده‌ایم، $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{r}}$ و

$$V = \frac{A^3\sigma}{3\varepsilon}\cos\theta$$

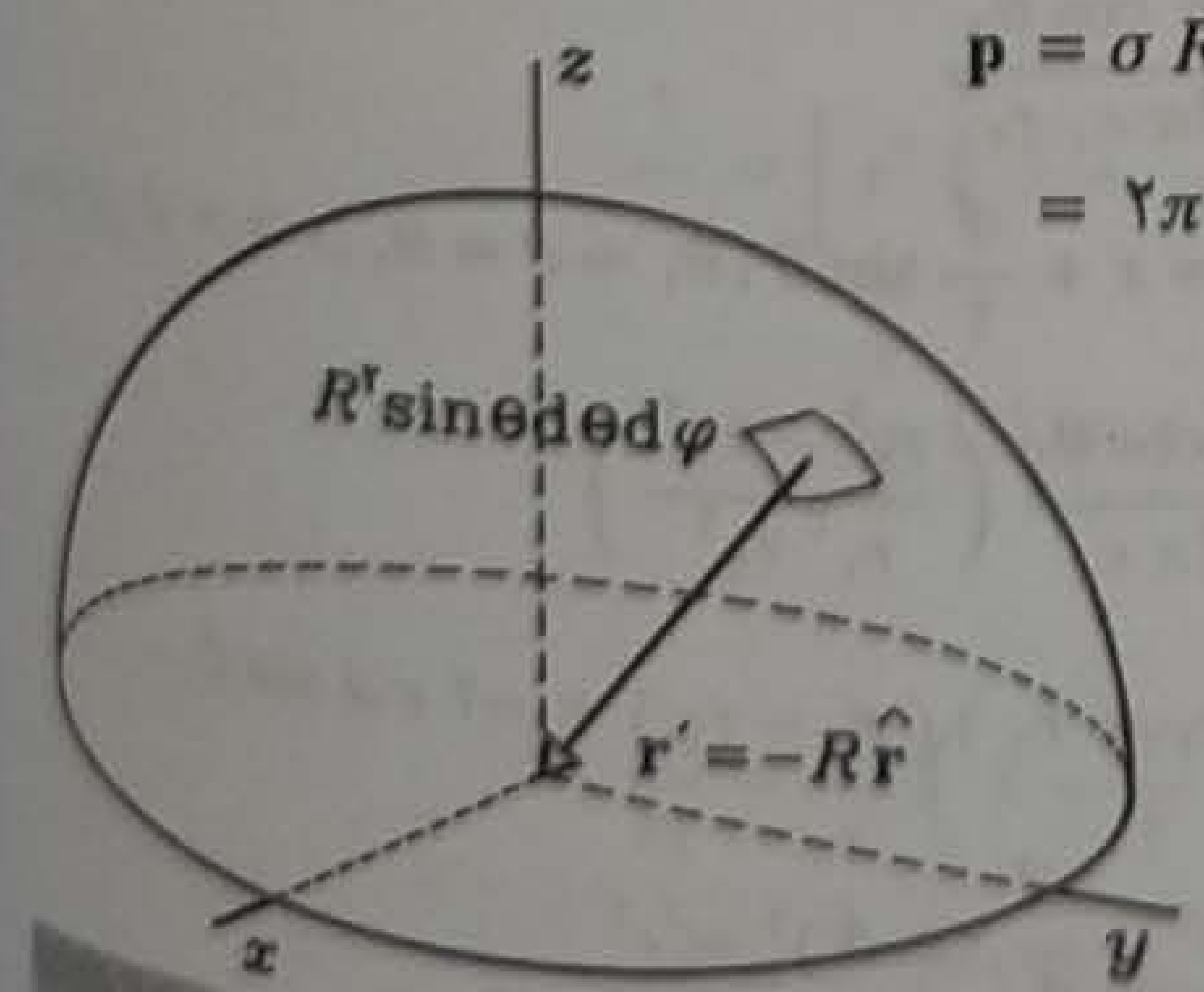
$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۴-۶ داریم $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}'\sigma\, ds$ و با توجه به شکل ح ۶-۱۴ (و این که $\mathbf{r}'$ معادلهٔ بالا منفی $\mathbf{r}'$ نشان داده شده در شکل است)

$$\mathbf{p} = \int R\,\hat{\mathbf{r}}\,\sigma R^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'$$
$$= \sigma R^3\int (\sin^2\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin^2\theta'\sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta'\cos\theta'\,\hat{\mathbf{z}})\,d\theta'\,d\phi'$$

مولفه‌های x و y برابر صفر می‌شوند، و

$$\mathbf{p} = \sigma R^3\,\hat{\mathbf{z}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta'\cos\theta'\,d\theta'\,d\phi'$$
$$= 2\pi R^3\sigma\,\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۶-۱۴

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۵-۶ چون جمع بارها صفر است پتانسیل حاصل از این توزیع بار جمله تک قطبی ندارد. گشتاور دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \lambda \, dl$$

انتگرال باید روی دو حلقه محاسبه شود، برای حلقه داخلی $\lambda = \frac{-q}{۲\pi b}$ و برای حلقه بیرونی $\lambda = \frac{q}{۲\pi a}$. به راحتی می‌توان نشان داد که این دو انتگرال صفرند. جملهٔ چهار قطبی عبارت است از

$$V = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_۰} \frac{۱}{۲ r^۵} \int [\, ۳ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^۲ - r^۲ \mathbf{r}'^۲ \,] \lambda \, dl$$

باز باید انتگرال روی دو حلقه محاسبه شود. برای حلقهٔ داخلی $\mathbf{r}' = b\,\hat{\boldsymbol{\rho}}'$، $|\,\mathbf{r}'\,| = b$ و

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = (\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\hat{\mathbf{z}}) \cdot (b\,\hat{\boldsymbol{\rho}}') = \rho\, b\,(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}') = \rho\, b \cos(\phi - \phi')$$

و

$$\int [\, ۳ \rho^۲ b^۲ \cos^۲(\phi - \phi') - r^۲ b^۲ \,] \frac{-q}{۲\pi b} b \, d\phi'$$

$$= \frac{-q}{۲\pi} \left[۳ \rho^۲ b^۲ \int_۰^{۲\pi} \cos^۲(\phi - \phi') \, d\phi' - r^۲ b^۲ \int_۰^{۲\pi} d\phi' \right]$$

$$= \frac{-q\, b^۲}{۲} (\, ۳ \rho^۲ - ۲ r^۲ \,)$$

به همین ترتیب حاصل انتگرال روی حلقه بیرونی برابر است با

$$\frac{q\, a^۲}{۲} (\, ۳ \rho^۲ - ۲ r^۲ \,)$$

و نهایتاً

$$V = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_۰} \frac{۱}{۲ r^۵} (\, ۳ \rho^۲ - ۲ r^۲ \,) \frac{q}{۲} (\, a^۲ - b^۲ \,)$$

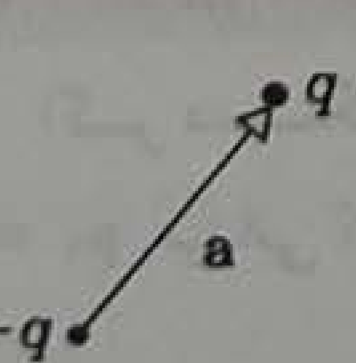
$$= \frac{q\,(a^۲ - b^۲)}{۱۶\pi \varepsilon_۰ r^۳} (\, ۳ \sin^۲\theta - ۲ \,) = \frac{q\,(a^۲ - b^۲)}{۱۶\pi \varepsilon_۰ r^۳} (\, ۱ - ۳ \cos^۲\theta \,)$$

زیرا $\rho = r \sin\theta$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۶-۱۶ با توجه به شکل ح ۶-۱۶ داریم $\mathbf{p} = q\,\mathbf{a}$. اگر میدان در محل بار $-q$ را با $\mathbf{E}_۱$ و میدان در محل بار q را با $\mathbf{E}_۲$ نشان دهیم نیروی وارد بر دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{F} = -q\,\mathbf{E}_۱ + q\,\mathbf{E}_۲ = q\,(\,\mathbf{E}_۲ - \mathbf{E}_۱\,)$$



