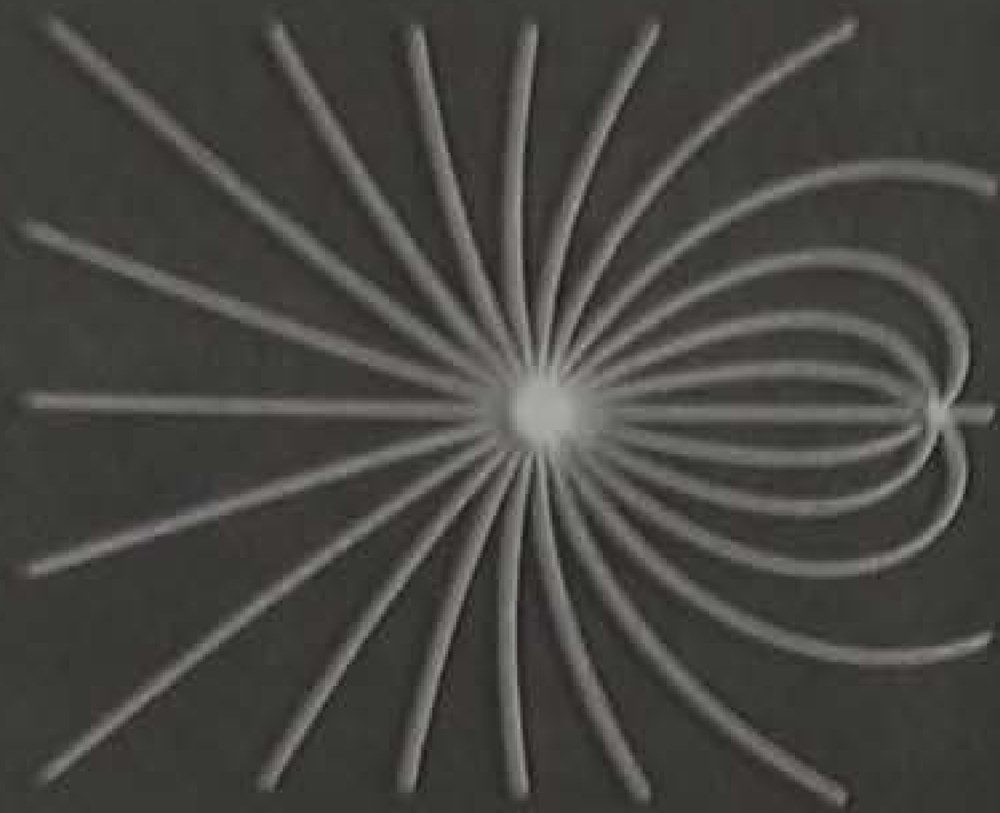


۵
حل معادلهٔ لاپلاس

۵-۱ معادلات لاپلاس و پواسون و اصل یکتایی جواب

در محیطهای همگن (دارای گذردهی نامتغیر با مکان) تابع پتانسیل از رابطهٔ زیر پیروی می‌کند

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (۵-۱)$$

که معادلهٔ پواسون نام دارد. اگر در این محیط چگالی بار صفر باشد، یعنی $\rho = 0$، آنگاه

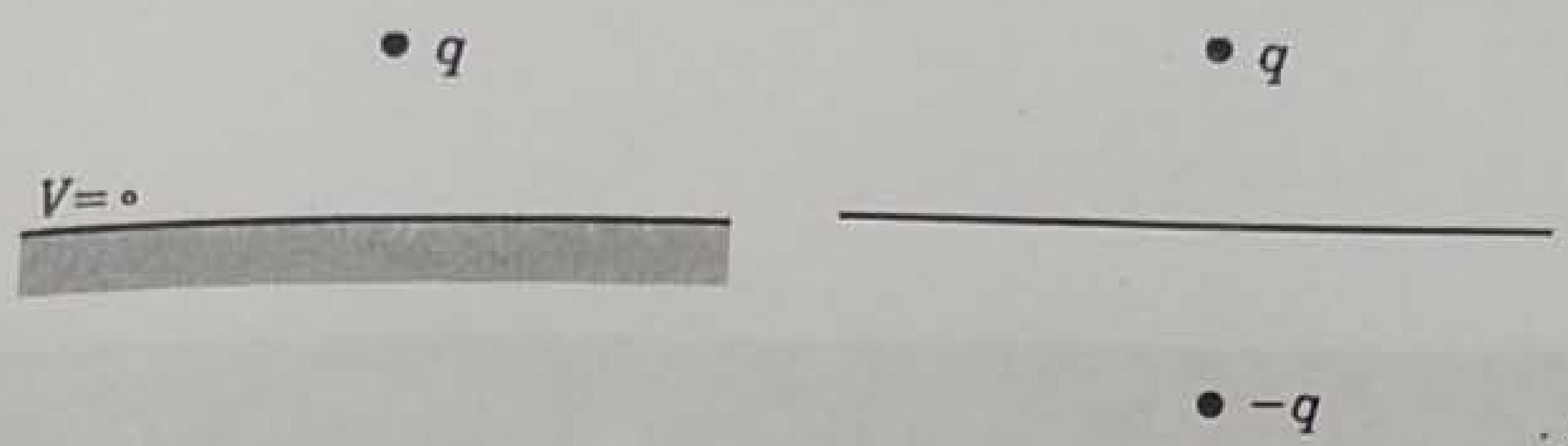
$$\nabla^2 V = 0 \qquad (۵-۲)$$

که معادلهٔ لاپلاس نامیده می‌شود.

معادلات پواسون و لاپلاس به ازای شرایط مرزی مشخص جواب یکتا دارند. نتیجهٔ این اصلِ یکتایی جواب این است که اگر بتوان نشان داد که تابعی معادله و شرایط مرزی را ارضا می‌کند، جواب و تنها جواب مسئله است.

۵-۲ روش تصویر

اگر به جای یک سطح همپتانسیل یک ورقهٔ هادی قرار داده، آن را به پتانسیل متناظر با آن سطح وصل کنیم، طبق اصل یکتایی جواب چون محیط و شرایط مرزی‌اش تغییر نکرده است، تابع پتانسیل در آن محیط تغییری نمی‌کند. شکل ۵-۱ دو بار نقطه‌ای q و $-q$ را نشان می‌دهد. صفحهٔ عمود منصف پاره خط واصل بین دو بار، سطح همپتانسیلی با پتانسیل صفر است. اگر به جای این سطح یک هادی قرار دهیم و آن را به پتانسیل صفر وصل کنیم، پتانسیل در نیم فضای بالای هادی هیچ تغییری نمی‌کند. این اساس روش تصویر است.

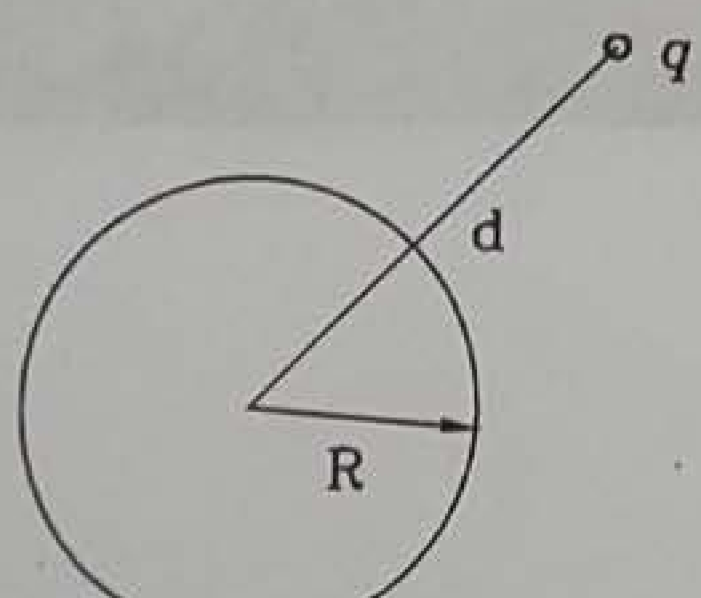


شکل ۵-۱ روش تصویر.

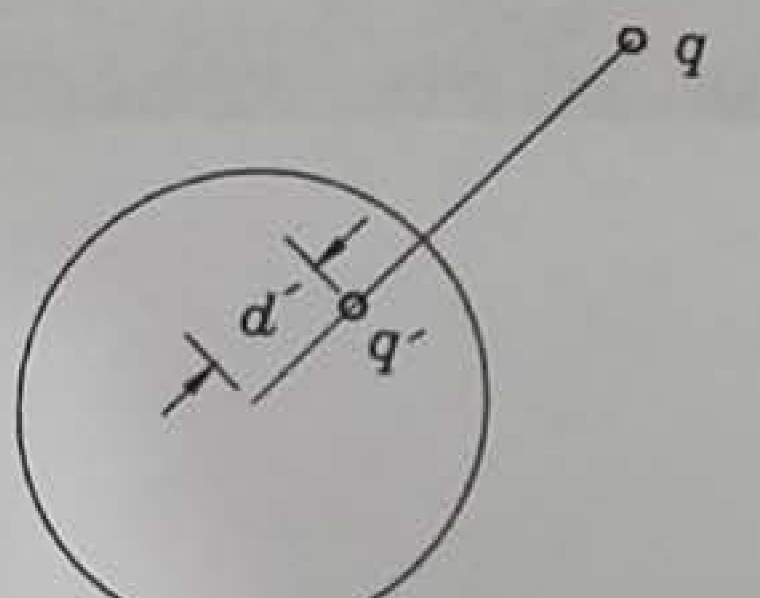
در واقع مسئلهٔ اصلی یافتن تابع پتانسیل ناشی از بار q واقع در بالای یک صفحهٔ هادی است. به جای حل این مسئله تابع پتانسیل وضعیت نشان داده شده در شکل ۵-۱ را به دست می‌آوریم.

می‌توان نشان داد که اگر بار نقطه‌ای به فاصلهٔ d از مرکز کره‌ای هادی به شعاع a قرار گیرد، پتانسیل در فضای اطراف کره مانند پتانسیل ناشی از دو بار q و q' شکل ۳ است که در آن

$$d' = -\frac{R^{۲}}{d}\ ,\ \ q' = -\frac{R}{d}q \qquad (۲-۵)$$



شکل ۵-۲ بار نقطه‌ای در کنار کرهٔ هادی.

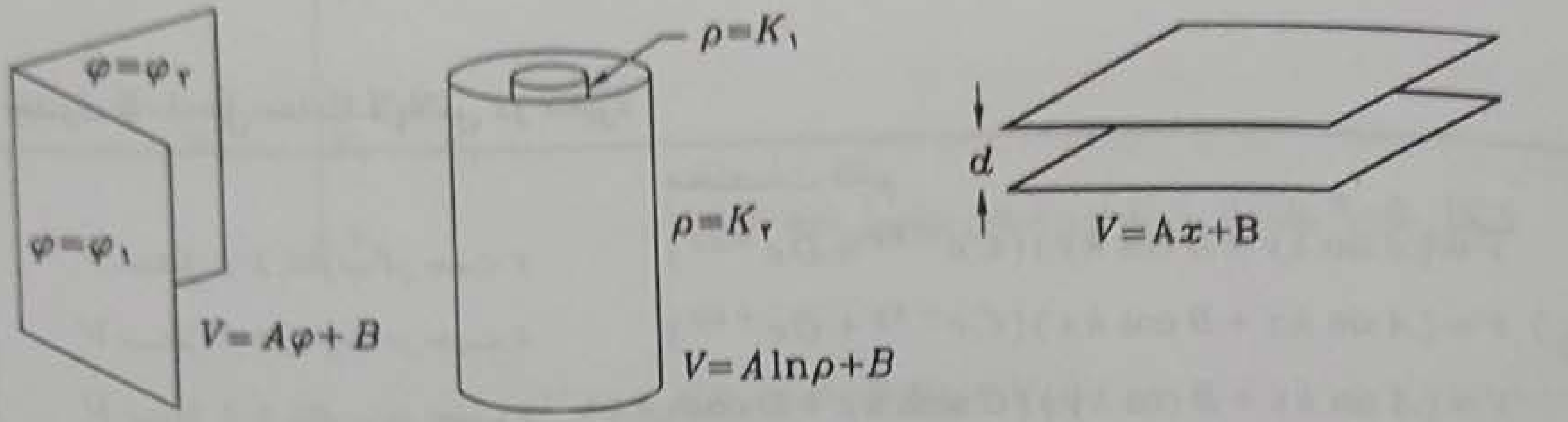


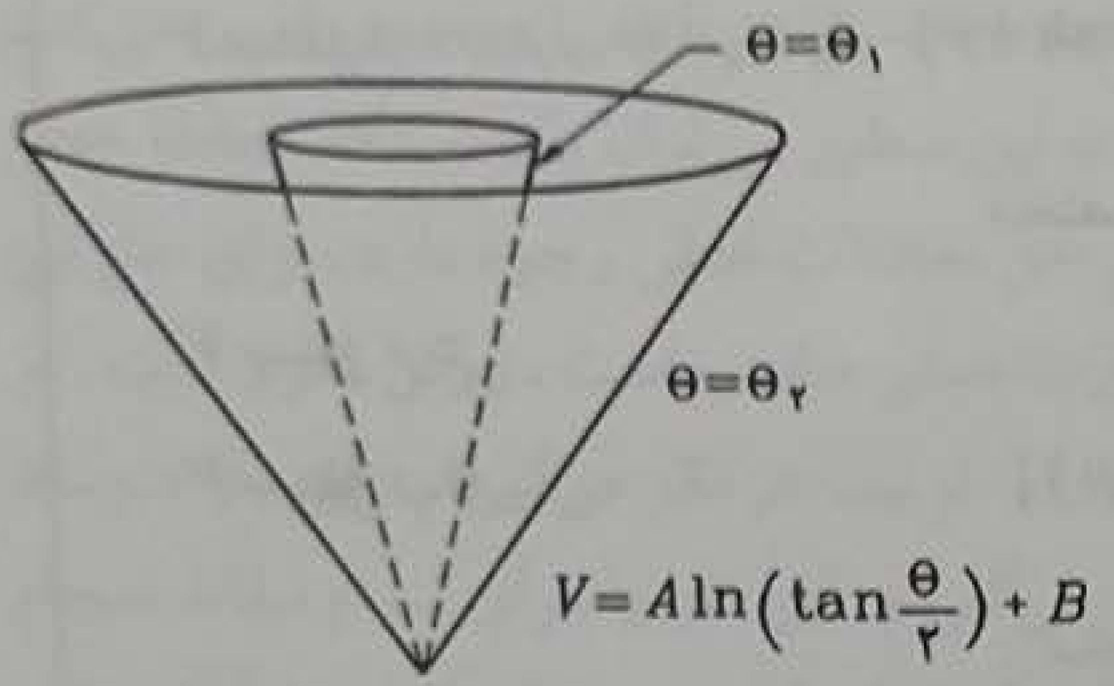
شکل ۵-۳ تصویر بار نقطه‌ای در کرهٔ هادی.

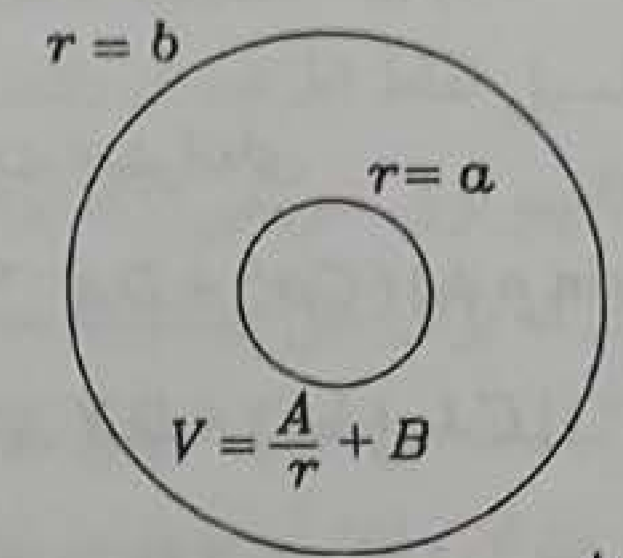
۵-۳ حل معادلهٔ لاپلاس در وضعیتهای ساده

منظور از وضعیتهای ساده وضعیتهایی است که در آنها پتانسیل تنها تابعی از یک متیر فضاست. در این موارد معادلهٔ لاپلاس یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی (نه پاره‌ای) است، و به راحتی می‌توان آن را حل کرد. این وضعیتها و تابع پتانسیل متناظر با هر کدام در شکلهای ۴ تا ۸ نشان داده شده‌اند. تمام این وضعیتها، بجز یکی، وضعیتهای ایده‌آل هستند، ولی در عمل می‌توان وضعیتهایی یافت که در آنها تابع پتانسیل تقریباً یا دقیقاً مانند اینها باشد. در تمام توابع به دست آمده دو ضریب ثابت وجود دارد، که مقدارشان باید با اعمال شرایط مرزی تعیین شوند.

توصیف مسئله	معادلات سطوح هادی	تابع پتانسیل
دو هادی مسطح موازی (شکل ۳الف)	$x=K_۱$ و $x=K_۲$	$V=Ax+B$
دو استوانهٔ هم محور (شکل ۳ب)	$\rho=\rho_۱$ و $\rho=\rho_۲$	$V=A\ln\rho+B$
دو کرهٔ هم مرکز (شکل ۳ج)	$r=r_۱$ و $r=r_۲$	$V=\frac{A}{r}+B$
دو نیم صفحه با لبهٔ مشترک (شکل ۳د)	$\phi=\phi_۱$ و $\phi=\phi_۲$	$V=A\phi+B$
دو مخروط هم محور و هم راس (شکل ۳هـ)	$\theta=\theta_۱$ و $\theta=\theta_۲$	$V=A\ln\left(\tan\frac{\theta}{۲}\right)+B$







شکلهای ۵-۴ تا ۵-۸

وضعیتهای هندسی منجر به پتانسیل یک متغیره.

۵-۴ حل معادلهٔ لاپلاس در دو بعد

در مواردی که پتانسیل تابع بیش از یک متغیرست، برای یافتن آن باید یک معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای حل شود. یک روش معمول برای حل این مسائل **روش جداسازی متغیرهاست**. به این منظور تابع پتانسیل را حاصلضرب توابعی یک متغیره فرض کرده، به حل معادلهٔ لاپلاس می‌پردازیم. در بعضی دستگاههای مختصات (که دستگاههای پرکاربرد قائم، استوانه‌ای، و کروی نیز از آن جمله‌اند) این فرض معادلهٔ لاپلاس را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند. حاصلضرب جوابهای به دست آمده برای این معادلات دیفرانسیل معمولی تابع پتانسیل را به دست می‌دهد. معمولاً جوابها چند ثابت نامشخص دارند، یعنی در واقع یک دسته جواب هستند.

معمولاً نمی‌توان تنها با یکی از اعضای دسته جواب به دست آمده تمام شرایط مرزی را برآورده کرد (بجز موارد استثنایی). ولی اگر برای یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی (معادلات پواسون و لاپلاس خطی‌اند) چند جواب وجود داشته باشد، ترکیب خطی آنها نیز جواب است. بنابراین می‌کوشیم شرایط مرزی را با در نظر گرفتن ترکیب خطی جوابها، معمولاً به صورت یک سری بینهایت، ارضا کنیم. آخرین گام حل مسئله تعیین ضرائب سری است. روش یافتن این ضرائب همانند روشی است که برای تعیین ضرائب سری فوریه به کار می‌رود. در واقع آشنایی با روش سری فوریه تا حدی برای حل این مسائل الزامی است.

در سه دستگاه مختصات قائم، استوانه‌ای و کروی روش جداسازی متغیرها دسته جوابهای مندرج در جدول ۵-۱ را به دست می‌دهد. در این جدول $J(x)$ تابع بسل نوع اول، $Y(x)$ تابع نیومن نوع اول، $Q_n(\cos\theta)$ تابع لژاندر نوع دوم، و $P_n(\cos\theta)$ چندجمله‌ایهای لژاندر نوع اول هستند که تعدادی از آنها در جدول ۵-۲ درج شده‌اند. $Q_n(\cos\theta)$ در $\theta=0$ بینهایت است، بنابراین اگر $\theta=0$ در ناحیهٔ مورد نظر باشد، ضریب $Q_n(\cos\theta)$ باید صفر باشد.

جدول ۵-۱ حل معادلهٔ لاپلاس دو متغیره

مختصات قائم	
V مستقل از z ,تناوب در جهت y	$V=(A\sin ky+B\cos ky)(Ce^{-kx}+De^{+kx})$
V مستقل از z ,تناوب در جهت x	$V=(A\sin kx+B\cos kx)(Ce^{-ky}+De^{+ky})$
V مستقل از z ,تناوب در جهت y	$V=(A\sin ky+B\cos ky)(C\sinh kx+D\cosh kx)$
V مستقل از z ,تناوب در جهت x	$V=(A\sin kx+B\cos kx)(C\sinh ky+D\cosh ky)$
مختصات استوانه‌ای	
V مستقل از z	$V=(A\cos n\phi+B\sin n\phi)(C\rho^{n}+D\rho^{-n})$
V مستقل از ϕ	$V=(Ae^{\lambda z}+Be^{-\lambda z})[C\mathrm{J}_{۰}(\lambda\rho)+D\mathrm{Y}_{۰}(\lambda\rho)]$
مختصات کروی	
V مستقل از ϕ	$V=[Ar^{n}+Br^{-(n+۱)}][C\mathrm{P}_{n}(\cos\theta)+D\mathrm{Q}_{n}(\cos\theta)]$

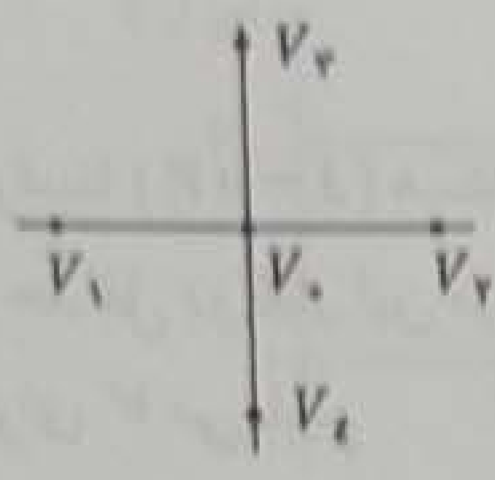
جدول ۵-۲ توابع لژاندر نوع اول

$$\mathrm{P}_{۰}(\cos\theta)=۱$$
$$\mathrm{P}_{۱}(\cos\theta)=\cos\theta$$
$$\mathrm{P}_{۲}(\cos\theta)=\frac{۱}{۲}(۳\cos^{۲}\theta-۱)$$
$$\mathrm{P}_{۳}(\cos\theta)=\frac{۱}{۲}(۵\cos^{۳}\theta-۳\cos\theta)$$
$$\mathrm{P}_{۴}(\cos\theta)=\frac{۱}{۸}(۳۵\cos^{۴}\theta-۳۰\cos^{۲}\theta+۳)$$
$$\mathrm{P}_{۵}(\cos\theta)=\frac{۱}{۸}(۶۳\cos^{۵}\theta-۷۰\cos^{۳}\theta+۱۵\cos\theta)$$

۵-۵ روشهای دیگر حل معادلهٔ لاپلاس

معادلهٔ لاپلاس به مدت سه قرن یکی از کانونهای پژوهش ریاضیدانهای کاربردی و ریاضی فیزیکدانها بوده‌است. تتبعات این دانشمندان برای حل این معادله و دیگر معادلات مرتبط با آن، چون معادلهٔ حرارت، ثمرات زیادی داشته است، که ابداع سری فوریه یکی از آنهاست. استفاده از توابع مختلط و نگاشت همدیس یکی از روشهایی است که می‌توان برای حل معادلهٔ لاپلاس به کار برد.

