۴

ظرفیت، انرژی و نیرو

۴-۱ خازن و ظرفیت

دو جسم هادی در نظر بگیرید که مطابق شکل ۴-۱ روی یکی بار $Q+$ و روی دیگری بار $Q-$ قرار داشته باشد. چون پتانسیل تمام نقاط یک هادی یکسان است می‌توان اختلاف پتانسیل بین دو هادی را بدون ابهام تعریف کرد

$$V = V^{+} - V^{-} = -\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{۱-۴}$$

انتگرال از نقطه‌ای روی هادی دارای بار منفی تا نقطه‌ای روی هادی دارای بار مثبت محاسبه می‌شود. ترکیب فوق **خازن** نام دارد. **ظرفیت** این خازن به صورت زیر تعریف می‌شود

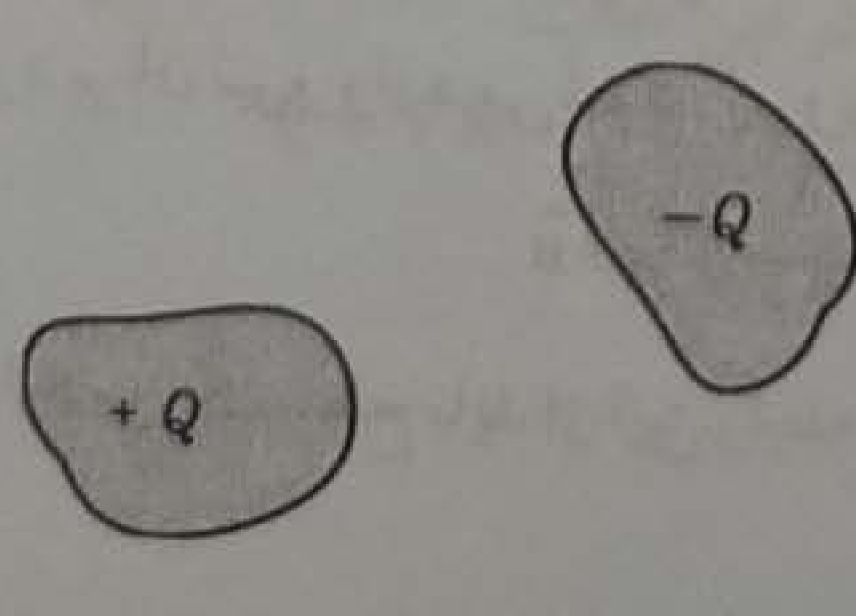
$$C = \frac{Q}{V} \tag{۲-۴}$$

انرژی ذخیره شده در خازن برابرست با

$$W = \frac{۱}{۲} C V^{۲} = \frac{۱}{۲} \frac{Q^{۲}}{C} \tag{۳-۴}$$

۴-۲ انرژی بارهای نقطه‌ای

اگر N بار نقطه‌ای در ناحیه‌ای از فضا قرار داشته باشند، انرژی مربوط به این توزیع بار عبارت است از



شکل ۴-۱ دو جسم هادی تشکیل دهندهٔ خازن

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \qquad (4-4)$$

که در آن V_i پتانسیل محل قرار گرفتن بار، ناشی از بقیهٔ بارهاست.

۴-۳ انرژی بارهای پیوسته

انرژی بارهای با توزیع پیوسته به صورت زیر به دست می‌آید

$$W = \frac{1}{2}\int_C \lambda V \, dl \quad \text{(بار خطی)} \qquad (5-4)$$

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma V \, ds \quad \text{(بار سطحی)} \qquad (6-4)$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho V \, dv \quad \text{(بار حجمی)} \qquad (7-4)$$

۴-۴ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

اگر در ناحیه‌ای از فضا میدان الکتریکی وجود داشته باشد، چگالی انرژی ذخیره شده در آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$w_E = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \qquad (8-4)$$

برای یافتن کل انرژی ذخیره شده در یک ناحیه باید از چگالی انرژی در آن ناحیه انتگرال گرفت.

در ناحیه‌ای که عایق خطی با گذردهی ε وجود دارد $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$، و چگالی انرژی را می‌توان به صورت زیر یافت

$$w_E = \frac{1}{2}\varepsilon\,|\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2\varepsilon}|\mathbf{D}|^2 \qquad (9-4)$$

۴-۵ توان تلف شده

اگر در ناحیه‌ای از فضا جریان وجود داشته باشد، در آن ناحیه توان تلف می‌شود. در چنین ناحیه‌ای باید یک هادی غیر کامل با رسانایی ویژه σ وجود داشته باشد. چگالی توان تلف شده در این ناحیه از **قانون اهم** به دست می‌آید

$$p = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \qquad (10-4)$$

۴-۶ نیروی وارد بر هادی واقع در میدان الکتریکی

وقتی یک جسم هادی در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد، روی آن بار القا می‌شود. چگالی بار سطحی القا شده عبارت است از

$$\sigma = \varepsilon\,|\mathbf{E}|$$

زیرا میدان الکتریکی بر سطح هادی عمود است و مولفهٔ عمودی میدان به حساب می‌آید. چون این بار در یک میدان الکتریکی قرار دارد بر آن نیرو وارد می‌شود. نیروی وارد بر عنصر سطح ds عبارت است از

$$d\,\mathbf{F} = \frac{1}{2\varepsilon}\sigma^2\,ds\,\hat{\mathbf{n}} \qquad (11-4)$$

برای یافتن کل نیروی وارد بر یک سطح باید از این رابطه بر روی سطح انتگرال گرفت:

$$\mathbf{F}=\frac{1}{2\varepsilon}\int_S \sigma^2\, ds\,\hat{\mathbf{n}} \quad \mathrm{N/m^2} \qquad (۴-۱۲)$$

۴-۷ نیروی وارد بر عایق واقع در میدان الکتریکی

وقتی عایقی در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد، داخل آن و بر روی سطح آن بارهای مقیدی القا می‌شوند. این بارها در واقع دوقطبی‌های الکتریکی تشکیل می‌دهند، و اگر میدان یکنواخت نباشد بر آنها نیرو وارد می‌شود. نیروی کل وارد بر یک عایق عبارت است از

$$\mathbf{F}=\int_V (\mathbf{P}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}\,dv \qquad (۴-۱۳)$$

برای عایقهای خطی می‌توان رابطهٔ بالا را به شکل زیر ساده کرد

$$\mathbf{F}=\frac{1}{2}\chi_e\varepsilon\int_V \nabla(|\mathbf{E}|^2)\,dv \qquad (۴-۱۴)$$

۴-۸ روش کار مجازی برای یافتن نیرو

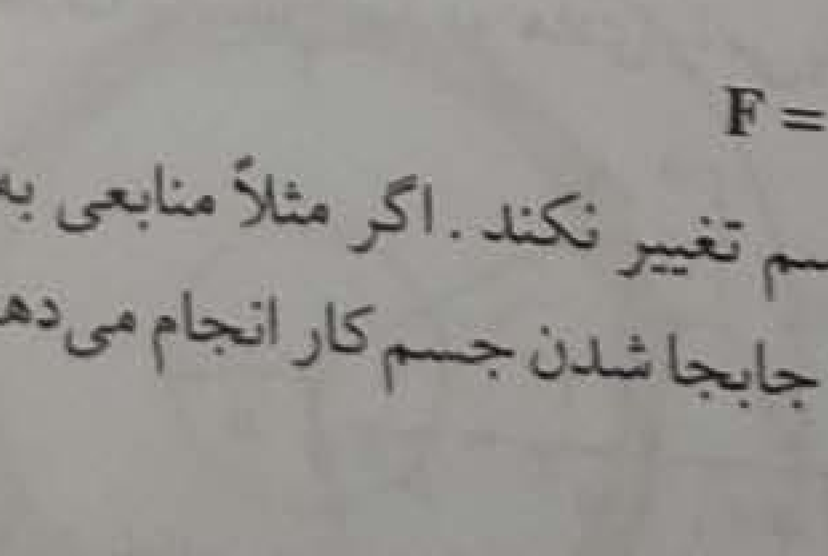
یکی از روشهای یافتن نیرو، در زمینه‌های مختلف فیزیک، روش **کار مجازی** است. در این روش فرض می‌شود که جسم تحت اثر نیرو به اندازهٔ کوچک Δx جابجا می‌شود، سپس تغییر انرژی ΔW ناشی از این جابجایی حساب می‌شود. نیرو برابر است با

$$|\mathbf{F}|_x=\frac{\Delta W}{\Delta x}=\frac{\partial W}{\partial x}$$

این نیرو در جهت $x-$ است. در جهتهای دیگر نیز داریم

$$|\mathbf{F}|_y=\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$|\mathbf{F}|_z=\frac{\partial W}{\partial z}$$



شکل ۴-۲ جابجایی فرضی جسم واقع در میدان الکتریکی.

پس

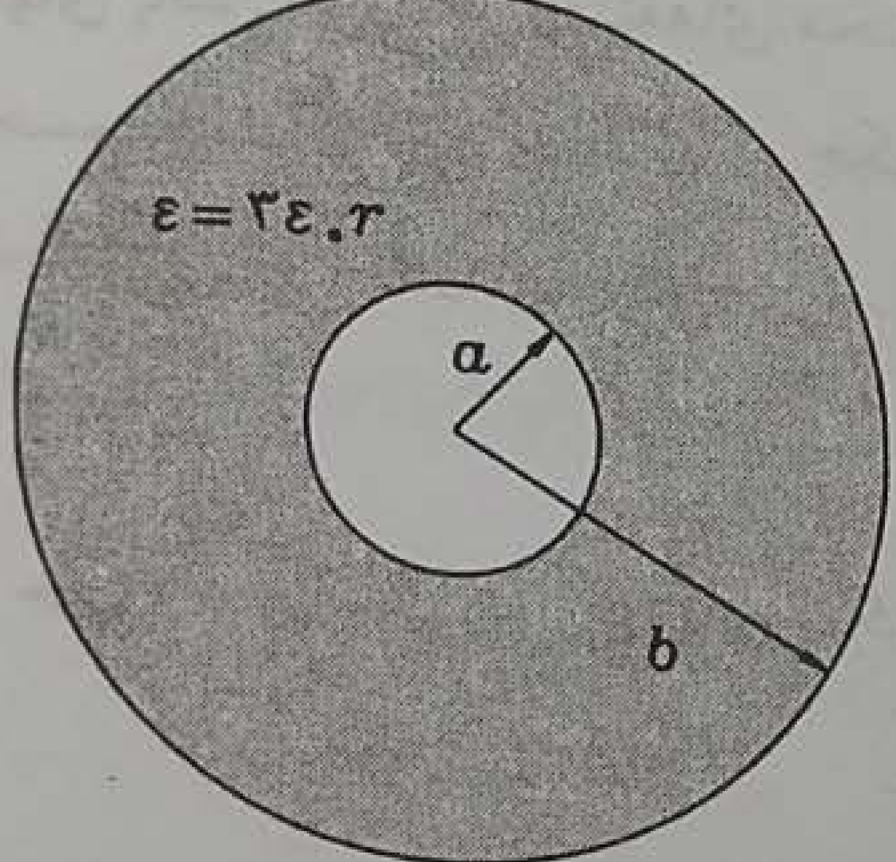
$$\mathbf{F}=-\nabla W \qquad \text{(بار ثابت)} \qquad (۴-۱۵)$$

این رابطه به شرطی درست است که طی جابجایی بار واقع بر جسم تغییر نکند. اگر مثلاً منابعی به اجسام وصل باشند (مانند خازنی که به باتری متصل است) آن منابع نیز با جابجا شدن جسم کار انجام می‌دهند و بار روی اجسام تغییر می‌کند. می‌توان نشان داد که در این حالت

$$\mathbf{F}=\nabla W \qquad \text{(ولتاژ ثابت)} \qquad (۴-۱۶)$$

حل مسئله روی یک جوشن بار $+Q$ و روی جوشن دیگر
در یافتن ظرفیت خازن می‌توان به دو شیوه عمل کرد: (الف)
بار $-Q$ قرار داد و اختلاف پتانسیل بین دو جوشن را یافت؛(ب) یک جوشن را در پتانسیل ۰ و دیگری را در
پتانسیل V قرار داد و بار روی جوشنها را به دست آورد.
فعلاً روش دوم را تنها در موارد معدودی می‌توانیم به کار بریم، زیرا استفاده از آن مستلزم حل معادلهٔ
لاپلاس است، که موضوع فصل ۵ را تشکیل می‌دهد. در مواردی که عایق بین جوشنها ناهمگن است، حتماً
باید روش اول را به کار برد، زیرا در عایق ناهمگن معادلهٔ لاپلاس صادق نیست و نمی‌توان با حل آن میدان
بین هادیها را به دست آورد.

مثال ۱
عایق بین دو پوستهٔ کروی هادی به شعاعهای a و b ناهمگن است و گذردهی آن به صورت $\varepsilon=3\varepsilon_0 r$ تغییر
می‌کند. ظرفیت خازن حاصل را بیابید.



شکل ۴-۳ خازن کروی با عایق غیر یکنواخت.

حل
بار $+Q$ را روی هادی داخلی قرار می‌دهیم و بار $-Q$ را روی هادی بیرونی. با روشهایی که در فصل پیش
آموختیم میدان داخل خازن را می‌یابیم. با توجه به تقارن مسئله و به کمک قانون گوس به دست می‌آوریم

$$\mathbf{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

پس

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}=\frac{q}{12\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\mathbf{r}}$$

حال اختلاف پتانسیل بین دو هادی را می‌یابیم

$$V_a-V_b=-\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{Q}{12\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{dr}{r^3}$$

$$=\frac{Q}{24\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\bigg|_a^b=\frac{Q}{24\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

پس ظرفیت خازن عبارت است از

$$C=\frac{Q}{V}=24\pi\varepsilon_0\frac{b^2a^2}{b^2-a^2}$$

شکل ۴-۴ ظرفیت دو هادی موازی.

یک نکتهٔ دیگر که در حل مسائل مربوط به یافتن ظرفیت می‌تواند کارگشا باشد این است که گذاشتن یک ورق هادی نازک روی یک سطح همپتانسیل، یا به عبارت دیگر عمود بر خطوط میدان الکتریکی، میدان را تغییر نمی‌دهد. به این ترتیب می‌توان یک خازن را به چند خازن سری یا موازی تبدیل کرده، ظرفیت کل را با ترکیب ظرفیتهای خازنهای حاصل به دست آورد.