شکل ح ۶-۱۶

$\mathbf{E}_۲ - \mathbf{E}_۱$ تغییر میدان در فاصلهٔ $\mathbf{a}$ است. تغییر مولفهٔ x میدان عبارت است از

$$\Delta E_x = a_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

زیرا $\mathbf{a}$ بردار کوچکی است و a_x، a_y، و a_z فاصله‌هایی کوچک هستند. پس

$$F_x = q\,\Delta E_x = q \left(a_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$= q \left[(a_x\,\hat{\mathbf{x}} + a_y\,\hat{\mathbf{y}} + a_z\,\hat{\mathbf{z}}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) \right] E_x$$

به همین ترتیب به دست می‌آوریم

$$F_y = (\mathbf{p} \cdot \nabla) E_x \quad \text{و} \quad F_z = (\mathbf{p} \cdot \nabla) E_z$$

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)(E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}})$$
$$= (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۱۷ داریم $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ و

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{p}$$

$\mathbf{p}$ برداری ثابت است، پس مشتقهای آن $\nabla \times \mathbf{p}$ و $(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{p}$ صفرند. همچنین $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ پس

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} = \mathbf{F}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۱۸ برای یافتن نیروی وارد بر دو قطبی ساده‌تر آن است که منفی نیرویی را که بر q وارد می‌شود بیابیم. میدانی که دو قطبی $\mathbf{p}$ در محل بار نقطه‌ای ایجاد می‌کند عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

پس نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $q\mathbf{E}$ و نیروی وارد بر دو قطبی $-q\,E$ است. میدان الکتریکی ناشی از بار q در محل دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

گشتاور وارد بر دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}}) = \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

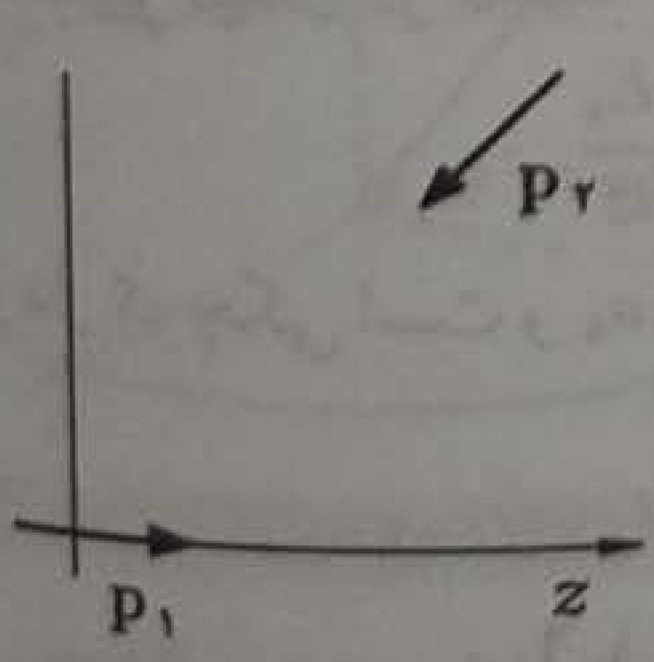
$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۱۹ اگر دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل ح ۶-۱۹ را برگزینیم داریم $\mathbf{p}_1 = p\,\hat{\mathbf{z}}$، $\mathbf{p}_2 = -p\,\hat{\mathbf{r}}$. میدانی که $\mathbf{p}_1$ ایجاد می‌کند عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\mathbf{r}} + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

نیرو از رابطهٔ $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ به دست می‌آید، پس

$$\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E} = \frac{-p^2\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$



شکل ح ۶-۱۹

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}) = \frac{3p^2 \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{\mathbf{r}} + \frac{p^2 \sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۲۰ امتداد دو قطبی را محور z در نظر می‌گیریم. میدان دو قطبی پایینی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

نیروی وارد بر دو قطبی بالایی عبارت است از $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})$. در حالت الف

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = \frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{z}})$$

$$= \frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) = \frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}[(3\sin^2\theta - 6\cos^2\theta)\,\hat{\mathbf{r}} - 6\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}]$$

در مورد مسئله فعلی $\theta = 0$، پس

$$\mathbf{F} = \frac{-6p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{\mathbf{z}}$$

در حالت ب $\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$ منفی مقدار قبل است، پس

$$\mathbf{F} = \frac{6p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۲۱ محور z را در امتداد دو قطبی $\mathbf{p}_1$ در نظر می‌گیریم. میدان دو قطبی $\mathbf{p}_1$ عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

$$\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{E} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{z}})$$

$$= \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos^2\theta - \sin\theta)$$

سرانجام $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})$

$$\mathbf{F} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left[\frac{1}{r^3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right]$$

$$= \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-3}{r^4}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{6}{r^4}\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$

برای مسئله فعلی $\theta = \frac{\pi}{2}$، پس

$$\mathbf{F} = \frac{3p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{\mathbf{r}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۲۲ در مورد شکل ح ۶-۲۰ الف میدان دو قطبی پایینی عبارت است از (مسئلهٔ ۶-۱۰ را ببینید)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]$$

انرژی دو قطبی بالایی عبارت است از $U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}]$$

$\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}} = p$ و $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = p^2$ پس

شکل ح ۶-۲۲

$$U = -\frac{2p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

نیروی وارد بر دو قطبی بالایی عبارت است از $-\partial U/\partial r$، پس

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{-6p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

در مورد شکل ح ۶-۲۲، به نحوی مشابه داریم

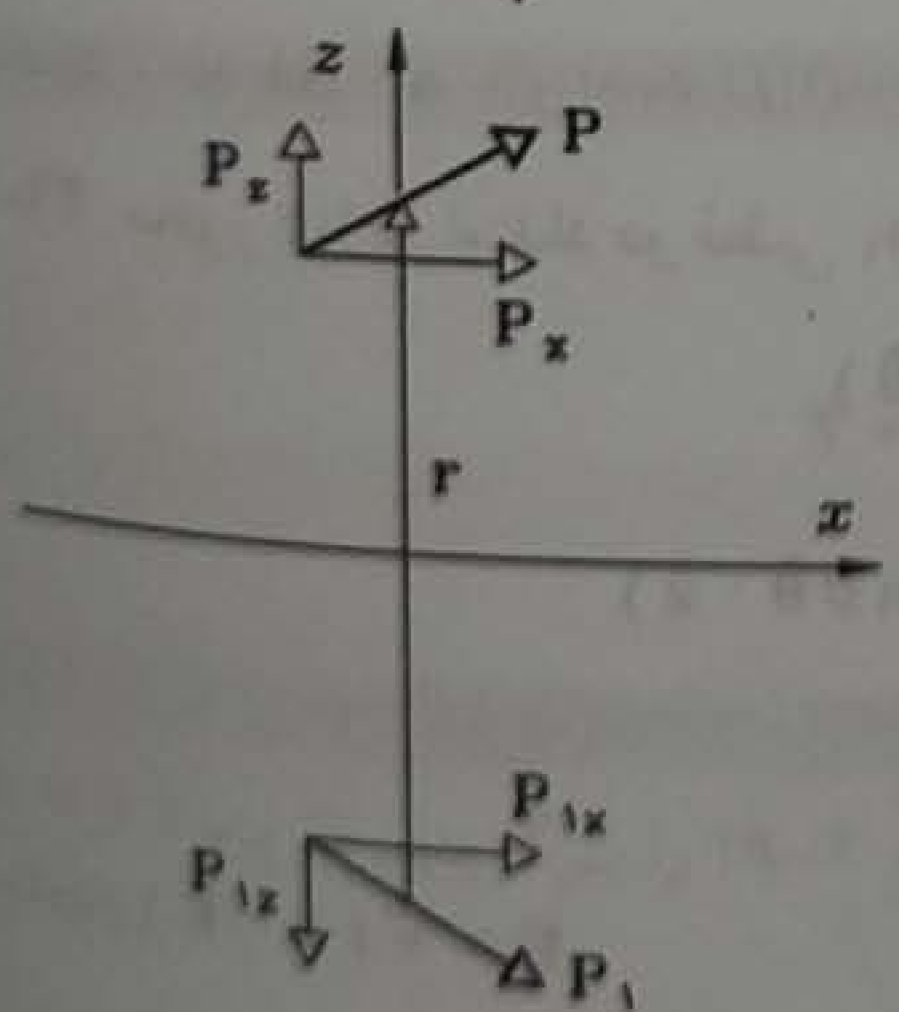
$$U = -\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{E}_1 = -\mathbf{p}_2\cdot\left[\frac{(\mathbf{p}_1\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[(\mathbf{p}_1\cdot\hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2\cdot\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2]$$