در دهه‌های اخیر پیشرفت عظیم تکنولوژی رایانه‌ها راهی نوین در حل معادلهٔ لاپلاس گشوده است. با روشهای عددی می‌توان پتانسیل را در هر تعداد نقطه‌ای از محیط و با هر دقتی به دست آورد. اساس روشهای کامپیوتری این است که تابع پتانسیل تبعیت کننده از معادلهٔ لاپلاس باید به نحوی باشد که مقدار آن در هر نقطه با متوسط مقادیر پتانسیل در نقاط اطراف آن برابر باشد. یعنی مثلاً در شکل ۹ (برای حالت دو



شکل ۵–۹ پتانسیل یک نقطه بر اساس پتانسیل نقاط اطراف آن.

بعدی)

$$V_0 = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

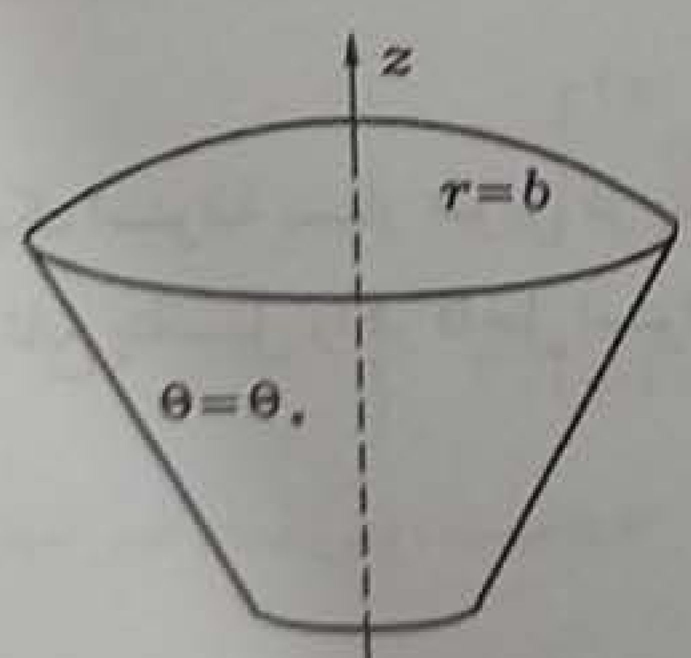
پس محیط داده شده را به صورت شبکه‌ای تقسیم بندی می‌کنیم و پتانسیل هر نقطه را به نحوی تعیین می‌کنیم که مقدار آن متوسط مقادیر پتانسیل نقاط اطراف آن باشد. به این منظور می‌توان یک دستگاه معادلهٔ خطی ترتیب داد و یکی از روشهای کامپیوتری سریعی را که برای حل معادلات خطی وجود دارد، برای حل این دستگاه به کار برد. روش دیگری که برای حل عددی به صورت دستی مناسب است، **روش تکرار** است. در این روش به هر نقطه پتانسیلی نسبت می‌دهیم. سپس نقاط را به ترتیب در نظر می‌گیریم، این بار متوسط ولتاژ نقاط اطراف هر نقطه را به عنوان ولتاژ آن نقطه در نظر می‌گیریم. این کار را برای تمام نقاط انجام می‌دهیم. این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم که تغییر ولتاژ هر نقطه کمتر از دقت مورد نظر باشد. مثلاً اگر دقت یک رقم پشت ممیز مورد نظر ست، کار را در هنگامی متوقف می‌کنیم که تغییر ولتاژ نقاط در رقم دوم پشت ممیز رخ دهد.

حل مسئله

حل معادلهٔ لاپلاس در وضعیتهای ساده می‌تواند اهمیت عملی نیز داشته باشد، گر چه آرایشهای مربوط به این حالتها همگی وضعیتهای ایده‌آل و تقریباً ناممکنی هستند، مثلاً داشتن دو صفحهٔ بینهایت، یا دو استوانهٔ بینهایت مسلماً ناممکن است. یکی از مواردی که وضعیتی واقعی به یافتن حلی ساده برای پتانسیل منجر می‌شود در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۱

جسمی با رسانایی ویژهٔ σ فضای $a \le r \le b$ ، $0 < \theta < \theta_0$ را پر کرده است. دو سطح $r = a$ و $r = b$ هادی کامل هستند. مقاومت بین این دو سطح را بیابید.



شکل ۵–۱۰ جسمی که مقاومت آن در مثال ۱ به دست آمده است.

حل

این مسئله در جهت ϕ تقارن دارد ولی در جهت θ نه، بنابراین پتانسیل ظاهراً می‌تواند تابعی از r و θ باشد. ولی چون محیطی که در آن باید به حل معادلهٔ لاپلاس بپردازیم عایق کامل نیست، در آن جریان وجود دارد. مولفهٔ عمود بر سطوح غیر هادی چگالی جریان باید صفر باشد، و چون چگالی جریان و شدت میدان

الکتریکی همراستا $(\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E})$ هستند، مولفهٔ عمود بر مرز شدت میدان الکتریکی در $\theta=\theta_0$ باید صفر باشد. به بیانی دیگر حداقل در کنار این مرزها پتانسیل نباید تابعی از θ باشد. پتانسیلی مستقل از θ فرض می‌کنیم و رابطهٔ زیر را برای V می‌یابیم

$$V=\frac{A}{r}+B$$

پتانسیل را در $r=a$ برابر V_0 و در $r=b$ برابر 0 می‌گیریم (یعنی اختلاف پتانسیل یا ولتاژ V_0 را به مقاومتی که در صدد یافتن مقدارش هستیم اعمال می‌کنیم). پس باید داشته باشیم

$$0=\frac{A}{b}+B \quad \text{و} \quad V_0=\frac{A}{a}+B$$

که نتیجه می‌دهد

$$V=\frac{V_0 a}{a-b}\left(-\frac{b}{r}+1\right)$$

شدت میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E}=-\nabla V=\frac{V_0 ab}{a-b}\frac{1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

که بر مرز $\theta=\theta_0$ مماس است، یا به عبارتی مولفهٔ عمود بر مرز آن صفر است. پس چون تابع پتانسیل به دست آمده معادلهٔ لاپلاس و شرایط مرزی را ارضا می‌کند، طبق اصل یکتایی جواب تنها جواب این مسئله است.

برای یافتن جریان ناشی از اعمال این ولتاژ ابتدا چگالی جریان را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}=\frac{\sigma V_0 ab}{a-b}\frac{1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

جریان خارج شده از سطح $r=a$ برابر است با

$$\begin{aligned} I&=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=\int \mathbf{J}\cdot a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{\mathbf{r}}\\ &=\frac{\sigma V_0 ab}{a-b}\int_0^{\theta_0}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\frac{2\pi\sigma V_0 ab}{a-b}(1-\cos\theta_0)\end{aligned}$$

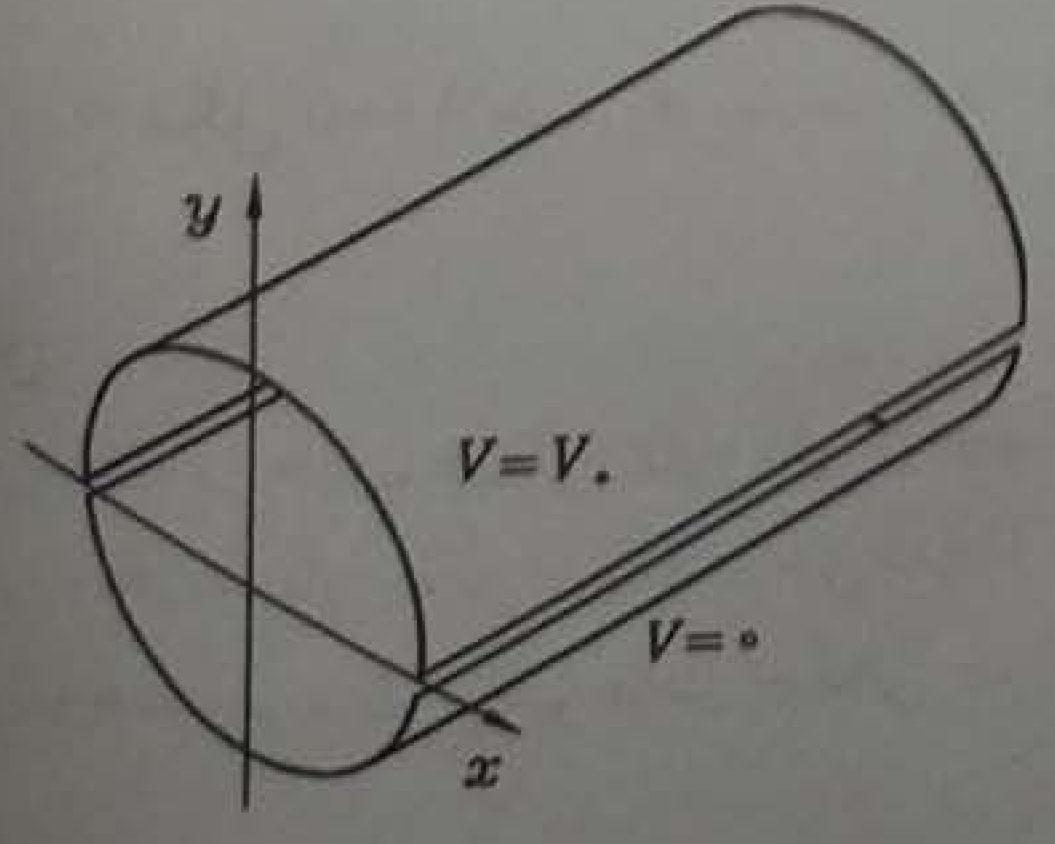
و سرانجام

$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{a-b}{2\pi\sigma ab(1-\cos\theta_0)}$$

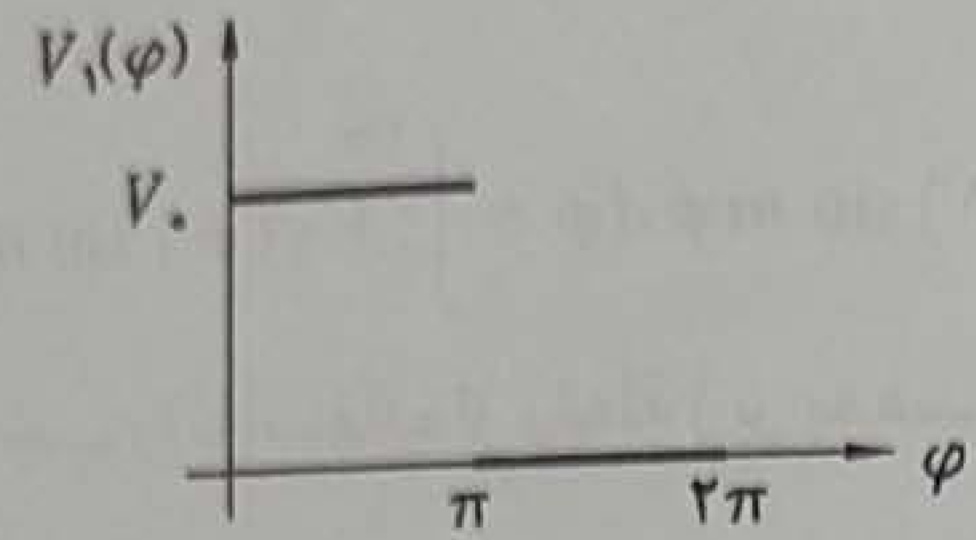
$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۲

نیمی از یک استوانهٔ بسیار طویل در پتانسیل V_0 و نیم دیگر آن در پتانسیل صفر قرار دارد (شکل ۵-۱۱ را ببینید). تابع پتانسیل را در داخل استوانه بیابید.



شکل ۵-۱۱ دو پوستهٔ نیم استوانه‌ای.



شکل ۵-۱۲ تابع پتانسیل $V_1(\phi)$.

حل به خاطر بینهایت (بسیار طویل) بودن استوانه، پتانسیل در جهت محور آن تغییر نمی‌کند، یعنی تنها تابعی از ρ و ϕ است. با توجه به جدول ۵-۱ شکل زیر را به عنوان جواب برمی‌گزینیم

$$V = (A\cos n\phi + B\sin n\phi)(C\rho^{n} + D\rho^{-n})$$

چون در $\rho = 0$، ρ^{-n} بینهایت می‌شود، باید داشته باشیم $D = 0$. با ادغام C در ضرائب هنوز نامعین B و A به دست می‌آوریم

$$V = \rho^{n}(A\cos n\phi + B\sin n\phi)$$

در $\rho = a$ باید داشته باشیم $V = V_1(\phi)$، که در آن $V_1(\phi)$ تابع نشان داده شده در شکل ۵-۱۲ است. نمی‌توان B و A را به نحوی برگزید که این شرط مرزی برآورده شود، بنابراین سری بینهایتی به صورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n}(A_n\cos n\phi + B_n\sin n\phi)$$

حال در $\rho = a$ باید داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n}(A_n\cos n\phi + B_n\sin n\phi) = V_1(\phi)$$

برای تعیین ضرائب A_n دو طرف را در $\cos m\phi$ ضرب کرده، از 0 تا 2π انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a^{n}(A_n\cos n\phi + B_n\sin n\phi)\cos m\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} V_1(\phi)\cos m\phi\, d\phi$$

انتگرالهای طرف چپ را با استفاده از روابط زیر به دست می‌آوریم

$$\int_0^{2\pi}\cos n\phi\cos m\phi\, d\phi = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos n\phi\sin m\phi\, d\phi = 0$$

انتگرال طرف راست عبارت است از

$$\int_0^{2\pi} V_1(\phi)\cos m\phi\, d\phi = \int_0^{\pi} V_0\cos m\phi\, d\phi$$

این انتگرال به ازای تمام مقادیر $m \neq 0$ صفر و به ازای $m = 0$ برابر πV_0 است. پس تمام ضرائب A_n بجز A_0 صفرند و

$$A_0 = \frac{V_0}{2}$$

برای تعیین ضرائب B_n دو طرف را در $\sin m\phi$ ضرب کرده، از 0 تا 2π انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) \sin m\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} V_1(\phi) \sin m\phi \, d\phi$$

انتگرالهای طرف چپ را با استفاده از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم

$$\int_0^{2\pi} \sin n\phi \sin m\phi \, d\phi = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

پس تمام انتگرالهای طرف چپ، بجز انتگرال جملهٔ mام صفر می‌شوند؛ بنابراین

$$\pi a^m B_m = \int_0^{2\pi} V_1(\phi) \sin m\phi \, d\phi = \int_0^{\pi} V_0 \sin m\phi \, d\phi$$

$$= \frac{V_0}{m}(1 - \cos m\pi)$$

$$B_m = \frac{V_0 (1 - \cos m\pi)}{m\pi a^m}$$

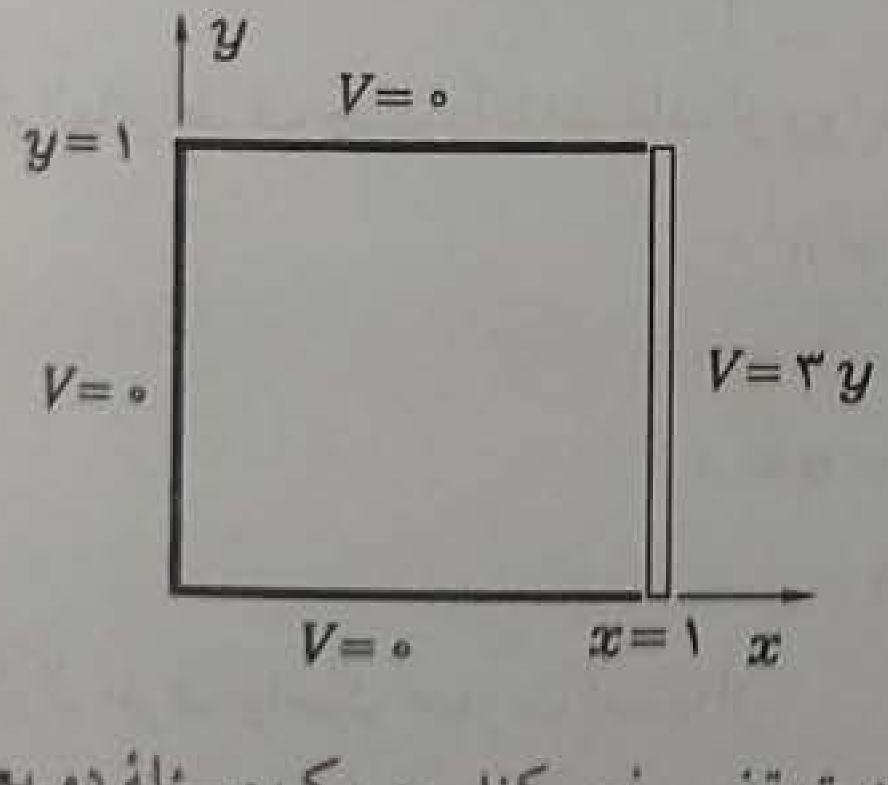
و سرانجام

$$V = \frac{V_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_0 (1 - \cos m\pi)}{m\pi a^m} \rho^n \sin n\phi$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۳

شکل ۵-۱۳ ناودان بسیار طویلی را نشان می‌دهد که سه بدنهٔ آن در صفحات $x = 0$، $y = 0$، و $y = 1$ قرار دارند، و به پتانسیل ۰ وصل شده‌اند. پوشش واقع در $x = 1$ از هادی غیر کاملی تشکیل شده است که بین دو لبهٔ آن اختلاف پتانسیل ۳ V اعمال شده است، و به همین خاطر پتانسیل در امتداد آن به صورت $V = 3y$ تغییر می‌کند. تابع پتانسیل در داخل ناودان را بیابید.



شکل ۵-۱۳ ناودانی که پتانسیل داخل آن در مثال ۲ به دست آمده‌است.

حل

چون ناودان در جهت z بسیار بلند است، تابع پتانسیل در این جهت تغییر نمی‌کند، و یک مسئلهٔ دو بعدی پیش رو داریم. برای گزینش یک دسته جواب مناسب از جدول ۵-۱، توجه می‌کنیم که تابع پتانسیل در جهت y باید دو بار صفر شود، یکی در $y = 0$ و یکی در $y = 1$. پس شکل زیر را برای جواب برمی‌گزینیم

$$V = (A \sin ky + B \cos ky)(Ce^{-kx} + De^{+kx})$$

ابتدا شرط مرزی در $y = 0$ را اعمال می‌کنیم. به ازای $y = 0$ داریم $V = 0$، پس

$$V = B(Ce^{-kx} + De^{+kx}) = 0$$

این رابطه باید به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد، پس $B=0$. اکنون تابع زیر را داریم

$$V=\sin ky\,(Ce^{-kx}+De^{+kx})$$

چون هنوز ثابتهای C و D تعیین نشده‌اند، ثابت A را نیز در آنها ادغام کرده‌ایم. در $y=1$ پتانسیل باید صفر باشد، یعنی باید داشته باشیم

$$\sin k\,(Ce^{-kx}+De^{+kx})=0$$

برای ارضای این رابطه به ازای تمام مقادیر x باید داشته باشیم $\sin k=0$، که نتیجه می‌دهد

$$k=n\pi \qquad n=1,2,3,\cdots$$

به این ترتیب به تابع زیر می‌رسیم

$$V=\sin n\pi y\,(Ce^{-n\pi x}+De^{+n\pi x})$$

نوبت به مرز $x=0$ می‌رسد که در آنجا نیز باید داشته باشیم $V=0$، پس

$$0=\sin n\pi y\,(C+D)$$

برای برقراری این رابطه به ازای تمام مقادیر y باید داشته باشیم $C=-D$؛ که به تابع زیر منجر می‌شود

$$V=C\sin n\pi y\,(e^{-n\pi x}-e^{+n\pi x}) \qquad (۷-۵)$$

سرانجام به مرز $x=1$ می‌رسیم که پتانسیل روی آن به صورت $V=3y$ است، پس

$$C\sin n\pi y\,(e^{-n\pi}-e^{+n\pi})=3y$$

به هیچ ترتیبی نمی‌توان C یا n را به صورتی تعیین کرد که رابطهٔ بالا به ازای تمام مقادیر y ($0<y<1$) برقرار باشد. توجه کنید که پتانسیل بیان شده در معادلهٔ (۵-۷) به ازای تمام مقادیر n معادلهٔ لاپلاس و سه شرط مرزی را ارضا می‌کند. پس می‌توانیم یک سری به صورت زیر به عنوان جواب ترتیب دهیم

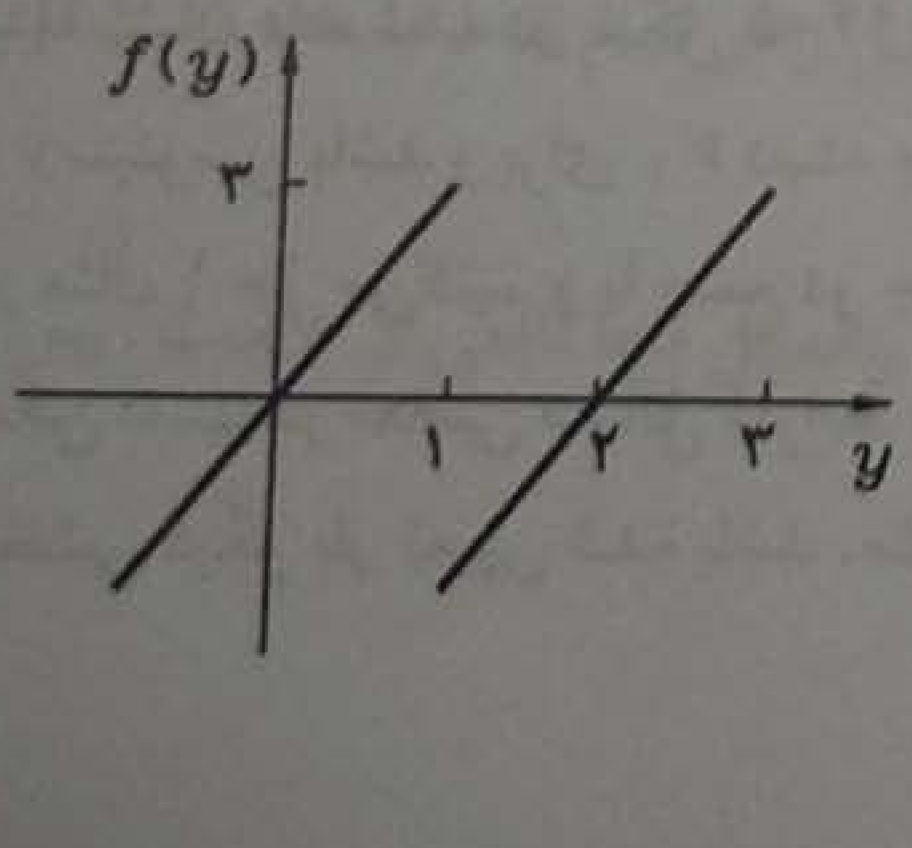
$$V=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin n\pi y\,(e^{-n\pi x}-e^{+n\pi x}) \qquad (۸-۵)$$

اکنون امیدواریم با انتخاب مناسب ضرائب شرط مرزی چهارم را برآورده کنیم. در $x=1$ باید داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin n\pi y\,(e^{-n\pi}-e^{+n\pi})=3y$$

طرف چپ این معادله یک سری فوریهٔ سینوسی است، یعنی می‌تواند بسط یک تابع فرد باشد. بنابراین فرض می‌کنیم طرف راست تابع متناوب $f(y)$ شکل است. توجه کنید که این تابع در فاصلهٔ $0<y<1$ چنانچه می‌خواهیم برابر $3y$ است.