اگر دو سطح هادی به هم خیلی نزدیک باشند، خطوط میدان پاره خطهای کوچکی عمود بر دو سطح است. به سادگی می‌توان نشان داد که ظرفیت چنین خازنی عبارت است از

$$C = \frac{\varepsilon A}{l}$$

که در آن A مساحت هادیها، l فاصلهٔ بین آنها، و ε گذردهی محیط بین آنهاست.

مثال ۲

ظرفیت یک خازن کروی متشکل از دو هادی هم مرکز به شعاعهای a و b ($b > a$) را بیابید.

حل

در چنین خازنی سطوح همپتانسیل کره‌هایی هم مرکز با دو کرهٔ هادی هستند. روی این سطوح ورقهای نازکی از هادی، به فاصلهٔ dr از یکدیگر، قرار می‌دهیم. به این ترتیب تعداد زیادی خازن سری به دست می‌آوریم. ظرفیت هر یک از این خازنها عبارت است از

$$C_{dif} = \frac{4\pi r^2 \varepsilon_0}{dr}$$

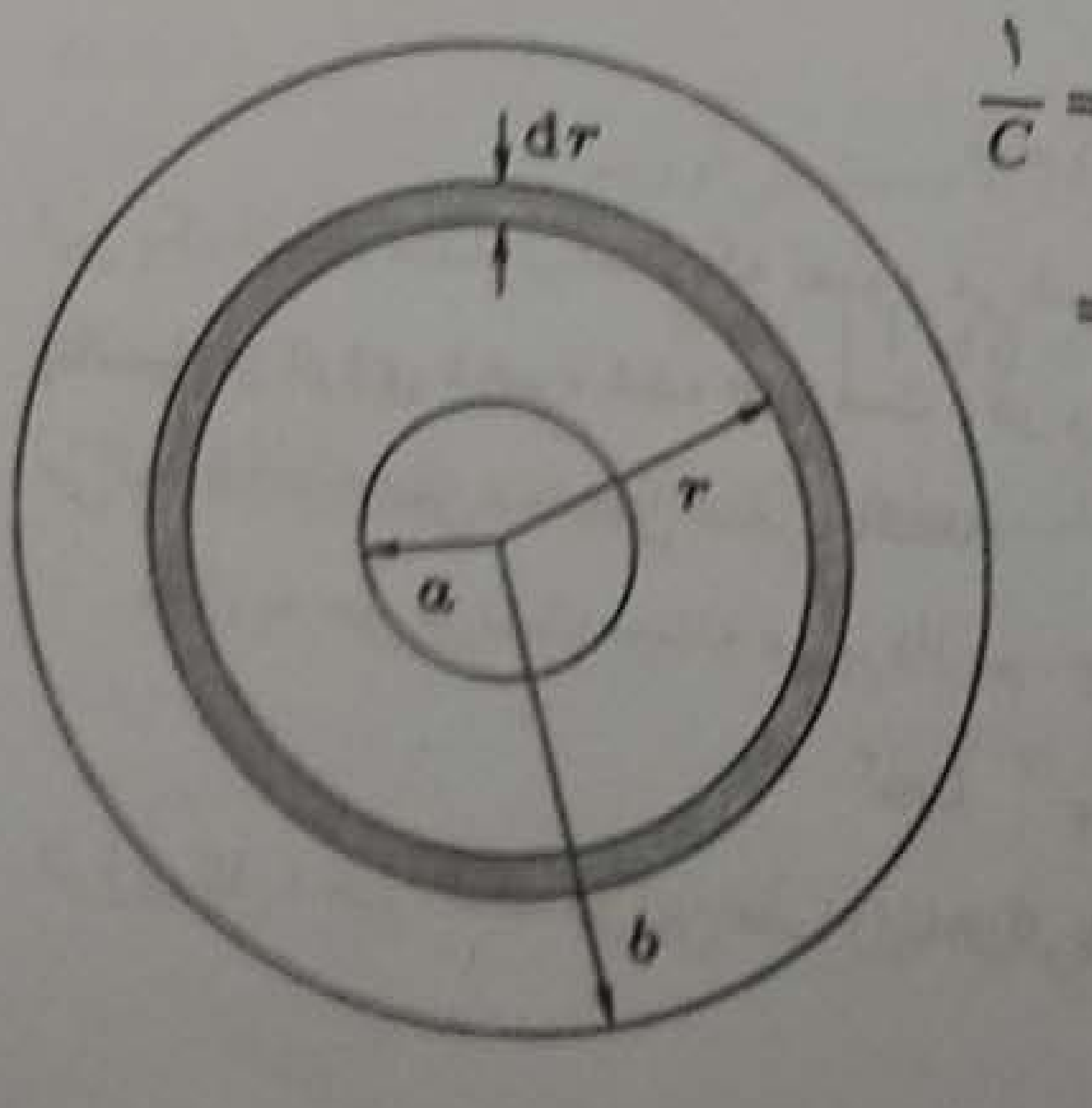
برای یافتن ظرفیت ترکیب سری این خازنها از رابطهٔ ترکیب سری استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

یعنی باید ظرفیتها را معکوس کرده، آنها را با هم جمع کنیم. به این ترتیب عکس ظرفیت کل به دست می‌آید.

$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_a^b$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{b-a}{4\pi\varepsilon_0 ab}$$



شکل ۴-۵ یافتن ظرفیت خازن کروی با تجزیه به خازنهای جزیی.

و

$$C = \frac{۴\pi\varepsilon_{\circ} a b}{b-a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=\circ \mid \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \mid \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

در حل مسائل مربوط به انرژی باید دو مفهوم را کاملاً از هم تمییز دهیم ، انرژی کل یک توزیع بار و انرژی ذخیره شده در بخشی از فضا . رابطهٔ

$$W = \frac{۱}{۲}\int_V \rho\, V\, dv$$

و روابط متناظر برای توزیع بارهای خطی و سطحی ، تنها و تنها هنگامی معنی دارند که انتگرال روی تمام فضا گرفته شود ، و نتیجهٔ انتگرال کل انرژی مربوط به توزیع بار را به دست می‌دهد . نمی‌توانیم با محاسبهٔ این انتگرال روی بخشی از فضا انرژی ذخیره شده در آن بخش فضا را به دست بیاوریم ، و در اصل حاصل چنین انتگرالگیری هیچ معنی فیزیکی خاصی ندارد . انرژی ذخیره شده در بخشهای مختلف یک فضا را باید از رابطهٔ زیر به دست آورد

$$W = \frac{۱}{۲}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dv$$

که در آن V حجم فضای مورد نظر است .

مثال ۳

در محیطی با گذردهی $\varepsilon_{\circ}$ تابع پتانسیل به صورت زیر داده شده است

$$V = \frac{۴}{\varepsilon_{\circ}}\ln\rho$$

انرژی ذخیره شده در فضای $a<\rho<b$ ، $\circ<z<h$ ، $\circ \le \phi < ۲\pi$ را بیابید.

حل

اگر به اشتباه بخواهیم از معادلهٔ (۴–۷) استفاده کنیم ، خیلی سریع جواب اشتباه به دست می‌آوریم . برای این کار ابتدا باید چگالی بار را به دست آوریم

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{۴}{\varepsilon_{\circ}}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\rho = \nabla\cdot\mathbf{D} = \nabla\cdot(\varepsilon_{\circ}\mathbf{E}) = \circ$$

این یک اشتباه متداول است که تصور می‌شود **در محیطی که بار وجود ندارد شدت میدان الکتریکی ، میدان پتانسیل و انرژی ذخیره شده صفرست** . در واقع هم شدت میدان الکتریکی ، هم پتانسیل ، و هم انرژی می‌توانند در چنین محیطی صفر نباشند .

حال به حل درست مسئله می‌پردازیم . چگالی انرژی ذخیره شده در این فضا عبارت است از

$$w_E = \frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}|\mathbf{E}|^{۲} = \frac{۸}{\varepsilon_{\circ}\rho^{۲}} \quad \mathrm{J/m^{۳}}$$

انرژی کل ذخیره شده در این فضا را با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$\text{کل انرژی ذخیره شده} = \int_V w_E\, dv = \int_V \frac{\lambda}{\varepsilon_{\circ}\rho^{2}}(\rho\, d\rho\, d\phi\, dz)$$

$$= \frac{\lambda}{\varepsilon_{\circ}}\int_a^{\rho}\frac{d\rho}{\rho}\int_{\circ}^{2\pi}d\phi\int_{\circ}^{h}dz = \frac{16\pi h}{\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{a}\ \ \mathrm{J}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

مثال ۴

نیروی بین دو بار نقطه‌ای را به روش کار مجازی به دست آورید.

حل

دو بار را روی محور x فرض می‌کنیم. انرژی این دو بار عبارت است از

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_{\circ} x}$$

اگر بار q_2 به اندازهٔ dx به بار q_1 نزدیکتر شود انرژی به مقدار زیر می‌رسد

$$W + \Delta W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_{\circ}(x-dx)}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\Delta W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-dx}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{-dx}{x(x-dx)}$$

نیروی وارد بر بار q_2 عبارت است از

$$F = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta W}{dx} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_{\circ}x^{2}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

مثال ۵

یک قطعه عایق به درون خازنی کشیده می‌شود. خازن به یک باتری با ولتاژ ثابت V متصل شده است. رابطهٔ $Q-V$ عبارت است از

$$Q = \frac{V^{3}}{(k_1 + k_2 x)}$$

که در آن x فاصلهٔ نقطه‌ای از عایق تا نقطه‌ای از خازن است. نیروی وارد بر عایق را بیابید.

حل

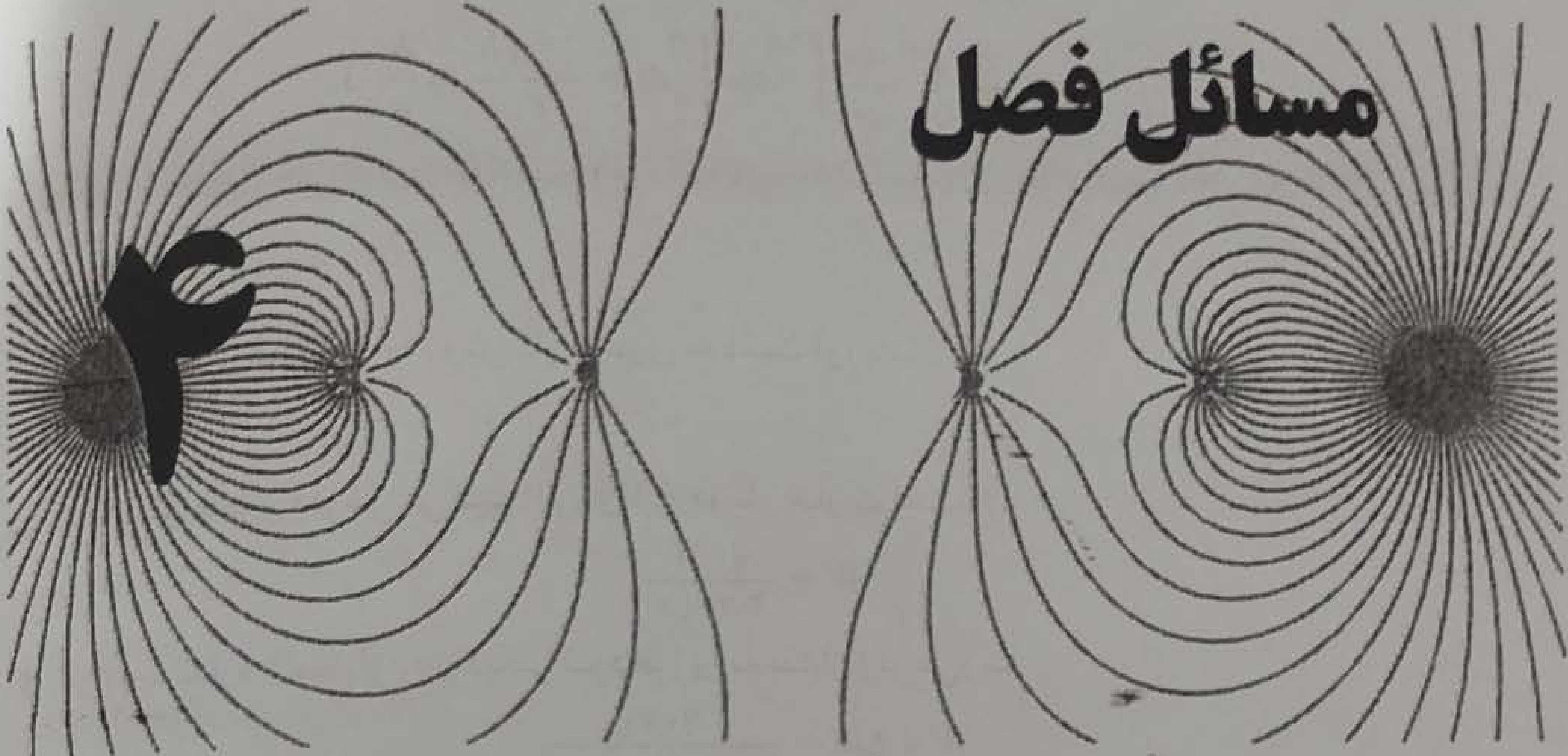
ابتدا انرژی ذخیره شده در خازن را بر حسب فاصلهٔ عایق تا خازن به دست می‌آوریم

$$W = \int V\, dq = \int_{\circ}^{V}\frac{2V^{3}}{(k_1+k_2x)} = \frac{V^{4}}{2(k_1+k_2x)}$$

زیرا $dq = [\,2V^{2}/(k_1+k_2x)\,]dV$. چون ولتاژ خازن ثابت است باید برای یافتن نیرو از معادلهٔ (۴-۱۶) استفاده کنیم

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{-k_2 V^{4}}{2(k_1+k_2x)^{2}}$$

منفی بودن عبارت بالا نشان می‌دهد که این نیرو در جهت کاهش x عمل می‌کند.



مسائل فصل ۴

۴-۱ میدان الکترواستاتیک $V = 1000\sqrt{r}$ داده شده است. انرژی ذخیره شده در کره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدا مختصات را پیدا کنید.

