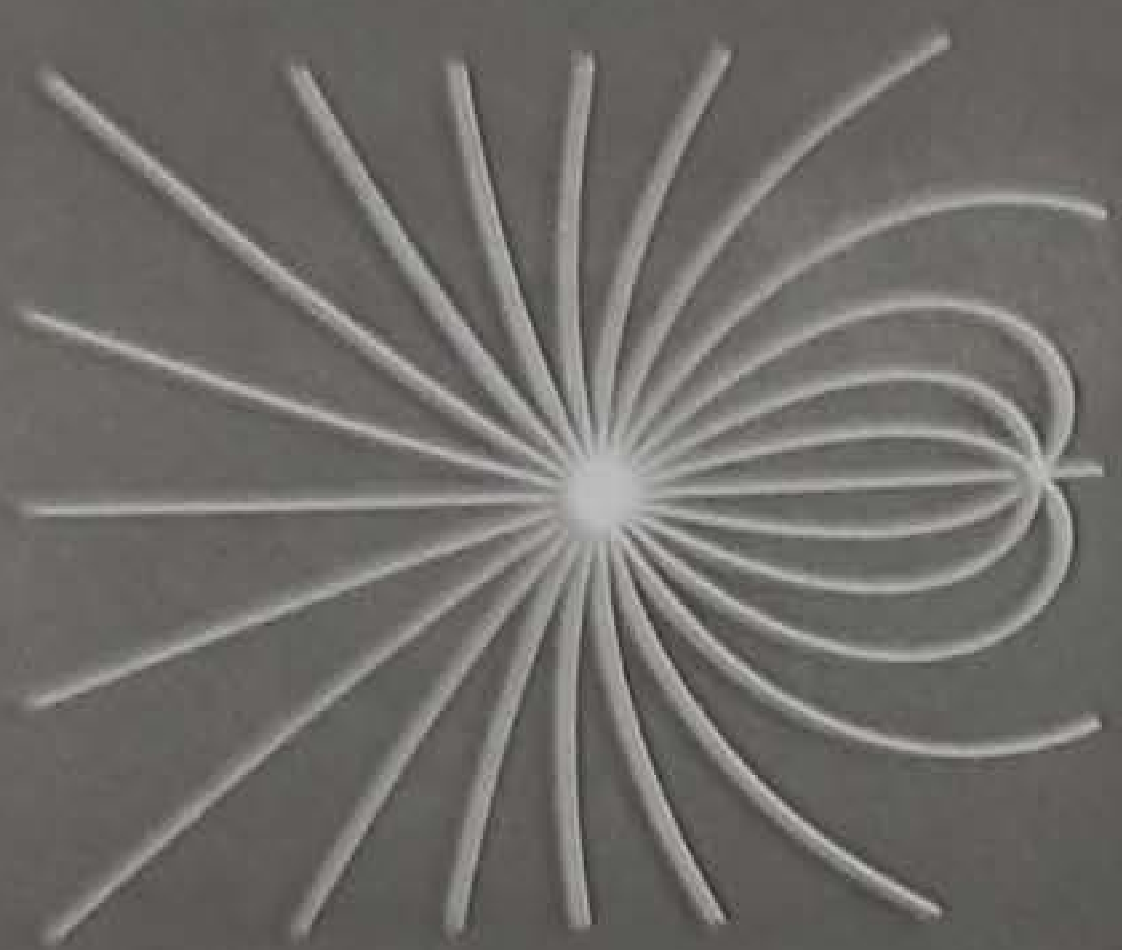


۳
هادیها و عایقها

۳-۱ هادیها

هادی جسمی است که دارای بار آزاد باشد، به نحوی که این بارها بتوانند در اثر وجود میدان الکتریکی آزادانه حرکت کنند. با توجه به تعریف فوق می‌توان این خواص را برای هادیها برشمرد

(الف) در داخل هادی $\mathbf{E} = 0$.

(ب) در داخل هادی $\rho = 0$.

(ج) اگر جسم هادی بار خالصی داشته باشد آن بار بر روی سطح جسم ظاهر می‌شود.

(د) V در داخل هادی ثابت است.

(ه) درست روی سطح هادی، $\mathbf{E}$ عمود بر سطح است.

۳-۲ جریان

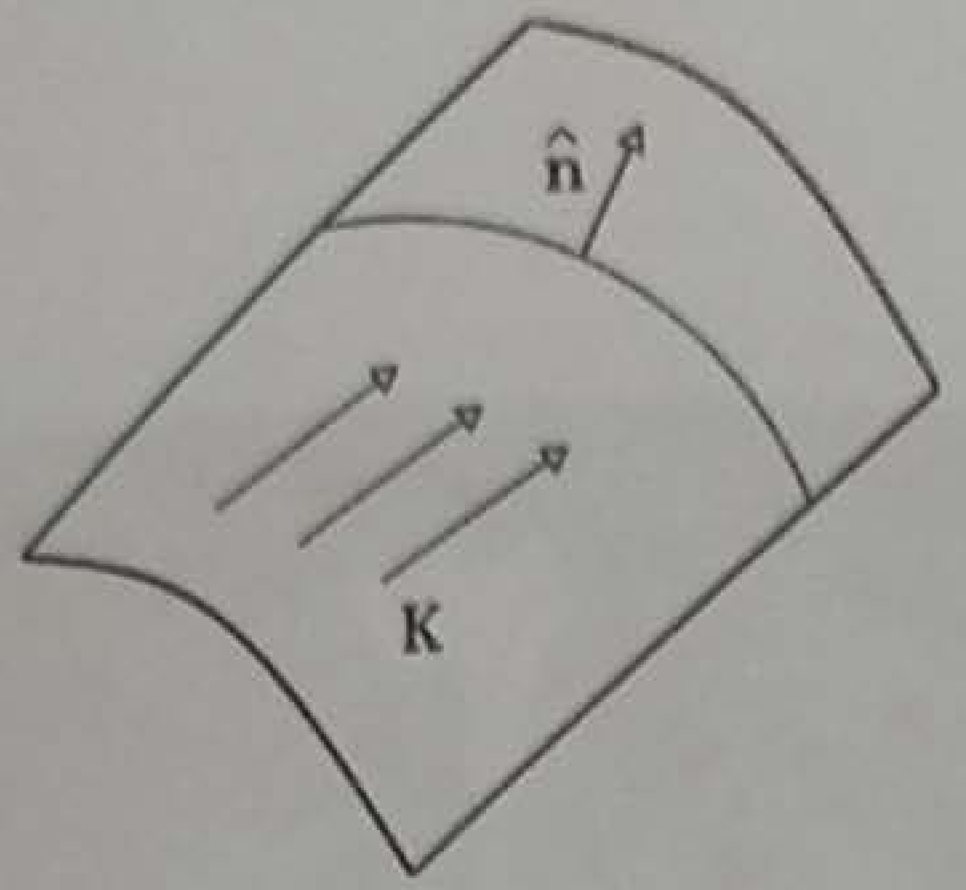
اگر در محیطی با رسانایی ویژهٔ σ میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ وجود داشته باشد، جریانی با چگالی زیر ایجاد می‌شود