برای تعیین ضرائب، دو طرف معادلهٔ (۵-۸) را در $\sin m\pi y$ ضرب کرده، از ۱- تا ۱+ انتگرال می‌گیریم



شکل ۵-۱۴ تابع متناوب $f(y)$ به کار رفته در حل مثال ۳.

$$\int_{-1}^{+1}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi y\,(e^{-n\pi}-e^{+n\pi})\sin m\pi y\,dy=\int_{-1}^{+1} 3y\sin m\pi y\,dy$$

طرف چپ مجموعی از حاصلضربهایی به صورت $\sin n\pi y \sin m\pi y$ است، که برایشان داریم

$$\int_T \sin n\pi y \sin m\pi y\,dy=\begin{cases} 0 & m\neq n \\ \dfrac{T}{2} & m=n \end{cases}$$

T دورهٔ تناوب است و انتگرال روی یک دورهٔ تناوب گرفته می‌شود. پس از تمام جملات طرف چپ تنها یکی انتگرالی غیر صفر دارد، و چون در اینجا دورهٔ تناوب ۲ است

$$C_m(e^{-m\pi}-e^{+m\pi})=\int_{-1}^{+1} 3y\sin m\pi y\,dy$$

با محاسبهٔ انتگرال طرف راست به دست می‌آوریم

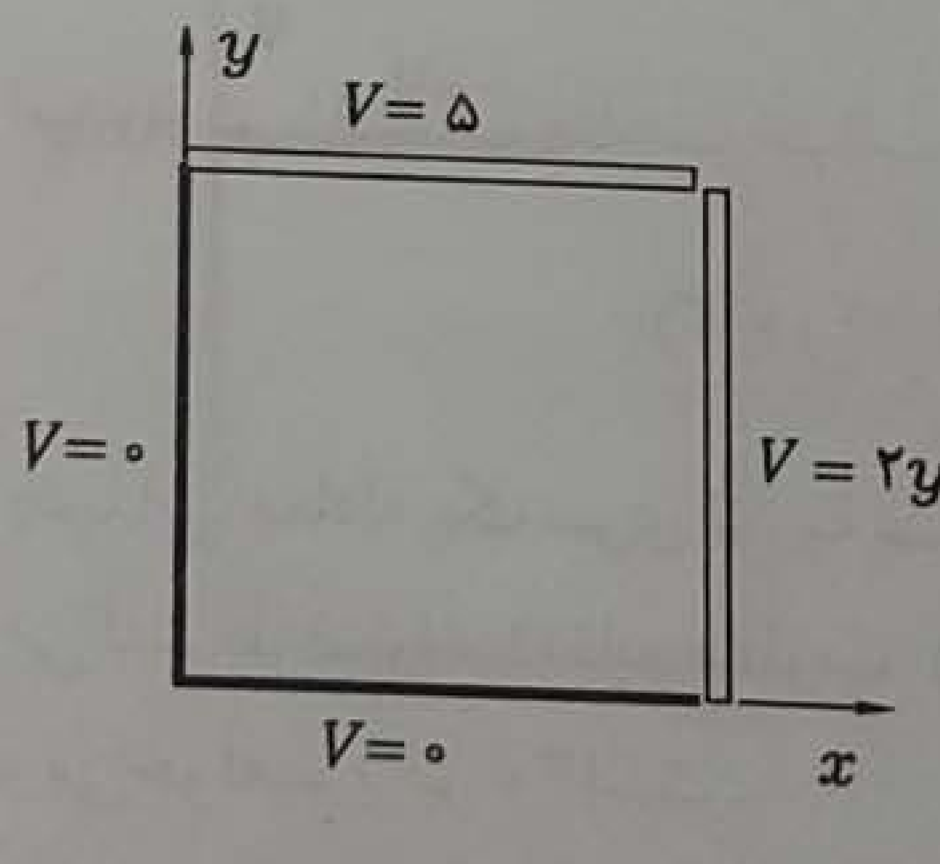
$$\int_{-1}^{+1} y\sin m\pi y\,dy=\frac{1}{m^2\pi^2}\sin m\pi y-\frac{1}{m\pi}y\cos m\pi y\,\Big|_{-1}^{+1}$$
$$=-\frac{2}{m\pi}\cos m\pi$$

و سرانجام

$$C_m=-\frac{6\cos m\pi}{m\pi(e^{-m\pi}-e^{+m\pi})}=\frac{3\cos m\pi}{m\pi\sinh m\pi}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

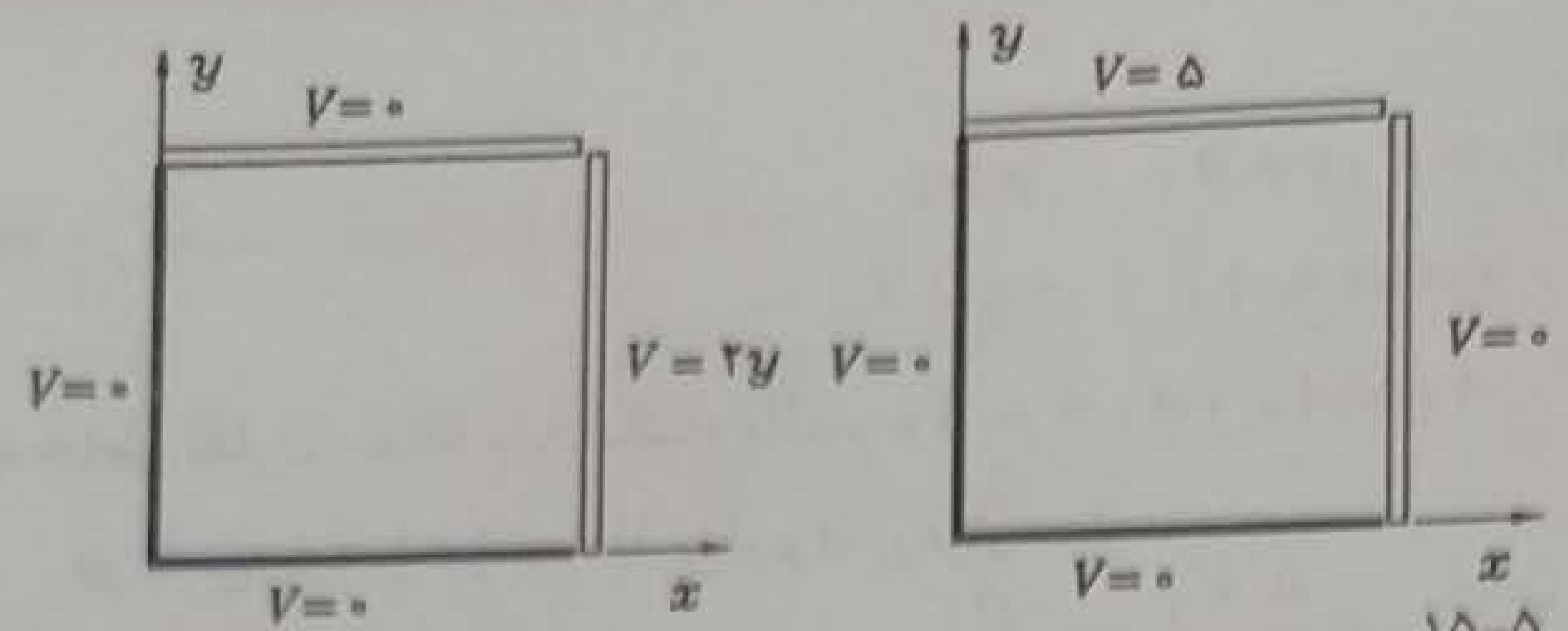
در حل مسئلهٔ مشابه تصویر شده در شکل با مشکلی روبرو می‌شویم؛ کدام یک از دسته جوابهای جدول ۵-۱ را باید برگزید؟ نه در جهت x صفر مکرر داریم و نه در جهت y. نمی‌دانیم تابع باید در جهت x سینوسی باشد یا در جهت y. در واقع اگر هر دو حالت را نیز امتحان کنیم خواهیم دید که هیچکدام نمی‌توانند جواب درستی برای این مسئله به دست دهند.



شکل ۵-۱۵ مسئله‌ای مشابه مسئلهٔ شکل ۵-۱۳.

در این موارد به جواب مفصلتری نیازست. باید از اصل **جمع آثار شرایط مرزی** استفاده کنیم. مسئله را به دو مسئلهٔ نشان داده شده در شکل ۵-۱۶ می‌شکنیم. برای یافتن تابع V_1 دسته جوابی برمی‌گزینیم که در جهت y سینوسی باشد و برای V_2 دسته جوابی که در جهت x سینوسی باشد. این دو مسئله را به روش بیان شده در مثال ۱ حل می‌کنیم و با جمع دو جواب، جواب مسئلهٔ اصلی را تشکیل می‌دهیم.

ممکن است در بعضی مسائل شرایط مرزی از نوع آمیخته باشند، یعنی روی بخشی از مرز پتانسیل و روی بخشی دیگر بار تعیین شده باشد. مثال زیر نمونهٔ ساده‌ای از این مسائل است.



شکل ۵-۱۶ تجزیهٔ شرایط مرزی شکل ۵-۱۵.

مثال ۴

دو کرهٔ هم مرکز به شعاعهای a و b در نظر بگیرید. روی کرهٔ داخلی پتانسیل $V_{\circ}$ است، و روی کرهٔ بیرونی باری با چگالی ثابت σ قرار دارد. تابع پتانسیل بین دو کره را بیابید.

حل

با یک مسئلهٔ یک متغیره سروکار داریم، زیرا به خاطر تقارن، پتانسیل نه تابعی از θ است و نه تابعی از ϕ. پس

$$V_I = \frac{A}{r} + B$$

در $r = a$ باید داشته باشیم $V = V_{\circ}$، پس

$$V_{\circ} = \frac{A}{a} + B$$

در بیرون کره

$$V_O = \frac{C}{r} + D$$

چون در $r = \infty$ باید داشته باشیم $V = \circ$، پس $D = \circ$. در $r = b$ پتانسیل باید پیوسته باشد

$$\frac{C}{b} = \frac{A}{b} + C$$

شرط مرزی دیگری نیز در $r = b$ داریم و آن این که $D_{On} - D_{In} = \sigma$. مولفهٔ عمود بر مرز همان مولفهٔ r است؛ $\mathbf{E}_O = -\nabla V_O$ و $\mathbf{E}_I = -\nabla V_I$. پس

$$\left(-\frac{\partial V_O}{\partial r} + \frac{\partial V_I}{\partial r}\right)_{r=b} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}}$$

$$\frac{C}{b^{۲}} - \frac{A}{b^{۲}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}}$$

اکنون با حل سه معادلهٔ به دست آمده از شرایط مرزی می‌توان A، B، و C را یافت.

مثال ۵

ناحیهٔ $|z| < l$ دارای بار یکنواختی با چگالی ρ $\mathrm{C/m^{۳}}$ است. پتانسیل را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

حل

در نواحی $|z| > l$ معادلهٔ لاپلاس صادق است، و در هر سه ناحیه پتانسیل تنها تابعی از z است. پس برای $|z| > l$ داریم

$$V_1 = A_1 z + A_2 \qquad z > l$$
$$V_2 = A_3 z + A_4 \qquad z < -l$$

به خاطر تقارن مسئله باید داشته باشیم $A_1 = -A_3$ و $A_2 = A_4$.

در ناحیهٔ $|z| < l$ معادلهٔ پواسون برقرارست

$$\nabla^2 V_3 = \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial V_3}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z + K_1$$
$$V_3 = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} z^2 + K_1 z + K_2$$

به خاطر تقارن باید V نسبت به z تقارن زوج داشته باشد، پس $K_1 = 0$. پیوستگی پتانسیل در $z = l$ نتیجه می‌دهد

$$-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} l^2 + K_2 = A_1 l + A_2$$

همچنین چون بار سطحی نداریم باید در $z = l$ داشته باشیم

$$-\frac{\partial V_3}{\partial z} = -\frac{\partial V_1}{\partial z}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} l = -A_1$$

و

$$K_2 = A_2 - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} l^2 + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} l^2 = A_2 - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} l^2$$

پس

$$V_2 = V_1 = -\frac{\rho_0 l}{\varepsilon_0} |z| \qquad |z| > l$$
$$V_3 = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} z^2 \qquad |z| < l$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

مثال ۶

یک کرهٔ هادی به شعاع R در میدان الکتریکی ابتدائاً یکنواختی قرار گرفته است. چگالی بار القا شده بر روی کره را بیابید.

حل

در این مسئله شرایط مرزی باید از وضعیت فیزیکی مسئله استنتاج شود. مرکز کره را مبدا و میدان یکنواخت اولیه را $E_0\hat{z}$ فرض می‌کنیم. پس پتانسیل در ابتدا به صورت $-E_0 z$ یا $-E_0 r\cos\theta$ بوده‌است (با فرض صفر بودن پتانسیل در $z = 0$). توجه کنید که چون در مسئله هیچ پتانسیل مشخصی داده نشده‌است، تابع پتانسیل یک عدد ثابت غیر قابل تعیین خواهد داشت. البته چون چگالی بار خواسته شده است، چگالی بار با شدت میدان الکتریکی متناسب است، و شدت میدان الکتریکی نیز با مشتق پتانسیل متناسب است، این عدد ثابت تاثیری در جواب ندارد و ما از هم اکنون آن را صفر فرض می‌کنیم.

شکل تابع پتانسیل را با توجه به جدول ۵-۱ به دست می‌آوریم. توجه کنید که پتانسیل مستقل از ϕ است، $\theta = \circ$ در ناحیهٔ جواب است، پس در جواب جملات $Q_n(\cos\theta)$ نداریم و

$$V = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+\text{۱})}] P_n(\cos\theta)$$

اکنون باید شرایط مرزی را تعیین و سپس اعمال کنیم. در $r = R$ باید پتانسیل صفر باشد. همچنین در فواصل بسیار دور از کره، پتانسیل باید همان شکل اولیهٔ خود، یعنی $-E_\circ r\cos\theta$ را داشته باشد، پس

$$V \to -E_\circ r\cos\theta \qquad \text{در } r \to \infty$$

در واقع از بینهایت جمله‌ای که در شکل کلی جواب وجود دارد تنها دو جمله برای ارضای این دو شرط کافی هستند، جملهٔ متناظر با $A_\text{۱}$ و جملهٔ متناظر با $B_\text{۱}$؛ یعنی می‌توان نوشت

$$V = (A_\text{۱} r + B_\text{۱} r^{-\text{۲}}) P_\text{۱}(\cos\theta)$$

چون $P_\text{۱}(\cos\theta) = \cos\theta$ شرط مرزی در فواصل دور نتیجه می‌دهد $A_\text{۱} = -E_\circ$. شرط مرزی در $r = R$ به دست می‌دهد

$$A_\circ R + B_\text{۱} R^{-\text{۲}} = \circ$$

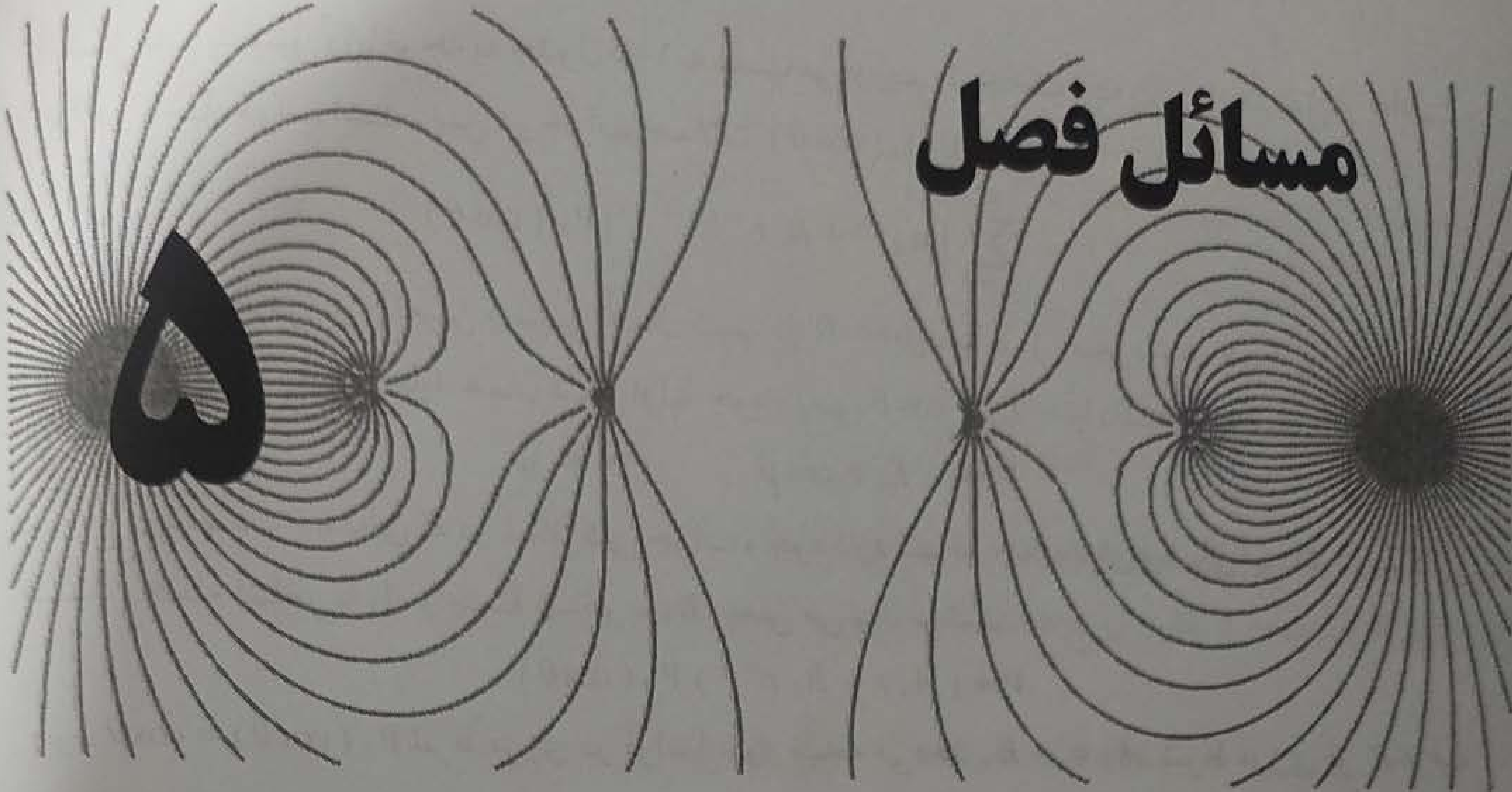
یا $B_\text{۱} = -A_\circ R^\text{۳}$. بنابراین

$$V = -E_\circ\left(r - \frac{R^\text{۳}}{r^\text{۲}}\right)\cos\theta$$

چگالی بار روی سطح کره عبارت است از

$$\sigma = -\varepsilon_\circ \frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \varepsilon_\circ E_\circ\left(\text{۱} + \text{۲}\frac{R^\text{۳}}{r^\text{۳}}\right)\cos\theta\bigg|_{r=R}$$

$$= \text{۳}\varepsilon_\circ E_\circ \cos\theta$$



مسائل فصل ۵

۵-۱ معلمی از دانشجویان خواسته معادلهٔ لاپلاس را با شرایط مرزی $V = 0$ در $x = 0$ و $V = 1$ در $x = 1$ حل کنند. دانشجویی جواب سادهٔ $V_1 = x$ را پیشنهاد می‌کند. معلم خود $V_2 = x + e^{\pi y} \sin \pi x$ را در نظر دارد و دانشجوی ممتاز کلاس جواب $V_3 = x + \sum \frac{(-1)^n}{2n + 1} e^{n\pi y} \sin(n\pi x)$ را به دست آورده است. نشان دهید که هر سه جواب درست است. آیا این مطلب قضیه یکتایی جواب را نقض می‌کند؟

۵-۲ ثابت کنید پتانسیل در محیطی که در آن معادله لاپلاس صادق است نه ماکزیمم دارد نه می‌نیمم.

۵-۳ نشان دهید اگر پتانسیل روی مرز بسته‌ای ثابت باشد، پتانسیل داخل آن مرز هم ثابت خواهد بود.