۴-۲ در مسئله ۴-۱ چگالی بار را یافته، انتگرال $\frac{1}{2}\rho V dv$ را در کره $r \le 1$ بیابید. چرا جواب با جواب مسئله قبل تفاوت دارد؟

۴-۳ میدان پتانسیل $V = 50/r$ در ناحیهٔ $a \le r \le b$ داده شده است. این ناحیه فضای آزاد است.

الف نشان دهید که در ناحیهٔ $a \le r \le b$، $\rho = 0$.

ب انرژی ذخیره شده در ناحیهٔ $a \le r \le b$ را به دست آورید.

۴-۴ دو قطبی الکتریکی $\mathbf{P} = P\,\hat{\mathbf{z}}$ در مبدأ مختصات واقع شده است. انرژی واقع در فضای بیرون از کره‌ای به شعاع R و به‌مرکز مبدا را پیدا کنید.

۴-۵ باری به طور یکنواخت در $a \le r \le 2a$، با چگالی ρ_0، توزیع شده است. انرژی ذخیره‌شده در این توزیع بار چقدرست؟

۴-۶ باری با چگالی زیر داریم

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{a} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

می‌خواهیم این بار را به طور یکنواخت در $r < a$ توزیع کنیم. برای این منظور چقدر انرژی لازم است؟

۴-۷ بار Q روی یک کرهٔ هادی به شعاع a قرار دارد. انرژی این سیستم را با استفاده از روابط $\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,dv$ و $\frac{1}{2}\int \sigma V\,ds$ بیابید.

۴-۸ بار Q به طور یکنواخت در داخل کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. انرژی این توزیع بار را به روشهای زیر به دست آورید.

الف با استفاده از معادلهٔ $\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,dv$ ب با استفاده از معادلهٔ $\frac{1}{2}\int \rho V\,dv$

۴-۹ یک کره از جنسی با گذردهی ε_0 و رسانایی ویژه σ در اختیار داریم. در لحظهٔ $t=0$ بار Q را به طور یکنواخت در حجم این کره توزیع می‌کنیم. می‌دانیم که سرانجام تمام این بار بر روی سطح کره ظاهر می‌شود.

الف انرژی اولیه و انرژی نهایی سیستم فوق را به دست آورید.

ب انرژی ناپدید شده کجا رفته است؟ نشان دهید که اصل بقای انرژی نقص نمی‌شود.

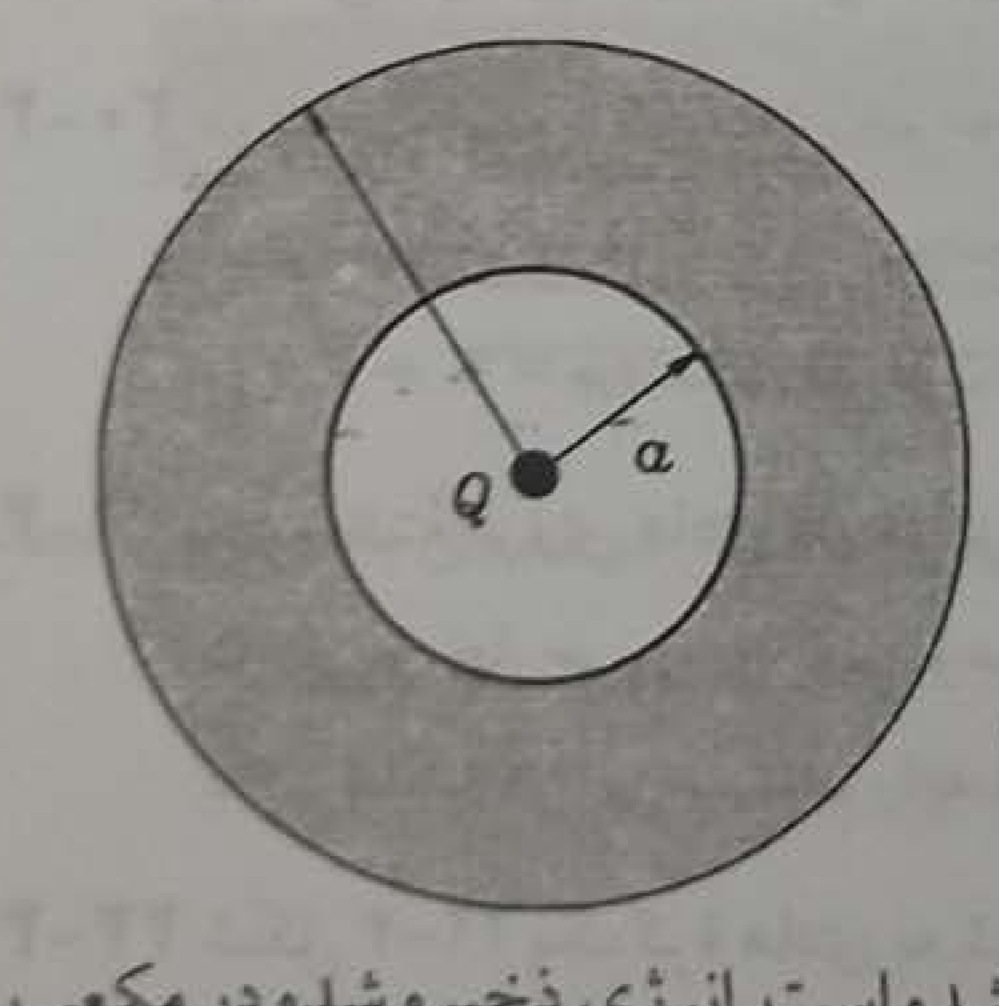
۴-۱۰ بر طبق فرضیه نسبیت هر ذرهٔ ساکنی دارای انرژی $m_0 c^2$ است، که در آن m_0 جرم ذرهٔ در حال سکون و c سرعت نور است. فرض کنید در مورد الکترون این انرژی، انرژی الکترواستاتیک آن باشد.

الف اگر بار e به طور یکنواخت در حجم الکترون توزیع شده باشد، شعاع الکترون چقدرست؟

ب اگر بار e به طور یکنواخت روی سطح الکترون توزیع شده باشد، شعاع الکترون چقدرست؟

$m_0 = 9/11\times 10^{-31}$ kg $\qquad e = -1/6\times 10^{-19}$ C

۴-۱۱ یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b از عایقی با گذردهی ε ساخته شده است. بار نقطه‌ای Q در مرکز این پوسته قرار دارد. انرژی ذخیره شده در پوسته را به دست آورید.



شکل ۴-۱۱

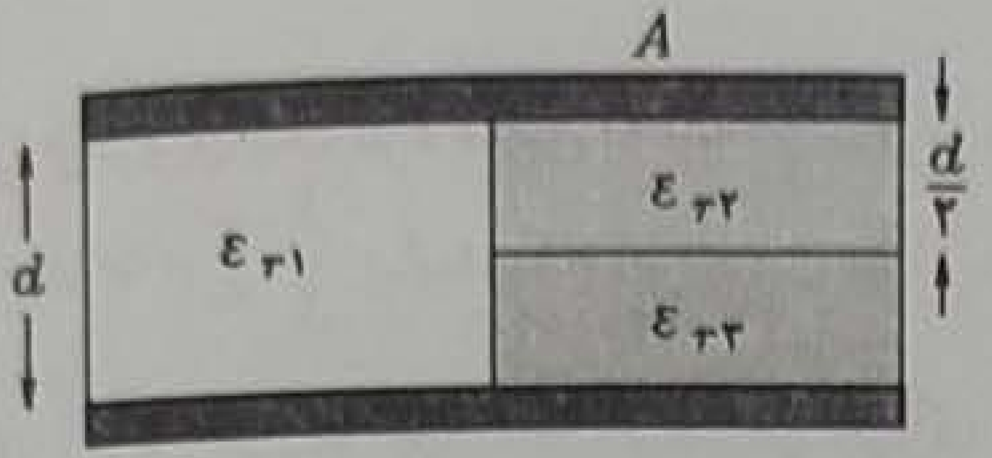
۴-۱۲ تابع پتانسیل در فضای آزاد به صورت $V = 3x^2 + 4y^2$ داده شده است. انرژی ذخیره شده در مکعب $0 \le x, y, z \le 1$ را به دست آورید.

۴-۱۳ بار Q بر روی یک هادی کروی به شعاع R_1 قرار دارد. اطراف این هادی را تا شعاع R_2 با عایقی می‌پوشانیم. اگر گذردهی عایق ε باشد چقدر انرژی صرف پوشاندن کرهٔ هادی شده است؟

۴-۱۴ ظرفیت یک کرهٔ هادی به شعاع R را به صورتهای زیر به دست آورید

الف با در نظر گرفتن یک پوستهٔ کروی هم مرکز به شعاع b و میل دادن b به سمت بی نهایت.

ب با استفاده از تعریف ظرفیت. ج با استفاده از رابطهٔ انرژی خازن.



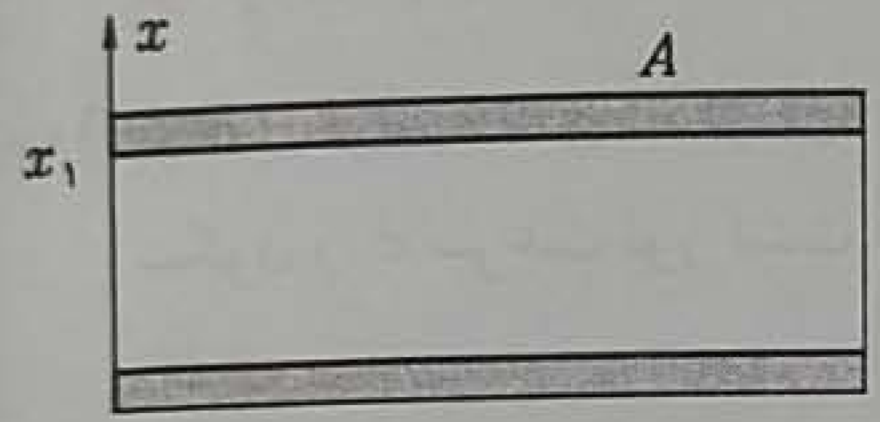
شکل ۴-۱۶

۴-۱۵ ظرفیت سر خود را حساب کنید. سر خود را کره‌ای به شعاع ۱۰ cm فرض کنید. شعاع کرهٔ زمین ۶۴۰۰ km است. ظرفیت کرهٔ زمین را حساب کنید.

۴-۱۶ ظرفیت خازن شکل ۴-۱۶ را بیابید.

۴-۱۷ دو سطح هادی با مساحت A به فاصله d از هم قرار گرفته‌اند. در بین این دو صفحه عایق غیر همگنی وجود دارد که گذر دهی آن به طور خطی از ε_1 در کنار یک صفحه به ε_2 در کنار صفحهٔ دیگر می‌رسد. با صرفنظر کردن از میدانهای سرریز ظرفیت این خازن را به دست آورید.

۴-۱۸ دو سطح هادی به موازات هم قرار دارند و مساحت صفحات A است. گذردهی عایق ناهمگن بین هادیها به صورت $\varepsilon = \varepsilon_0 (a + bx^2)$ تغییر می‌کند. ظرفیت خازن حاصل را بیابید.



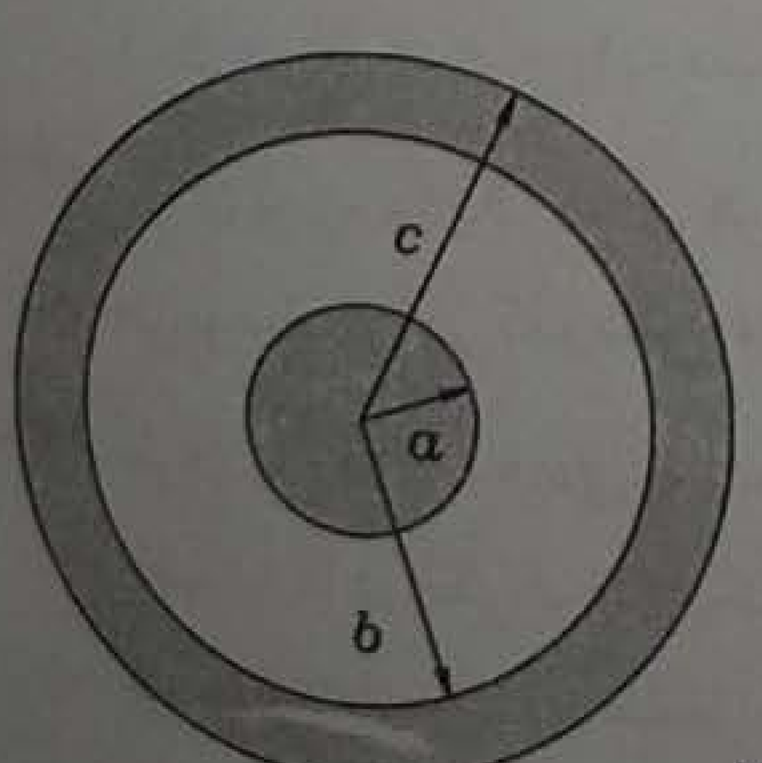
شکل ۴-۱۸

۴-۱۹ تغییرات گذر دهی عایق مسئله ۴-۱۸ را $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + x/x_1)$ فرض کرده، ظرفیت خازن حاصل و چگالی بارهای مقید داخل عایق رابرحسب بار روی صفحات خازن بیابید.