$\mathbf{p}_1\cdot\hat{\mathbf{r}} = 0$، $\mathbf{p}_2\cdot\hat{\mathbf{r}} = 0$ و $\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 = p_1p_2$، پس $U = (p_1p_2)/(4\pi\varepsilon_0 r^3)$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{3p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

۶-۲۳ تصویر دو قطبی را دو قطبی $\mathbf{p}_1$ می‌نامیم. با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده داریم



شکل ح ۶-۲۳

$$P = p_x\hat{\mathbf{x}} + p_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$p_1 = p_x\hat{\mathbf{x}} - p_z\hat{\mathbf{z}}$$

با توجه به حل مسئلهٔ ۶-۲۰ نیرویی که دو قطبی‌های در جهت z به هم وارد می‌کنند عبارت است از

$$\mathbf{F}_1 = \frac{-6p_z^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{\mathbf{z}}$$

با توجه به حل مسئلهٔ ۶-۲۱ نیرویی که دو قطبی‌های در جهت x به هم وارد می‌کنند عبارت است از

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3p_x^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\hat{\mathbf{z}}$$

برای مسئله مورد بحث $r = 2d$ و

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{1}{64\pi\varepsilon_0 d^4}(6p_z^2 + 3p_x^2)\hat{\mathbf{z}}$$

$$= \frac{3p^2}{64\pi\varepsilon_0 d^4}(2\cos^2\theta + \sin^2\theta)\hat{\mathbf{z}}$$

۶-۲۴ تصویر دو قطبی را $\mathbf{p}'$ می‌نامیم. میدان الکتریکی این دو قطبی عبارت است از (مسئلهٔ ۶-۱۰)

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_۰ r^۳} [\, ۳\,\hat{\mathbf{r}}\,(\mathbf{p}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}' \,]$$

گشتاور دو قطبی واقع در میدان $\mathbf{E}$ از رابطهٔ $\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ به دست می‌آید، پس

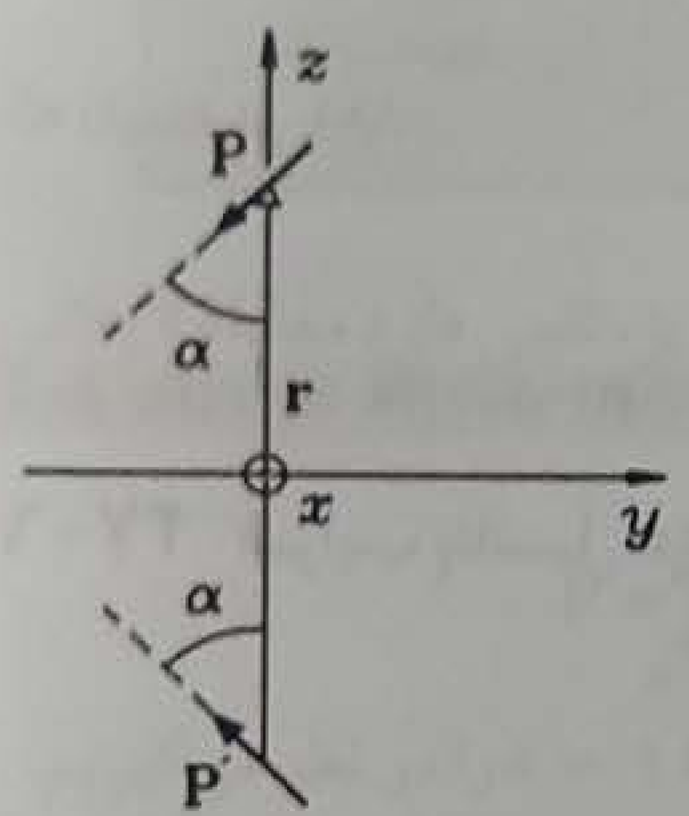
$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = -\frac{۱}{۴\pi \varepsilon_۰ r^۳} [\, ۳\,(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p} \times \mathbf{p}' \,]$$

و اما $\mathbf{p}' \cdot \hat{\mathbf{r}} = p \cos\alpha$، $\mathbf{p}' \times \hat{\mathbf{r}} = -p \sin\alpha\, \hat{\mathbf{x}}$، $\mathbf{p} \times \mathbf{p}' = -۲\, p^۲ \sin\alpha \cos\alpha\, \hat{\mathbf{x}}$ پس

$$\mathbf{T} = \frac{۱}{۴\pi \varepsilon_۰ r^۳} [\, -۳\, p^۲ \sin\alpha \cos\alpha\, \hat{\mathbf{x}} + ۲\, p^۲ \sin\alpha \cos\alpha\, \hat{\mathbf{x}} \,]$$

$$= \frac{-p^۲}{۸\pi \varepsilon_۰ r^۳} \sin ۲\alpha\, \hat{\mathbf{x}}$$

که باید در آن به جای r قرار دهیم $۲\,d$.

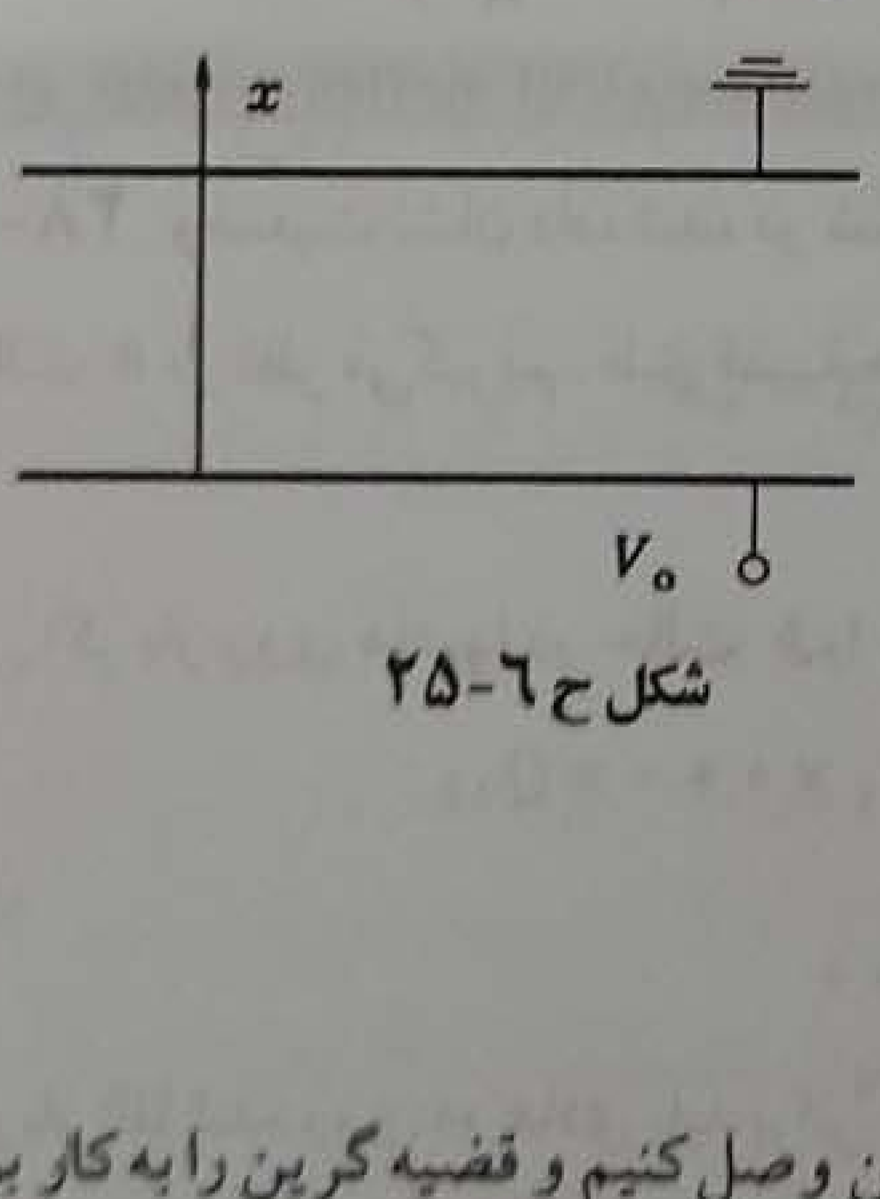


شکل ح ۶-۲۴

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = ۰ \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = ۰ \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = ۰ \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = ۰ \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = ۰$