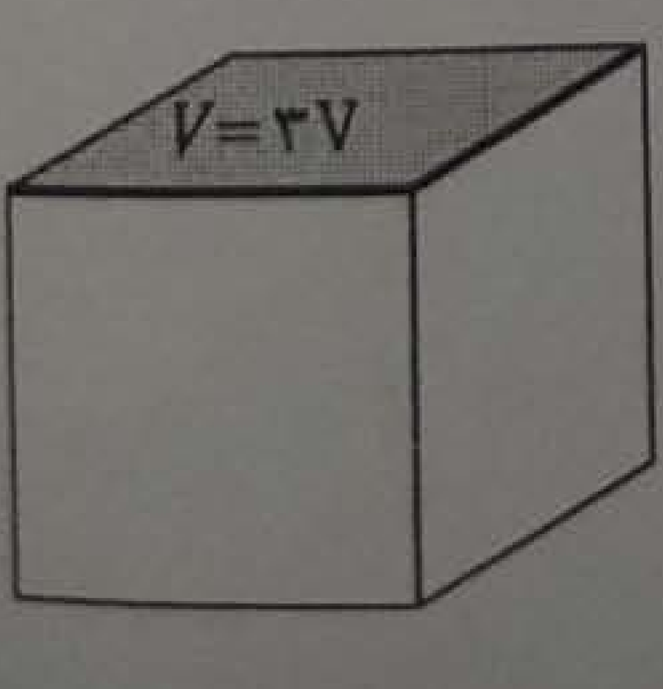
۵-۴ در فضای بین دو صفحه هادی بی‌نهایت تابع پتانسیل به صورت زیر داده شده است

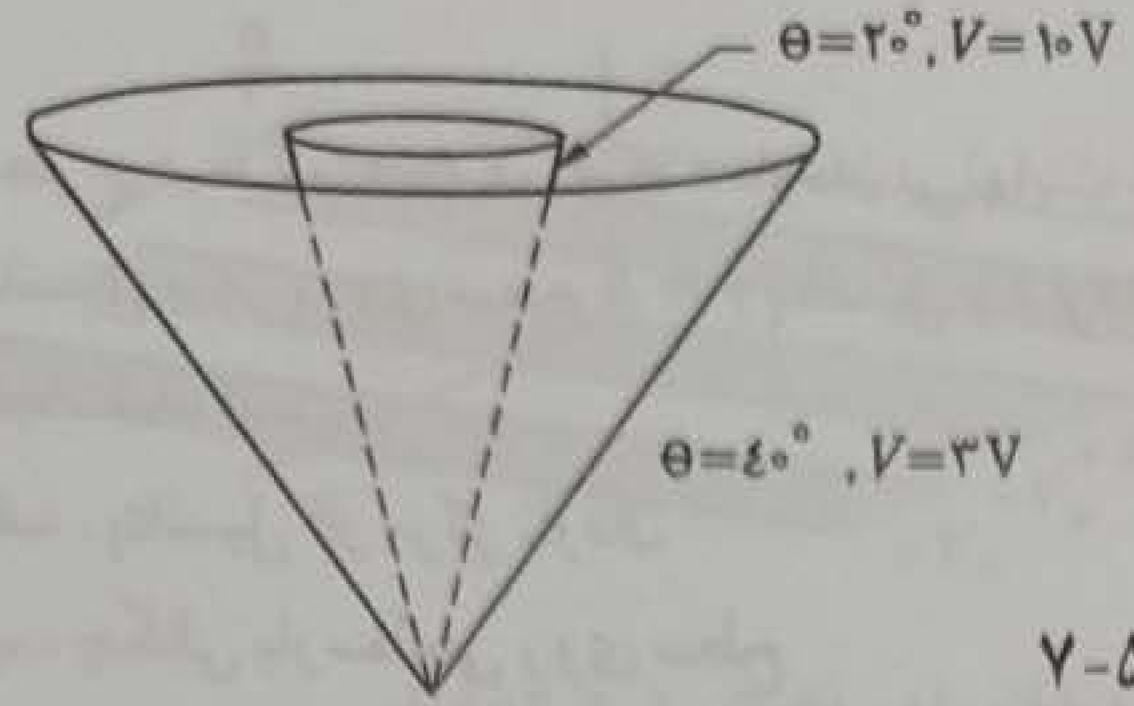
$$V = 40x - 20y + 35z + 10 \text{ V}$$

اگر فاصله بین دو صفحه ۸ mm باشد، اختلاف پتانسیل بین آنها چقدر است؟

۵-۵ نشان دهید میدان پتانسیل $V = \frac{20}{r^2} \sin\theta \cos\phi$ معادلهٔ لاپلاس را ارضا می‌کند. سطح پتانسیل ۱۰ V را در فضای $x > 0$، $y > 0$، و $z > 0$ بیابید.

۵-۶ یک وجه یک مکعب دارای ولتاژ ۳ V و بقیهٔ وجوه دارای ولتاژ صفر ولت هستند. ولتاژ مرکز مکعب چقدر است؟





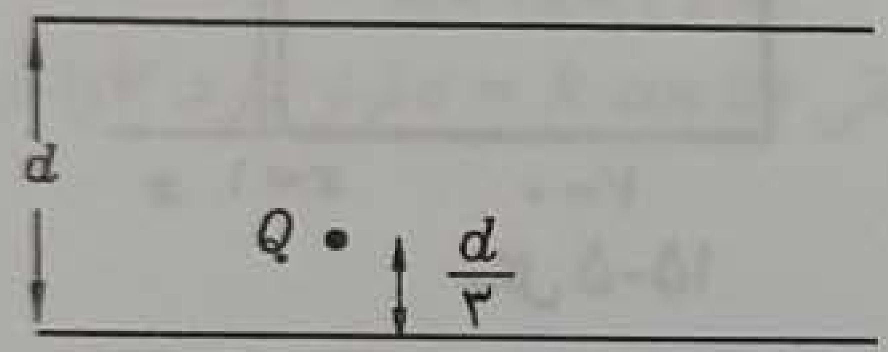
شکل ۵-۷

۵-۷ در شکل ۵-۷ مخروط بیرونی به پتانسیل ۳ V و مخروط درونی به پتانسیل ۱۰ V وصل است. بین دو مخروط ماده‌ای با رسانایی ویژهٔ $\sigma = ۰/۰۲$ قرار دارد. در فاصلهٔ $۰/۱\ \mathrm{m} < r < ۰/۲\ \mathrm{m}$ کل جریانی را که بین دو مخروط می‌گذرد بیابید.

۵-۸ گذردهی محیط باید به چه نحوی باشد تا در آن محیط معادلهٔ لاپلاس صادق باشد؟

۵-۹ فضای $۲\ \mathrm{m} < r < ۵\ \mathrm{m}$ بین دو کرهٔ فلزی قرار دارد و گذردهی نسبی آن به صورت $\varepsilon_R = \frac{r+۱}{r}$ تغییر می‌کند. آیا در این فضا معادلهٔ لاپلاس صادق است؟ پتانسیل بین دو کره را در حالتی که کرهٔ داخلی به ۲۰۰ V و کرهٔ خارجی به ۱۰۰۰ V وصل است به دست آورید.

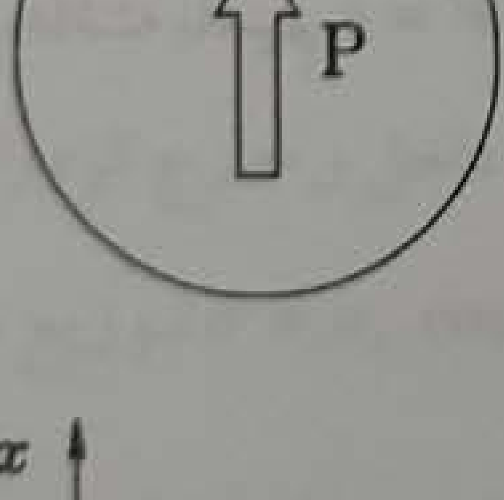
۵-۱۰ بار نقطه‌ای بین دو صفحهٔ هادی موازی قرار دارد. فاصلهٔ دو صفحه d و فاصله بار تا صفحهٔ پایینی $\frac{d}{۳}$ است. نیروی وارد بر Q را بیابید.



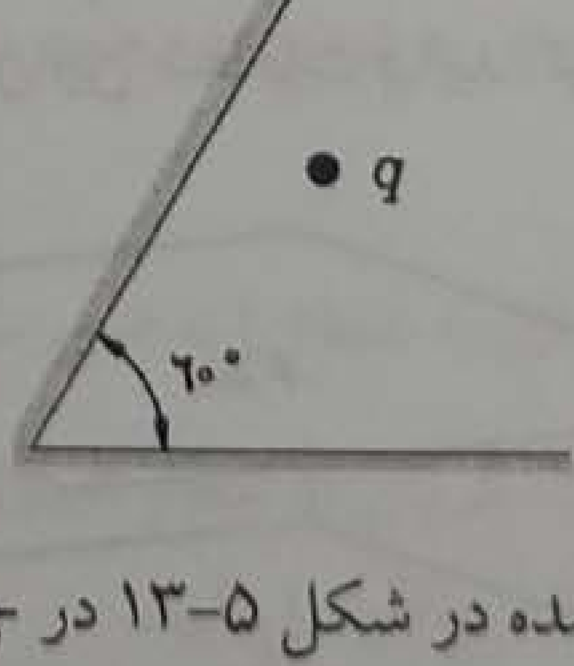
شکل ۵-۱۰

۵-۱۱ بار q بین دو نیمه صفحهٔ هادی که با هم زاویهٔ °۶۰ می‌سازند قرار دارد. بارهای تصویر را بیابید.

۵-۱۲ داخل یک پوستهٔ کروی هادی به شعاع R، دو قطبی p در مرکز قرار گرفته است. چگالی بار القا شده روی سطح داخلی پوسته را بیابید.

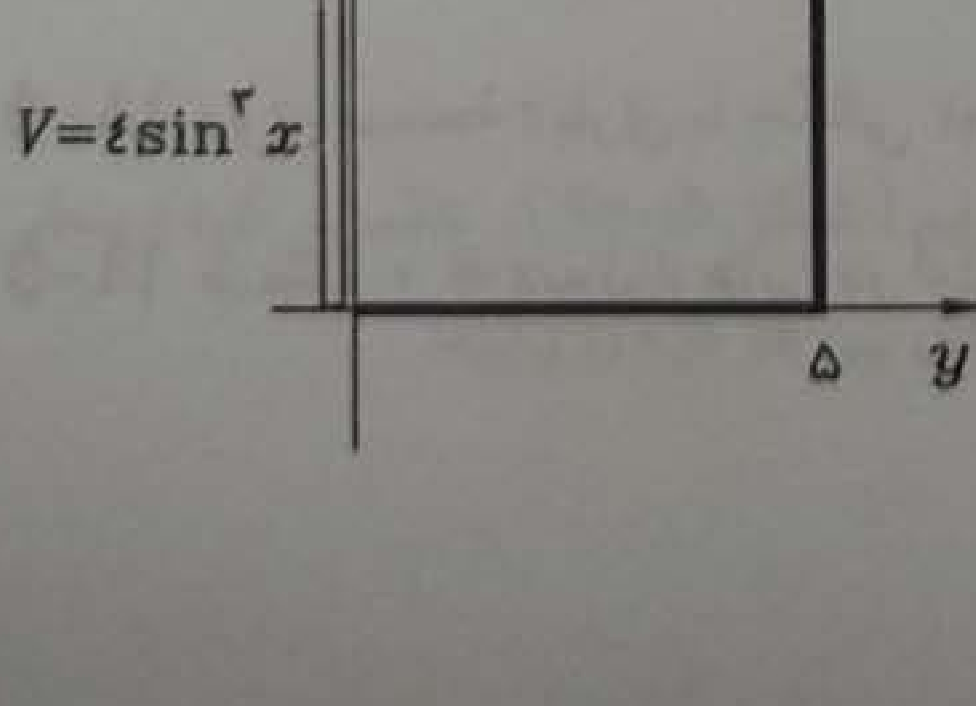


شکل ۵-۱۲



شکل ۵-۱۱

۵-۱۳ سازه نشان داده شده در شکل ۵-۱۳ در جهت z از هر دو طرف تا بی‌نهایت امتداد دارد. پتانسیل سه وجه آن ۰ V و پتانسیل وجه واقع در $y = ۰$ برابر $۴ \sin^۳ x$ است. تابع پتانسیل داخل این سازه را بیابید.



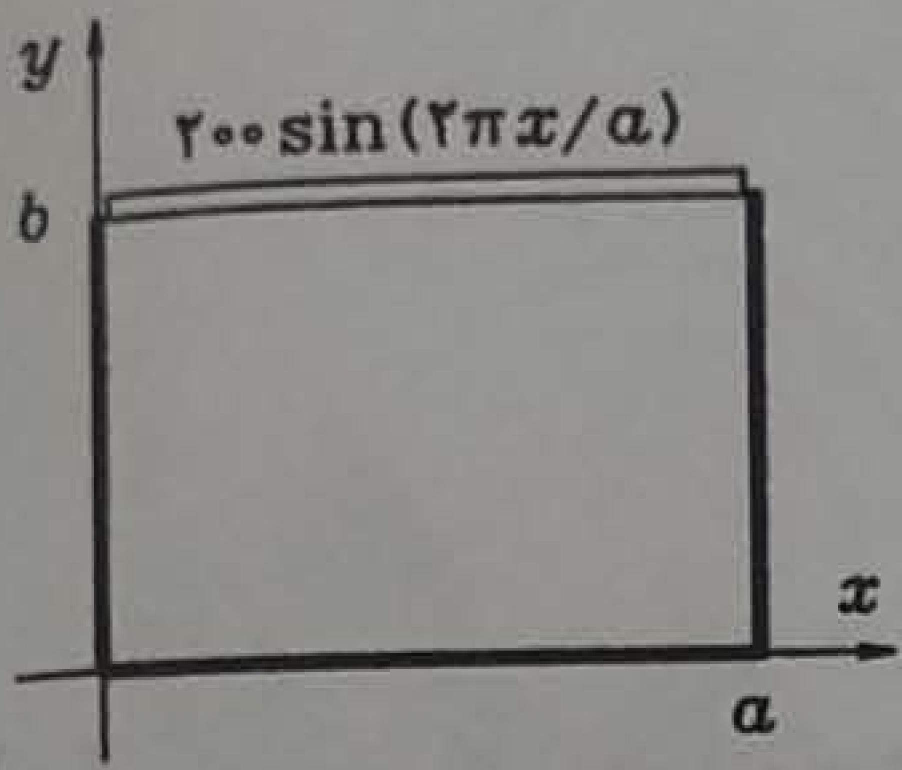
شکل ۵-۱۳

۵-۱۴ سطوح ۰ = y و ۰ = x و $x = a$ ناودان بی‌نهایت شکل ۵-۱۴ در پتانسیل صفر، روی سطح $y = b$ پتانسیل $200 \sin(2\pi x/a)$ ایجاد شده است.

الف. پتانسیل در مرکز ناودان

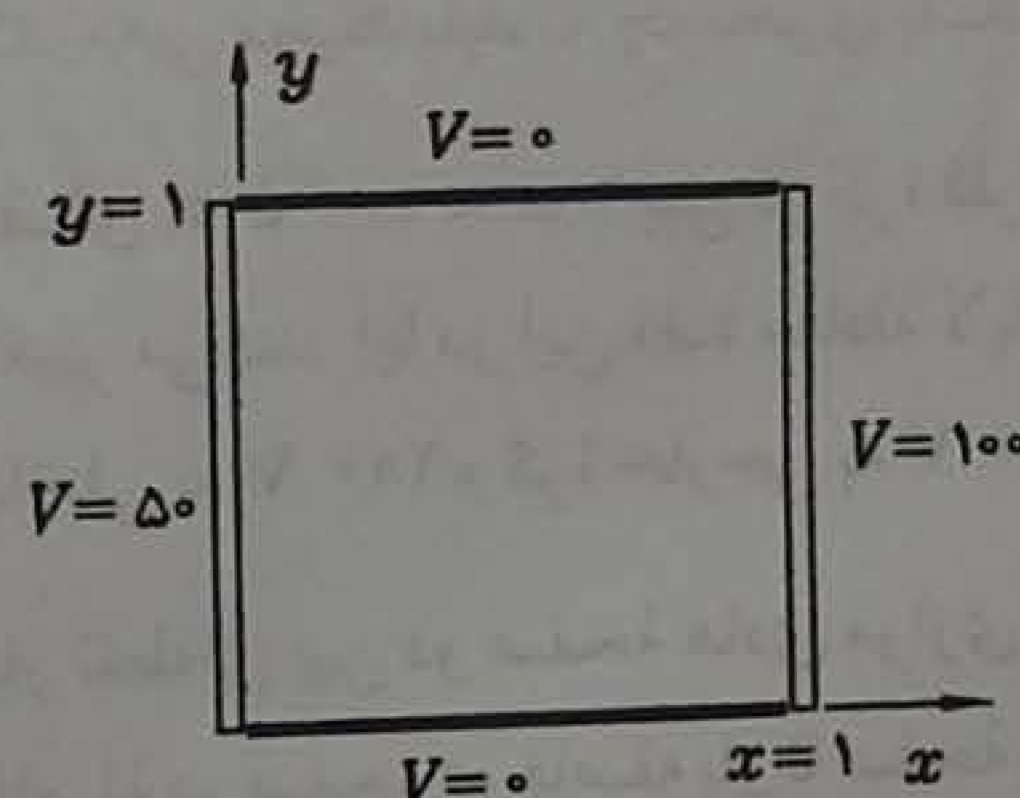
ب. چگالی بارسطحی روی سطح

ج. میدان الکتریکی در مرکز ناودان را بیابید.

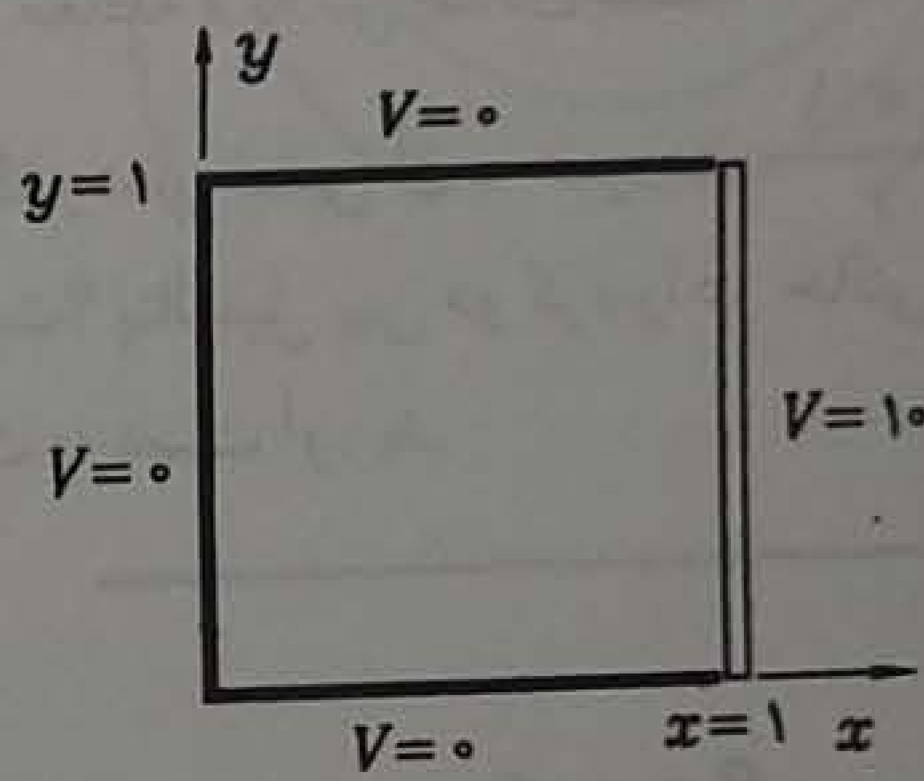


شکل ۵-۱۴

۵-۱۵ سازهٔ شکل ۵-۱۵ در جهت z (عمود بر کاغذ) از هر دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد. سطوح واقع در ۰ = x، ۰ = y و ۱ = y دارای پتانسیل صفرند و پتانسیل سطح ۱ = x برابر ۱۰۰ V است. پتانسیل داخل سازه را بیابید.



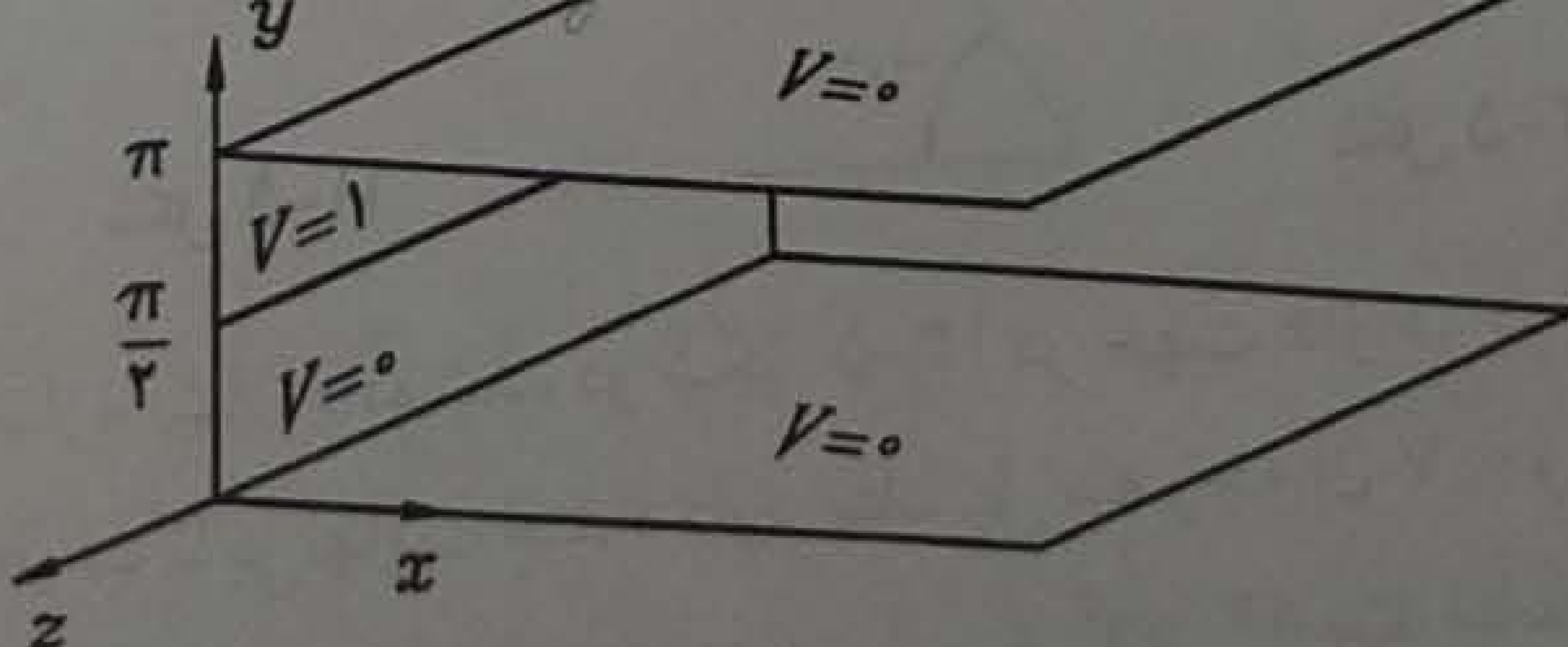
شکل ۵-۱۶



شکل ۵-۱۵

۵-۱۶ سازهٔ شکل ۵-۱۶ در جهت z (عمود بر کاغذ) از هر دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد. سطوح واقع در ۰ = y و ۱ = y در پتانسیل صفر قرار دارند. در ۱ = x، ۱۰۰ = V و در ۰ = x، ۵۰ = V. پتانسیل داخل سازه را بیابید.