$$\mathbf{J} = \sigma\, \mathbf{E} \tag{۳-۱}$$

جریان گذرنده از یک سطح را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \tag{۳-۲}$$

اگر جریان از حجمی بگذرد که یکی از ابعاد آن بسیار کوچک باشد، آن را **چگالی جریان سطحی** می‌نامند و با $\mathbf{K}$ بر حسب آمپر بر متر بیان می‌کنند. در این صورت جریان گذرنده از یک خط به شکل زیر به دست می‌آید



شکل ۳-۱
جریان سطحی و جریان گذرنده از یک خم.

$$I = \int (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, dl \qquad (۳-۳)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر خط، واقع در صفحه جریان است. شکل ۳-۱ را ببینید.

۳-۳ مقاومت

نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک جسم به جریانی که وارد پایانهٔ مثبتر می‌شود، مقاومت الکتریکی نام دارد

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}}{\int \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}} \qquad (۴-۳)$$

مقاومت یک جسم به شکل و جنس آن بستگی دارد و مستقل از پتانسیل روی آن و جریان گذرنده از آن است.

۳-۴ بقای بار و پیوستگی

در هر نقطه از یک محیط داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (۵-۳)$$

حل معادلهٔ فوق عبارت است از

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \qquad (۶-۳)$$

که در آن ρ_0 چگالی بار در لحظهٔ $t = 0$ است و $\tau = \varepsilon / \sigma$ **زمان واهلش** نامیده می‌شود.

۳-۵ عایق و قطبش

در عایقها بار نمی‌تواند آزادانه حرکت کند. بنابراین درون جسم عایق هم می‌توان بار خالص داشت و هم میدان الکتریکی. عایقها در اثر میدان الکتریکی **قطبیده** می‌شوند. بعضی از مواد ذاتاً از مولکولهای قطبی تشکیل شده‌اند. دو قطبیهای این مواد پس از قرار گرفتن در میدان الکتریکی تقریباً هم راستا می‌شوند. در عایقهایی که مولکول قطبی ندارند، میدان الکتریکی مولکولها را در همان راستای میدان قطبی می‌کند.

بردار **قطبش** در هر نقطهٔ یک جسم قطبیده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{P} = \underset{\Delta v \to 0}{\text{حد}} \frac{\Sigma\, \mathbf{p}_i}{\Delta v} \qquad (۷-۳)$$

Δv حجم کوچکی حول نقطهٔ مورد نظر است، و $\Sigma\, \mathbf{p}_i$ مجموع گشتاور دو قطبی‌های موجود در این حجم است.

۳-۶ میدان یک جسم قطبیده

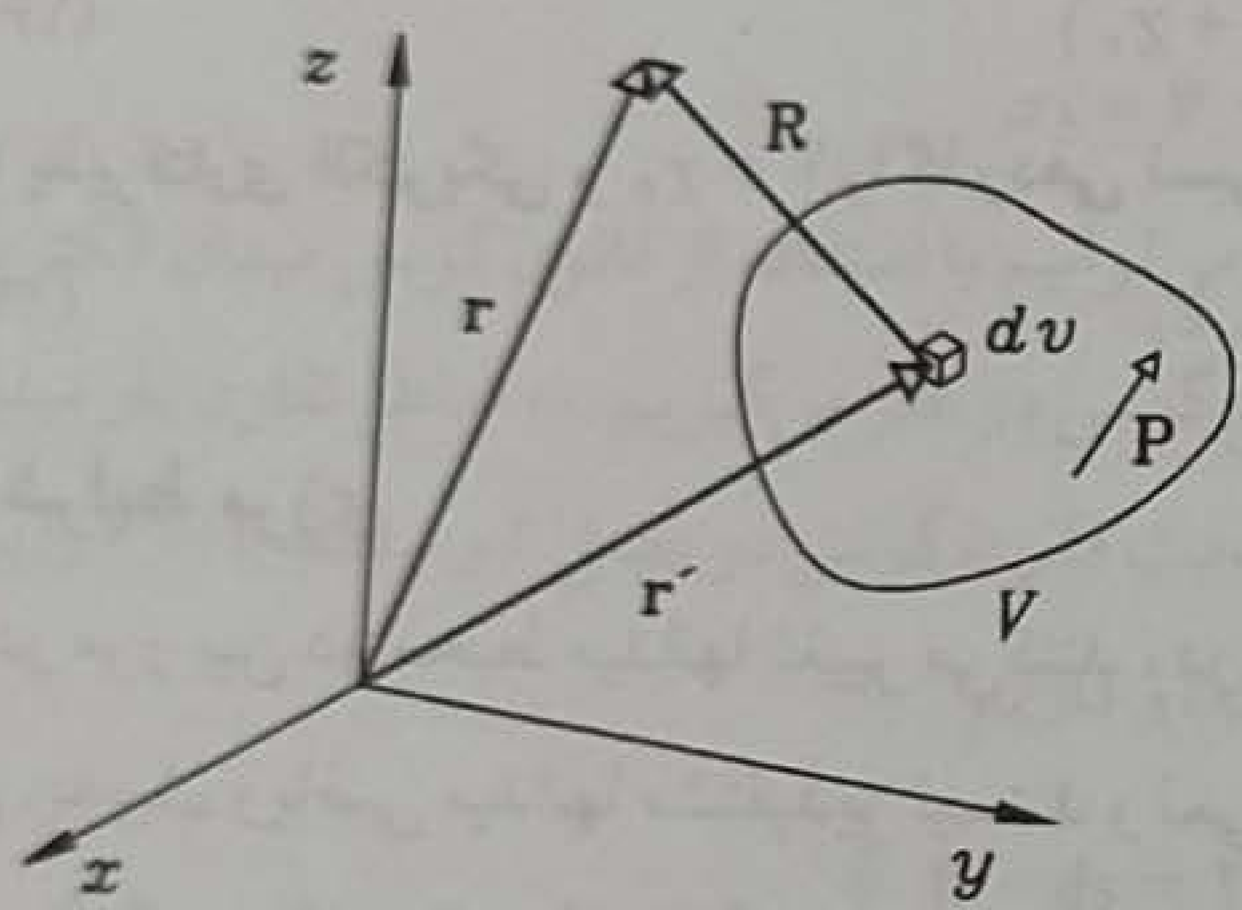
دو قطبیهای یک جسم قطبیده می‌توانند در اطراف آن جسم میدان الکتریکی ایجاد کنند. جسم قطبیده‌ای در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳-۲ قرار گرفته باشد. حجم این جسم V و سطح جانبی آن را S می‌نامیم. با توجه به این که میدان یک دو قطبی به صورت زیرست