۶-۲۵ بین دو صفحه اختلاف پتانسیل $V_۰$ را برقرار می‌کنیم. پتانسیل بین دو صفحه عبارت است از

$$V = \frac{x}{d} V_۰$$



شکل ح ۶-۲۵

حال از قضیه گرین

$$\Sigma\, Q_{۱i} V_{۲i} = \Sigma\, Q_{۲i} V_{۱i}$$

استفاده می‌کنیم. حالت مربوط به مسئله اصلی را حالت ۱ و حالت فوق را حالت ۲ در نظر می‌گیریم. در مسئله اصلی پتانسیل تمام نقاط صفر است، پس

$$Q_۱ V_۰ + q \frac{x}{d} V_۰ + Q_۲ \times ۰ = ۰$$

که نتیجه می‌دهد

$$Q_۱ = -q \frac{x}{d}$$

به همین ترتیب، اگر صفحهٔ بالایی را به $V_۰$ و صفحهٔ پایینی را به زمین وصل کنیم و قضیه گرین را به کار بریم به دست می‌آوریم

$$Q_۲ = q - q \frac{x}{d}$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = ۰ \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = ۰ \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = ۰ \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = ۰ \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = ۰$

۶-۲۶ پوسته داخلی را به پتانسیل $V_۰$ و پوستهٔ خارجی را به پتانسیل صفر وصل می‌کنیم. پتانسیل بین دو پوسته عبارت است از

$$V = \frac{a V_۰}{b - a} \left(\frac{b}{r} - ۱ \right)$$

حال از قضیه گرین

$$\sum Q_{1i} V_{2i} = \sum Q_{2i} V_{1i}$$

استفاده می‌کنیم. حالت ۱ مسئله اصلی و حالت دوم وضعیت بیان شده در بالاست. در حالت ۱ پتانسیل تمام نقاط صفرست. پس اگر بار القا شده روی پوسته داخلی را Q_1 و بار القا شده روی پوسته خارجی را Q_2 بنامیم

$$Q_1 V_0 + q\,\frac{a\,V_0}{b-a}\left(\frac{b}{r}-1\right) + Q_2 \times 0 = 0$$

که نتیجه می‌دهد

$$Q_1 = -\frac{a\,q}{b-a}\left(\frac{b}{r}-1\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۲۷ ضرایب پتانسیل عبارت‌اند از $p_{11} = p_{22} = 1 / 4\pi\varepsilon_0 R$ و $p_{12} = p_{21} = 1 / 4\pi\varepsilon_0 r$. پس

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$U = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{R} + 2\,\frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_2^2}{R}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۲۸ وضعیت نشان داده شده در شکل ۶-۲۶ را حالت a و وضعیت نشان داده شده در شکل ح ۲-۲۶ را حالت b در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ همپاسخی

$$\sum q_a V_b = \sum q_b V_a$$

پس اگر بار روی هادیها در حالت b را Q_{1b} و Q_{2b}، و پتانسیل نقطهٔ P در حالت b را V_x بنامیم، داریم

$$V_1 Q_{1b} + V_p Q + V_2 Q_{2b} = 0 \times Q_{1a} + V_x \times 0 + 0 \times Q_{1b}$$

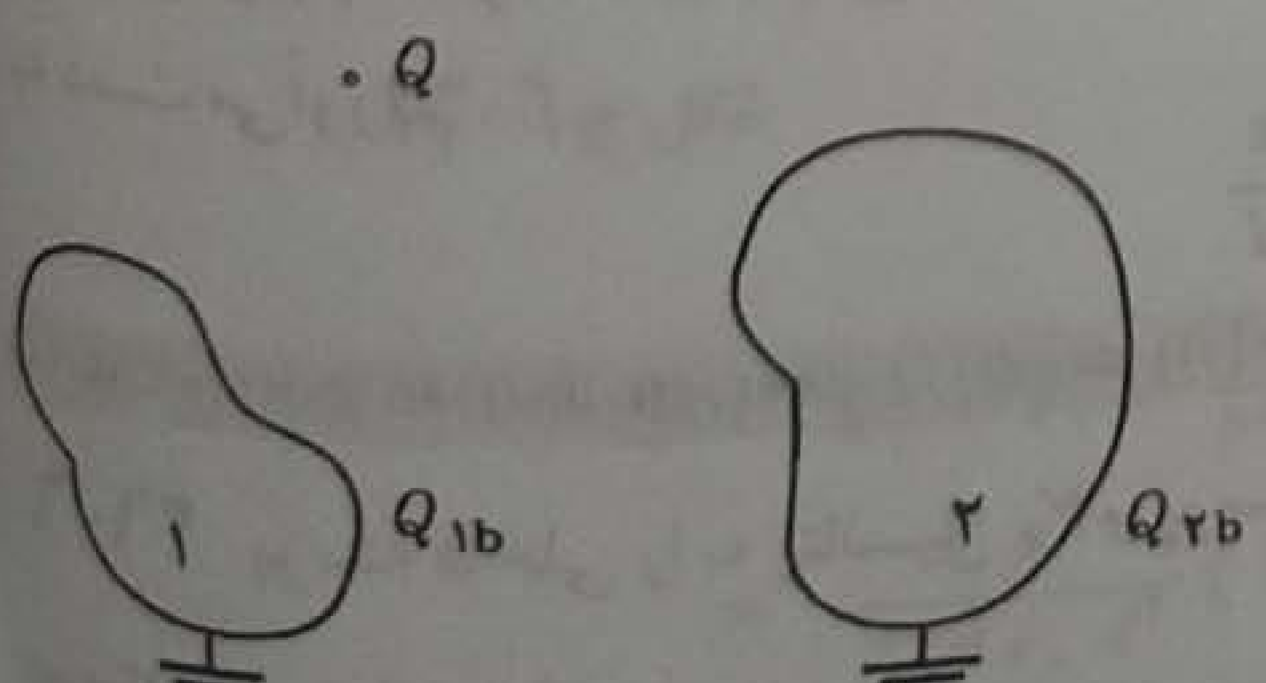
پس

$$V_1 Q_{1b} + V_p Q + V_2 Q_{2b} = 0$$

کل بار القا شده روی دو هادی باید برابر $-Q$ باشد، یعنی $Q_{1b} + Q_{2b} = -Q$. با حل این دو معادله به دست می‌آوریم

$$Q_{1b} = \frac{V_2 - V_p}{V_1 - V_2}\,Q$$

$$Q_{1b} = \frac{V_1 - V_p}{V_2 - V_1}\,Q$$



شکل ح ۶-۲۸

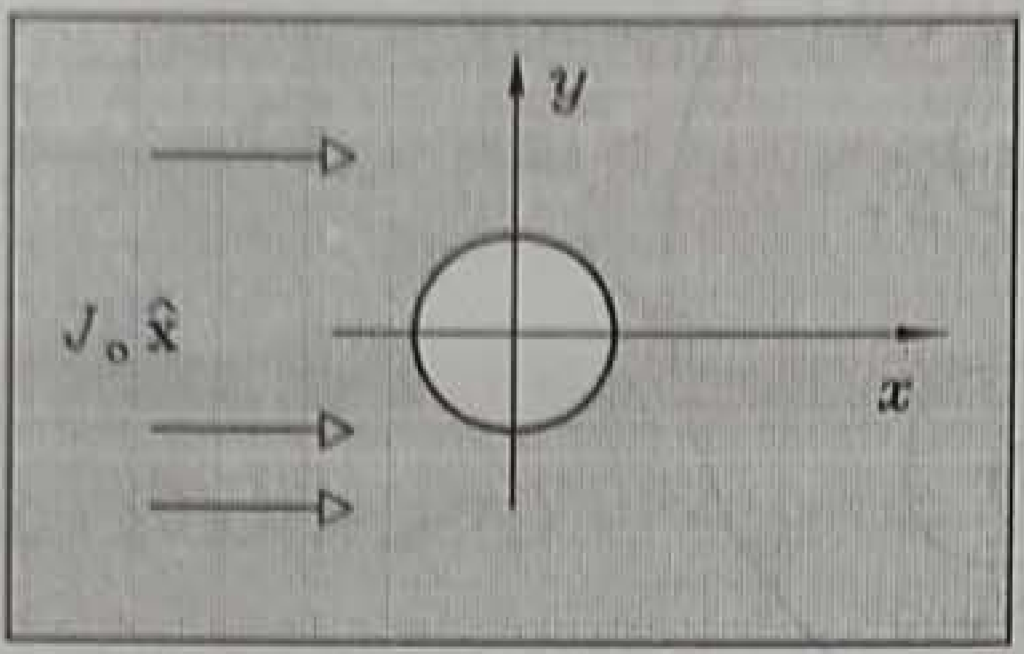
$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۲۹ مرکز سوراخ را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم . قبل از ایجاد سوراخ داشته‌ایم

$$\mathbf{E} = \frac{J_\circ}{\sigma}\,\hat{x}$$

پس

$$V = -\frac{J_\circ}{\sigma}\,x = -\frac{J_\circ}{\sigma}\,\rho\,\cos\phi$$



شکل ح ۶-۲۹

بعد از ایجاد سوراخ تابع پتانسیل جدیدی خواهیم داشت، چون ورق رسانایی ویژه ثابتی دارد معادلهٔ لاپلاس صادق است و حل کلی زیر را داریم