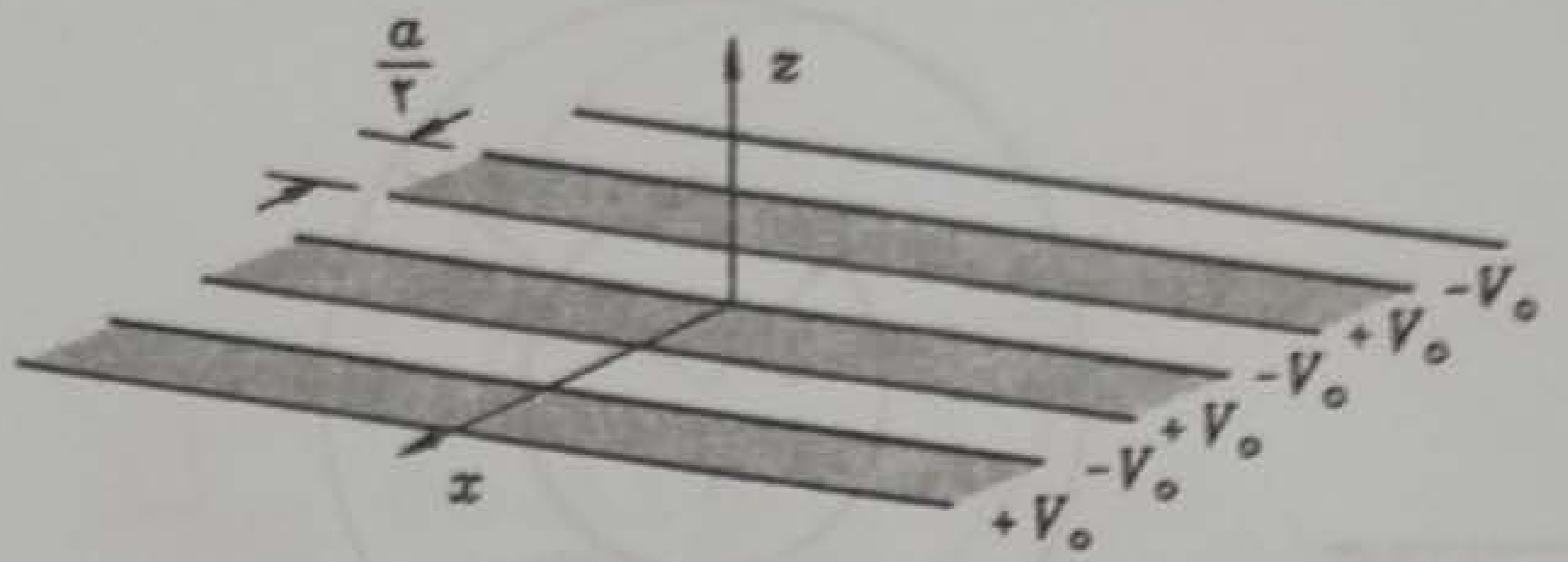
۵-۱۷ سطوح بی‌نهایت واقع در ۰ = y و $y = \pi$ در پتانسیل صفر قرار دارند. دو نوار در ۰ = x قرار دارد، یکی در فاصلهٔ $\frac{\pi}{2} > y > 0$ و یکی در فاصلهٔ $\pi > y > \frac{\pi}{2}$. نوار اولی در پتانسیل صفر و نوار دومی در پتانسیل ۱ V قرار دارد. تابع پتانسیل را در فضای بین این صفحات بیابید. توجه کنید که در $x \longrightarrow \infty$ باید داشته باشیم ۰ = V.



شکل ۵-۱۷

۵-۱۸ روی صفحهٔ z باری با چگالی $\sigma = \sigma_0 \cos a_1 x \cos a_2 x$ قرار دارد. پتانسیل را در تمام فضا بیابید.

۵-۱۹ صفحه ۰ = z به نوارهایی در امتداد محور y تقسیم شده و یک در میان پتانسیل $+V_0$ و $-V_0$ به نوارها



شکل ۵-۱۹

اعمال شده است. عرض هر نوار $\frac{a}{2}$ است. میدان را در فضای $z > 0$ بیابید.

۵-۲۰ بار نقطه‌ای Q در مرکز جعبه‌ای مکعب مستطیلی به ابعاد $a \times b \times c$، قرار دارد. جعبه از فلز ساخته شده و تمام دیواره‌های آن به زمین (پتانسیل صفر) وصل شده است. میدان V داخل جعبه را به دست آورید.

(*راهنمایی*: باید معادلهٔ پواسون را در فضای داخل جعبه حل کنید. برای نشان دادن بار نقطه‌ای Q از چگالی بار $\rho = Q\delta(x-a/2)\delta(y-b/2)\delta(y-c/2)$ استفاده کنید که در آن δ تابع ضربه واحد است. حل معادلهٔ دیفرانسیل یک سری سه بعدی از توابع سینوسی به صورت زیر است:)

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{mnk} \sin k_y y \sin k_z z$$

۵-۲۱ روی استوانه‌ای به شعاع R و طول بی‌نهایت باری با چگالی $\sigma = R\cos 5\phi$ قرار دارد. V را درون و بیرون استوانه بیابید.

۵-۲۲ بر روی استوانه‌ای به شعاع R چگالی بار به صورت زیر است

$\sigma = \sigma_1 \sin 2\phi + \sigma_2 \cos\phi$

پتانسیل داخل و خارج استوانه را بیابید.

۵-۲۳ پتانسیل سطح کره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدا مختصات $\cos\theta - 1$ است. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.

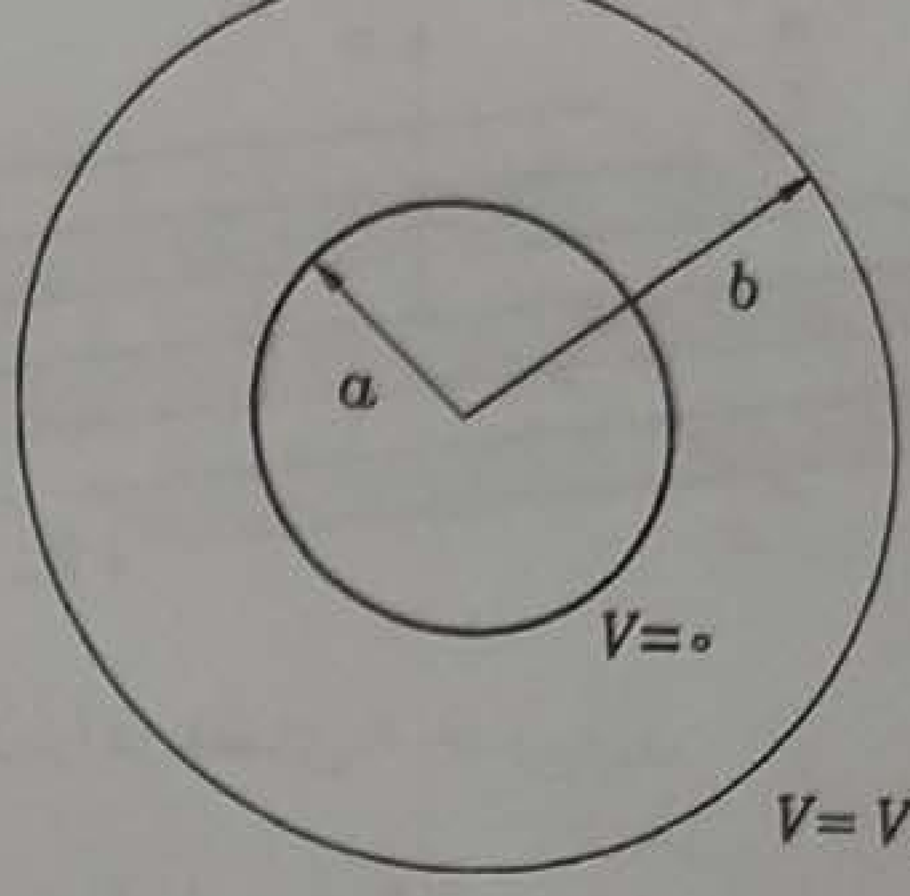
۵-۲۴ پتانسیل روی کره‌ای به شعاع a به صورت $V = k\cos 3\theta$ داده شده است. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.

۵-۲۵ پتانسیل روی کره‌ای به شعاع ۲ به صورت $5\cos^3\theta$ است. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.

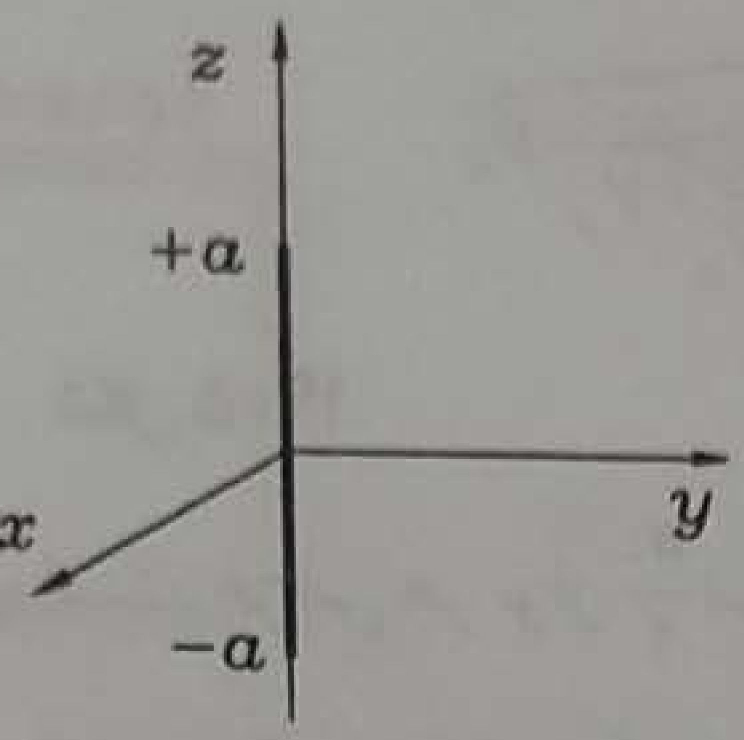
۵-۲۶ بر روی یک پوسته کروی به شعاع R باری سطحی با چگالی $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ توزیع شده است. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.

۵-۲۷ بار الکتریکی روی یک پوسته کروی به شعاع R، $\sigma = \sigma_0 (\cos\theta - 1)^2$ است. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.

۵-۲۸ دو سطح کروی هم مرکز به شعاعهای a و b $(b > a)$ داریم (شکل ۵-۲۸). پتانسیل کرهٔ وسطی صفر و پتانسیل کرهٔ بیرونی $V_0 \cos\theta$ است. پتانسیل در فضای بین دو کره را بیابید.



شکل ۵-۲۸



شکل ۵-۲۹

۵-۲۹ بار Q به طور یکنواخت روی میله‌ای به طول a ۲، که به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۲۹ روی محور z قرار دارد، توزیع شده است. V را در فضای $r > a$ بیابید.

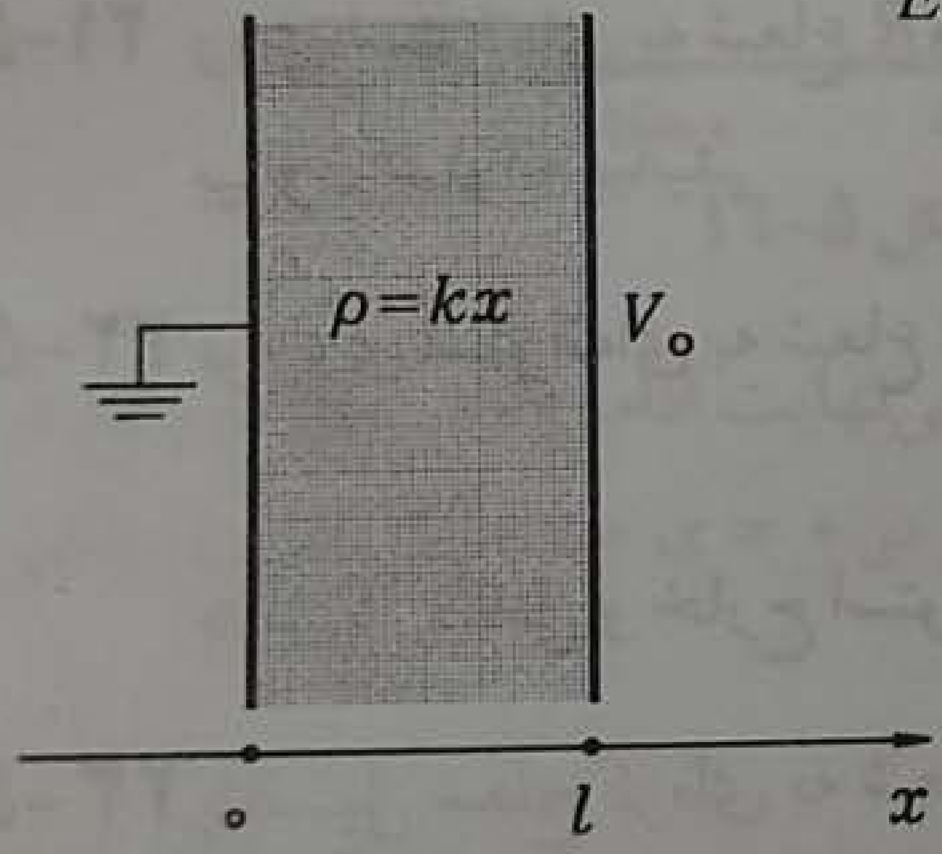
راهنمایی: در مسئله ۲-۴۹ پتانسیل روی محور zها را به صورت زیر یافتیم

$$V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln\frac{z+a}{z-a}$$

و برای $|x| < 1$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

۵-۳۰ معادله پواسون را به ازای $\rho = \rho_0 x / x_1$ و با شرایط مرزی $E = 0$ در $x = 0$ و $V = 0$ در $x = x_1$ حل کنید.



شکل ۵-۳۰

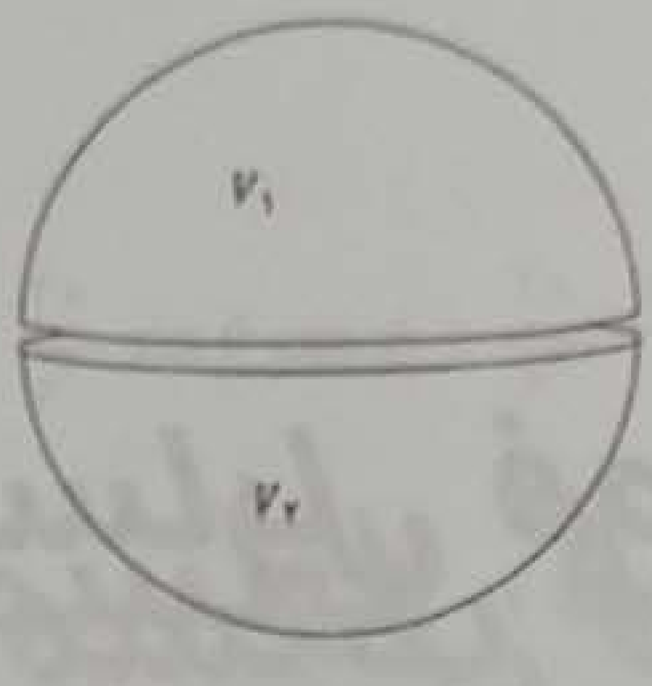
۵-۳۱ بین دو صفحهٔ هادی واقع در $x = 0$ و $x = l$ باری با چگالی $\rho = k\,x$ قرار دارد. شرایط مرزی $V(x=0) = 0$ و $V(x=l) = V_0$ است. پتانسیل در ناحیهٔ بین دو صفحهٔ هادی را بیابید.

۵-۳۲ ناحیهٔ $-z_0 < z < z_0$ دارای باری با چگالی $\rho = \rho_0 \cos\dfrac{\pi z}{z_0}$ است. پتانسیل را در تمام نواحی بیابید.

۵-۳۳ پتانسیل داخل یک کرهٔ به شعاع R را که دارای بار حجمی با چگالی یکنواخت ρ_0 است بیابید.

۵-۳۴ یک پوسته کروی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 دارای چگالی بار حجمی $\rho = \dfrac{b}{r}$ است، r فاصله تا مرکز پوسته است. پتانسیل را در سه فضای حاصل بیابید.

۵-۳۵ چگالی بار $\rho = \rho_0\, a^5 / [\, r\,(r^2 + a^2)^2\,]$ را در نظر بگیرید. معادلهٔ پواسون را با شرایط مرزی $E_r = 0$ در $r = 0$ و $V = 0$ در $r \longrightarrow \infty$ حل کنید.

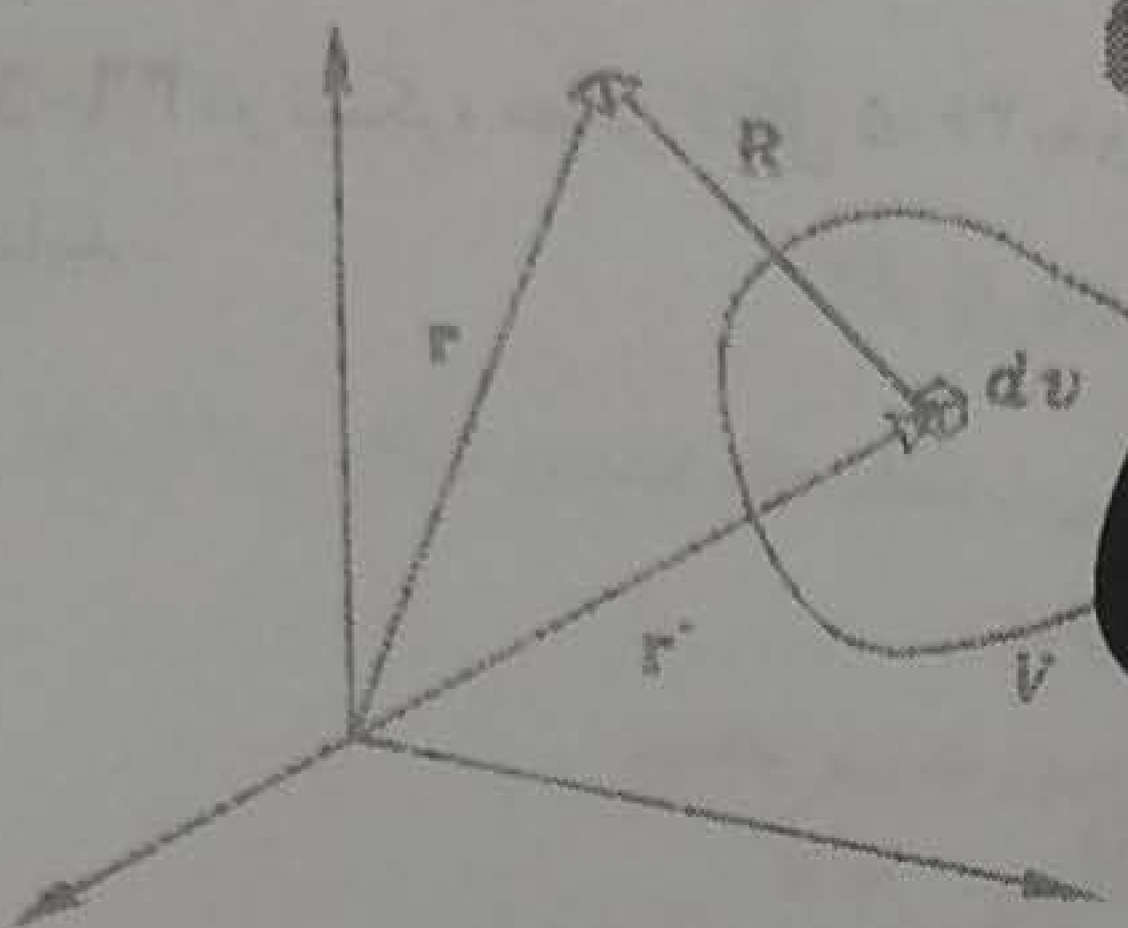


شکل ۵-۳۶

۵-۳۶ دو نیمکره مطابق شکل ۵-۳۶ به ولتاژهای V_1 و V_2 متصل شده‌اند. پتانسیل داخل و خارج کره را بیابید.