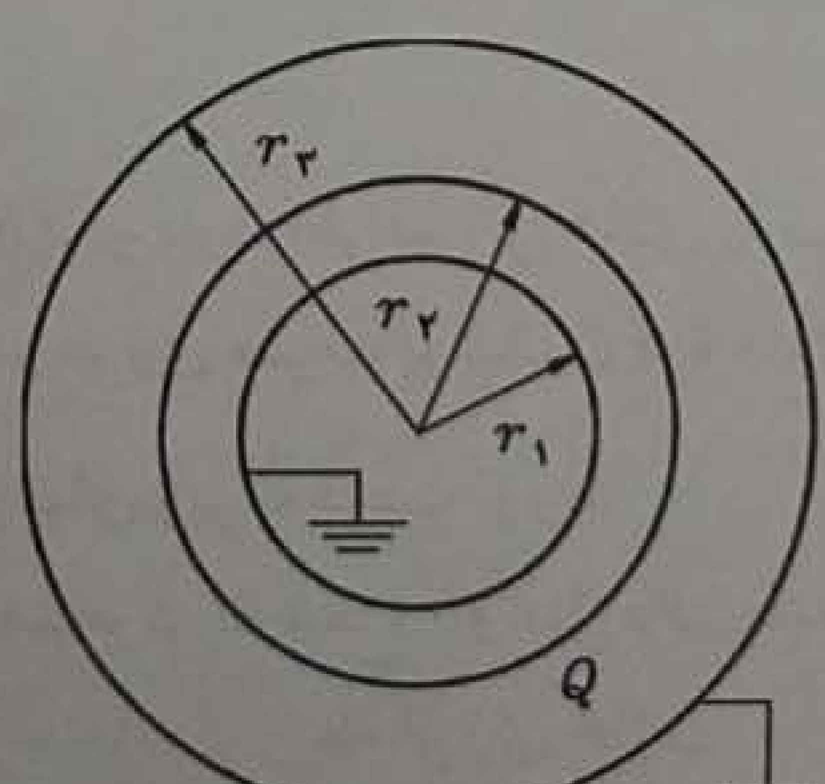
۴-۲۰ دو پوستهٔ استوانه‌ای هادی هم محور جوشنهای یک خازن را تشکیل می‌دهند. طول پوسته‌ها l، شعاع استوانه داخلی a و شعاع استوانهٔ خارجی b است. گذردهی نسبی عایق بین این دو استوانه $\varepsilon_R = 2 + 4/\rho$ است. ظرفیت خازن حاصل را به دست آورید.

۴-۲۱ سه پوستهٔ کروی هادی هم مرکز به شعاعهای r_1، و r_2 و r_3 در اختیار داریم: $(r_3 > r_2 > r_1)$ پوسته داخلی و خارجی را به زمین وصل می‌کنیم و بر روی پوستهٔ میانی بار Q را قرار می‌دهیم. انرژی ذخیرهٔ شده در این سیستم را به دست آورید.

۴-۲۲ شکل ۴-۲۲ یک کرهٔ هادی به شعاع a و یک پوستهٔ کروی هادی هم مرکز با آن به شعاع داخلی b و



شکل ۴-۲۲



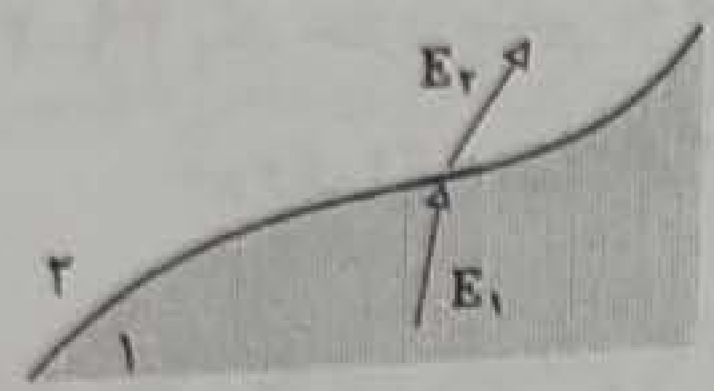
شکل ۴-۲۱

شعاع خارجی c را نشان می‌دهد (نواحی سایه زده شده هادی کامل هستند). بار خالص روی هادی داخلی Q_1 و بار خالص روی هادی خارجی Q_2 است. انرژی پتانسیل این آرایش را به دست آورید.

۲۳-۴ ثابت کنید نیروی وارد بر واحد سطح یک مرز عبارت است از

$$\frac{\mathbf{F}}{ds} = \frac{\sigma}{2} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$$

که در آن σ چگالی بار سطحی، $\mathbf{E}_1$ میدان واقع در محل مورد نظر در ناحیهٔ ۱ و $\mathbf{E}_2$ میدان واقع در محل مورد نظر در ناحیهٔ ۲ هستند.

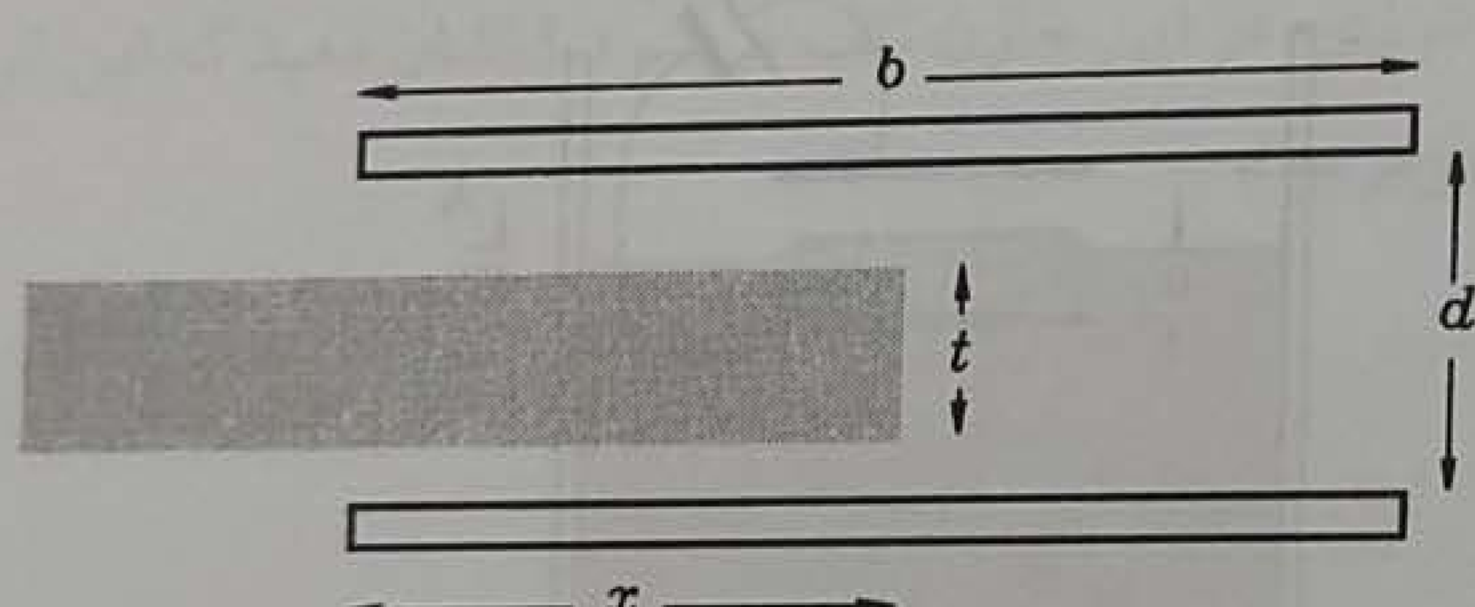


شکل ۴-۲۳

۲۴-۴ اگر روی سطح یک هادی باردار عایقی با گذردهی ε قرار داشته باشد، نیروی وارد بر واحد سطح هادی چقدر است؟

۲۵-۴ یک بار نقطه‌ای مثبت در نزدیکی سطح مایع دی الکتریکی قرار دارد. سطح مایع بالا می‌آید یا پایین می‌رود؟ اگر بار نقطه‌ای منفی باشد چطور؟

۲۶-۴ عایقی با گذردهی نسبی ε_r مطابق شکل ۴-۲۶ وارد یک خازن با صفحات موازی شده است. نیروی وارد بر عایق را در دو حالت V = ثابت و Q = ثابت بیابید. مساحت صفحات $A = l\,b$ است.

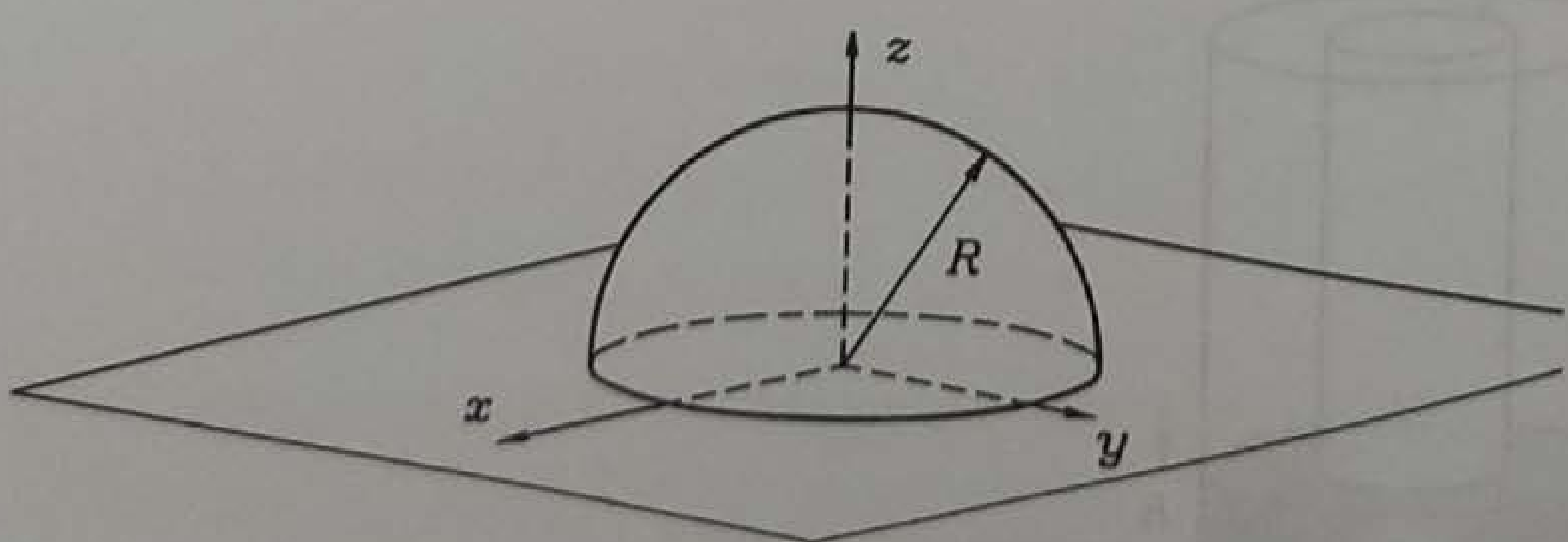


شکل ۴-۲۶

۲۷-۴ سطح نشان داده شده در شکل ۴-۲۷ هادی کامل است. میدان پتانسیل در فضای بالای این سطح عبارت است از

$$V = - r \cos\theta + R^3 \frac{\cos\theta}{r^2}$$

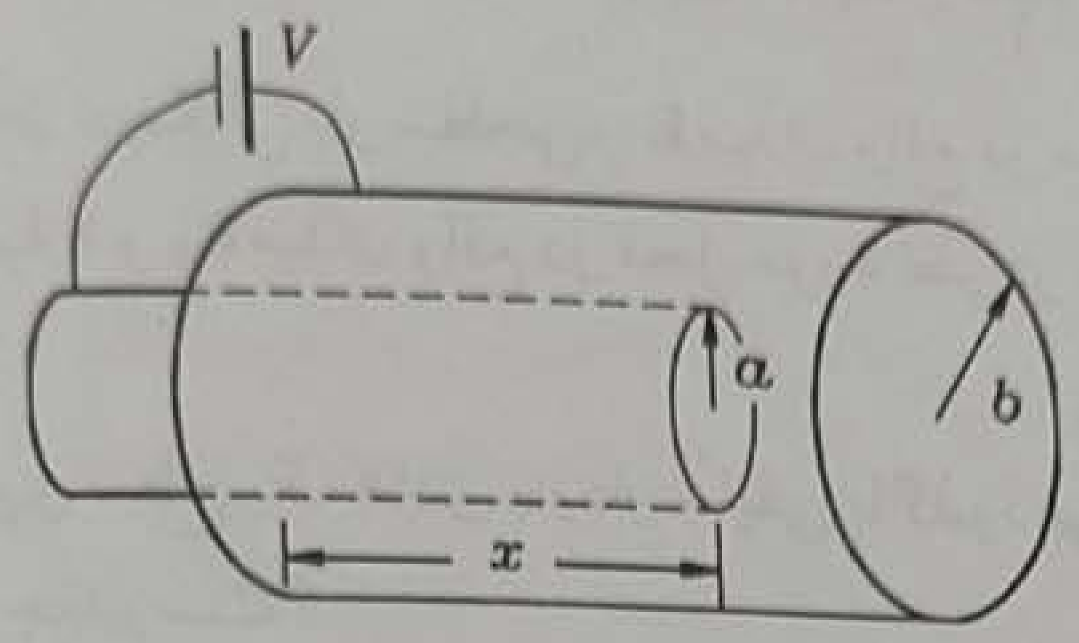
نیروی وارد بر برجستگی کروی شکل را به دست آورید.