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})(C_n \sin n\phi + D_n \cos n\phi)$$

در $\rho \longrightarrow \infty$ باید همان پتانسیل قبل را داشته باشیم، پس تنها جملات متناظر با $n = 1$ را در نظر می‌گیریم.

$$V = \left(A\rho + \frac{B}{\rho}\right)\cos\phi$$

و

$$A = -\frac{J_\circ}{\sigma}$$

چون در سوراخ جریان نداریم، در $\rho = d$ باید J_n صفر باشد، و چون $J = \sigma E$ باید در لبهٔ سوراخ E_n هم صفر باشد

$$E_n = E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\left(A + \frac{B}{\rho^2}\right)\cos\phi$$

که نتیجه می‌دهد

$$A + \frac{B}{d^2} = 0$$

$$B = -A\,d^2 = +\frac{J_\circ}{\sigma}\,d^2$$

بنابراین

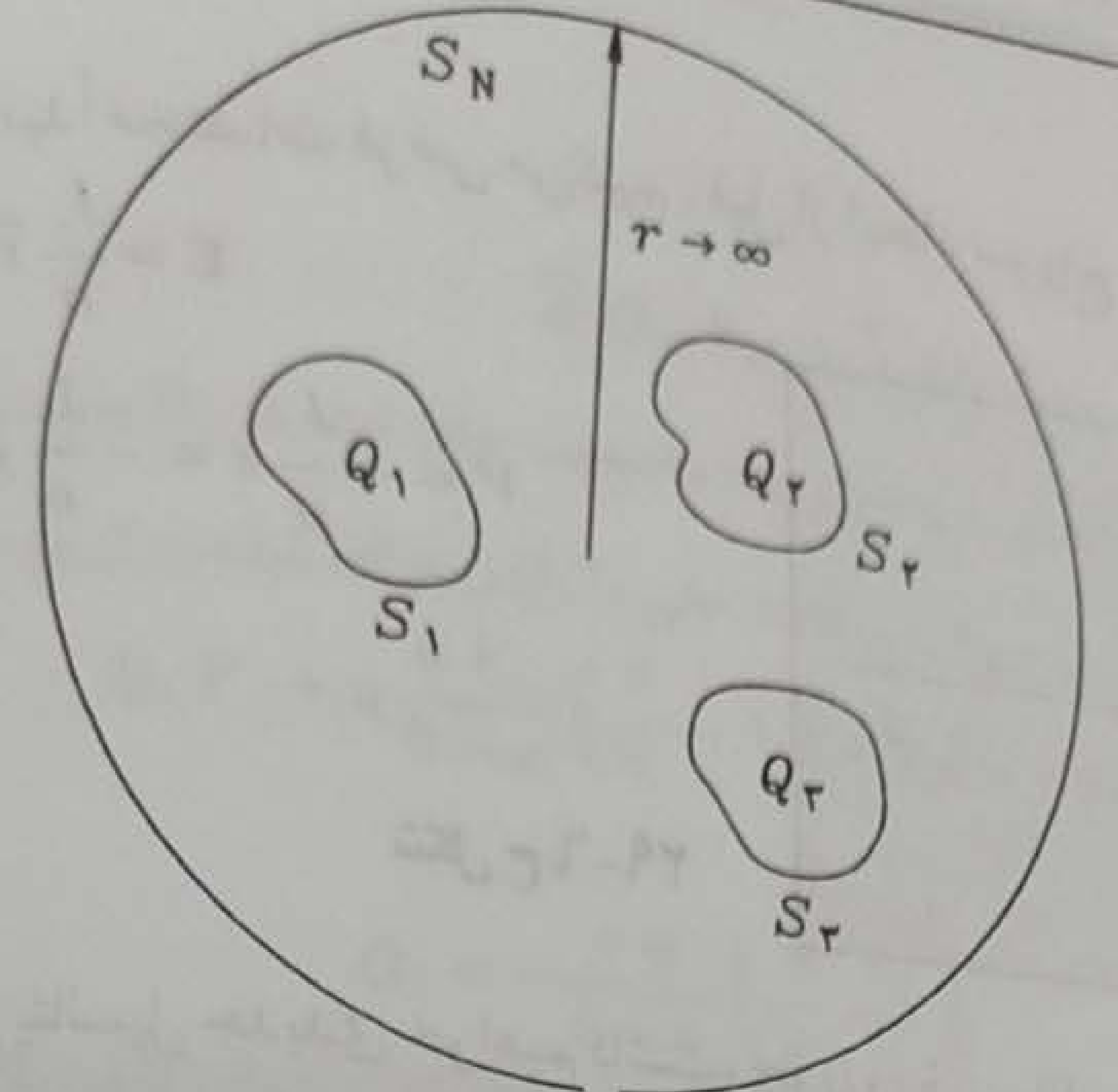
$$V = -\frac{J_\circ}{\sigma}\left(\rho - \frac{d^2}{\rho}\right)\cos\phi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{J_\circ}{\sigma}\left(1 + \frac{d^2}{\rho^2}\right)\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \frac{J_\circ}{\sigma}\left(1 - \frac{d^2}{\rho^2}\right)\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E} = J_\circ\left(1 + \frac{d^2}{\rho^2}\right)\cos\hat{\boldsymbol{\rho}} - J_\circ\left(1 - \frac{d^2}{\rho^2}\right)\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۳۰ فرض می‌کنیم پتانسیل می‌نیمم کنندهٔ انرژی ذخیره شده در فضا V است و نشان می‌دهیم هر تغییری در توزیع بارِ متناظر با این پتانسیل به افزایش انرژی در فضا می‌انجامد . اگر توزیع بار عوض شود، طوری که پتانسیل فضا به $V + V_1$ برسد ، میدان الکتریکی به $\mathbf{E} = -\nabla(V + V_1) = \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_1$ می‌رسد ، که $\mathbf{E}_I$



شکل ح ۶-۳۰

میدان متناظر با پتانسیل V است. چگالی انرژی در فضا $\frac{\varepsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2$ است. پس کل انرژی ذخیره شده در فضا برابر ست با

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\nabla(V+V_1)|^2\, dv$$

گرادیان عملی خطی است، پس $\nabla(V+V_1) = \nabla V + \nabla V_1$ و

$$|\nabla(V+V_1)|^2 = |\nabla V|^2 + |\nabla V_1|^2 + 2\nabla V \cdot \nabla V_1$$

برای محاسبهٔ انتگرال $\int (\nabla V \cdot \nabla V_1)\, dv$ از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم

$$\int V\nabla\cdot\mathbf{E}_1\, dv = \oint V\mathbf{E}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}\, ds - \int \mathbf{E}_1\cdot\nabla V\, dv$$

و قرار می‌دهیم $\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1$. چون $\nabla\cdot\mathbf{E}_1$ با چگالی بار برابرست و چون در فضای بین هادیها باری وجود ندارد، انتگرال طرف راست صفر می‌شود

$$0 = \oint_S V\mathbf{E}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}\, ds + \int \nabla V_1\cdot\nabla V\, dv$$

S سطح در برگیرندهٔ فضای بین هادیهاست که از سطوح S_1 و S_2، ... هادیها و سطحی در بینهایت تشکیل شده است. روی سطح بینهایت $V=0$، و روی سطوح S_1 و S_2، ... پتانسیل ثابت است. پس

$$\oint_S V\,\mathbf{E}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}\, ds = V_1\oint_{S_1}\mathbf{E}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}\, ds + V_2\oint_{S_2}\mathbf{E}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}\, ds + \cdots$$

میدان الکتریکی در فضا $\mathbf{E} = -\nabla(V+V_1) = -\nabla V - \nabla V_1$ است، $\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sigma$، و

$$\oint_{S_1}\mathbf{E}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}\, ds = Q_1$$

چون $\mathbf{E}_1$ تغییر میدان است، Q_1 تغییر بار روی هادی است. پس

$$\oint_S V\,\mathbf{E}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}\, ds = V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + \cdots$$

که تغییر بار روی هادی و برابر صفرست. پس حاصل این انتگرال نیز صفرست و

$$\int \nabla V\cdot\nabla V_1\, dv = 0$$

بنابراین انرژی عبارت است از

$$W = \frac{\varepsilon_\circ}{۲} \int |\nabla V|^۲ dv + \frac{\varepsilon_\circ}{۲} \int |\nabla V_۱|^۲ dv$$

چون انتگرال سمت چپ کمیتی مثبت است، W وقتی می‌نیمم می‌شود که مقدار این انتگرال صفر باشد، یعنی $V_۱ = \circ$.