حل مسایل فصل

حل مسایل فصل



۵

۵-۱ می‌توان به سادگی دید که $\nabla^2 V_1 = 0$، $\nabla^2 V_2 = 0$ و $\nabla^2 V_3 = 0$. سه جواب در $y \longrightarrow \infty$ با هم تفاوت دارند، چون شرایط مرزی به طور کامل (برای ناحیه بسته) مشخص نشده مسئله می‌تواند جوابهای متعدد داشته باشد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۲ برای اینکه تابعی در یک نقطه ماکزیمم (یا می‌نیمم) باشد، باید تمام مشتقهای اول آن در آن نقطه صفر و تمام مشتقهای دوم آن در آن نقطه منفی (یا مثبت) باشد. در این صورت جمع مشتقهای دوم نیز منفی (یا مثبت) خواهد بود، نه صفر چنانچه معادله لاپلاس لازم می‌دارد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۳ تابع پتانسیل $V = C$ که در آن C مقدار ثابت پتانسیل روی مرزست، هم معادلهٔ لاپلاس را ارضا می‌کند و هم شرایط مرزی را، پس طبق اصل یکتایی جواب تنها حل موجود برای معادله لاپلاس است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۴ شدت میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ بی‌نهایت ثابت است و صفحات هم پتانسیل صفحاتی موازی هادیهاست. پس

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -40\,\hat{\mathbf{x}} + 20\,\hat{\mathbf{y}} - 35\,\hat{\mathbf{z}}$$

اختلاف پتانسیل بین دو صفحه $d\,|\mathbf{E}|$ است، پس

$$V = \sqrt{160 + 400 + 1225} \times 8 \times 10^{-3} = 0/34\ \mathrm{V}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۵ داریم

$$\nabla^۲ V = \frac{۴۰}{r^۲}\sin\theta\cos\phi + \frac{۲۰}{r^۴}\,\frac{\cos\phi\cos ۲\theta}{\sin\theta} - \frac{۲۰\sin\theta\cos\phi}{r^۴\sin^۲\theta} = ۰$$

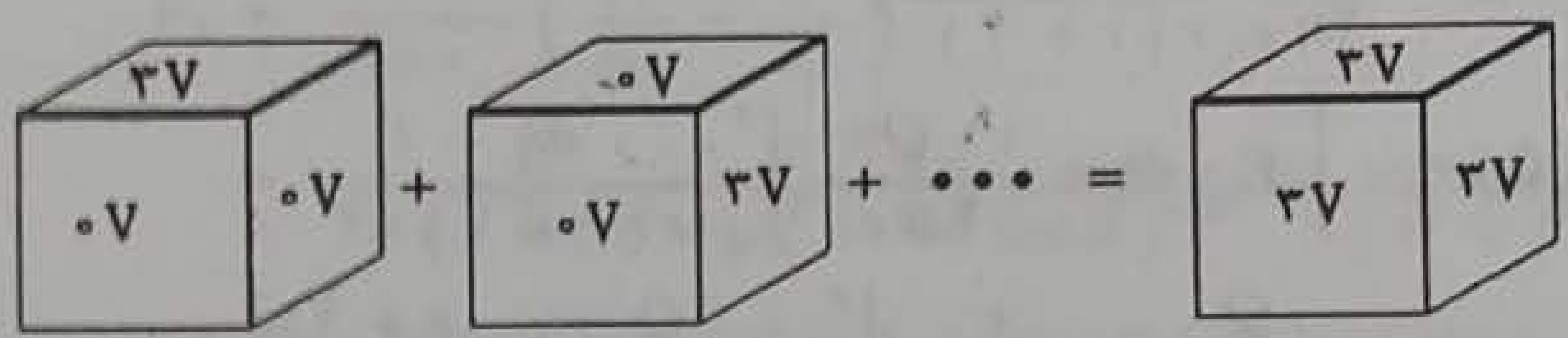
سطح پتانسیل $V = ۱۰$ عبارت است از

$$۲\sin\theta\cos\phi = r^۲$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۵-۶ باتوجه به جمع آثار شرایط مرزی، اگر شش حالت نشان داده شده در شکل ح ۵-۶ را در نظر بگیریم، مکعبی خواهیم داشت که پتانسیل تمام وجوه آن ۳ V است. چون برای تمام شش مسئله سمت چپ شکل ح ۵-۶ پتانسیل مرکز مقداری یکسان خواهد بود، و در حالت سمت راست پتانسیل مرکز مکعب (و تمام نقاط داخل آن) ۳ V (مسئلهٔ ۵-۳ را ببینید) است

$$V_۰ = ۰/۵\ \mathrm{V} \quad \longleftarrow \quad ۶V_۰ = ۳$$



شکل ح ۵-۶

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۵-۷ حل معادلهٔ لاپلاس بین دو مخروط عبارت است از $V = A\ln\tan\frac{\theta}{۲} + B$. با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم

$$۱۰ = A\ln\tan ۱۰^\circ + B$$

$$۳ = A\ln\tan ۲۰^\circ + B$$

که نتیجه می‌دهد $A = -۹/۶۵۵$ و $B = -۶/۷۵$. شدت میدان الکتریکی بین دو مخروط عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{۱}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{۹/۶۵۵}{r\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$، پس

$$I = \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \int\mathbf{J}\cdot r\sin\theta\,dr\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_{۰/۱}^{۰/۲} ۰/۰۲ \times ۹/۶۵۵\,\frac{۱}{r\sin\theta}\,r\sin\theta\,dr\,d\phi$$

$$= ۰/۰۲ \times ۹/۶۵۵ \times ۰/۲\,\pi$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۵-۸ داریم $\mathbf{E} = -\nabla V$ و $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$ پس

$$\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E}) = \varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\nabla\varepsilon$$

$$= \varepsilon \nabla \cdot (- \nabla) + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon$$

$$= - \varepsilon \nabla^{۲} V + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = \rho$$

برای صدق معادلهٔ لاپلاس باید $\nabla \varepsilon = ۰$، یعنی گرادیان گذردهی محیط باید صفر باشد یا به عبارت دیگر محیط همگن باشد.

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = ۰ | \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} | \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} | \nabla \cdot \mathbf{B} = ۰ | \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho | \nabla \times \mathbf{E} = ۰ | \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q | \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I | \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I | \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = ۰ | \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = ۰$

۵-۹ چون محیط همسانگرد نیست، معادلهٔ لاپلاس در آن صادق نیست و نمی‌توان پتانسیل بین دو محیط را با حل معادلهٔ لاپلاس یافت. فرض می‌کنیم بار Q روی کرهٔ وسطی قرار دارد. با استفاده از قانون گوس به دست می‌آوریم

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{۴\pi r^{۲}} \hat{\mathbf{r}}$$

چون $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$، پس

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{۴\pi \varepsilon_{۰} r (r + ۱)} \hat{\mathbf{r}}$$

$$V(r) - V(۵) = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{Q}{۴\pi \varepsilon_{۰}} \int_{۵}^{r} \frac{dr}{r (r + ۱)}$$

$$= - \frac{Q}{۴\pi \varepsilon_{۰}} \ln \frac{r}{r + ۱} \Big|_{۵}^{r} = \frac{Q}{۴\pi \varepsilon_{۰}} \ln \frac{r + ۱}{۱/۲\, r}$$

داریم $V(۵) = ۲۰۰$ و $V(۲) = ۱۰۰۰$، پس

$$۱۰۰۰ - ۲۰۰ = \frac{Q}{۴\pi \varepsilon_{۰}} \ln \frac{۳}{۲/۴}$$

یا $Q / ۴\pi \varepsilon_{۰} = ۳۵۸۵$ و

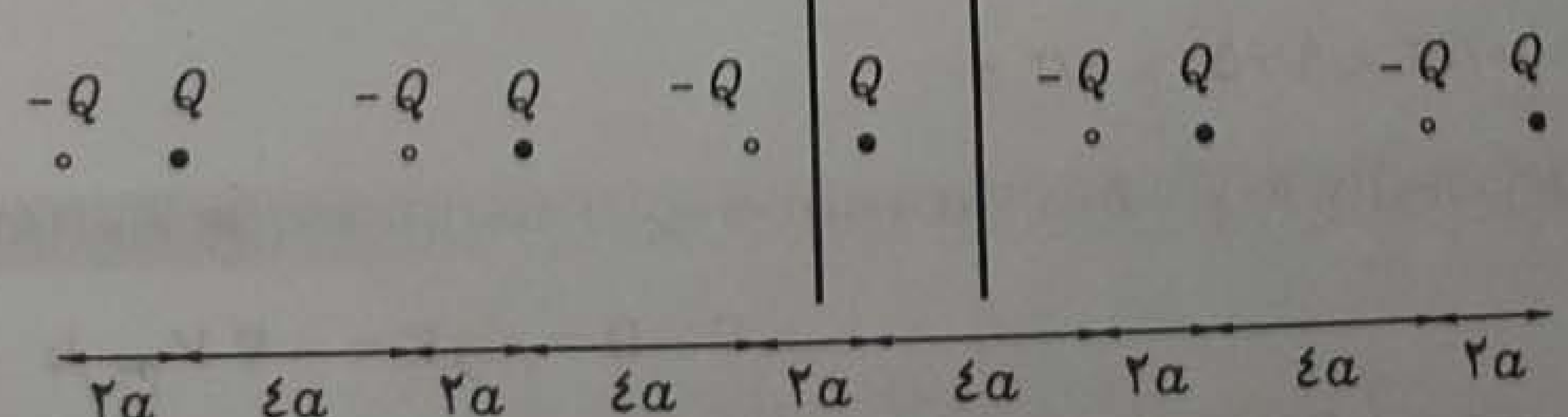
$$V(r) = ۲۰۰ + ۳۵۸۵ \ln \frac{r + ۱}{۱/۲\, r}$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = ۰ | \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} | \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} | \nabla \cdot \mathbf{B} = ۰ | \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho | \nabla \times \mathbf{E} = ۰ | \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q | \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I | \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I | \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = ۰ | \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = ۰$

۵-۱۰ شکل ح ۵-۱۰ بخشی از بارهای تصویر را، که تعدادشان بی‌نهایت است، نشان می‌دهد. در این شکل $a = d / ۳$. کمی دقت نشان می‌دهد که بارهای مثبت بر Q نیروی وارد نمی‌کنند. اگر جهت سمت چپ را جهت مثبت نیرو برگزینیم

$$F = \frac{Q^{۲}}{۴\pi \varepsilon_{۰}} \left[\frac{۱}{(۲a)^{۲}} - \frac{۱}{(۴a)^{۲}} + \frac{۱}{(۸a)^{۲}} - \frac{۱}{(۱۰a)^{۲}} + \frac{۱}{(۱۴a)^{۲}} - \frac{۱}{(۱۶a)^{۲}} + \cdots \right]$$

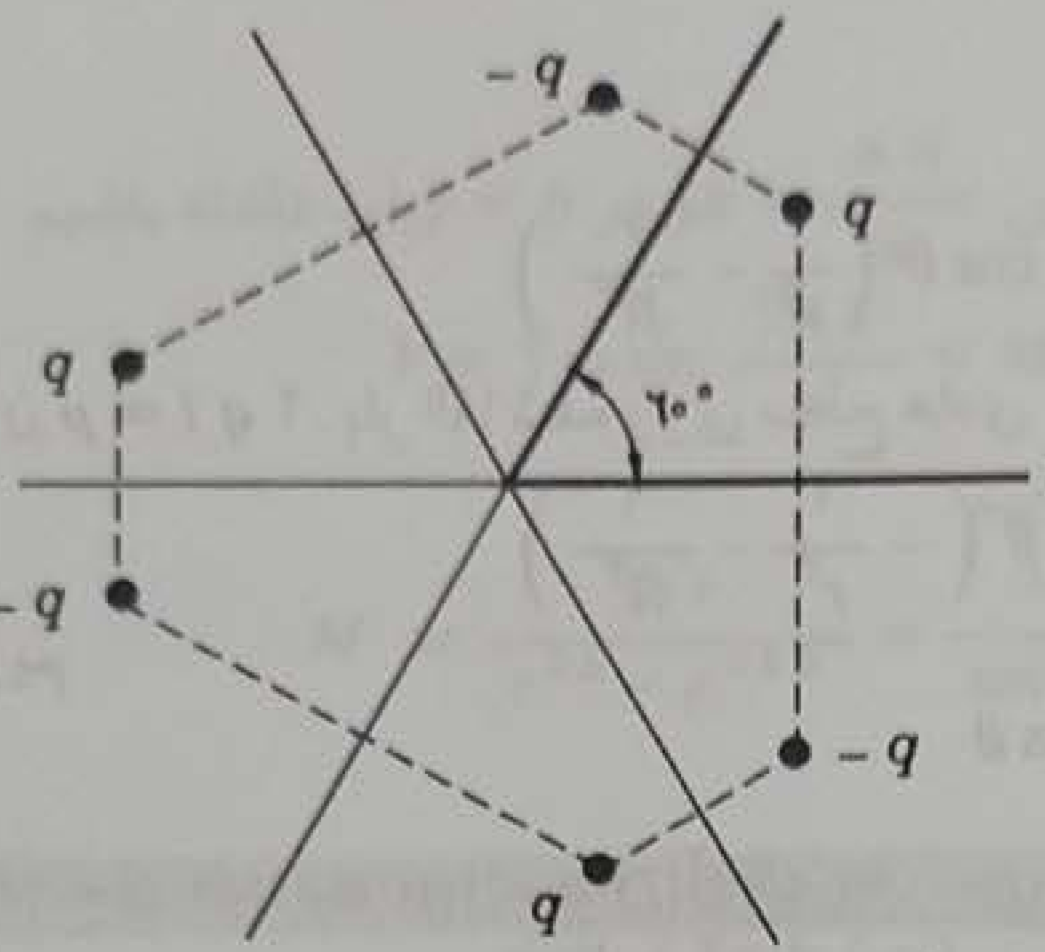
$$= \frac{Q^{۲}}{۱۶\pi \varepsilon_{۰}} \left[\frac{۱}{a^{۲}} - \frac{۱}{(۲a)^{۲}} + \frac{۱}{(۴a)^{۲}} - \frac{۱}{(۵a)^{۲}} + \frac{۱}{(۷a)^{۲}} - \frac{۱}{(۸a)^{۲}} + \cdots \right]$$



شکل ح ۵-۱۰

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = ۰ | \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} | \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} | \nabla \cdot \mathbf{B} = ۰ | \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho | \nabla \times \mathbf{E} = ۰ | \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q | \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I | \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I | \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = ۰ | \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = ۰$

۱۱-۵ پنج بار تصویر داریم که در شکل ح ۵-۱۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ح ۵-۱۱

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۲-۵ دو قطبی را دو بار نقطه‌ای q و $-q$ در نظر می‌گیریم که به فاصله $2l$ از هم قرار دارند. تصویر بار q، بار $q_1 = -Rq/l$ است که در فاصله $d = R^2/l$ از مرکز کره قرار دارد. پتانسیل ناشی از این دو بار عبارت است از

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q}{r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-Rq/l}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{0/5}}+\frac{q}{(r^2+l^2-2rl\cos\theta)^{0/5}}\right]$$

چون $d >> r$، $l << r$ و با استفاده از بسط دو قطبی $(1+x)^n \approx 1+nx$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{2l\cos\theta}{r}+\frac{l^2}{r^2}\right)^{-0/5} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{l\cos\theta}{r}\right)$$

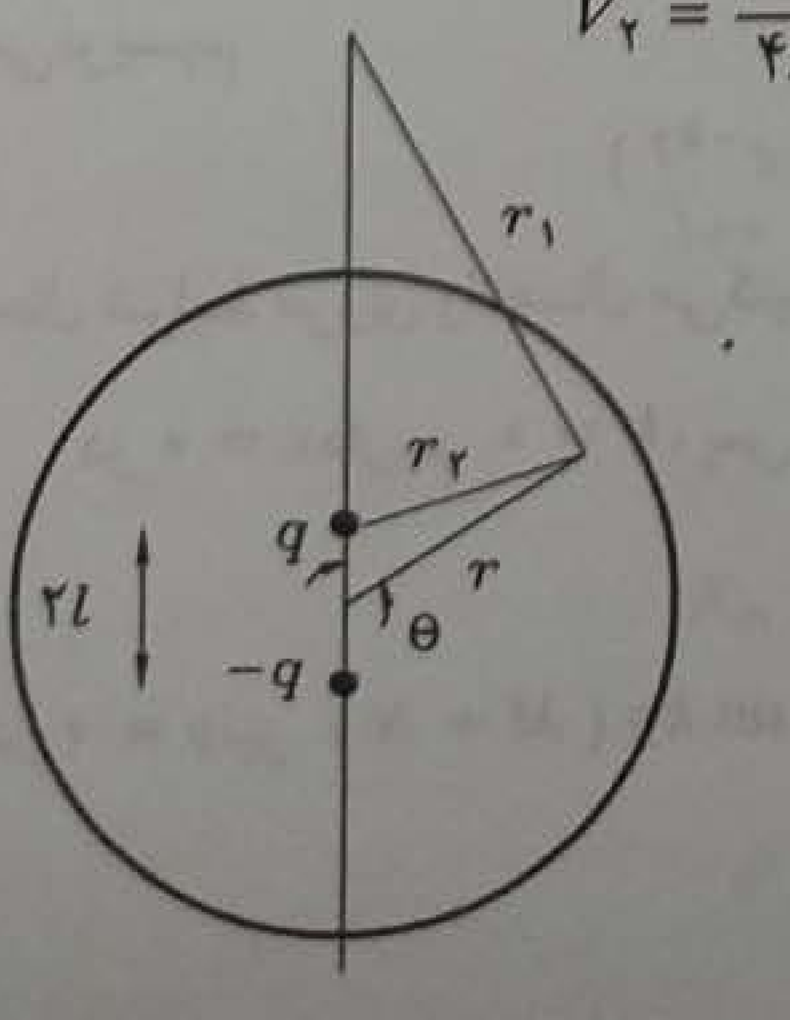
$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{d}\left(1-\frac{2r\cos\theta}{d}+\frac{r^2}{d^2}\right)^{-0/5} \approx \frac{1}{d}\left(1+\frac{r\cos\theta}{d}\right)$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-Rq}{ld}\left(1+\frac{r\cos\theta}{d}\right)+\frac{q}{r}\left(1+\frac{l\cos\theta}{r}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{q}{r}-\frac{q}{R}\right)-q\cos\theta\left(\frac{rl}{R^3}-\frac{l}{r^2}\right)\right]$$

به نحوی مشابه پتانسیل ناشی از بار $-q$ و بار تصویر آن را به دست می‌آوریم (می‌توانیم در معادلهٔ V_1 به جای q قرار دهیم $-q$ و به جای θ قرار دهیم $(\pi-\theta)$).

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{q}{R}-\frac{q}{r}\right)-q\cos\theta\left(\frac{rl}{R^3}-\frac{l}{r^2}\right)\right]$$



شکل ح ۵-۱۲

پس
$$V = V_1 + V_2 = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

که در آن $p = 2ql$. بار القا شده روی سطح هادی عبارت است از $-\varepsilon_0\, \partial V / \partial r$ در $r = R$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\left(-\frac{2}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$$

پس داریم
$$\sigma = \frac{3p}{4\pi R^3}\cos\theta$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۱۳ شکل کلی تابع پتانسیل با روش جداسازی متغیرها به صورت زیر به دست می‌آید

$$V = \sum (A_n \cos k_n x + B_n \sin k_n x)(C_n e^{-k_n y} + D_n e^{k_n y})$$

در $x = 0$، $V = 0$، پس $A_n = 0$. در $y = 5$، $V = 0$، پس

$$C_n e^{-5k_n} + D_n e^{5k_n} = 0 \quad \text{یا} \quad C_n = -D_n e^{10k_n}$$

در $x = 2\pi$، $V = 0$ که نتیجه می‌دهد K_n باید عدد صحیحی باشد. اکنون تابع پتانسیل زیر را داریم

$$V = \sum B_n \sin k_n x\, D_n [e^{k_n y} - e^{(10-y)k_n}]$$

که می‌توان به جای $B_n D_n$ ضریب جدید M_n را گذاشت. در $y = 0$ باید داشته باشیم

$$V = \sum M_n \sin k_n x (1 - e^{10k_n}) = 4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$

پس

$$M_1(1 - e^{10}) = 3$$
$$M_3(1 - e^{30}) = -1$$

و بقیهٔ M_nها صفرند. سرانجام

$$V = \frac{3}{1 - e^{10}}\sin x(e^{y} - e^{10-y}) - \frac{1}{1 - e^{30}}\sin 3x[e^{3y} - e^{3(10-y)}]$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۱۴ در جهت x پتانسیل باید تابعی باشد که در دو نقطه صفر شود پس پتانسیل را به صورت زیر می‌نویسیم

$$V = (A\cos kx + B\sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم

در $x = 0$ داریم $V = 0$، پس $A = 0$ و بنابراین

$$V = \sin kx (Me^{ky} + Ne^{-ky})$$

در $y = 0$ نیز $V = 0 = \sin ky(M + N)$ پس $M = -N$ و

$$V = M\sin kx(e^{ky} - e^{-ky})$$

در $x = a$ نیز $V = 0 = M \sin kx\,(e^{ky} - e^{-ky})$، پس $k = \frac{n\pi}{a}$ و در $y = b$ باید داشته باشیم

$$V = 200 \sin \frac{2\pi x}{a} = M \sin \frac{n\pi}{a} \times (e^{kb} - e^{-kb})$$

پس قرار می‌دهیم $n = 2$ و M را به صورت زیر می‌یابیم

$$M = \frac{200}{e^{kb} - e^{-kb}} = \frac{100}{\sinh kb} = \frac{100}{\sinh\,(2\pi b / a)}$$

اکنون داریم

$$V = \frac{200}{\sinh\,(2\pi b / a)} \sin \frac{2\pi x}{a} \sinh\left(\frac{2\pi}{a} y\right)$$

در مرکز ناودان داریم

$$V\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}\right) = \frac{200}{\sinh\,(2\pi b / a)} \sin \pi \sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right) = 0$$

شدت میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{200}{\sinh\,(2\pi b / a)}\left[\frac{2\pi}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} \hat{x} + \frac{2\pi}{a} \cosh\left(\frac{2\pi}{a} y\right) \hat{y}\right]$$

در $x = 0$ مؤلفهٔ عمودی شدت میدان در مرز مؤلفهٔ $\hat{x}$ است، پس

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n = -\frac{200}{\sinh\,(2\pi b / a)} \times \frac{2\pi}{a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۱۵ شکل کلی زیر را برای پتانسیل داخل سازه برمی‌گزینیم (روش جداسازی متغیرها)

$$V = (A \cos ky + B \sin ky)\,(C \sinh kx + D \cosh kx)$$

$V = 0$ در $y = 0$ نتیجه می‌دهد $A = 0$. $V = 0$ در $x = 0$ نتیجه می‌دهد $D = 0$، و $V = 0$ در $y = 1$ نتیجه می‌دهد $k = m\pi$. پس

$$V = K \sin(m\pi y) \sinh(m\pi x)$$

هیچ مقدار K شرط مرزی در $x = 1$ را ارضا نمی‌کند. پس مجموعه‌ای از توابع فوق را برمی‌گزینیم

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin(m\pi y) \sinh(m\pi x)$$

برای برآورده شدن شرط مرزی در $x = 1$ باید داشته باشیم

$$100 = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sinh(m\pi) \sin(m\pi y)$$

با استفاده از روش سری فوریه به دست می‌آوریم

$$K_m = \begin{cases} \dfrac{400}{m\pi} & m\ \text{فرد} \\ 0 & m\ \text{زوج} \end{cases}$$

و

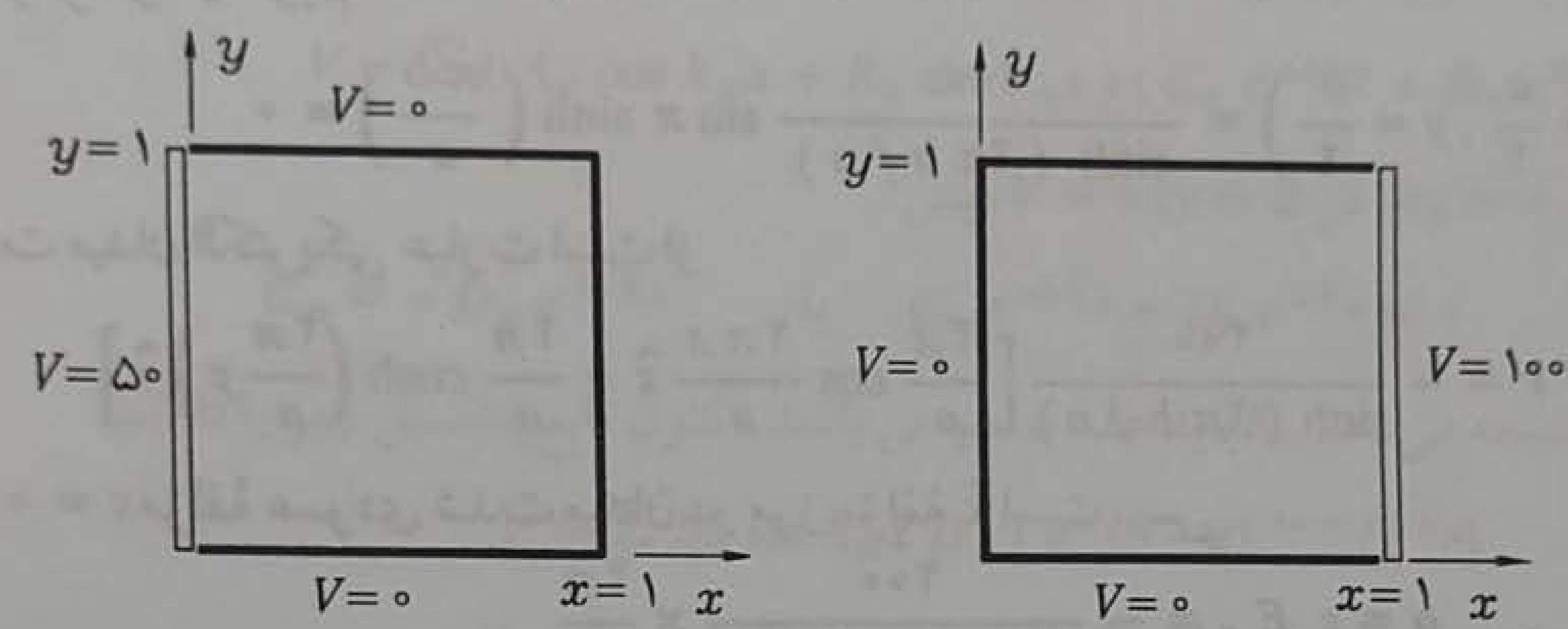
$$V = \frac{400}{\pi} \sum_{m\ \text{فرد}} \frac{\sinh(m\pi x)}{m \sinh(m\pi)} \sin(m\pi y)$$