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

می‌توان نوشت

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}\,dv \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \tag{۸-۳}$$

به بیان دیگر حجم را به عناصر کوچکی تقسیم می‌کنیم. در هر عنصر حجم طبق معادلهٔ (۳-۷) یک دو قطبی معادل $\mathbf{P}\,dv$ وجود دارد، میدان ناشی از این دو قطبیها را یافته، آنها را با هم جمع می‌کنیم.



شکل ۳-۲
جسم قطبیده‌ای که یافتن میدان آن مورد نظرست.

قطبش جسم را می‌توان با مجموعه‌ای از **بارهای مقید** حجمی و سطحی مدل کرد

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{۹-۳}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{۱۰-۳}$$

که $\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر سطح جسم، σ_b چگالی بار سطحی روی جسم و ρ_b چگالی بار حجمی داخل جسم است. میدان ناشی از این جسم را می‌توان به جای استفاده از معادلهٔ (۳-۸) با توجه به بارهای فوق پیدا کرد؛ یعنی

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_b\,dv}{|\mathbf{R}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma_b\,ds}{|\mathbf{R}|} \tag{۱۱-۳}$$

۳-۷ چگالی شار الکتریکی یا جابجایی الکتریکی

بردار چگالی شار الکتریکی یا جابجایی الکتریکی در یک محیط به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{۱۲-۳}$$

در این صورت قانون گوس را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{۱۳-۳}$$

در معادلهٔ بالا ρ تنها بارهای آزاد است و ρ_b نباید در نظر گرفته شود. ولی اگر بخواهیم قانون گوس را برای شدت میدان الکتریکی بنویسیم باید هر دو بار آزاد و مقید را در نظر بگیریم

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\rho_f+\rho_b$$

۳-۸ عایقهای خطی

در یک عایق خطی می‌توان بردار قطبش و شدت میدان الکتریکی را به صورت زیر به هم ربط داد

$$\mathbf{P}=\varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

در این صورت

$$\mathbf{D}=\varepsilon \mathbf{E} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

که در آن ε گذردهی عایق خوانده می‌شود و برابرست با

$$\varepsilon=\varepsilon_\circ(1+\chi_e) \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

χ_e را **پذیرفتاری الکتریکی** و $1+\chi_e$ را **گذردهی نسبی** می‌نامند. گذردهی نسبی را با ε_r نشان می‌دهند. پس

$$\varepsilon=\varepsilon_\circ \varepsilon_r \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

۳-۹ شرایط مرزی

چون در مرز بین دو محیط میدانها تغییر می‌کنند، در این مرزها میدانهای خوشرفتاری (از لحاظ ریاضی) نداریم. به بیان ریاضی میدانها مشتقپذیر نیستند و نمی‌توان قانونهای نقطه‌ای میدانها (مثلاً $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$) را در آنجا اعمال کرد. با اعمال شکل انتگرالی روابط در مرز می‌توان نشان داد که در مرز

$$(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\times\hat{\mathbf{n}}=\circ \quad \text{یا} \quad \mathbf{E}_{t1}=\mathbf{E}_{t2} \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

$$(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)\cdot\hat{\mathbf{n}}=\sigma \quad \text{یا} \quad D_{n1}-D_{n2}=\sigma \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر مرز، $\mathbf{E}_{t1}$ و $\mathbf{E}_{t2}$ مولفه‌های مماس بر مرز و D_{n1} و D_{n2} مولفه‌های عمود بر مرز در دو طرف مرز هستند.

حل مسئله

اگر قطبش یک جسم دی‌الکتریک معلوم باشد و بخواهیم میدان ناشی از آن را بیابیم، پایه‌ای ترین روش یافتن بارهای مقید و حل مسئله به شیوه‌های فراگرفته شده در فصل ۲ است. باید توجه کرد که بارهای مقید به جای جسم قطبیده می‌نشینند تا اثر آن را در ایجاد میدان شبیه‌سازی کنند، به عبارت دیگر وقتی به جای جسم قطبیده بار مقید قرار می‌گیرد، دیگر محل آن را فضای آزاد در نظر می‌گیریم، بنابراین گذردهی آن باید $\varepsilon_\circ$ فرض شود.