۶-۳۱ چون بجز مبدا در بقیه جاها معادلهٔ لاپلاس برقرار ست، حل معادلهٔ لاپلاس در درون و بیرون کره را به صورت بسط لژاندر می‌نویسیم

$$V_۱ = A_۱ r\cos\theta + \frac{A_۲ \cos\theta}{r^۲} \quad , \ r < R$$

$$V_۲ = B_۱ r\cos\theta + \frac{B_۲ \cos\theta}{r^۲} \quad , \ r > R$$

البته جملات دیگری هم وجود دارد که در عبارتهای فوق گنجانده نشده‌اند، طبیعتاً اگر این جملات را در نظر بگیریم، عبارتهای مفصلتری باید بنویسیم و سرانجام در می‌یابیم که ضرائب آن جملات صفر می‌شوند. پس در اینجا در واقع برای صرفه‌جویی در میزان نوشته‌ها مراحلی از حل مسئله را حذف کرده‌ایم. شرایط مرزی که باید توسط این توابع پتانسیل ارضا شوند چنین هستند

$$V_۱ = \frac{p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۱ r^۲} \qquad r \to \circ \text{ در}$$

زیرا در فواصل نزدیک مبدا باید همان میدان دوقطبی را داشته باشیم. همچنین میدان باید در مرز کره و فضای آزاد پیوسته باشد، یعنی

$$V_۱ = V_۲ \qquad r = R \text{ در}$$

و سرانجام در $r \to \infty$ باید پتانسیل به صفر بگراید. شرط اخیر نتیجه می‌دهد که $B_۱ = \circ$. شرط اول نیز نتیجه می‌دهد

$$A_۲ = \frac{p}{۴\pi\varepsilon_۱}$$

شرط پیوستگی پتانسیل در مرز به دست می‌دهد

$$A_۱ R\cos\theta + \frac{A_۲\cos\theta}{R^۲} = \frac{B_۲\cos\theta}{R^۲}$$

یک شرط نیز بر روی مولفهٔ عمودی میدان در مرز کره داریم؛ چون روی کره بار سطحی وجود ندارد باید داشته باشیم $D_{۱n} = D_{۲n}$ یا

$$\varepsilon_۱ \frac{\partial V_۱}{\partial r} = \varepsilon_\circ \frac{\partial V_۲}{\partial r} \qquad r = R \text{ در}$$

یا

$$\varepsilon_۱\left(A_۱ - \frac{p}{۲\pi\varepsilon_۱ R^۳}\right) = -۲\varepsilon_\circ \frac{B_۲}{R^۳}$$

که نتیجه می‌دهد

$$A_۱ = \frac{۲p}{۴\pi\varepsilon_۱ R^۳} \ \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_\circ}{\varepsilon_۱ + ۲\varepsilon_\circ}$$

$$B_۲ = \frac{۲p}{۴\pi\varepsilon_۱ R^۳} \ \frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۱ + ۲\varepsilon_\circ}$$

۶-۳۲ چون مجموع بارها صفرست پتانسیل حاصل از این توزیع بار جمله تک قطبی ندارد. برای یافتن جملهٔ دو قطبی باید انتگرال زیر را حساب کنیم

$$\int r' \cos\psi\, \lambda\, dl$$

[معادلهٔ (۶-۱۰) را با جایگزینی $\lambda\, dl$ به جای $\rho\, dv$ در نظر بگیرید.] در این معادله

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}\\ &= (\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}})\cdot(\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}})\\ &= \sin\theta\cos(\phi-\phi')\end{aligned}$$

همچنین $dl = a\,d\phi'$ و $\lambda = k\cos\phi'$، پس

$$\begin{aligned}\int r'\cos\psi\,\lambda\,dl &= \int a^{۲}\sin\theta\cos(\phi-\phi')\,k\cos\phi'\,d\phi'\\ &= a^{۲}k\sin\theta\int_{۰}^{۲\pi}\cos(\phi-\phi')\cos\phi'\,d\phi'\\ &= a^{۲}k\sin\theta\int_{۰}^{۲\pi}(\cos\phi\cos\phi'^{۲} + \sin\phi\sin\phi'\cos\phi')\,d\phi'\end{aligned}$$

انتگرال $\sin\phi'\cos\phi'$ روی یک دورهٔ تناوب صفر می‌شود، انتگرال $\cos\phi'^{۲}$ نیز روی یک دورهٔ تناوب برابر π است. پس

$$V = \frac{a^{۲}k\pi\sin\theta\cos\phi}{۴\pi\varepsilon_{۰}r^{۲}}$$

۶-۳۳ تمام بارهای حلقه فاصله‌ای برابر $(a^{۲}+z^{۲})^{۰/۵}$ تا نقاط روی محور دارند، بنابراین برای این نقاط پتانسیل با گذاشتن کل بار روی حلقه به جای Q در رابطهٔ $Q/۴\pi\varepsilon_{۰}r$ و گذاشتن فاصله به جای r به دست می‌آید

$$V(z) = \frac{\lambda a}{۲\varepsilon_{۰}(a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۱}{۲}}} \qquad (۱)$$

در $z > a$ می‌توان این رابطه را با استفاده از فرمول بسط دو جمله‌ای به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}V(z) &= \frac{\lambda a}{۲\varepsilon_{۰}}(a^{۲}+z^{۲})^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{\lambda a}{۲\varepsilon_{۰}z}\left(۱+\frac{a^{۲}}{z^{۲}}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\\ &= \frac{\lambda a}{۲\varepsilon_{۰}z}\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{a^{۲}}{z^{۲}}+\frac{۳}{۸}\frac{a^{۴}}{z^{۴}}-\frac{۵}{۱۶}\frac{a^{۶}}{z^{۶}}+\cdots\right)\\ &= \frac{\lambda a}{۲\varepsilon_{۰}}\left(\frac{۱}{z}-\frac{۱}{۲}\frac{a^{۲}}{z^{۳}}+\frac{۳}{۸}\frac{a^{۴}}{z^{۵}}-\frac{۵}{۱۶}\frac{a^{۶}}{z^{۷}}+\cdots\right)\end{aligned} \qquad (۲)$$

با توجه جدول ۵-۱ می‌توان تابع پتانسیل را برای $r > a$ به صورت زیر نوشت

$$V = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \qquad (۳)$$

توجه کنید که چون $\theta = ۰$ در ناحیهٔ جواب است، $Q_n(\cos\theta)$ در جواب وجود ندارد. همچنین چون $r=\infty$ در ناحیهٔ جواب است توانهای مثبت r در جواب وجود ندارد.

برای یافتن پتانسیل روی محور z در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم $r = z$ و $\theta = 0$ و به دست می‌آوریم

$$V = A_0 \frac{1}{z} P_0(1) + A_1 \frac{1}{z^2} P_1(1) + A_2 \frac{1}{z^3} P_2(1) + A_3 \frac{1}{z^4} P_3(1) + \cdots$$

جدول ۵-۲ نشان می‌دهد که $P_n(1) = 1$. مقایسهٔ معادلهٔ بالا و معادلهٔ (۲) نشان می‌دهد که

$$A_0 = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \quad A_1 = 0 \quad A_2 = \frac{-\lambda a^3}{4\varepsilon_0} \quad A_3 = 0 \quad A_4 = \frac{3\lambda a^5}{16\varepsilon_0} \quad \cdots$$

پس معادلهٔ (۳) با ضرائب بالا پتانسیل در $r > a$ را به دست می‌دهد.