شکل ۴-۲۷

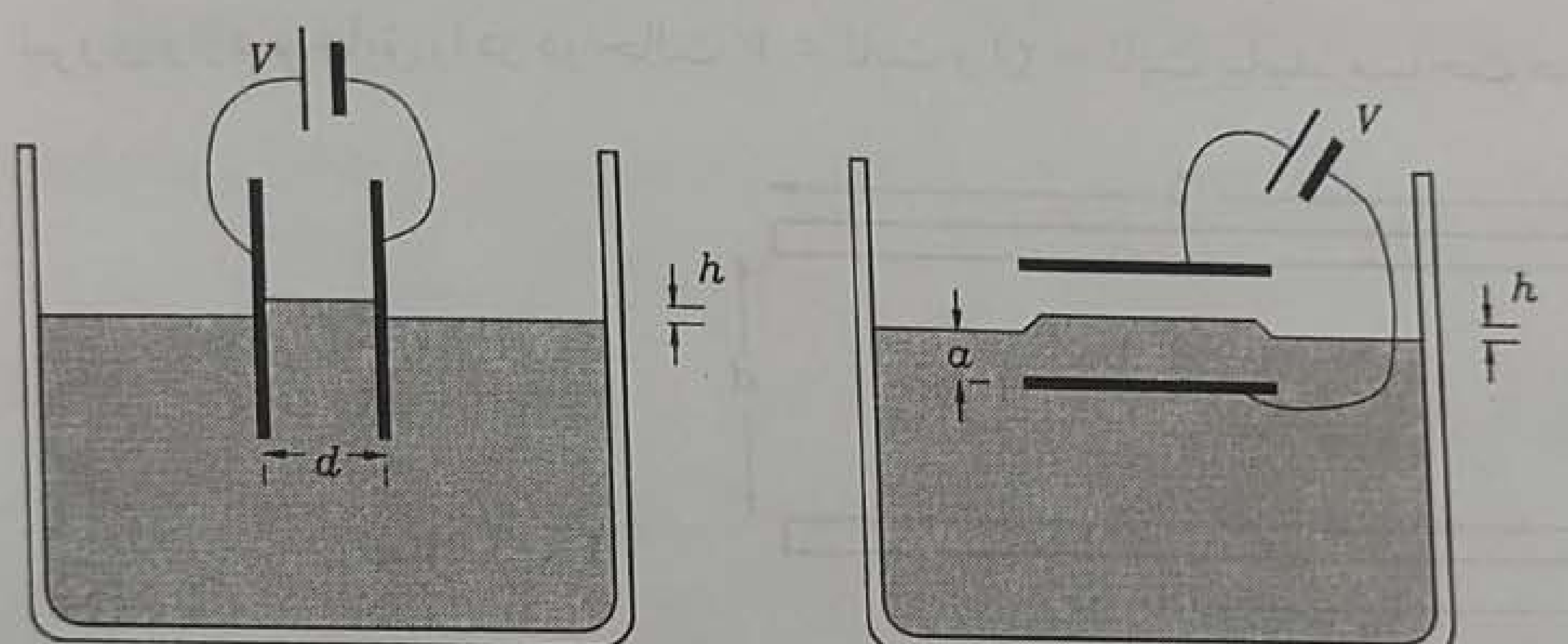
۴-۲۸ بار Q به طور یکنواخت روی یک کرهٔ هادی به شعاع R توزیع شده است. نیمکرهٔ بالایی و نیمکرهٔ پایینی چه نیرویی بر یکدیگر وارد می‌کنند؟ کره در فضای آزاد قرار دارد.

۴-۲۹ یک خازن متغیر به صورت شکل ۴-۲۹ از دو استوانهٔ هم محور ساخته شده است. جهت و مقدار نیروی وارد بر استوانهٔ داخلی را، هنگام اتصال اختلاف پتانسیل V به این خازن، پیدا کنید.



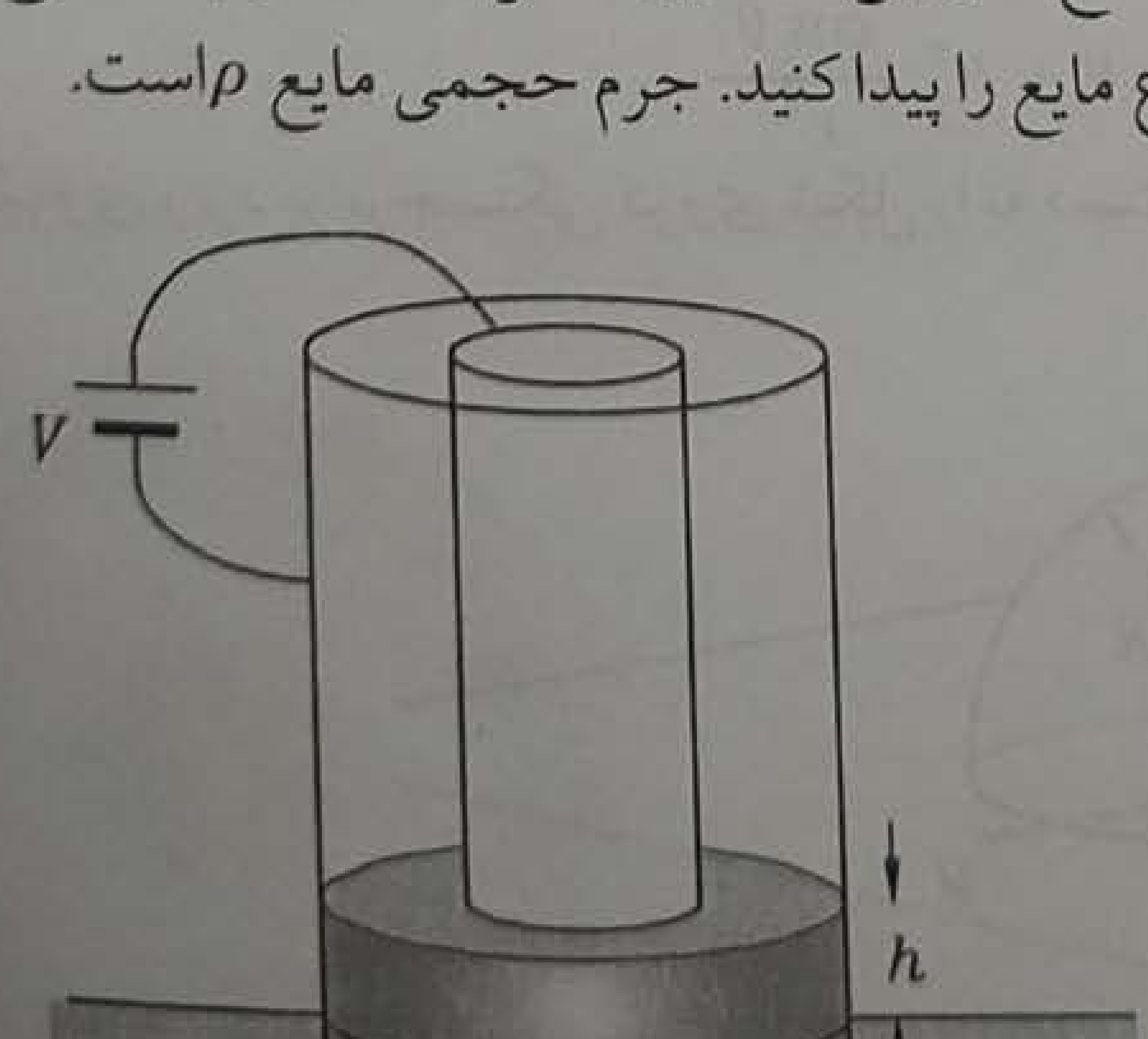
شکل ۴-۲۹

۴-۳۰ یک خازن با صفحات موازی مطابق شکلهای ۴-۳۰ الف و ب در مایع عایقی با گذردهی ε قرار داده شده است. در هر دو حالت افزایش ارتفاع مایع درون خازن را پیدا کنید. سطح صفحات خازن S، فاصله بین صفحات d و جرم حجمی مایع ρ است.



ب الف شکل ۴-۳۰

۴-۳۱ یک کابل هم محور، با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل ۴-۳۱ در یک مایع عایق با گذردهی ε قرار گرفته است. افزایش ارتفاع مایع را پیدا کنید. جرم حجمی مایع ρ است.



شکل ۴-۳۱

۳۲-۴ بار Q بر روی حباب صابونی به شعاع r_0 قرار می‌گیرد. در اثر نیروی دافعهٔ بارها شعاع حباب زیاد شده به r می‌رسد. اگر فشار هوا p باشد رابطهٔ بین Q، r، r_0 و p را بیابید.

۳۳-۴ یک خازن مسطح را پر می‌کنیم تا انرژی آن به $Q^2 / 2C$ برسد. سپس با گذاشتن میکا (با $\varepsilon_r = 6$) در داخل خازن ظرفیت آن را شش برابر می‌کنیم. بار تغییری نمی‌کند بنابراین انرژی ذخیره شده به $Q^2 / 12C$ می‌رسد. بقیهٔ انرژی چه شده است؟

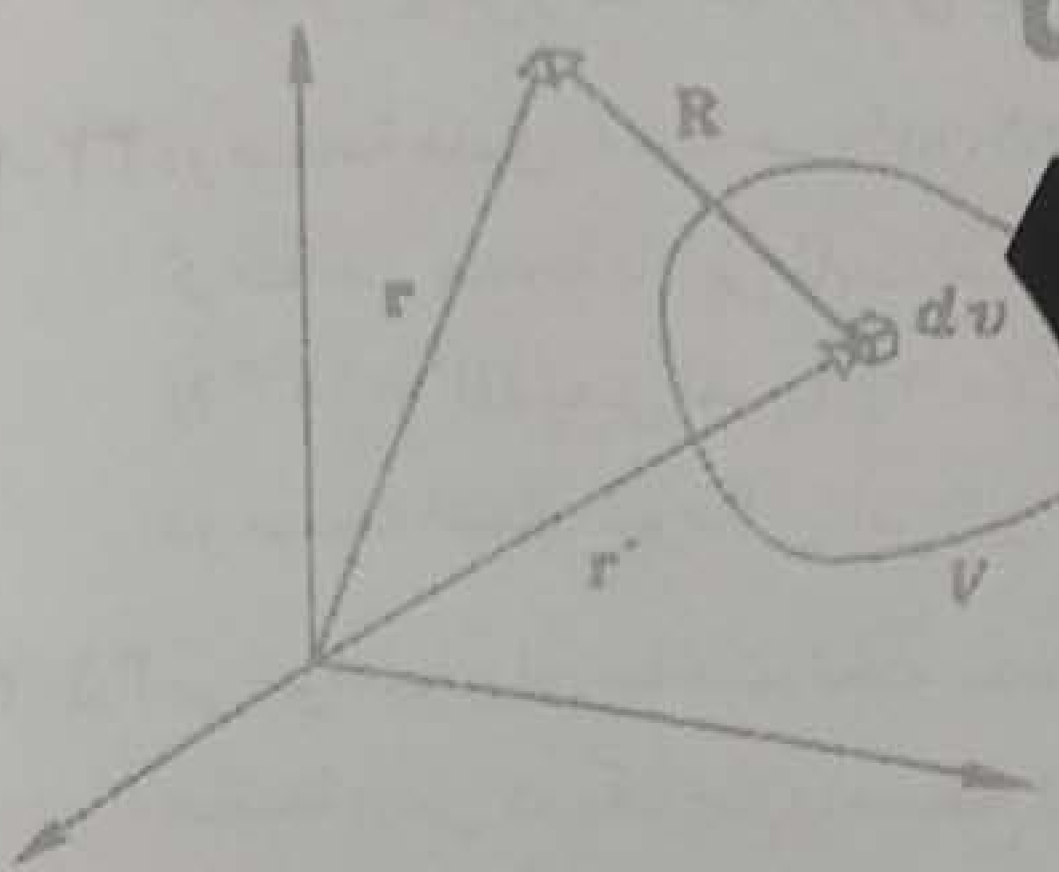
۳۴-۴ دو صفحهٔ هادی به مساحت $25\ \mathrm{cm}^2$ ، به موازات هم و به فاصلهٔ $1\ \mathrm{mm}$ از یکدیگر، به طور افقی قرار گرفته‌اند . صفحهٔ بالایی ثابت است و صفحهٔ پایینی زیر آن معلق می‌باشد . اگر وزن صفحهٔ معلق $W = 10^{-3}\ \mathrm{N}$ (یعنی تقریباً $0/1\ \mathrm{g}$) باشد ، برای جلوگیری از سقوط آن باید چه اختلاف پتانسیلی بین دو صفحه اعمال شود ؟ آیا این کار عملی است ؟

۳۵-۴ می‌خواهیم برای ساخت تخته سه‌لایی از پرس الکتروستاتیک استفاده کنیم . برای این کار بین دو صفحهٔ پرس که یک خازن مسطح تشکیل می‌دهند اختلاف پتانسیل لازم را ایجاد می‌کنیم . ضخامت اولیهٔ تخته $1\ \mathrm{cm}$ است و باید به آن فشار 10^6 پاسکال وارد شود . ولتاژ لازم را حساب کنید . گذردهی نسبی مواد تشکیل دهندهٔ تخته $\varepsilon_R = 5$ است .

۳۶-۴ روی صفحات خازن مسطحی بار Q قرار دارد . محیط بین دو جوشن عایق ناقصی با گذردهی ε و رسانایی ویژهٔ σ است . چه مقدار انرژی در این خازن تلف می‌شود ؟ نشان دهید که این انرژی با انرژی اولیهٔ ذخیره شده در خازن برابرست .

حل مسایل فصل

حل مسایل فصل



۴

۱-۴ میدان‌الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -۵۰۰\, r^{-\frac{۱}{۲}}\,\hat{\mathbf{r}}$$

چگالی انرژی و انرژی ذخیره شده در کره را به صورت زیر می‌یابیم

$$w = \frac{\varepsilon_\circ}{۲}|E|^{۲} = \frac{\varepsilon_\circ}{۲} \times ۲۵ \times ۱۰^{۴} r^{-۱} = \frac{۱۲۵۰۰۰}{r}\varepsilon_\circ$$

$$W = \int w r^{۲} \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = ۱۲۵۰۰۰\,\varepsilon_\circ \int_{۰}^{۱} r\, dr \int_{۰}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{۰}^{۲\pi} d\phi = ۶٫۹۵ \times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{J}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۴ $\rho = \varepsilon_\circ \nabla\cdot\mathbf{E}$، پس

$$\rho = \varepsilon_\circ \nabla\cdot\left(-۵۰۰\, r^{-\frac{۱}{۲}}\,\hat{\mathbf{r}}\right) = -۷۵۰\,\varepsilon_\circ\, r^{-۱/۵}$$

$$\int \frac{۱}{۲}\rho V\, dv = -\frac{۱}{۲}\int ۷۵ \times ۱۰^{۴}\,\varepsilon_\circ\, r^{-۱}\, dv = -۲۰٫۸۵ \times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{J}$$

$\frac{۱}{۲}\int \rho V dv$ کل انرژی مربوط به یک توزیع بار را می‌دهد، نه انرژی ذخیره شده در بخشی از فضا را، به بیانی دیگر انتگرال محاسبه شده هیچ معنی فیزیکی خاصی ندارد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳-۴ الف. چگالی بار با استفاده از معادله پواسون به دست می‌آید

$$\rho = -\varepsilon_\circ \nabla^{۲} V = -\varepsilon_\circ \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial V}{\partial r}\right) = ۰$$

ب. مواظب باشید از $\frac{1}{2}\int \rho V dv$ استفاده نکنید و گرنه جواب نادرست ۰ را به دست می‌آورید.