۵-۱۶ از جمع آثار شرایط مرزی استفاده می‌کنیم. مسئله را به دو مسئلهٔ نشان داده شده در شکلهای ح ۵-۱۶ الف و ب تجزیه می‌کنیم. پتانسیل را برای سازهٔ شکل ح ۵-۱۶ الف در مسئلهٔ ۵-۱۵ به دست آوردیم. برای سازهٔ شکل ح ۵-۱۶ ب نیز با توجه به جواب به دست آمده برای سازهٔ شکل ح ۵-۱۶ الف، با گذاشتن $(x-1)$ به جای x و نصف کردن اندازهٔ مولفه‌ها به دست می‌آوریم

$$V_2 = \frac{200}{\pi} \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{\sinh[\,m\pi(1-x)]}{m \sinh(m\pi)} \sin(m\pi y)$$

و سرانجام

$$V = V_1 + V_2 = \frac{200}{\pi} \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{\sin(m\pi y)}{m \sinh(m\pi)} [\,2 \sinh(m\pi x) + \sinh(m\pi - m\pi x)]$$



ب الف

شکل ح ۵-۱۶

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۱۷ با جداسازی متغیرها به دست می‌آوریم

$$V = (A\, e^{kx} + B\, e^{-kx})\,(C \sin ky + D \cos ky)$$

شرط مرزی $V=0$ در $y=0$ نتیجه می‌دهد $D=0$. شرط مرزی $V=0$ در $y=\pi$ نتیجه می‌دهد k عدد صحیح است. شرط مرزی $V=0$ در $x \longrightarrow \infty$ نیز نتیجه می‌دهد $A=0$. پس

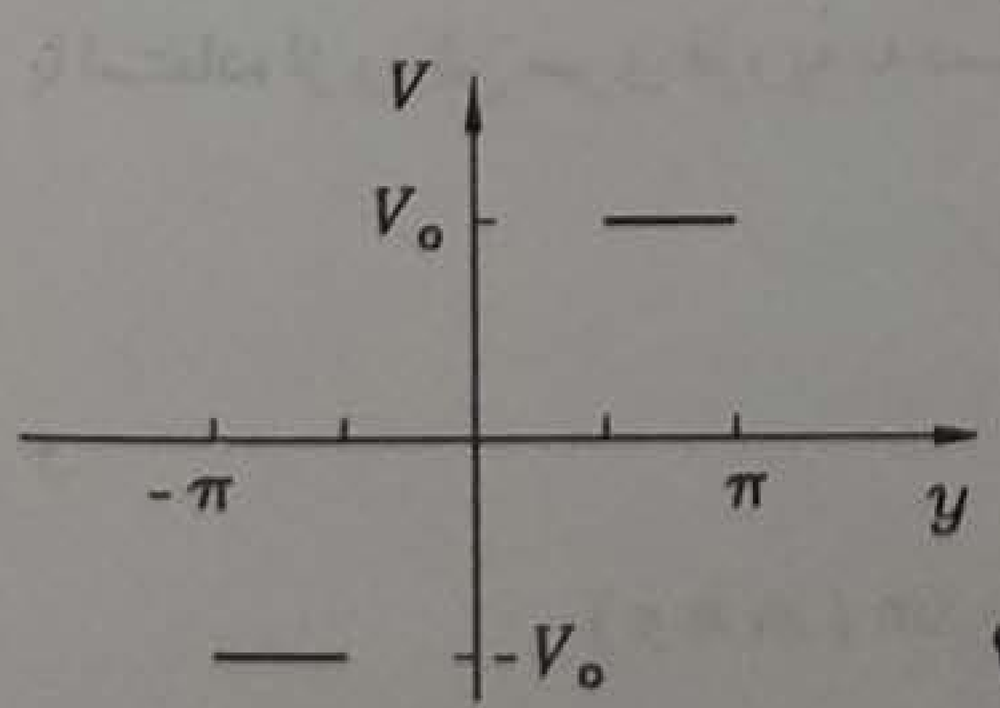
$$V = M\, e^{-nx} \sin ny$$

این رابطه به ازای هیچ مقدار M و n شرط مرزی در $x=0$ را ارضا نمی‌کند. پس مجموعی از این توابع را به عنوان جواب برمی‌گزینیم

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} M_n\, e^{-nx} \sin ny$$

در $x=0$ داریم

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin ny$$



شکل ح ۵-۱۷

این بسط فوریهٔ یک تابع متناوب فرد است. پس تابع $V(y)$ را به صورت شکل ح ۵-۱۷ تعریف می‌کنیم که در فاصلهٔ $0 < y < \pi$ با آنچه شکل مسئله می‌گوید یکسان است. ضرایب سری فوریهٔ این تابع به صورت زیر به دست می‌آید

$$M_n = \frac{۲}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{۲} - \cos n\pi \right)$$

بنابراین داریم

$$V = \frac{۲}{\pi}\left(e^{-x}\sin y - e^{-۲x}\sin ۲y - \frac{۱}{۳}e^{-۳x}\sin ۳y + \cdots \right)$$

۵-۱۸ با روش جداسازی متغیرها به دست می‌آوریم

$$X = A_۱\cos k_۱x + B_۱\sin k_۱x$$

$$Y = A_۲\cos k_۲y + B_۲\sin k_۲y$$

$$Z = A_۳e^{-k^۲z} + B_۳e^{k^۲z}$$

که در آن $k^۲ = k_۱^۲ + k_۲^۲$. چون در $z \longrightarrow \infty$ باید $V = 0$، پس $B_۳ = 0$. اگر پتانسیل در ناحیهٔ $z > 0$ را با $V_۱$ نشان دهیم، پتانسیل در ناحیهٔ $z < 0$، $V_۲$، به علت تقارن عبارت است از $V_۲(-z) = V_۱(z)$. شرط مرزی در صفحهٔ $z = 0$ لازم می‌دارد

$$-\frac{\partial V_۱}{\partial z} + \frac{\partial V_۲}{\partial z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \Leftarrow \quad (E_{۱z} - E_{۲z}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

از این تساوی نتیجه می‌گیریم

$$۲k^۲A_۳XY = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos a_۱x\cos a_۲y$$

که نتیجه می‌دهد $k_۱ = a_۱$، $k_۲ = a_۲$، $B_۱ = 0$، و $B_۲ = 0$

$$A_۱A_۲A_۳ = \frac{\sigma_0}{۲\varepsilon_0(a_۱^۲ + a_۲^۲)}$$

پس

$$V_۱ = \frac{\sigma_0}{۲\varepsilon_0(a_۱^۲ + a_۲^۲)}\,e^{-(a_۱^۲ + a_۲^۲)z}\cos a_۱x\cos a_۲y$$

$$V_۲ = \frac{\sigma_0}{۲\varepsilon_0(a_۱^۲ + a_۲^۲)}\,e^{(a_۱^۲ + a_۲^۲)z}\cos a_۱x\cos a_۲y$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۱۹ میدان تابعی از y نیست. و چون باید در جهت x متناوب باشد آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$V = (A\cos kx + B\sin kx)(Ce^{kz} + De^{-kz})$$

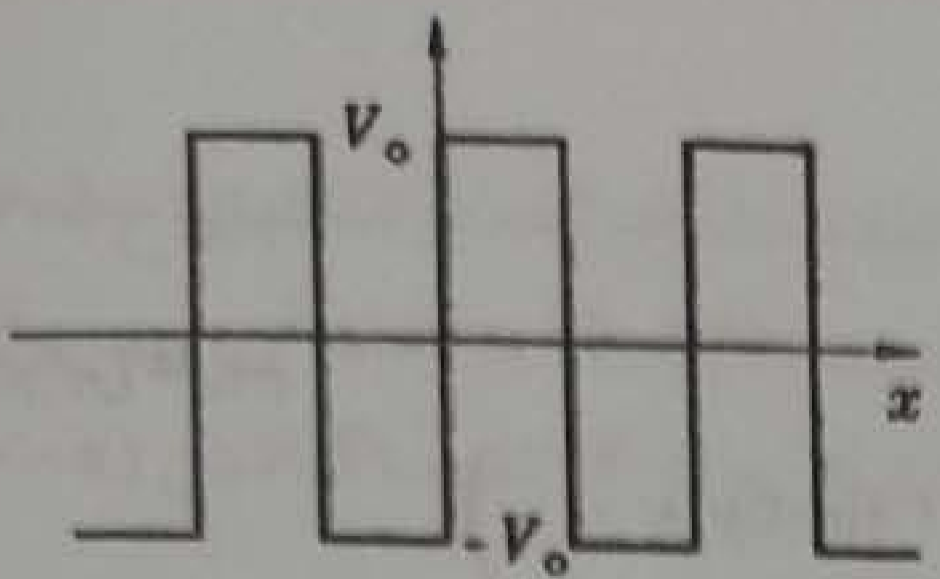
چون در $z \longrightarrow \infty$ پتانسیل باید صفر باشد $C = 0$. همچنین پتانسیل باید تابع فردی از x باشد (به شکل توجه کنید) پس $A = 0$ و

$$V = K\sin kx\,e^{-kz}$$

از تناوب پتانسیل در جهت x نتیجه می‌گیریم که $k = \frac{۲\pi}{a}m$ و

$$V = K\sin\left(\frac{۲\pi m}{a}x\right)e^{-\frac{۲\pi m}{a}z}$$

این جمله نمی‌تواند شرط مرزی در $z = 0$ را ارضا کند، پس مجموعی از جملات فوق را در نظر می‌گیریم



شکل ح ۵-۱۹

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin\left(\frac{2\pi m}{a} x\right) e^{-\frac{2\pi m}{a} z}$$

در $z = 0$ عبارت

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} K_m \sin \frac{2\pi m}{a} x$$

باید تابعی شبیه شکل ح ۵-۱۹ ایجاد کند. با استفاده از روش سری فوریه به دست می‌آوریم

$$K_m = \begin{cases} 0 & m \text{ زوج} \\ \dfrac{4V_0}{m\pi} & m \text{ فرد} \end{cases}$$

و

$$V = \frac{4V_0}{m\pi}\left[\sin\frac{2\pi x}{a}\, e^{-\frac{2\pi z}{a}} + \frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{a}\, e^{-\frac{6\pi z}{a}} + \frac{1}{5}\sin\frac{10\pi x}{a}\, e^{-\frac{10\pi z}{a}} + \cdots\right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۲۰ حل پیشنهادی شرایط مرزی صفر بودن V در $x = 0$، $y = 0$ و $z = 0$ را ارضا می‌کند. برای این که پتانسیل در $x = a$، $y = b$ و $z = c$ هم ارضا شود باید داشته باشیم

$$K_x = \frac{m\pi}{a} \quad , \quad K_y = \frac{n\pi}{b} \quad , \quad K_z = \frac{k\pi}{c}$$

اگر این حل را در معادلهٔ دیفرانسیل $\nabla^2 V = -\rho / \varepsilon_0$ بگذاریم پس از گرفتن لاپلاسین خواهیم یافت

$$\sum_n \sum_m \sum_k A_{mnk}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2\right] \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \sin\frac{k\pi}{c}z$$

$$= -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta\left(z-\frac{c}{2}\right)$$

برای یافتن ضرایب A_{mnk} دو طرف معادله را در $\sin\frac{m'\pi}{a} \sin\frac{n'\pi}{b} \sin\frac{k'\pi}{c}$ ضرب کرده، از تابع حاصل در حجم داخل جعبه انتگرال می‌گیریم. چون طرف راست شامل انتگرالهای حاصلضرب دو سینوسی در روی یک دورهٔ تناوب است، تمام جملات به جز جمله‌ای که در آن $m' = m$، $n' = n$ و $k' = k$، انتگرالی برابر صفر دارند (این همان روش اساسی یافتن ضرایب سری فوریه است). پس معادلهٔ زیر را خواهیم داشت

$$A_{mnk}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2\right]\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$= -\frac{Q}{\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^b\int_0^c \delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta\left(z-\frac{c}{2}\right) \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \sin\frac{k\pi}{c}z \, dx\, dy\, dz$$

حاصل انتگرال طرف راست برابر است با

$$-\frac{Q}{\varepsilon_0}\sin\frac{m\pi}{2}\ \sin\frac{n\pi}{2}\ \sin\frac{k\pi}{2}$$

زیرا $\int f(x)\,\delta(x-h)\,dx = f(h)$. پس ضرائب سری عبارت است از

$$A_{mnk} = -\frac{8Q}{\varepsilon_0\, a\, b\, c}\;\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\;\sin\frac{n\pi}{2}\;\sin\frac{k\pi}{2}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{c}\right)^2\right]}$$

برای تمام جملات دارای m یا n یا k زوج، $A_{mnk} = 0$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۲۱ تابع پتانسیل مستقل از z است. پتانسیل درون استوانه را V_1 و پتانسیل بیرون آن را V_2 می‌نامیم. پس

$$V_1 = \sum (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)\,\rho^n$$

$$V_2 = \sum (A'_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi)\,\rho^{-n}$$

شرایط مرزی عبارت‌اند از $V_1 = V_2$ در $\rho = R$ و $\varepsilon_0 (E_{\rho 2} - E_{\rho 1}) = \sigma$ در $\rho = R$، زیرا در روی استوانه مولفهٔ عمودی میدان الکتریکی E_ρ است. شرط مرزی دوم نتیجه می‌دهد در $\rho = R$

$$-\frac{\partial V_2}{\partial\rho} + \frac{\partial V_1}{\partial\rho} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{R}{\varepsilon_0}\cos 5\phi$$

به سادگی می‌توان دید که برای برقراری تساوی فوق تمام ضرایب $\sin n\phi$ باید صفر باشد، همچنین برای $n \neq 5$، $A_n = A'_n = 0$.

$$V_1 = A_5 \cos 5\phi\, \rho^5$$

$$V_2 = A'_5 \cos 5\phi\, \rho^{-5}$$

شرط مرزی اول نتیجه می‌دهد

$$A_5 R^5 = A'_5 R^{-5}$$

همچنین شرط مرزی دوم نتیجه می‌دهد

$$5A'_5 R^{-6} + 5A_5 R^4 = \frac{R}{\varepsilon_0}$$

حل همزمان دو معادله عبارت است از $A_5 = \frac{1}{10\,\varepsilon_0 R^3}$ و $A'_5 = \frac{R^7}{10\,\varepsilon_0}$. بنابراین

$$V_1 = \frac{1}{10\,\varepsilon_0}\cos 5\phi\,\frac{\rho^5}{R^3}$$

$$V_2 = \frac{1}{10\,\varepsilon_0}\cos 5\phi\,\frac{R^7}{\rho^5}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۲۲ تابع پتانسیل در داخل استوانه را با V_1 و در خارج آن را با V_2 نشان می‌دهیم، پس

$$V_1 = A_0 + \sum (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)\,\rho^n$$

$$V_2 = A'_0 \ln\rho + \sum (A'_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi)\,\rho^{-n}$$

چون کل بار استوانه صفر است $[\,Q = \int \sigma\, ds = 0\,]$ جملهٔ $\ln\rho$ نداریم و $A'_0 = 0$. مقدار ثابت A_0 را نیز صفر

فرض می‌کنیم چون مقداری دلخواه است. در $\rho = R$، $V_1 = V_2$، پس

$$B_n R^n = B'_n R^{-n} \quad \text{و} \quad A_n R^n = A'_n R^{-n}$$

همچنین در $\rho = R$ طبق شرایط مرزی $\sigma = \varepsilon_\circ E_{n2} - \varepsilon_\circ E_{n1}$ که در آن E_{n2} و E_{n1} مولفه‌های عمودی میدان الکتریکی هستند، پس هر دو مولفهٔ در جهت $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ شدت میدان هستند و

$$E_{n2} = -\frac{\partial V_2}{\partial \rho} \quad \text{و} \quad E_{n1} = -\frac{\partial V_1}{\partial \rho}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\Sigma\,(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)\, n R^{n-1} + \Sigma\,(A'_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi)\, n R^{-n-1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

طرف راست عبارت است از

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_\circ} \sin 2\phi + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_\circ} \cos \phi$$

پس

$$A_1 + \frac{A'_1}{R^2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_\circ} \quad \text{و} \quad 2 B_2 R + 2 B'_2 R^{-3} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_\circ}$$

و بقیه A_nها، B_nها، A'_nها و B'_nها، صفرند. قبلا داشتیم $B_2 R^2 = B'_2 R^{-2}$ و $A_1 R = A'_1 R^{-1}$ پس

$$A_1 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_\circ} \quad \text{و} \quad A'_1 = \frac{\sigma_2 R^2}{2\varepsilon_\circ}$$

$$B_2 = \frac{\sigma_1}{4\varepsilon_\circ R} \quad \text{و} \quad B'_2 = \frac{\sigma_1 R^3}{4\varepsilon_\circ}$$

و پتانسیل درون و بیرون استوانه به صورت زیر به دست می‌آید

$$V_1 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_\circ} \rho \cos\phi + \frac{\sigma_1}{4\varepsilon_\circ R} \rho^2 \sin 2\phi$$

$$V_1 = \frac{\sigma_2 R^2}{2\varepsilon_\circ} \frac{\cos\phi}{\rho} + \frac{\sigma_1 R^3}{4\varepsilon_\circ} \frac{\sin 2\phi}{\rho^2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۲۳ در داخل کره $r = 0$ جزء ناحیهٔ جواب است، پس

$$V_1 = \Sigma A_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

در $r = a$

$$V_1 = \Sigma A_n a^n \mathrm{P}_n(\cos\theta)$$
$$= A_\circ + A_1 a \cos\theta + \cdots = 1 - \cos\theta$$

پس $A_\circ = 1$، $A_1 = -1/a$ و بقیهٔ A_nها برابر صفرند؛ یعنی

$$V_1 = 1 - \frac{r}{a}\cos\theta$$

در خارج کره چون $r = \infty$ در ناحیهٔ جواب است. پس

$$V_2 = \Sigma B_n r^{-n-1} \mathrm{P}_n(\cos\theta)$$
$$= B_\circ r^{-1} + B_1 r^{-2} \cos\theta + B_2 r^{-3} \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots$$

در $r = a$

$$V_۲ = \frac{B_۰}{a} + \frac{B_۱}{a^۲} \cos\theta + \cdots = ۱ - \cos\theta$$

که نتیجه می‌دهد $B_۰ = a$، $B_۱ = -a^۲$ و بقیهٔ B_nها صفرند. پس

$$V_۲ = \frac{a}{r} - \frac{a^۲}{r^۲} \cos\theta$$

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times \mathbf{B}=\mu \mathbf{J} \,|\, \nabla\times \mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot \mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot \mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times \mathbf{E}=۰ \,|\, \oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۵-۲۴ برای داخل و خارج کره داریم

$$V_۱ = A_۰ + A_۱ r P_۱(\cos\theta) + A_۲ r^۲ P_۲(\cos\theta) + A_۳ r^۳ P_۳(\cos\theta) + \cdots \qquad r < a$$

$$V_۲ = \frac{B_۰}{r} + \frac{B_۱}{r^۲} P_۱(\cos\theta) + \frac{B_۲}{r^۳} P_۲(\cos\theta) + \frac{B_۳}{r^۴} P_۳(\cos\theta) + \cdots \qquad r > a$$

پتانسیل روی سطح کره را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$V = k \cos ۳\theta = k \left[\frac{۸}{۵} P_۳(\cos\theta) - \frac{۳}{۵} P_۱(\cos\theta) \right]$$

با استفاده از شرایط مرزی به سادگی به دست می‌آوریم

$$A_۳ = \frac{۸k}{۵a^۳} \qquad A_۲ = ۰ \qquad A_۱ = \frac{-۳k}{۵a} \qquad A_۰ = ۰$$

$$B_۳ = \frac{۸ k a^۴}{۵} \qquad B_۲ = ۰ \qquad B_۱ = \frac{-۳ k a^۲}{۵} \qquad B_۰ = ۰$$

و به ازای $n > ۳$ داریم $A_n = B_n = ۰$.