برای یافتن پتانسیل در $r < a$ به نحوی مشابه عمل می‌کنیم. این بار در تابع پتانسیل توانهای منفی r وجود ندارند، زیرا $r = 0$ در ناحیهٔ جواب است. پس

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{4}$$

به ازای $r = z$ و $\theta = 0$ پتانسیل روی محور z به دست می‌آید

$$V = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots \tag{5}$$

معادلهٔ (۱) را نیز به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$V(z) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}(a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{z^2}{a^2} + \frac{3}{8}\frac{z^4}{a^4} - \frac{5}{16}\frac{z^6}{a^6} + \cdots\right) \tag{6}$$

سرانجام با مقایسهٔ معادلات (۵) و (۶) به دست می‌آوریم

$$A_0 = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \quad A_1 = 0 \quad A_2 = \frac{-\lambda}{4\varepsilon_0 a^2} \quad A_3 = 0 \quad A_4 = \frac{3\lambda}{16\varepsilon_0 a^4} \quad \cdots$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۳۴ در ابتدا میدان الکتریکی به صورت $\mathbf{E} = J_0/\sigma\,\hat{\mathbf{z}}$ و میدان پتانسیل به صورت زیر بوده‌است

$$V_1 = -\frac{J_0}{\sigma} z = -\frac{J_0}{\sigma} r\cos\theta$$

پس از ایجاد حفره تابع پتانسیل باید از معادلهٔ لاپلاس با شرایط مرزی زیر پیروی کند

$$V_o = -\frac{J_0}{\sigma} r\cos\theta \quad \text{در} \quad r \to \infty \tag{1}$$

$$J_r = 0 \quad \text{در} \quad r = a \tag{2}$$

شرط مرزی اخیر بر حسب پتانسیل به این صورت بیان می‌شود: چون $J_r = \varepsilon E_r$ و $E_r = -\partial V_o/\partial r$

$$-\partial V_o/\partial r = 0 \quad \text{در} \quad r = a \tag{3}$$

با توجه به جدول ۵-۱ پتانسیل را به صورت زیر می‌نویسیم (جملات دیگر بسط را برای سادگی ندیده گرفته‌ایم، طبیعی است که در صورت در نظر گرفتن آن جملات و حل مسئله ضرائب آنها را صفر به دست می‌آوریم)

$$r > a \qquad V_o = A\, r\cos\theta + \frac{B}{r^{۲}}\cos\theta$$
$$r < a \qquad V_i = C\, r\cos\theta$$

شرط مرزی (۱) به دست می‌دهد $A = -J_{\circ}/\sigma$ و با توجه به شرط مرزی (۲) به دست می‌آوریم

$$-A\cos\theta + \frac{۲B}{a^{۳}}\cos\theta = \circ \quad \Rightarrow \quad B = -Aa^{۳}/۲$$

پیوستگی تابع پتانسیل در مرز [یعنی $V_o(r=a) = V_i(r=a)$] به دست می‌دهد

$$Ca = Aa + \frac{B}{a^{۲}} = A\left(a - \frac{a}{۲}\right) = -\frac{Aa}{۲}$$

پس

$$V_o = -\frac{J_{\circ}}{\sigma}\left(r\cos\theta - \frac{a^{۳}}{۲r^{۲}}\cos\theta\right)$$

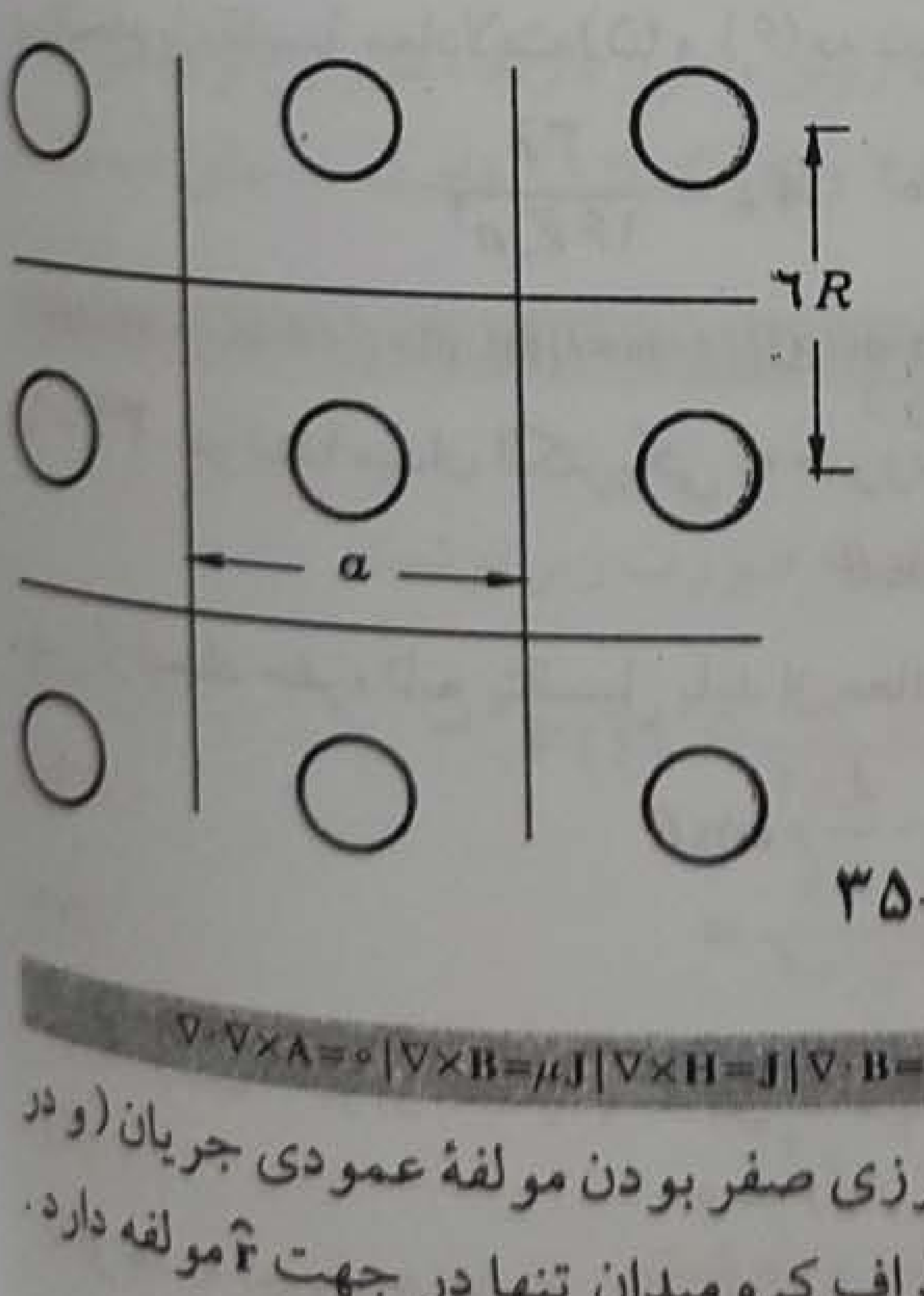
$$V_i = \frac{J_{\circ}}{\sigma}\,\frac{aA}{۲}\,r\cos\theta$$

به هر سه پتانسیل $V_۱$، V_i، و V_o باید مقدار ثابت V را افزود، ولی چون مسئله و شرایط مرزی بر حسب میدان بیان شده اند، نمی‌توان این مقدار ثابت را تعیین کرد.

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=\circ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=\circ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=\circ \,|\, \oint E\cdot dl=\circ$

۶-۳۵ در مثال ۶ فصل ۵ دیدیم که وقتی یک کرهٔ فلزی به شعاع R در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد، روی آن بار القا می‌شود و میدانی که تولید می‌کند معادل میدان یک دو قطبی با گشتاور $p = ۴\pi\varepsilon_{\circ}ER^{۳}$ است.

فضا را به مکعبهای کوچکی تقسیم می‌کنیم به نحوی که در هر مکعب یک کره قرار داشته باشد. طول یال این مکعبها $a = ۶R$ است. گشتاور دو قطبی در واحد حجم عبارت است از Np و طبق تعریف قطبش $P = Np$ پس



$$\frac{P}{E} = \varepsilon_{\circ}\chi_e = N۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}$$

و چون $\varepsilon_R = ۱ + \chi_e$

$$\varepsilon_R = ۱ + ۴\pi NR^{۳} = ۱ + \frac{۴\pi R^{۳}}{(۶R)^{۳}}$$
$$= ۱ + \frac{۴\pi}{۶^{۳}} = ۱{,}۰۶$$

توجه کنید که این مقدار به شعاع کره‌ها بستگی ندارد، بنابراین می‌توان آنها را تا حد ممکن (از لحاظ عملی) کوچک برگزید.