مثال ۱

یک پوستهٔ استوانه‌ای بسیار بلند به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به صورت زیر قطبیده شده است

$$\mathbf{P} = \frac{۳}{\rho^{۲}}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

میدان الکتریکی داخل و خارج پوسته را بیابید.

حل

ابتدا بارهای مقید را به دست می‌آوریم. در داخل پوسته

$$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho P_\rho) = -\frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{۳}{\rho}\right) = \frac{۳}{\rho^{۳}}$$

روی بدنهٔ داخلی و خارجی به ترتیب داریم

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot(-\hat{\boldsymbol{\rho}}) = -\frac{۳}{a^{۲}}$$

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{۳}{b^{۲}}$$

اکنون باری با تقارن استوانه‌ای در فضای آزاد داریم و می‌توانیم با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی را بیابیم. یک استوانهٔ هم محور با پوسته را به عنوان سطح گوس در نظر می‌گیریم. به خاطر تقارن بار میدان تنها مولفهٔ $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ دارد، و آن مولفه هم تنها تابعی از ρ است (مبحث قانون گوس در فصل ۲ و مسئلهٔ ۲-۳۱ را ببینید). پس انتگرال $\mathbf{E}\cdot\mathbf{ds}$ روی قاعده‌های استوانه صفرست، و داریم

$$\oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = ۲\pi\rho h E_\rho$$

که ρ شعاع استوانه و h ارتفاع آن است. در $\rho < a$، یعنی هنگامی که سطح گوس در داخل پوسته قرار می‌گیرد، باری داخل آن قرار ندارد و در نتیجه $E_\rho = ۰$. به ازای $a < \rho < b$، بارهای سطحی روی بدنهٔ داخلی پوسته و بارهای حجمی واقع در فاصلهٔ داخل سطح گوس قرار دارند. این بارها به ترتیب عبارت اند از

$$\text{بار مقید روی بدنهٔ داخلی پوسته} = \sigma_a \times (\text{مساحت بخشی از بدنهٔ داخلی پوسته که داخل سطح گوس قرار دارد})$$

$$= \sigma_a(۲\pi a h) = \frac{-۶\pi h}{a}$$

$$\text{بار مقید حجمی داخل سطح گوس} = \int_V \rho_b\, dv = \int_V \frac{۳}{\rho^{۳}}(\rho\, d\rho\, d\phi\, dz)$$

$$= \int_a^\rho \frac{d\rho}{\rho^{۲}}\int_۰^{۲\pi} d\phi \int_۰^h dz = ۶\pi h\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{\rho}\right)$$

پس کل بار داخل سطح گوس عبارت است از

$$Q = \frac{-۶\pi h}{\rho}$$

و میدان الکتریکی برابرست با

$$\mathbf{E} = \frac{-۳}{\varepsilon_۰\rho^{۲}}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

به ازای $\rho > b$، یعنی در خارج پوسته، کل بار داخل سطح گوس عبارت است از بارهای سطحی روی بدنهٔ

داخلی پوسته، بارهای سطحی روی بدنهٔ خارجی پوسته، و کل بارهای حجمی داخل سطح گوس. مجموع این بارها عبارت است از

$$Q = \frac{-6\pi h}{a} + \frac{6\pi h}{b} + 6\pi h\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$$

انتظار صفر شدن کل بار را داشتیم، زیرا کل بار مقید یک جسم قطبیده باید صفر باشد. پس میدان خارج پوسته نیز صفرست.

∇·∇×A=0 | ∇×B=μJ | ∇×H=J | ∇·B=0 | ∇·D=ρ | ∇×E=0 | ∮D·ds=Q | ∫J·ds=I | ∮H·dl=I | ∮B·ds=0 | ∮E·dl=0

مثال ۲

مسئلهٔ مثال ۱ را به این ترتیب تغییر می‌دهیم؛ بار خطی با چگالی ثابت λ C/m در محور پوسته قرار دارد و قطبش زیر را در پوسته ایجاد کرده‌است

$$\mathbf{P} = \frac{3\lambda}{\rho^2}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

می‌خواهیم میدان الکتریکی را در نقاط مختلف فضا بیابیم.

حل

باز هم می‌توانیم مثل قبل عمل کنیم و پس از یافتن بارهای مقید، به کمک قانون گوس میدانها را بیابیم. چون قطبش داده شده همانند قطبش مثال ۱ است (تنها با تفاوت یک ضریب λ) همان بارهای مقید (با همان تفاوت در ضریب λ) به دست می‌آید. تفاوت دو مسئله تنها وجود بار خطی اضافی در این مسئله است. با استفاده از اصل جمع آثار، و با جمع کردن میدان به دست آمده در مثال قبل (با همان تفاوت در ضریب λ) و میدان ناشی از بار خطی می‌توان میدان را به صورت زیر یافت

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} + \frac{-3\lambda}{\varepsilon_0\rho^2}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

ولی این مسئله (و مسائل مشابه آن) راه حل ساده‌تری نیز دارند. قانون گوس برای میدان $\mathbf{D}$ را به کار می‌بریم. چون این قانون مستقل از محیط است، و در آن تنها بارهای آزاد وارد می‌شوند، و همچنین چون در این مسئله وجود پوستهٔ دی‌الکتریک داده شده تقارن را به هم نمی‌زند، می‌توانیم با همان استدلالهای بیان شده در بخش فصل ۲ میدان $\mathbf{D}$ تمام نقاط را به صورت زیر به دست بیاوریم