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{50}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\mathbf{E}|^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{2500}{r^4} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 5000\,\pi\varepsilon_0\int_a^b \frac{dr}{r^2} = 5000\,\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۴ میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

چگالی انرژی برابر است با

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{P^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^6}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

حال انرژی خواسته شده را می‌یابیم

$$W = \int w\, dv = \int w\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$$

$$= \frac{P^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^4}dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\left(4\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{P^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3R^3}\right)(2\pi)(4) = \frac{P^2}{12\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۵-۴ ابتدا با استفاده از رابطه مسئله ۲-۴۴ پتانسیل داخل ناحیه را می‌یابیم

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_a^r \rho_0 r^2 dr + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^{2a}\rho_0 r\, dr$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right) + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(2a^2 - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(2a^2 - \frac{a^3}{3r} - \frac{r^2}{6}\right)$$

حال از رابطهٔ $W = \frac{1}{2}\int \rho V dv$ استفاده می‌کنیم

$$W = \frac{\rho_0^2}{2\varepsilon_0}\int\left(2a^2 - \frac{a^3}{3r} - \frac{r^2}{6}\right)dv$$

$$= \frac{2\pi\rho_0^2}{\varepsilon_0}\int_a^{2a}\left(2a^2 - \frac{a^3}{3r} - \frac{r^2}{6}\right)r^2 dr = \frac{188\,\pi\rho_0^2}{30\,\varepsilon_0}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۶-۴ ابتدا پتانسیل توزیع بار را می‌یابیم. پتانسیل با استفاده از رابطهٔ مسئله ۲-۴۴ عبارت است از

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r \frac{\rho_0 r}{a} r^2\, dr + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^a \frac{\rho_0 r}{a} r\, dr$$
$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a}\left(\frac{r^3}{4}\right) + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{r^3}{12}\right)$$
$$W = \frac{1}{2}\int \rho V\, dv = \frac{\rho_0^2\, 4\pi}{2\varepsilon_0 a^2}\int_0^a \left(\frac{a^3}{3} r^3 - \frac{r^6}{12}\, dr\right) = \frac{\rho_0^2 \pi a^5}{\varepsilon_0}$$

کل بار عبارت است از $Q = \int \rho\, dv = \pi \rho_0 a^3$. اگر این بار در کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شود، انرژی آن (مسئلهٔ ۴-۸ را ببینید) عبارت است از

$$W_1 = \frac{3 Q^2}{20 \pi \varepsilon_0 a} = \frac{3 \pi^2 \rho_0^2 a^6}{20 \pi \varepsilon_0 a} = \frac{3 \pi \rho_0^2 a^5}{20 \varepsilon_0}$$

تفاضل دو انرژی که با کار لازم برابر است، عبارت است از

$$W_1 - W = \frac{\pi \rho_0^2 a^5}{\varepsilon_0}\left(\frac{3}{20} - 1\right) = \frac{-17\pi \rho_0^2 a^5}{20 \varepsilon_0}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۴-۷ میدان داخل کره صفر و میدان خارج آن $\hat{\mathbf{r}}\,(Q / 4\pi \varepsilon_0 r^2)$ است. پس

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 r^4}\, dv$$
$$= \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0}\int \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$
$$= \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0}(2\pi)(2)\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 a}$$

پتانسیل تمام نقاط سطح کره یکسان و برابر $Q / 4\pi \varepsilon_0 a$ است، پس

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma V\, ds = \frac{1}{2} V \int \sigma\, ds = \frac{1}{2} V Q = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۴-۸ در داخل کره $\mathbf{E} = (\rho r / 3\varepsilon_0)\hat{\mathbf{r}}$ (ρ چگالی بار، یعنی Q تقسیم بر حجم کره است، یا $\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$). پس انرژی ذخیره شده در داخل کره عبارت است از

$$W_1 = \frac{1}{2}\int \frac{\pi^2 r^2}{9\varepsilon_0}(r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr)$$
$$= \frac{\rho^2}{18\varepsilon_0}\int_0^a r^4\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi \rho^2 a^5}{45\varepsilon_0} = \frac{a^2}{40\, a\pi \varepsilon_0}$$

میدان خارج کره با میدان کره‌ای که بار Q روی سطح آن توزیع شده باشد برابر است، پس انرژی ذخیره شده در خارج کره عبارت است از (مسئله ۴-۷ را ببینید)

$$W_2 = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 a}$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{\pi \varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{40}\right) = \frac{3\,Q^2}{20\,\pi\,\varepsilon_0\,a}$$

برای استفاده از روش دوم به پتانسیل داخل کره نیاز داریم که برابر است با

$$V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{a} - \frac{r^2}{a^3}\right)$$

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\, V\, dv = \frac{Q\rho}{16\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{3}{a} - \frac{r^2}{a^3}\right) r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{Q\rho}{4\varepsilon_0}\int_0^a\left(\frac{3}{a} - \frac{r^2}{a^3}\right) r^2\, dr = \frac{Q\rho\, a^2}{5\,\varepsilon_0} = \frac{3\,Q^2}{20\,\pi\,\varepsilon_0\,a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۹ با توجه به حل مسئله ۴-۸ انرژی اولیه سیستم $W_0 = 3\,Q^2 / 20\pi\varepsilon_0 a$ و با توجه به حل مسئله ۴-۷ انرژی نهایی سیستم $W_\infty = Q^2 / 8\pi\varepsilon_0 a$ است. تفاضل این دو انرژی عبارت است از

$$W_L = W_0 - W_\infty = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 a}$$

در مسئله ۳-۸ دیدیم که در کره چگالی جریانی با مقدار زیر وجود دارد

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma k r}{3\varepsilon_0} e^{-t/\tau}\,\hat{\mathbf{r}}$$

که در آن k چگالی بار اولیهٔ کره، و برابر $3\,Q / 4\pi a^3$ است. به علت وجود جریان، تلفاتی با چگالی زیر در محیط داریم

$$p = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = \frac{1}{\sigma} J^2$$

کل توان تلف شده در کره عبارت است از

$$P = \int p\, dv = \int \frac{\sigma k^2 r^2}{9\varepsilon_0} e^{-2t/\tau}\, dv$$

$$= \frac{\sigma k^2}{9\varepsilon_0^2} e^{-2t/\tau}\int_0^a r^4\, dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi\sigma k^2 a^5}{45\,\varepsilon_0^2} e^{-2t/\tau}$$

انرژی تلف شده انتگرال توان از ۰ تا ∞ است

$$W = \int_0^\infty P\, dt = \frac{4\pi\sigma k^2 a^5}{45\,\varepsilon_0^2}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}\, dt = \frac{4\pi\sigma k^2 a^5 \tau}{90\,\varepsilon_0^2}$$

باگذاشتن $\tau = \varepsilon_0/\sigma$ و $k = 3Q / 4\pi a^3$ به دست می‌آوریم

$$W = \frac{Q^2}{40\,\pi\, a\,\varepsilon_0}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۱۰ **(الف)** در این حالت انرژی برابر $0.6\, e^2 / 4\pi\varepsilon_0 R_1$ است. با استفاده از $m_0 c^2 = 0.8\times10^{-13}\,\mathrm{J}$ به دست می‌آوریم

$$R_1 = \frac{0.6\, e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} = 0.6\times10^{-15}\ \mathrm{m}$$

(ب) در این حالت انرژی برابر است با $e^2 / 8\pi\varepsilon_0 R_2$ و

$$R_۲ = \frac{e^۲}{۸\pi \varepsilon_۰ m_۰ c^۲} \approx ۳٫۳\, R_۱$$

البته شعاع واقعی الکترون از $R_۱$ نیز بسیار کوچکترست، بنابراین فرض برابری انرژی الکترون با انرژی الکتریکی آن صحیح نیست.

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=۰\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=۰\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=۰\,|\,\oint E\cdot dl=۰$

۱۱-۴ با استفاده از قانون گوس و با توجه به تقارن کروی مسئله به دست می‌آوریم

$$D = \frac{Q}{۴\pi r^۲}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$w = \frac{۱}{۲\varepsilon} D^۲ = \frac{۱}{۲\varepsilon}\,\frac{Q^۲}{۱۶\pi^۲ r^۴} = \frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲ \varepsilon r^۴}$$

$$W = \iiint w\, dv = \frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲\varepsilon}\iiint \frac{۱}{r^۴} r^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$$

$$= \frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲\varepsilon}\int_۰^{۲\pi} d\phi \int_۰^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_۰^{a} \frac{۱}{r^۲}\, dr$$

$$= \frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=۰\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=۰\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=۰\,|\,\oint E\cdot dl=۰$

۱۲-۴ ابتدا میدان **E** را می‌یابیم

$$E = -\nabla V = -۶x\,\hat{\mathbf{x}} - ۸y\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$W = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ |E|^۲ = \frac{\varepsilon_۰}{۲}(۳۶x^۲ + ۶۴y^۲)$$

$$W = \int_۰^۱\int_۰^۱\int_۰^۱ \frac{\varepsilon_۰}{۲}(۳۶x^۲ + ۶۴y^۲)\, dx\, dy\, dz$$

$$W = ۲\varepsilon_۰ \int_۰^۱\int_۰^۱ (۹x^۲ + ۱۶y^۲)\, dx\, dy$$

$$= ۲\varepsilon_۰ \int_۰^۱ [۳x^۳ + ۱۶y^۲ x]\Big|_۰^۱\, dy$$

$$= ۲\varepsilon_۰ \int_۰^۱ (۳ + ۱۶y^۲)\, dy = ۲\varepsilon_۰ \left(۳y + \frac{۱۶}{۳}y^۳\right)\Big|_۰^۱ = \frac{۵۰\,\varepsilon_۰}{۳}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=۰\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=۰\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=۰\,|\,\oint E\cdot dl=۰$

۱۳-۴ در فضای $R_۱ < r < R_۲$ چگالی انرژی $D^۲ / ۲\varepsilon_۰$ بوده است و اکنون این چگالی به $D^۲ / ۲\varepsilon$ رسیده است، که در آنها $D^۲ = Q^۲ / ۱۶\pi^۲ r^۴$ (با استفاده از قانون گوس). پس تغییر انرژی، که با کار انجام شده برابرست، عبارت است از

$$U = \int\left(\frac{D^۲}{۲\varepsilon_۰} - \frac{D^۲}{۲\varepsilon}\right) dv$$

$$= \frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲}\int\left(\frac{۱}{\varepsilon_۰ r^۴} - \frac{۱}{\varepsilon r^۴}\right) dv$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int \frac{1}{r^4}\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

که مقداری منفی است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۱۴ **الف.** ظرفیت دو پوستهٔ کروی هم مرکز به شعاعهای R و R_1 عبارت است از $C = 4\pi\varepsilon_0 R R_1/(R_1-R)$. به ازای $R_1 \longrightarrow \infty$ ، $C = 4\pi\varepsilon_0 R$.

ب. پتانسیل سطح کره عبارت است از $V = Q/4\pi\varepsilon_0 R$ ، پس

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

ج. انرژی چنین سیستمی عبارت است از (مسئلهٔ ۴-۷)

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q^2}{2C}$$

که نتیجه می‌دهد $C = 4\pi\varepsilon_0 R$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

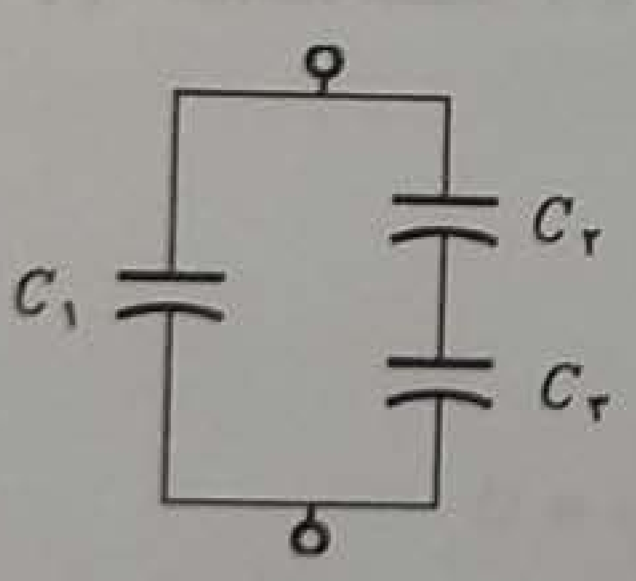
۴-۱۵ برای خازن کروی داریم $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. پس برای سر انسان

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi \times 5.85 \times 10^{-12} \times 0.1 = 7.35 \text{ pF}$$

و به همین ترتیب برای کرهٔ زمین $C = 710\ \mu\text{F}$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۱۶ خازن داده شده را می‌توان ترکیبی از سه خازن به صورت شکل ح ۴-۱۶ در نظر گرفت که



شکل ح ۴-۱۶

$$C_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \frac{A}{2d}$$

$$C_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{A/2}{d/2} = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$C_3 = \varepsilon_{r3}\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

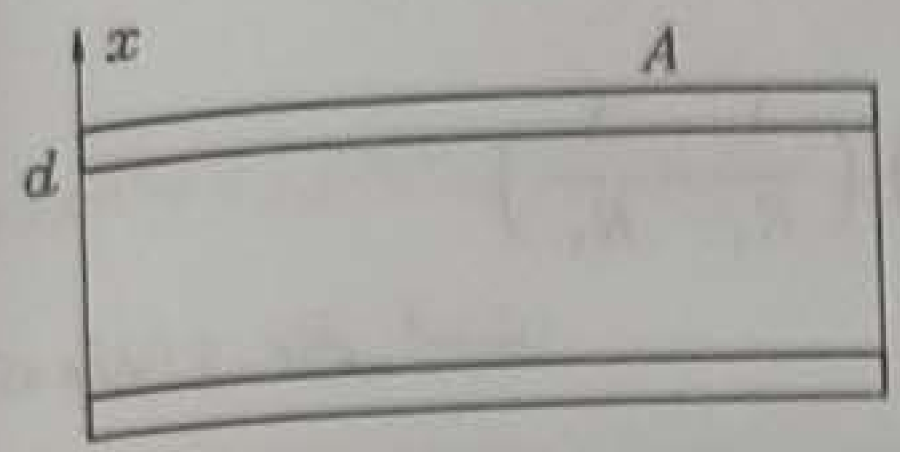
$$C = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1}}{2} + \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2}+\varepsilon_{r3}}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۱۷ با انتخاب دستگاه مختلف شکل ۴-۱۷ داریم $\varepsilon = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{x}{d}$. بار Q چگالی $\sigma = Q/A$ را روی صفحات ایجاد می‌کند و

$$D = \sigma = \frac{Q}{A}$$

و $E = D / \varepsilon$



شکل ح ۴-۱۷

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\int_d^{\circ} \frac{Q}{A} \frac{1}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) x / d}$$

$$= -\frac{Q}{A} \frac{d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \ln [\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{x}{d}] \Big|_{\circ}^{1}$$

$$= \frac{Q d}{A (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

و

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \ln (\varepsilon_2 / \varepsilon_1)}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=\circ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=\circ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=\circ \,|\, \oint E\cdot dl=\circ$