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times \mathbf{B}=\mu \mathbf{J} \,|\, \nabla\times \mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot \mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot \mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times \mathbf{E}=۰ \,|\, \oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۵-۲۵ مانند مسئله ۵-۲۴ عمل می‌کنیم. پتانسیل روی کره را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$۵ \cos^۳\theta = ۲ P_۳(\cos\theta) + ۳ P_۱(\cos\theta)$$

سپس به دست می‌آوریم

$$V_i = \frac{۲}{۳} r P_۱(\cos\theta) + \frac{۳}{۸} r^۳ P_۳(\cos\theta) \qquad r < ۲$$

$$V_o = \frac{۱۲}{r^۲} P_۱(\cos\theta) + \frac{۳۲}{r^۴} P_۳(\cos\theta) \qquad r > ۲$$

$\nabla\cdot\nabla\times \mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times \mathbf{B}=\mu \mathbf{J} \,|\, \nabla\times \mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot \mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot \mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times \mathbf{E}=۰ \,|\, \oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۵-۲۶ میدان داخل و خارج کره به ترتیب عبارت است از

$$\phi_۱ = \sum_{n=۱}^{\infty} \left[A_n r^n P_n(\cos\theta) + B_n r^{-n-۱} P_n(\cos\theta) \right]$$

$$\phi_۲ = \sum_{n=۱}^{\infty} \left[A'_n r^n P_n(\cos\theta) + B'_n r^{-n-۱} P_n(\cos\theta) \right]$$

چون در $r = ۰$ و $r = \infty$ باید پتانسیل محدود باشد $B_n = ۰$ و $A'_n = ۰$. در $r = R$ باید داشته باشیم

$$(\mathbf{E}_۲ - \mathbf{E}_۱) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_۰}$$

$\frac{\partial \phi_۲}{\partial r} = \mathbf{E}_۲ \cdot \hat{\mathbf{n}}$ و $\frac{\partial \phi_۱}{\partial r} = \mathbf{E}_۱ \cdot \hat{\mathbf{n}}$ زیرا اینها مولفهٔ عمود بر سطح پوسته کروی هستند. پس باید داشته باشیم

$$n\,A_n\,R^{n-۱}\,P_n(\cos\theta) + (n+۱)\,B'_n\,R^{-(n+۲)}\,P_n(\cos\theta) = \frac{\sigma_\circ \cos\theta}{\varepsilon_\circ}$$

چون توابع لژاندر استقلال خطی دارند، باید ضرایب جملات لژاندر مشابه در دو طرف یکسان باشند، پس $B'_\circ = \circ$ و

$$A_۱ + \frac{۲B'_۱}{R^۳} = \frac{\sigma_\circ}{\varepsilon_\circ}$$

$$A_n = -\frac{(n+۱)}{n} B'_n\,R^{-(۲n+۱)} \qquad n \geq ۲$$

همچنین باید پتانسیل در $r = R$ پیوسته باشد. به این ترتیب به دست می‌آوریم $A_\circ = \circ$ و

$$A_۱ - \frac{B'_۱}{R^۳} = \circ$$

$$A_n = B'_n\,R^{-(۲n+۱)} \qquad n \geq ۲$$

تنها ضرایب غیر صفری که به دست می‌آید $A_۱ = \frac{\sigma_\circ}{۳\,\varepsilon_\circ}$ و $B'_۱ = \sigma_\circ\,R^۳ / ۳\,\varepsilon_\circ$ است، پس

$$\phi_۱ = \frac{\sigma_\circ}{۳\,\varepsilon_\circ} r\cos\theta \qquad r < R$$

$$\phi_۲ = \frac{\sigma_\circ\,R^۳}{۳\,\varepsilon_\circ\,r^۲}\cos\theta \qquad r > R$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ$ | $\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}$ | $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$ | $\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ$ | $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$ | $\nabla\times\mathbf{E}=\circ$ | $\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q$ | $\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I$ | $\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I$ | $\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ$ | $\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۵-۲۷ میدان داخل و خارج کره به ترتیب عبارت است از

$$V_۱ = \sum_{n=۱}^{\infty} (A_n\,r^n + B_n\,r^{-n-۱})\,P_n(\cos\theta) \quad r \leq R$$

$$V_۲ = \sum_{n=۱}^{\infty} (A'_n\,r^n + B'_n\,r^{-n-۱})\,P_n(\cos\theta) \quad r \geq R$$

در $r = \circ$ و $r = \infty$ پتانسیل باید محدود باشد، پس $A'_n = B_n = \circ$. در $r = R$ باید $V_۱ = V_۲$. پس

$$A_n = B'_n\,R^{-۲n-۱}$$

مولفه‌های عمود بر سطح میدان الکتریکی عبارت‌اند از $\frac{\partial V}{\partial r}$. چون باید داشته باشیم $E_{۲n} - E_{۱n} = \sigma / \varepsilon_\circ$ و

$$\sigma = \sigma_\circ(\cos\theta - ۱)^۲ = \frac{۴\,\sigma_\circ}{۳} P_\circ(\cos\theta) - ۲\,\sigma_\circ\,P_۱(\cos\theta) + \frac{۲\,\sigma}{۳} P_۲(\cos\theta)$$

با برابر قرار دادن ضرایب جملات لژاندر مشابه دو طرف رابطهٔ

$$\left.\frac{\partial V_۲}{\partial r}\right|_{r=R} - \left.\frac{\partial V_۱}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$$

به دست می‌آوریم

$$A_۱ + ۲\,B'_۱\,R^{-۳} = -۲\,\frac{\sigma_\circ}{\varepsilon_\circ}$$

$$۲\,A_۲\,R + ۳\,B'_۲\,R^{-۴} = \frac{۲}{۳}\frac{\sigma_\circ}{\varepsilon_\circ}$$

$$n A_n R^{n-1} + (n+1) B'_n R^{-(n+2)} = 0 \qquad n \geq 3$$

با استفاده از این روابط و رابطهٔ $A_n = B'_n R^{-2n-1}$ به دست می‌آوریم

$$A_1 = \frac{-2\sigma_0}{3\varepsilon_0} \qquad B'_1 = \frac{-2\sigma_0}{3\varepsilon_0} R^3$$

$$A_0 = \frac{4}{3} R \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad B'_0 = \frac{4}{3} R^2 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$A_2 = \frac{2\sigma_0}{15 R \varepsilon_0} \qquad B'_2 = \frac{2\sigma_0}{15\varepsilon_0} R^4$$

$$A_n = B'_n = 0 \qquad n \geq 3$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۲۸-۵ برای فضای بین دو کره داریم

$$V = \sum [A_n r^n + B_n r^{-n-1}] P_n(\cos\theta)$$

در $r = a$، $V = 0$. پس باید داشته باشیم

$$A_n a^n + B_n a^{-n-1} = 0$$

یا $B_n = -a^{2n+1} A_n$. در $r = b$ داریم

$$V = \left(A_0 + \frac{B_0}{b}\right) + \left(A_1 b + \frac{B_1}{b^2}\right)\cos\theta + \cdots = V_0 \cos\theta$$

که نتیجه می‌دهد $A_0 = B_0 = 0$، $A_1 b + B_1/b^2 = V_0$، و برای $n \neq 1$، $A_n = B_n = 0$. چون شرط مرزی قبل $B_1 = -a^3 A_1$ را نتیجه می‌دهد به دست می‌آوریم

$$A_1 = \frac{V_0 b^2}{b^3 - a^3}$$

$$V = \frac{V_0 b^2}{b^3 - a^3}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۲۹-۵ در $r > a$ پتانسیل را به صورت بسط لژاندر می‌نویسیم

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

روی محور zها داریم $\cos\theta = 1$ و $r = z$. چون به ازای تمام nها $P_n(1) = 1$، روی محور zها V عبارت است از

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}} = \frac{B_0}{z} + \frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{z^3} + \cdots$$

از طرف دیگر پتانسیل روی محور z عبارت است از

$$V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} \ln\frac{z+a}{z-a} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} \ln\frac{1+\frac{a}{z}}{1-\frac{a}{z}}$$

و چون $-1 < \frac{a}{z} < 1$

$$V = \frac{Q}{8\pi \varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{z} + \frac{a^3}{3z^3} + \frac{a^5}{5z^5} + \cdots\right)$$

از مقایسه دو عبارت ضرایب B_n به دست می‌آید

$$B_0 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \quad , \quad B_2 = \frac{Q a^2}{12\pi \varepsilon_0} \quad , \quad \ldots \quad B_n = 0 \quad \text{برای } n \text{ های فرد}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۳۰ تغییراتی در جهتهای y و z نداریم، پس

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon x_1} x$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon x_1} x^2 + C_1$$

و چون $E = -\partial V / \partial x$ و در $x = 0$ داریم $E = 0$، پس $C_1 = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon x_1} x^2$$

$$V = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon x_1} x^3 + C_2$$

شرط مرزی در $x = x_1$، $V = 0$ است، پس

$$0 = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon} x_1^2 + C$$

و

$$V = \frac{\rho_0}{6\varepsilon x_1}(x_1^3 - x^3)$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۳۱ پتانسیل تابعی از y و z نیست، پس معادلهٔ پواسون به صورت زیرست

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{kx}{\varepsilon_0}$$

با دوبار انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$V = -\frac{kx^3}{6\varepsilon_0} + Ax + B$$

شرایط مرزی $B = 0$ و $A = \frac{V_0}{l} + \frac{kl^2}{6\varepsilon_0}$ را نتیجه می‌دهند، پس

$$V = \frac{V_0}{l}x - \frac{k}{6\varepsilon_0}(x^3 - l^2 x)$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۳۲ در هر سه ناحیهٔ $-z_0 < z < z_0$، $z > z_0$ و $z < -z_0$ پتانسیل تنها تابعی از z است. در نواحی $|z| > z_0$ معادلهٔ لاپلاس را داریم و برای این دو ناحیه

$$V_1 = A_1 z + A_2 \qquad z > z_0$$

$$V_2 = A_3 z + A_4 \qquad z < -z_0$$

در ناحیهٔ $|z| > z_{\circ}$ معادله پواسون را داریم با برابر صفر قرار دادن $\frac{\partial V_3}{\partial y}$ و $\frac{\partial V_3}{\partial x}$ خواهیم داشت

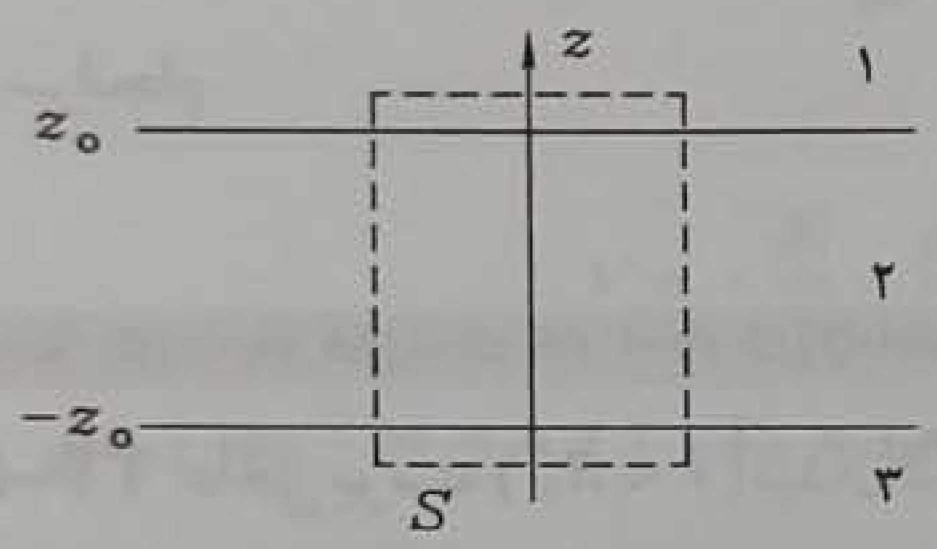
$$\frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}} = -\frac{\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}} \cos\frac{\pi z}{z_{\circ}}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial z} = \frac{\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}} \frac{z_{\circ}}{\pi} \sin\frac{\pi z}{z_{\circ}} + A_5$$

$$V_3 = -\frac{\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}} \left(\frac{z_{\circ}}{\pi}\right)^2 \cos\frac{\pi z}{z_{\circ}} + A_5 z + A_y$$

به خاطر تقارن حول صفحه $z = \circ$ باید داشته باشیم $A_1 = -A_3$ و $A_2 = A_4$ و $A_5 = \circ$. از پیوستگی پتانسیل در صفحات $z = z_{\circ}$ و $z = -z_{\circ}$ نتیجه می‌گیریم

$$A_1 z_{\circ} + A_2 = \frac{\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}} \left(\frac{z_{\circ}}{\pi}\right)^2 + A_6$$



شکل ح ۵-۳۲

سطح گوس شکل ح ۵-۳۲ رادر نظر بگیرید. داریم

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = 2 A_1 S$$

بار داخل این سطح برابر ست با

$$S \int_{-z_{\circ}}^{z_{\circ}} \rho_{\circ} \cos\frac{\pi z}{z_{\circ}}\, dz = \circ$$

که نتیجه می‌دهد $A_1 = \circ$. و سرانجام

$$V_1 = V_2 = \frac{\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}} \left(\frac{z_{\circ}}{\pi}\right)^2 + A_6$$

$$V_3 = -\frac{\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}} \left(\frac{z_{\circ}}{\pi}\right)^2 \cos\frac{\pi z}{z_{\circ}} + A_6$$

چون پتانسیل در هیچ نقطه‌ای مشخص نشده‌است، ثابت A_6 را نمی‌توان تعیین کرد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۵-۳۳ در داخل کره معادلهٔ پواسون $\nabla^2 V = -\rho_{\circ} / \varepsilon_{\circ}$ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}}$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_{\circ}}{\varepsilon_{\circ}} r^2$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_{\circ}}{3\varepsilon_{\circ}} r^3 + K_1$$

یا

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_{\circ}}{3\varepsilon_{\circ}} r + \frac{K_1}{r^2}$$

و با یک انتگرالگیری دیگر

$$V = -\frac{\rho_{\circ}}{6\varepsilon_{\circ}} r^2 - \frac{K_1}{r} + K_2$$

در خارج کره میدان پتانسیل و الکتریکی شبیه میدان یک بار نقطه‌ای ρV_c واقع در مبدا است، V_c حجم کره

است. از پیوستگی مولفهٔ عمودی میدان الکتریکی در $r = R$ (به خاطر نداشتن بار سطحی) نتیجه می‌گیریم

$$-\frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\rho V_c}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0} - \frac{K_1}{R^2}$$

یا

$$K_1 = 0$$

و از پیوستگی پتانسیل در $r = R$ به دست می‌آوریم

$$-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}R^2 - \frac{K_1}{R} + K_2 = \frac{\rho V_c}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

یا

$$K_2 = \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

و سرانجام

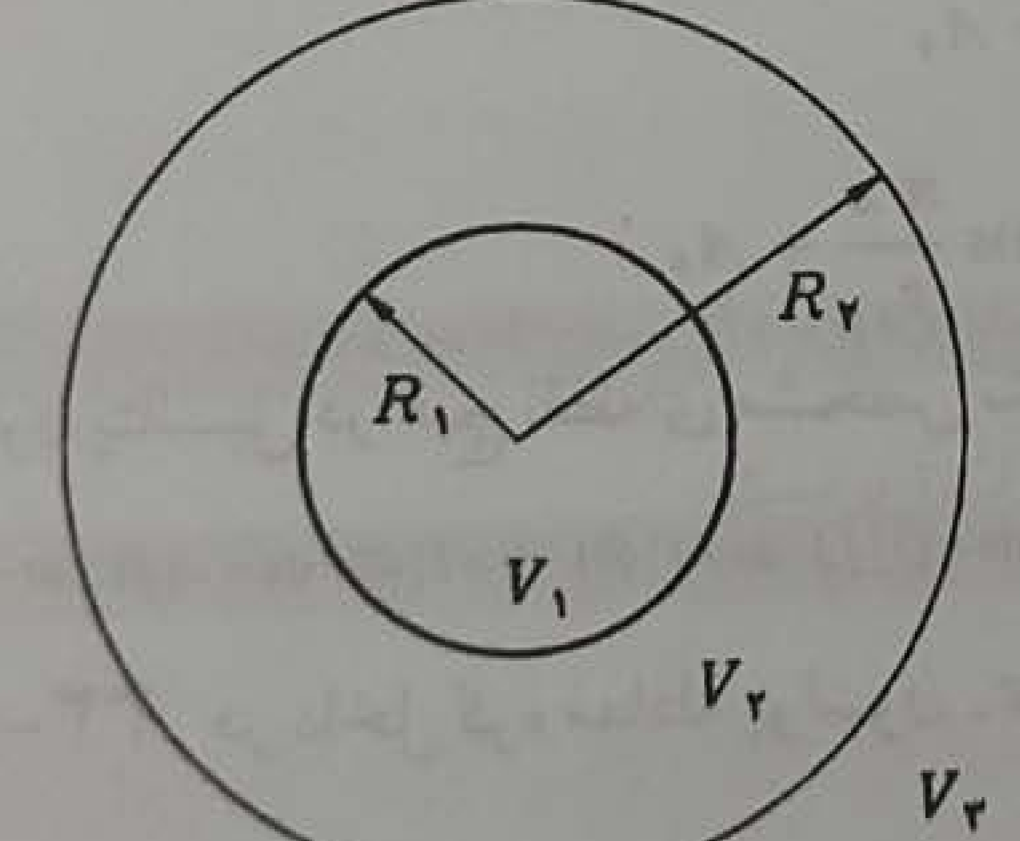
$$V = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۳۴ داخل پوسته ($r < R_1$) میدان الکتریکی صفر، و بنابراین پتانسیل ثابت است. به خاطر تقارن کروی مسئله، میدان پتانسیل خارج پوسته ($r > R_2$) شبیه میدان یک بار نقطه‌ای است، پس

$$V_1 = A_1$$

$$V_3 = A_3 / r$$



شکل ح ۵-۳۴

در داخل پوسته معادله پواسون را داریم؛ $\nabla^2 V_2 = -\rho / \varepsilon_0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_2}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{b}{\varepsilon_0 r}$$

$$r^2\frac{\partial V_2}{\partial r} = -\int\frac{b}{\varepsilon_0}r\,dr = -\frac{b}{2\varepsilon_0}r^2 + A_2$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} = -\frac{b}{2\varepsilon_0} + \frac{A_2}{r^2}$$

$$V_2 = -\frac{b}{2\varepsilon_0}r - \frac{A_2}{r} + A_4$$

برای یافتن ثابتهای A_1 تا A_4 از این روابط استفاده می‌کنیم: در $r = R_1$، $V_2 = V_3$؛ در $r = R_1$، $\frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{\partial V_2}{\partial r}$ و در $r = R_2$، $\frac{\partial V_2}{\partial r} = \frac{\partial V_3}{\partial r}$ (چون بار سطحی نداریم). در این صورت به دست می‌آوریم

$$A_2 = \frac{b}{2\varepsilon_0}R_1^2\ ,\quad A_1 = \frac{b}{\varepsilon_0}(R_2 - R_1)$$

$$A_4 = \frac{bR_2}{\varepsilon_0}\ ,\quad A_3 = \frac{b}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۳۵ چون نسبت به θ و ϕ تغییر نداریم

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_\circ a^5}{\varepsilon_\circ r (r^2 + a^2)^2}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = -\frac{\rho_\circ a^5 r}{\varepsilon_\circ (r^2 + a^2)^2}$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$r^2 \frac{dV}{dr} = \frac{\rho_\circ a^5}{2 \varepsilon_\circ (r^2 + a^2)^2} + K$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\rho_\circ a^5}{2 \varepsilon_\circ r^2 (r^2 + a^2)^2} + \frac{K}{r^2}$$

چون $\frac{dV}{dr} = -E_r$ در $r = 0$ باید داشته باشیم

$$K = -\frac{\rho_\circ a^5}{2 \varepsilon a^2} = -\frac{\rho_\circ}{2 \varepsilon} a^3$$

با یک انتگرالگیری دیگر به دست می‌آوریم

$$V = -\frac{K}{r} - \frac{\rho_\circ a^5}{2 \varepsilon}\left[\frac{1}{a^2 r} + \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\frac{r}{a}\right] + K_1$$

برای داشتن $V = 0$ در $r \longrightarrow \infty$ باید داشته باشیم $K_1 = (\rho_\circ a^2 \pi) / 4 \varepsilon_\circ$ $(\tan^{-1} \infty = \pi / 2)$. پس

$$V = \frac{\rho_\circ a^2}{2 \varepsilon}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{r}{a}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۳۶ پتانسیل در داخل کره، به خاطر مستقل بودن از ϕ شکل کلی زیر را دارد

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n P_n(\cos\theta) + B_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta)\right] \qquad (1)$$

چون در $r = 0$ پتانسیل باید محدود باشد $B_n = 0$. در $r = a$ داریم

$$V(x) = V_2 \quad -1 < x < 0 \qquad , \qquad V(x) = V_1 \quad 0 < x < 1$$

که در آن $x = \cos\theta$. برای یافتن ضرائب A_n دو طرف تابع پتانسیل را در $P_n(x)$ ضرب می‌کنیم و از ۱- تا ۱ انتگرال می‌گیریم. مثلاً برای یافتن $A_\circ$ دو طرف را در $P_\circ(x) = 1$ ضرب می‌کنیم. چون توابع لژاندر در فاصلهٔ ۱- تا ۱ متعامدند، انتگرال تمام جملات $P_n(x)\, P_\circ(x)$ $(n \neq 0)$ طرف چپ صفر می‌شود، و تنها انتگرال جملهٔ $A_\circ P_\circ(x) P_\circ(x) = A_\circ$ برابر $2A_\circ$ می‌شود. انتگرال طرف راست برابر $V_1 + V_2$ می‌شود، پس

$$A_\circ = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

به همین ترتیب برای بقیهٔ ضرائب به دست می‌آوریم

$$A_n a^n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} V(x)\, P_n(x)\, dx \qquad (2)$$

زیرا به ازای $m = n$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2m + 1}$$

انتگرال بالا به ازای $n \neq m$ برابر صفرست، زیرا توابع لژاندر متعامدند. چند ضریب را به کمک معادلهٔ (۲)

حساب می‌کنیم.

$$A_۱ = \frac{۳}{۲a}\int_{-۱}^{۱} V(x)\, P_۱(x)\, dx = \frac{۳}{۲a}\int_{-۱}^{۱} V(x)\, x\, dx$$

$$= \frac{۳}{۲a}\left\{ \int_{-۱}^{۰} V_۲ x\, dx + \int_{۰}^{۱} V_۱ x\, dx \right\} = \frac{۳(V_۱ - V_۲)}{۴a}$$

$$A_۲ = \frac{۵}{۲a^۲}\int_{-۱}^{۱} V(x)\, P_۲(x)\, dx = \frac{۵}{۴a^۲}\int_{-۱}^{۱} V(x)(x^۲ - ۱)\, dx$$

$$= \frac{۵}{۴a^۲}\left\{ \int_{-۱}^{۰} V_۲(x^۲ - ۱)\, dx + \int_{۰}^{۱} V_۱(x^۲ - ۱)\, dx \right\} = ۰$$

به همین ترتیب تمام ضرائب زوج صفر می‌شوند و

$$A_۵ = \frac{۱۱(V_۱ - V_۲)}{۳۲ a^۵} \quad , \quad A_۳ = \frac{-۷(V_۱ - V_۲)}{۱۶ a^۳}$$

برای بیرون کره نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم. پتانسیل را به صورت معادلهٔ (۱) می‌نویسیم. این بار چون در فواصل بسیار دور پتانسیل باید صفر باشد نتیجه می‌گیریم $A_n = ۰$. برای یافتن ضرائب B_n به شیوهٔ بالا عمل می‌کنیم و معادلهٔ زیر را متناظر با معادلهٔ (۲) به دست می‌آوریم

$$B_n a^{-n-۱} = (n + \tfrac{۱}{۲})\int_{-۱}^{۱} V(x)\, P_n(x)\, dx \qquad (۳)$$

باز تمام ضرائب زوج صفر می‌شوند و

$$B_۱ = \frac{۳a^۲(V_۱ - V_۲)}{۴} \quad , \quad B_۰ = \frac{a(V_۱ + V_۲)}{۲}$$

$$B_۵ = \frac{۱۱\, a^۶(V_۱ - V_۲)}{۳۲} \quad , \quad B_۳ = \frac{-۷a^۴(V_۱ - V_۲)}{۱۶}$$