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

اکنون می‌توانیم میدان الکتریکی را به کمک معادلهٔ (۳-۱۲) بنویسیم

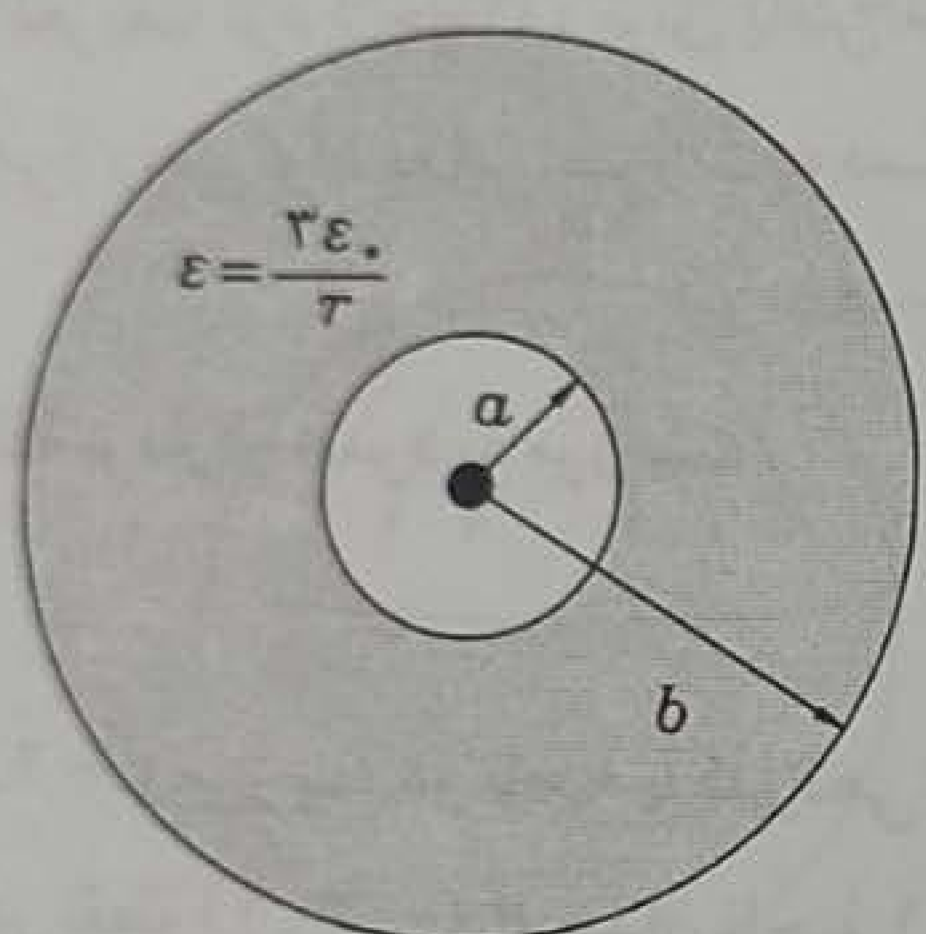
$$\mathbf{E} = (\mathbf{D} - \mathbf{P})/\varepsilon_0 = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} + \frac{-3\lambda}{\varepsilon_0\rho^2}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

که همان نتیجهٔ به دست آمده در بالاست.

یک دسته از مسائلی که در کتابهای الکترومغناطیس زیاد مطرح می‌شود، یافتن میدان در حضور عایقهای ناهمگن است. چون میدان **D** مستقل از محیط است می‌توان حل مسئله را با یافتن آن شروع کرد. صد البته این در صورتی است که وجود عایق مانع یافتن **D** نباشد.

مثال ۳

بار نقطه‌ای q در مرکز یک پوستهٔ کروی، به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b قرار دارد. گذردهی مادهٔ تشکیل دهندهٔ پوسته به صورت $۳\varepsilon_۰/r$ با شعاع تغییر می‌کند. اختلاف پتانسیل دو سطح پوسته را بیابید. (این گونه مسائل مخصوصاً در یافتن ظرفیت خازنهای دارای دی‌الکتریک ناهمگن مطرح می‌شود.)



شکل ۳-۳
بار نقطه‌ای واقع در مرکز یک پوستهٔ کروی.

حل

چون حتی ناهمگنی پوسته نیز به صورتی است که تقارن کروی مسئله حفظ می‌شود، می‌توانیم به کمک قانون گوس **D** را بیابیم. سطح گوس را کره‌ای به مرکز بار در نظر می‌گیریم و به خاطر تقارن میدان می‌نویسیم

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = ۴\pi r^۲ D_r$$

چون تنها بارهای آزاد در قانون گوس برای **D** ظاهر می‌شوند، فرقی نمی‌کند که شعاع این سطح کروی چه باشد، به عبارت دیگر در همه جای فضا $۴\pi r^۲ D_r = q$ و در نتیجه

$$\mathbf{D} = \frac{q}{۴\pi r^۲}\hat{\mathbf{r}}$$

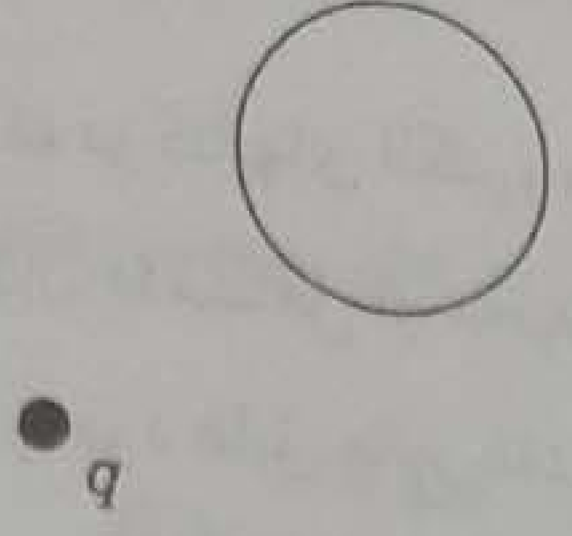
در داخل پوستهٔ کروی

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{۱۲\pi\varepsilon_۰ r}\hat{\mathbf{r}}$$

پس

$$V_a - V_b = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{q}{۱۲\pi\varepsilon_۰}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{۱۲\pi\varepsilon_۰}\ln\frac{b}{a}$$

دقت کنید که روش حل به کار رفته در مثال ۲ بر تقارن وضعیت فیزیکی متکی است. اگر یک بار نقطه‌ای و کرهٔ عایقی مطابق شکل ۳-۴ داشته باشیم، حتی اگر کره همگن نیز باشد، نمی‌توان میدان را به سادگی یافت. توسل به میدان **D** و این که میدان **D** مستقل از محیط است نیز نمی‌تواند چاره ساز باشد، زیرا دیگر با یک



شکل ۳-۴
بار نقطه‌ای واقع در مجاورت یک کرهٔ عایق.