۴-۱۸ اگر بار هادی بالایی را Q و بار هادی پایینی را $Q-$ فرض کنیم، چگالی بار روی سطح بالایی $\sigma = Q / A$ و میدان D در عایق $\mathbf{D} = -\sigma\,\hat{\mathbf{x}}$ خواهد بود. پس

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{-Q}{A \varepsilon_{\circ} (a + b x^2)} \hat{\mathbf{x}}$$

اختلاف پتانسیل بین صفحات عبارت است از

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \frac{Q}{\varepsilon_{\circ} A} \int_{\circ}^{x_1} \frac{dx}{a + bx^2}$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_{\circ} A} \frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1} \left(x\sqrt{\frac{b}{a}} \right)\Big|_{\circ}^{x_1} = \frac{Q}{\varepsilon_{\circ} A\sqrt{a b}} \tan^{-1} \left(x_1 \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$$

و سرانجام

$$C = \frac{Q}{A} = \frac{\varepsilon_{\circ} A \sqrt{a b}}{\tan^{-1} x_1 \sqrt{b / a}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=\circ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=\circ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=\circ \,|\, \oint E\cdot dl=\circ$

۴-۱۹ همانند مسئله ۴-۱۸ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = -\frac{Q}{A \varepsilon_{\circ} (1 + x / x_1)} \hat{\mathbf{x}}$$

$$V = \frac{Q x_1}{A \varepsilon_{\circ}} \ln 2$$

$$C = \frac{A \varepsilon_{\circ}}{x_1 \ln 2}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_{\circ} \mathbf{E} = -\frac{Q}{A} \left(1 - \frac{1}{1 + x / x_1} \right) \hat{\mathbf{x}}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot P = \frac{Q x_1}{(x + x_1)^2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=\circ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=\circ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=\circ \,|\, \oint E\cdot dl=\circ$

۴-۲۰ بار Q را روی هادی داخلی قرار می‌دهیم. با استفاده از قانون گوس به دست می‌آوریم

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{2\pi \rho L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_R} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L}\,\frac{1}{4 + 2\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$V = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{d\rho}{2+\rho}$$

$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 L}\ \ln\frac{b+2}{a+2}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi \varepsilon_0 L \,/\, \ln\frac{b+2}{a+2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۲۱ دو خازن کروی موازی شده داریم، پس ظرفیت کل عبارت است از

$$C = C_1 + C_2 = 4\pi \varepsilon_0 \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right) + 4\pi \varepsilon_0 \left(\frac{r_2 r_3}{r_3 - r_2}\right)$$

$$= 4\pi \varepsilon_0 r_2^2\ \frac{r_3 - r_1}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_2)}$$

سرانجام

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 (r_2 - r_1)(r_3 - r_2)}{8\pi \varepsilon_0 r_2^2 (r_3 - r_1)}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۲۲ میدان در $r > c$ برابر $(Q_1 + Q_2)\,/\,4\pi \varepsilon_0 r^2\,\hat{\mathbf{r}}$ است، پس

$$V(c) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi \varepsilon_0 c}$$

در $a < r < b$ میدان الکتریکی $Q_1 \,/\, 4\pi \varepsilon_0 r^2\,\hat{\mathbf{r}}$ است، پس اختلاف پتانسیل بین دو کرهٔ هادی عبارت است از

$$V(a) - V(c) = -\int_a^b \frac{Q_1\,dr}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

یا

$$V(a) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{a} - \frac{Q_1}{b} + \frac{Q_1 + Q_2}{c}\right)$$

سرانجام

$$U = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)\,V(c) + \frac{1}{2}Q_1 V(a) + \frac{1}{2}(-Q_1)\,V(b)$$

و چون $V(b) = V(c)$

$$U = \frac{1}{2}Q_2 V(c) + \frac{1}{2}Q_1 V(a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8\pi \varepsilon_0}\left[Q_2\frac{Q_1 + Q_2}{c} + Q_1\left(\frac{Q_1}{a} - \frac{Q_1}{b} + \frac{Q_1 + Q_2}{c}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi \varepsilon_0}\left[Q_1^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{2Q_1 Q_2}{c} + \frac{Q_2^2}{c}\right]$$

۴-۲۳ به بار $\sigma\, ds$، طبق قانون کولن، نیروی $\mathbf{E}_\circ\, \sigma\, ds$ وارد می‌شود که در آن $\mathbf{E}_\circ$ میدان الکتریکی ناشی از بارهای غیر $\sigma\, ds$ است (میدان ناشی از خودبار $\sigma\, ds$ بر آن بار نیرو وارد نمی‌کند). پس باید میدان ناشی از بارهای دیگر در محل بار $\sigma\, ds$ را بیابیم. نقطه‌ای درست بالای بار $\sigma\, ds$ در نظر می‌گیریم. در این نقطه بار $\sigma\, ds$ همانند یک سطح بار دار بزرگ به نظر می‌رسد، پس میدان ناشی از آن $\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{n}}$ است. به همین ترتیب بار $\sigma\, ds$ میدان $-\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{n}}$ را در نقطه‌ای درست زیر آن ایجاد می‌کند. بقیهٔ بارها در این دو نقطه میدان $\mathbf{E}_\circ$ را ایجاد می‌کند. پس کل میدان در این دو نقطه به ترتیب عبارت است از

$$\mathbf{E}_۲ = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{E}_\circ$$

$$\mathbf{E}_۱ = -\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{E}_\circ$$

پس $\mathbf{E}_\circ = \frac{۱}{۲}(\mathbf{E}_۱ + \mathbf{E}_۲)$ و طبق قانون کولن

$$\mathbf{F} = \sigma\, ds\, F_\circ = \frac{\sigma}{۲}(\mathbf{E}_۱ + \mathbf{E}_۲)\, ds$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۴-۲۴ در طرف عایق $\mathbf{E}_۲ = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{\mathbf{n}}$ و در طرف هادی $\mathbf{E} = \circ$. طبق مسئله ۴-۲۳

$$\frac{\mathbf{F}}{ds} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon}\hat{\mathbf{n}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۴-۲۵ چه بار مثبت باشد چه منفی سطح مایع بالا می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۴-۲۶ ظرفیت خازن عبارت است از

$$C = \varepsilon_\circ \frac{(b-x)\,l}{d} + \varepsilon_\circ\, \varepsilon_r \frac{x\, l}{t + (d-t)\,\varepsilon_r}$$

(عبارت فوق را از ترکیب سه خازن به دست آورده‌ایم). در حالت V = ثابت

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{۱}{۲} V^۲ \frac{\partial C}{\partial x}$$

در حالت Q = ثابت

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{C^۲}\frac{\partial C}{\partial x}$$

و در هر دو حالت

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \varepsilon_\circ \left[\frac{\varepsilon_r\, l}{t + (d-r)\,\varepsilon_r} - \frac{l}{d} \right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۴-۲۷ در مسئله ۳-۱۱ چگالی بار روی نیمکره را $۳\varepsilon_\circ \cos\theta$ به دست آوردیم. نیروی وارد بر عنصر سطح هادی عبارت است از $\frac{\sigma^۲}{۲\varepsilon_\circ}\, ds$ برای این مسئله $ds = R^۲ \sin\theta\, d\phi\, d\theta\, \hat{\mathbf{r}}$، پس

$$\mathbf{F} = \frac{۱}{۲\varepsilon_\circ}\int ۹\,\varepsilon_\circ^۲ \cos^۲\theta\, R^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{\mathbf{r}}$$

$$= ۴{,}۵\, \varepsilon_\circ R^۲ \int \cos^۲ \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{r}}$$

برای محاسبهٔ انتگرال باید به دستگاه مختصات دکارتی برویم.

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \, \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \, \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \, \hat{\mathbf{z}}$$

چون $\int_\circ^{۲\pi} \sin \phi \, d\phi = \int_\circ^{۲\pi} \cos \phi \, d\phi = \circ$ مؤلفه‌های x و y نیرو صفرست و

$$\mathbf{F} = ۴{,}۵\, \varepsilon_\circ R^۲ \hat{\mathbf{z}} \int_\circ^{۲\pi} d\phi \int_\circ^{\pi/۲} \cos^۳ \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$= \frac{۹\pi R^۲ \varepsilon_\circ}{۴} \hat{\mathbf{z}}$$

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۲۸-۴ چگالی بار روی سطح کرهٔ $\sigma = Q / ۴\pi R^۲$ است. نیروی وارد بر عنصر سطح عبارت است از

$$d\mathbf{F} = \frac{\sigma^۲}{۲\varepsilon_\circ} ds \, \hat{\mathbf{n}}$$

بردار عمود بر سطح کرهٔ $\hat{\mathbf{r}}$ است و $ds = R^۲ \sin \theta \, d\theta \, d\phi$. پس نیروی وارد بر نیمکرهٔ بالایی عبارت است از

$$\mathbf{F} = \int_\circ^{۲\pi} \int_\circ^{\pi/۲} \frac{Q^۲}{۱۶\pi^۲ R^۴} \frac{۱}{۲\varepsilon_\circ} R^۲ \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{r}}$$

$$= \frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲ R^۲ \varepsilon_\circ} \int_\circ^{۲\pi} \int_\circ^{\pi/۲} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{r}}$$

مؤلفه‌های $\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ نیرو صفرست زیرا در یکی انتگرال $\sin \phi$ و در دیگری انتگرال $\cos \phi$ روی یک دورهٔ تناوب وجود دارد که برابر صفرست

$$F_z = \frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲ R^۲ \varepsilon_\circ} \int_\circ^{۲\pi} d\phi \int_\circ^{\pi/۲} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{Q^۲}{۳۲\pi R^۲ \varepsilon_\circ}$$

منفی این نیرو بر نیمکرهٔ پایینی وارد می‌شود.

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۲۹-۴ ظرفیت خازن عبارت است از

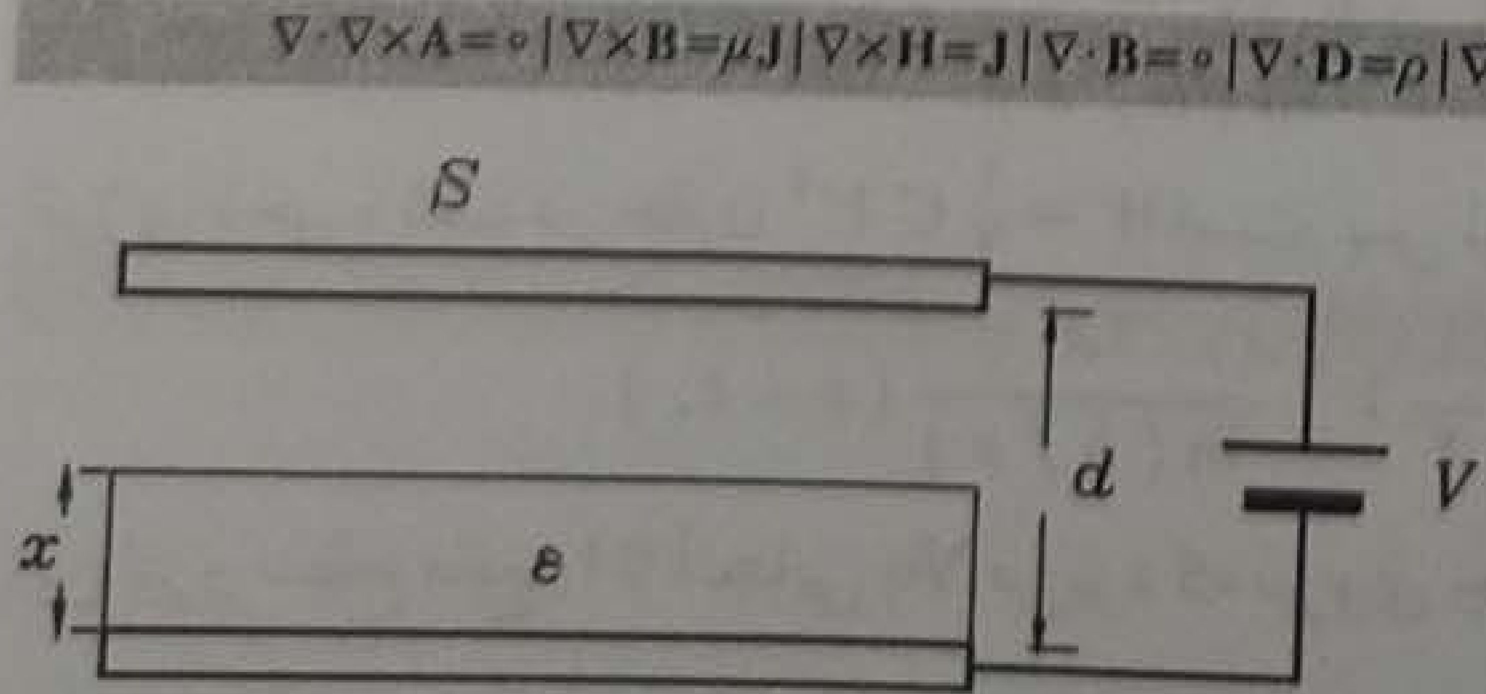
$$C = \frac{۲\pi \varepsilon_\circ x}{\ln (b / a)}$$