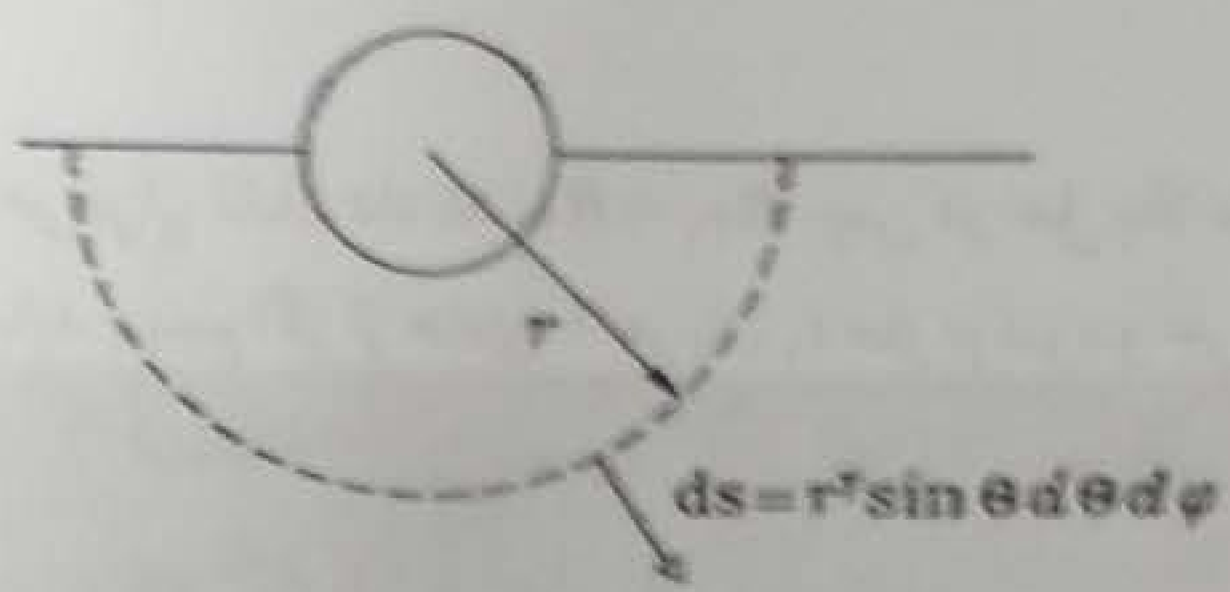
شکل ح ۶-۳۵

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=\circ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=\circ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=\circ \,|\, \oint E\cdot dl=\circ$

۶-۳۶ گرچه مسئله تقارن کروی ندارد، ولی به خاطر شرط مرزی صفر بودن مولفهٔ عمودی جریان (و در نتیجه میدان الکتریکی) در مرز مواد رسانا و مواد عایق، در اطراف کره میدان تنها در جهت $\hat{r}$ مولفه دارد. یعنی در هر دو محیط ۲ و ۱ میدان و چگالی جریان شعاعی هستند

$$J_۱ = K_۱(r)\hat{r} \qquad J_۲ = K_۲(r)\hat{r}$$

جریانی که از هر سطح نیمکره‌ای شبیه شکل ح ۶-۳۶ می‌گذرد باید مقدار ثابت I باشد (اصل پیوستگی



شکل ح ۶-۳۶

جریان) چه سطح در ناحیهٔ ۱ باشد و چه در ناحیهٔ ۲:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$
$$= \int K_1(r) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi r^2 K_1(r)$$

پس در هر دو ناحیه

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

میدان در دو ناحیه عبارت است از

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}}{\sigma_1} = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}}{\sigma_2} = \frac{I}{2\pi\sigma_2 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

حال پتانسیل روی کره را می‌یابیم

$$V = -\int_{\infty}^{a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\infty}^{b} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} - \int_{b}^{a} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$
$$= \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{\sigma_1 b}\right) + \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{\sigma_2 a} - \frac{1}{\sigma_2 b}\right)$$

پس

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma_1 b} + \frac{1}{2\pi\sigma_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۶-۳۷ چون دو کره از هم خیلی دورند می‌توان مقاومت بین آنها را ترکیب سری مقاومت بین کرهٔ ۱ و نقطهٔ خیلی دور P و مقاومت بین نقطهٔ خیلی دور P و کرهٔ ۲ در نظر گرفت. با توجه به حل مسئلهٔ ۶-۳۶ با $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ داریم

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{2\pi\sigma a} + \frac{1}{2\pi\sigma b}$$

ولی حل دقیقتر مسئله به صورت زیر است. همانند مبحث ضرائب پتانسیل و ظرفیت می‌توان بین پتانسیل و جریان هادیهای واقع در محیطی رسانا ضرائب مقاومت تعریف کرد، مثلاً برای دو هادی واقع در یک محیط داریم

$$V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2$$
$$V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2$$

در حالتی که دو هادی داریم جریان خارج شده از یکی به دیگری وارد می‌شود، یعنی $I = I_1 = -I_2$. پس

$$V_2 = (R_{21} - R_{22}) I \qquad V_1 = (R_{11} - R_{12}) I$$

و مقاومت بین دو هادی عبارت است از

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = R_{11} + R_{22} - 2R_{12}$$

زیرا می‌توان نشان داد که $R_{21} = R_{12}$. پس در حل بالا ما در واقع از جملهٔ R_{12} چشم پوشیده‌ایم. برای یافتن R_{12} باید ببینیم اگر از هادی ۱ جریان I_1 خارج شود و جریان I_2 صفر باشد، پتانسیل کرهٔ ۲ چقدر می‌شود. اگر از کرهٔ ۱ جریان I خارج شود می‌توان نشان داد که چگالی جریان عبارت است از (با فرض بسیار دور بودن کرهٔ ۲، و بی تاثیر بودن آن در میدان)

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

میدان الکتریکی $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$ و تابع پتانسیل به صورت زیر است

$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{2\pi\sigma r}$$

پس پتانسیل در فاصلهٔ l از کره عبارت است از $I/2\pi\sigma l$، و

$$R_{12} = \frac{1}{2\pi\sigma l}$$

و سرانجام

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{l}\right)$$

۶-۳۸ در ابتدا دو نیرو بر کره وارد می‌شود، نیروی وزن W و نیروی هیدروستاتیک $-W$ (در جهت بالا). وقتی کره تا نیمه در مایع فرو می‌رود نیروی هیدروستاتیک دو برابر می‌شود، زیرا حجم مایع جابجا شده دو برابر شده است. دو نیروی الکتریکی نیز به نیمکره‌های بالا و پایین وارد می‌شود. چگالی بار روی نیمکرهٔ بالایی $\varepsilon_0 V_0/a$ و روی نیمکرهٔ پایینی $\varepsilon V_0/a$ است. نیروی وارد بر نیمکرهٔ بالایی عبارت است از:

$$\mathbf{F} = \int \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, ds\,\hat{\mathbf{n}} = \int \frac{(\varepsilon_0 V_0/a)^2}{2\varepsilon_0} a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{\mathbf{r}}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2}\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, (\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}})$$

مولفه‌های x و y نیرو صفر می‌شود، زیرا انتگرال $\cos\phi\, d\phi$ و $\sin\phi\, d\phi$ در فاصلهٔ ۰ تا 2π صفر است

$$\mathbf{F}_u = \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2}\hat{\mathbf{z}}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{2}\hat{\mathbf{z}}$$

به نحوی مشابه نیروی زیر به نیمکرهٔ پایینی وارد می‌شود

$$\mathbf{F}_l = -\frac{\pi\varepsilon V_0^2}{2}\hat{\mathbf{z}}$$

معادلهٔ تعادل عبارت است از $F_u + 2W = F_l + W$ یا

$$\frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{2} + W = \frac{\pi\varepsilon V_0^2}{2}$$

یا $W = (\pi V_0^2/2)(\varepsilon - \varepsilon_0)$ که به دست می‌دهد

$$V_0^2 = \sqrt{2W/\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$