مسئلهٔ متقارن روبرو نیستیم و نمی‌توانیم با اعمال قانون گوس میدان **D** را بیابیم.

در مسائل مربوط به شرایط مرزی، یافتن مولفهٔ عمود بر مرز ساده است، زیرا در هر نقطهٔ مرز یک بردار عمود بر مرز $\hat{\mathbf{n}}$ می‌توان یافت و با ضرب $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{r}}$ مولفهٔ عمود بر مرز را به دست آورد. ولی بردار یکهٔ مماس بر مرز را نمی‌توان تعریف کرد (چرا؟) و برای یافتن مولفهٔ مماسی میدان باید به روش دیگری متوسل شد. مولفهٔ مماس بر مرز را می‌توان به این صورت به دست آورد

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{A} - \mathbf{A}_n$$

که در آن $\mathbf{A}_n$ مولفهٔ برداری عمود بر مرزست.

مثال ۴

رویهٔ $6 = y - 2x + 2z$ مرز بین دو ناحیه با گذردهی‌های نسبی $\varepsilon_{R1} = 3$ و $\varepsilon_{R2} = 4/5$ است. مبدا در ناحیهٔ ۱ قرار دارد. اگر در نقطهٔ $P(1, 3, 0)$ میدان ناحیهٔ ۱ به صورت زیر باشد

$$\mathbf{E}_1 = -4\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + 6\hat{\mathbf{z}}$$

میدان ناحیهٔ ۲ در نقطهٔ P را بیابید.

حل

ابتدا بردار عمود بر مرز را می‌یابیم. تابع $f(x,y,z) = y - 2x + 2z$ را در نظر بگیرید. اگر این تابع را برابر مقدار ۶ قرار دهیم، معادلهٔ رویهٔ بین دو محیط به دست می‌آید. گرادیان این تابع برداری عمود بر ثابت $= f(x,y,z)$ به دست می‌دهد. پس

$$\nabla(y - 2x + 2z) = -2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$$

بردار یکهٔ عمود بر مرز عبارت است از

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = -\frac{2}{3}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{y}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_{n1} = (\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} = 6\hat{\mathbf{n}} = -4\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}}$$

با توجه به معادلهٔ (۳-۱۹)، و چون روی مرز بار وجود ندارد $D_{n1} - D_{n2} = 0$ یا $D_{n1} = D_{n2}$. پس

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

یا

$$\mathbf{E}_{n2} = \frac{\varepsilon_{R1}}{\varepsilon_{R2}}\mathbf{E}_{n1} = 1/5\,\mathbf{E}_{n1} = -6\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 6\hat{\mathbf{z}}$$

حال به مولفهٔ مماسی می‌پردازیم

$$\mathbf{E}_{t\,۱} = \mathbf{E}_{۱} - \mathbf{E}_{n\,۱} = -۴\hat{\mathbf{y}} + ۲\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_{t\,۲} = \mathbf{E}_{t\,۱} = -۴\hat{\mathbf{y}} + ۲\hat{\mathbf{z}}$$

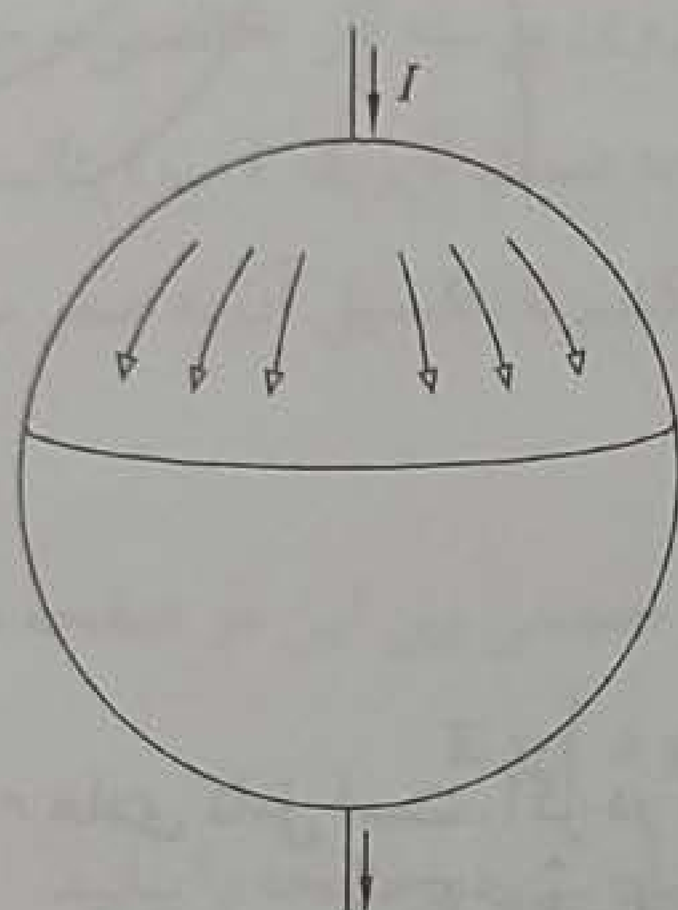
و سرانجام

$$\mathbf{E}_{۲} = \mathbf{E}_{t\,۲} + \mathbf{E}_{n\,۲} = -۶\hat{\mathbf{x}} + -\hat{\mathbf{y}} + ۸\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

مثال ۵

جریان I به یک پوستهٔ کروی نازک وارد شده، از نقطهٔ مقابل قطری آن خارج می‌شود. چگالی جریان سطحی روی کره را بیابید.