به ازای ولتاژ ثابت نیرو عبارت است از

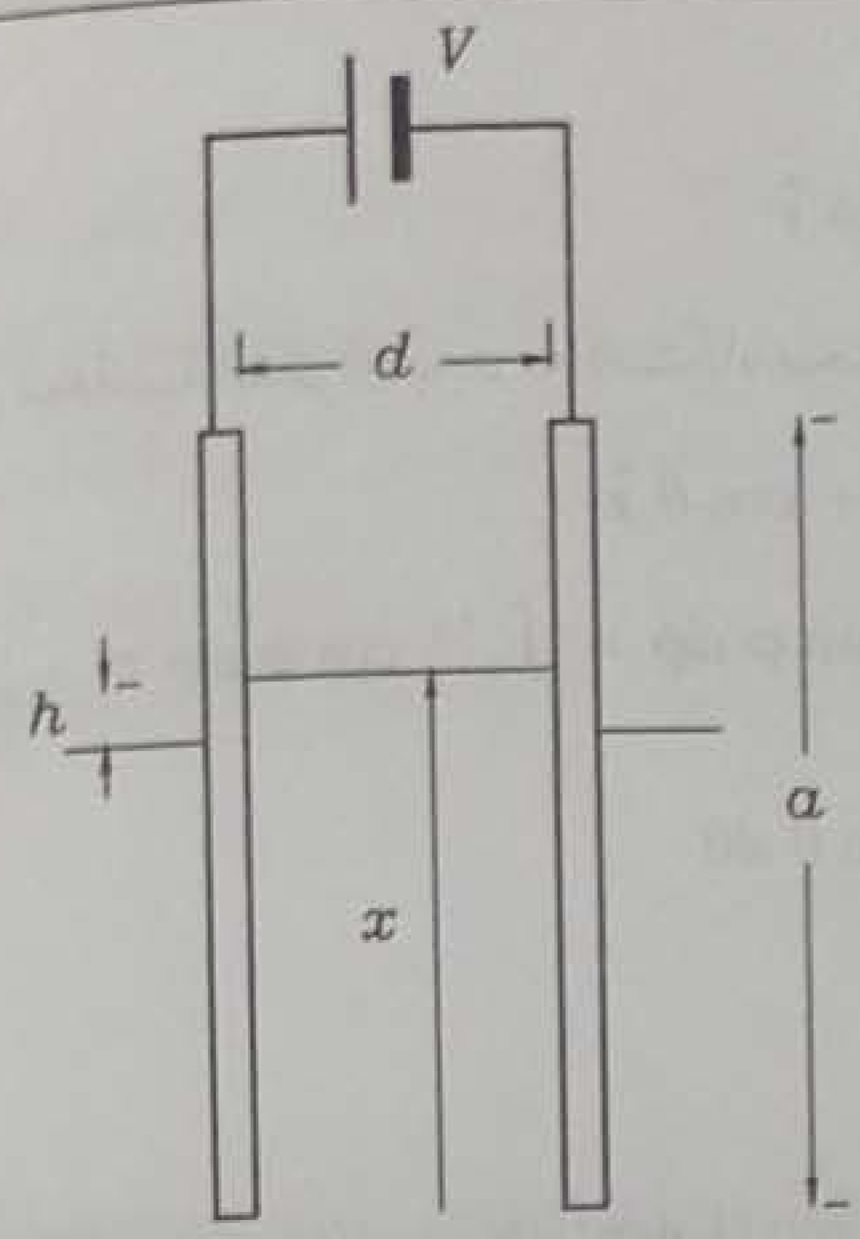
$$F_x = \frac{۱}{۲} V^۲ \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{۱}{۲} V^۲ \frac{۲\pi \varepsilon_\circ}{\ln (b / a)}$$

∇·∇×A=∘|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=∘|∇·D=ρ|∇×E=∘|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=∘|∮E·dl=∘

۳۰-۴ در حالت الف خازن شکل ح ۴-۳۰ الف را داریم که ظرفیت آن عبارت است از



شکل ح ۴-۳۰ الف



شکل ح ۴-۳۰ ب

$$C = \frac{\varepsilon S}{x(۱-\varepsilon_r)+\varepsilon_r d}$$

در حالت V = ثابت، نیروی وارد بر مایع عبارت است از

$$F = \frac{۱}{۲} V^۲ \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{۱}{۲} V^۲ \frac{\varepsilon S(\varepsilon_r - ۱)}{[x(۱-\varepsilon_r)+\varepsilon_r d]^۲}$$

وقتی سطح مایع به اندازهٔ h بالا می‌رود و نیروی وارد بر آن $\rho S h g$ خواهد بود. هنگام تعادل دو نیرو برابرند، پس

$$h = \frac{F}{\rho S g}$$

در حالت ب خازنی مانند شکل ح ۴-۳۰ ب داریم که برای آن

$$C = \frac{x b \varepsilon}{d} + \frac{(a-x) b \varepsilon_۰}{d}$$

که در آن b طول صفحهٔ خازن در جهت عمود بر کاغذ است و $S = a b$. نیروی وارد بر سطح عبارت است از

$$F = \frac{۱}{۲} V^۲ \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{۱}{۲} V^۲ \left[\frac{b\varepsilon}{d} - \frac{b\varepsilon_۰}{d}\right]$$

باز با برابر قرار دادن این نیرو و $\rho(d b) h g$ به دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۲} V^۲ \frac{b}{d} = \rho d b h g$$

$$h = \frac{V^۲(\varepsilon - \varepsilon_۰)}{۲ d^۲ \rho g}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰ \mid \nabla\times B=\mu J \mid \nabla\times H=J \mid \nabla\cdot B=۰ \mid \nabla\cdot D=\rho \mid \nabla\times E=۰ \mid \oint D\cdot ds=Q \mid \int J\cdot ds=I \mid \oint H\cdot dl=I \mid \oint B\cdot ds=۰ \mid \oint E\cdot dl=۰$

۴-۳۱ ظرفیت خازنی که بخشی از آن را هوا و بخشی دیگر از آن را دی الکتریک پر کرده است به صورت زیر به دست می‌آید

$$C = \frac{۲\pi\varepsilon_۰(L-x)}{\ln(b/a)} + \frac{۲\pi\varepsilon x}{\ln(b/a)} = \frac{۲\pi}{\ln(b/a)}[\varepsilon_۰(L-x)+\varepsilon x]$$

انرژی ذخیره شده در خازن $W = \frac{۱}{۲} C V^۲$ است. پس نیروی وارد بر سطح مایع عبارت است از

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{۱}{۲} V^۲ \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{۱}{۲} V^۲ \frac{۲\pi}{\ln(b/a)}(\varepsilon - \varepsilon_۰)$$

این نیرو سطح مایع را تا آنجایی بالا می‌برد که نیروی جاذبه با نیروی بالا برابر شود

$$\text{نیروی جاذبه} = M g = \pi (b^{۲} - a^{۲}) h \rho g$$

با برابر هم قرار دادن دو نیروی فوق به دست می‌آوریم

$$h = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{\circ}) V^{۲}}{\rho g (b^{۲} - a^{۲}) \ln (b / a)}$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \circ | \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} | \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} | \nabla \cdot \mathbf{B} = \circ | \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho | \nabla \times \mathbf{E} = \circ | \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q | \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I | \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I | \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \circ | \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \circ$

۳۲-۴ زیاد شدن شعاع حباب با کار بر علیه فشار هوا همراه است. بر هر عنصر سطح نیروی $p\, ds$ وارد می‌شود. کار انجام شده بر تغییر شعاع به اندازهٔ dr عبارت است از $p\, ds\, dr$. کل کار انجام شده، با انتگرالگیری بر روی سطح و از $r_{\circ}$ تا r به دست می‌آید

$$W = \int_{\circ}^{۲\pi} \int_{\circ}^{\pi} \int_{r_{\circ}}^{r} p\, r^{۲} \sin \theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= ۴ \pi p \int_{r_{\circ}}^{r} r^{۲}\, dr = \frac{۴}{۳} \pi p (r^{۳} - r_{\circ}^{۳})$$

این کار با تغییر انرژی ذخیره شده در سیستم همراه است. چون انرژی کره‌ای با بار Q برابر $Q^{۲} / ۸ \pi \varepsilon_{\circ} r$ است تغییر انرژی عبارت است از

$$\Delta U = \frac{Q^{۲}}{۸\pi \varepsilon_{\circ} r_{\circ}} - \frac{Q^{۲}}{۸\pi \varepsilon_{\circ} r} = \frac{Q^{۲}}{۸\pi \varepsilon_{\circ}} \left(\frac{r - r_{\circ}}{r r_{\circ}} \right)$$

با برابر قرار دادن W و ΔU به دست می‌آوریم

$$Q^{۲} = \frac{۳۲}{۳} \pi^{۲} \varepsilon_{\circ} r r_{\circ} (r^{۲} + ۲r_{\circ} + r^{۲})$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \circ | \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} | \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} | \nabla \cdot \mathbf{B} = \circ | \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho | \nabla \times \mathbf{E} = \circ | \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q | \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I | \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I | \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \circ | \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \circ$

۳۳-۴ انرژی تلف شده $Q^{۲} / ۲C - Q^{۲} / ۱۲C = ۵Q^{۲} / ۱۲C$ است. این انرژی صرف قطبیدن میکا شده است. چگالی انرژی قطبش $\frac{۱}{۲} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ است. در خازن

$$E = \frac{Q}{A \varepsilon} = \frac{Q}{۶ A \varepsilon_{\circ}}$$

$\mathbf{P} = \varepsilon_{\circ} (\varepsilon_R - ۱) \mathbf{E}$ و در این مورد $\varepsilon_R = ۶$ پس $\mathbf{P} = ۵ \varepsilon_{\circ} \mathbf{E}$ و $\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = ۵Q^{۲} / ۳۶ A^{۲} \varepsilon_{\circ}$. کل انرژی قطبش حاصلضرب حجم خازن $(A\, d)$ در چگالی انرژی است.

$$W_p = \frac{۱}{۲} A\, d\, \frac{۵ Q^{۲}}{۳۶ A^{۲} \varepsilon_{\circ}} = \frac{۵ Q^{۲} d}{۷۲ A \varepsilon_{\circ}}$$

و چون $C = A \varepsilon / d = ۶ \varepsilon_{\circ} A / d$.

$$W_p = \frac{۵ Q^{۲}}{۷۲ A \varepsilon_{\circ} / d} = \frac{۵ Q^{۲}}{۱۲ C}$$

که همان انرژی تلف شده است.

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \circ | \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} | \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} | \nabla \cdot \mathbf{B} = \circ | \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho | \nabla \times \mathbf{E} = \circ | \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q | \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I | \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I | \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \circ | \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \circ$

۳۴-۴ نیروی وارد بر صفحهٔ پایینی عبارت است از

$$F=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d^2}V^2$$

با برابر W قرار دادن این نیرو به دست می‌آوریم

$$V^2=\frac{2d^2W}{\varepsilon_0 A}=\frac{2\times(10^{-3})^2\times10^{-3}}{8/85\times10^{-12}\times25\times10^{-4}}=90395\ \mathrm{V}^2$$

یا $V\approx300\ \mathrm{V}$. به ازای این ولتاژ شدت میدان الکتریکی بین صفحات به مقدار زیر می‌رسد:

$$E=\frac{V}{d}=\frac{300}{10^{-3}}=300\ \mathrm{kV/m}$$

چون ولتاژ شکست هوا $30\ \mathrm{kV/cm}$ است، به لحاظ نظری مشکلی در انجام این کار وجود ندارد، ولی اثرات لبه‌ای می‌تواند باعث افزایش شدید میدان الکتریکی و تخلیه الکتریکی (از طریق جرقه) شود.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۳۵ نیرو عبارت است از $\varepsilon A V^2/2d^2$، پس فشار ایجاد شده برابر $\varepsilon V^2/2d^2$ است و برای ایجاد فشار لازم باید داشته باشیم

$$V^2=\frac{2Pd^2}{\varepsilon}=\frac{2\times10^6\times(0/01)^2}{5\times8/85\times10^{-12}}=4/5\times10^{12}$$

یا $V=2/1\ \mathrm{MV}$. به ازای این ولتاژ شدت میدان الکتریکی به $2/1\times10^8\ \mathrm{V/m}$ می‌رسد، ساخت چنین پرسی در صورتی عملی است که ولتاژ شکست تخته از این مقدار کوچکتر باشد و بتوان تدابیری برای جلوگیری از تخلیهٔ الکتریکی (جرقه زدن) اندیشید.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۴-۳۶ در زمان t چگالی بار الکتریکی روی صفحات خازن $k=q/A$ است. جابجایی الکتریکی با چگالی بار سطحی برابرست، یعنی $D=k$. و اما $E=D/\varepsilon$ و چگالی جریان زیر در عایق ناقص ایجاد می‌شود

$$J=\sigma E=\frac{\sigma k}{\varepsilon}$$

کل جریانی که در خازن ایجاد می‌شود $i=JA=\sigma q/\varepsilon$ است. طبق اصل پیوستگی باید داشته باشیم $dq/dt+i=0$. به این ترتیب به معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\frac{dq}{dt}+\frac{\sigma q}{\varepsilon}=0$$

که جواب آن عبارت است از

$$q=Qe^{-t/\tau}\qquad \tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

زیرا مقدار اولیهٔ بار روی صفحات خازن Q است. پس چگالی جریان در خازن عبارت است از

$$J=\frac{\sigma k}{\varepsilon}=\frac{\sigma Qe^{-t/\tau}}{A\varepsilon}=J_0e^{-t/\tau}$$

چگالی توان تلف شده در خازن $p=J^2/\sigma$ است. چون این چگالی در تمام حجم خازن ثابت است کل توان تلف شده با ضرب چگالی در حجم خازن به دست می‌آید

$$P = p(dA) = \frac{dAJ_0^2}{\sigma} e^{-2t/\tau}$$

رای یافتن انرژی تلف شده باید از توان انتگرال بگیریم

$$W = \int P\,dt = \frac{dAJ_0^2}{\sigma} \int_0^\infty e^{-2t/\tau}\,dt$$

$$= \frac{dAJ_0^2}{\sigma}\left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}\right]\Big|_0^\infty = \frac{\tau}{2}\,\frac{dAJ_0^2}{\sigma}$$

باجایگذاری $\tau = \varepsilon / \sigma$ و $J_0 = Q\sigma / A\varepsilon$ در رابطهٔ بالا به دست می‌آوریم

$$W = \frac{\varepsilon}{2\sigma}\,\frac{dA(Q\sigma)^2}{\sigma(A\varepsilon)^2} = \frac{Q^2 d}{2A\varepsilon} = \frac{Q^2}{2C}$$

که با انرژی اولیهٔ ذخیره شده در خازن برابر ست.