شکل ۳-۵
جریانی که از روی سطح یک کره می‌گذرد.

حل

واضح است که جریان تابعی از ϕ نیست و مولفهٔ $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ ندارد. کل جریانی که از هر دایرهٔ واقع در صفحات عمود بر قطر گذرنده از محل ورود جریان می‌گذرد باید برابر I باشد؛ یعنی باید داشته باشیم

$$I = \int (\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,dl = \int (\mathbf{K}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}})\,r\sin\theta\,d\phi$$

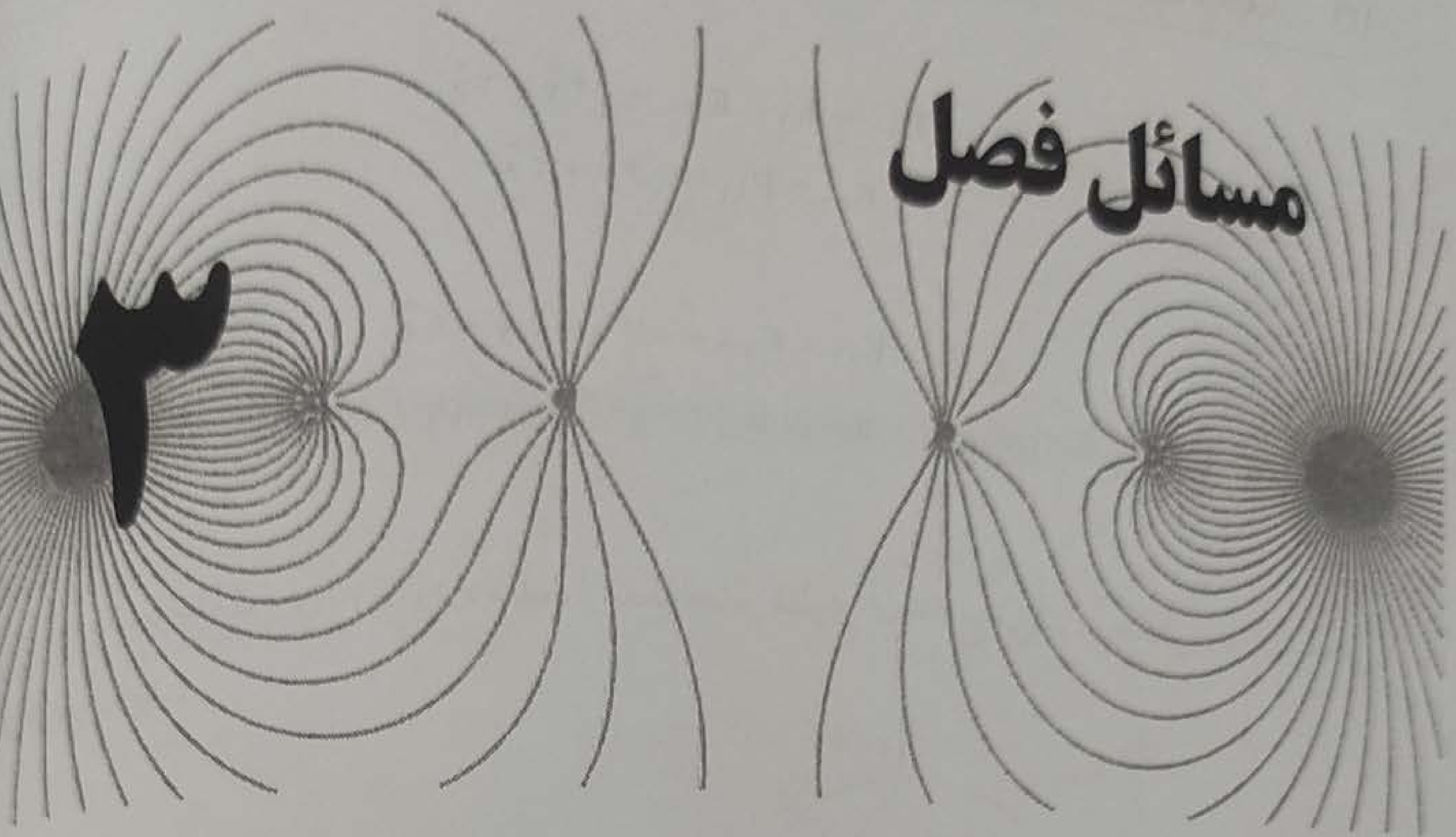
زیرا بردار عمود بر چنین خطی $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است. چون هیچکدام از عبارتهای زیر انتگرال تابعی از ϕ نیستند داریم

$$I = ۲\pi r\sin\theta\,K_\theta$$

یا

$$\mathbf{K} = \frac{I}{۲\pi r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

مسائل فصل ۳



۱-۳ سطح کروی $r = ۷$ هادی کامل است. اگر در نقطهٔ (۲,-۳,-۶) داشته باشیم

$$\mathbf{E} = 10\,\hat{\mathbf{x}} + E_y\,\hat{\mathbf{y}} + E_y\,\hat{\mathbf{z}}$$

E_y و E_z را به دست آورید.

۲-۳ یک سطح هادی دلخواه داده شده است. چگالی بار سطحی روی این هادی در حالت کلی غیر یکنواخت است. شدت میدان الکتریکی نقاط نزدیک این سطح را به دست آورید.

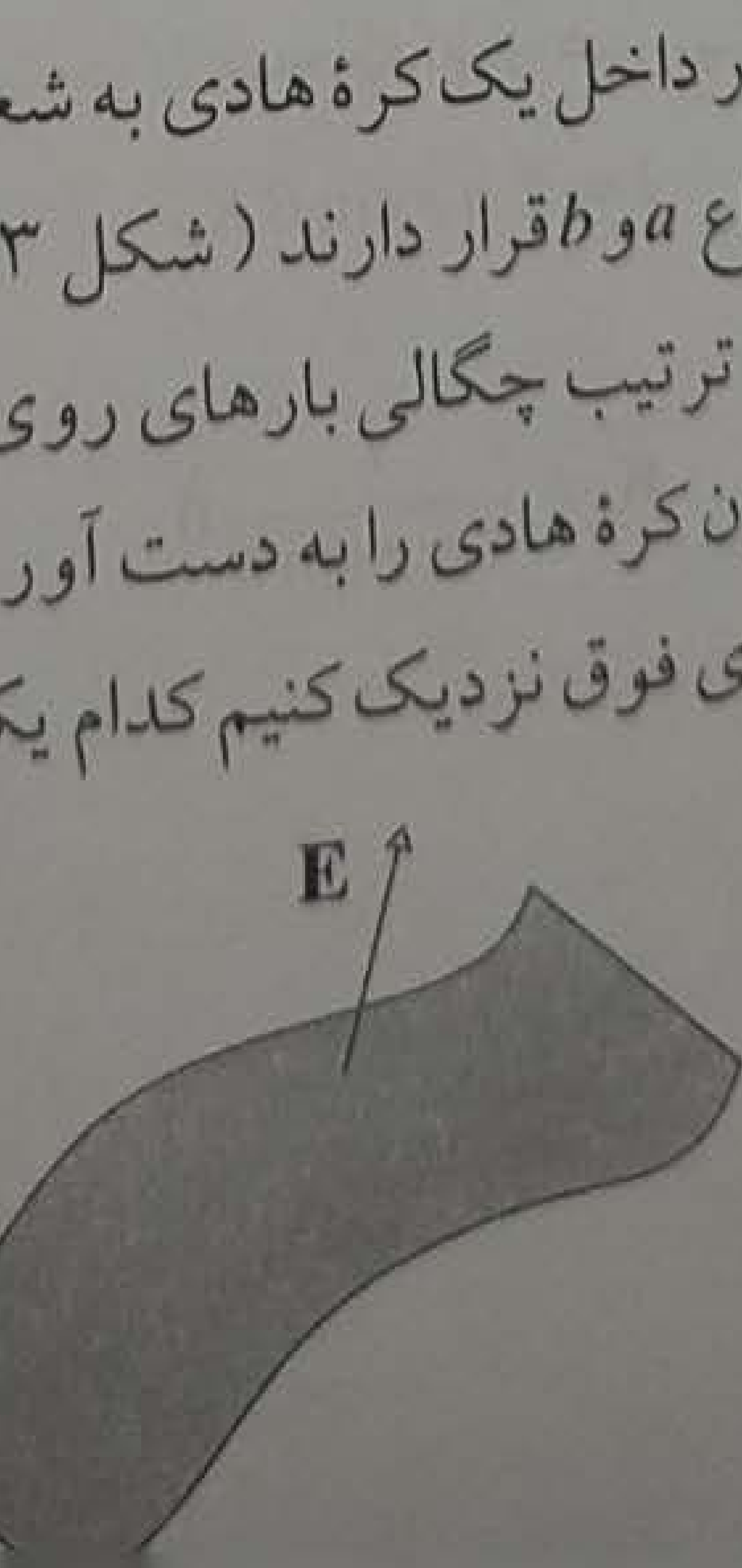
۳-۳ ثابت کنید اگر در حفرهٔ ایجاد شده در یک جسم هادی بار وجود نداشته باشد، میدان داخل حفره صفرست.

۴-۳ دو حفرهٔ کروی به شعاعهای a و b در داخل یک کرهٔ هادی به شعاع R ایجاد شده است. دو بار q_a و q_b به ترتیب در مرکز حفره‌های به شعاع a و b قرار دارند (شکل ۳-۴ را ببینید).

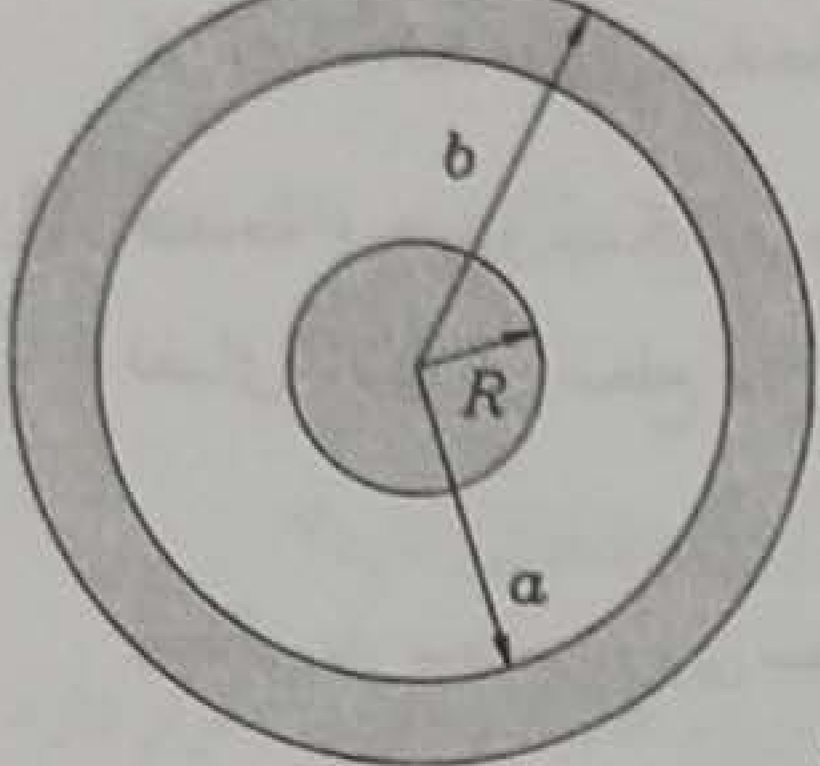
(الف) چگالیهای σ_a، σ_b، σ_c، به ترتیب چگالی بارهای روی سه سطح کروی، را به دست آورید.

(ب) میدان داخل حفره‌ها و بیرون کرهٔ هادی را به دست آورید.

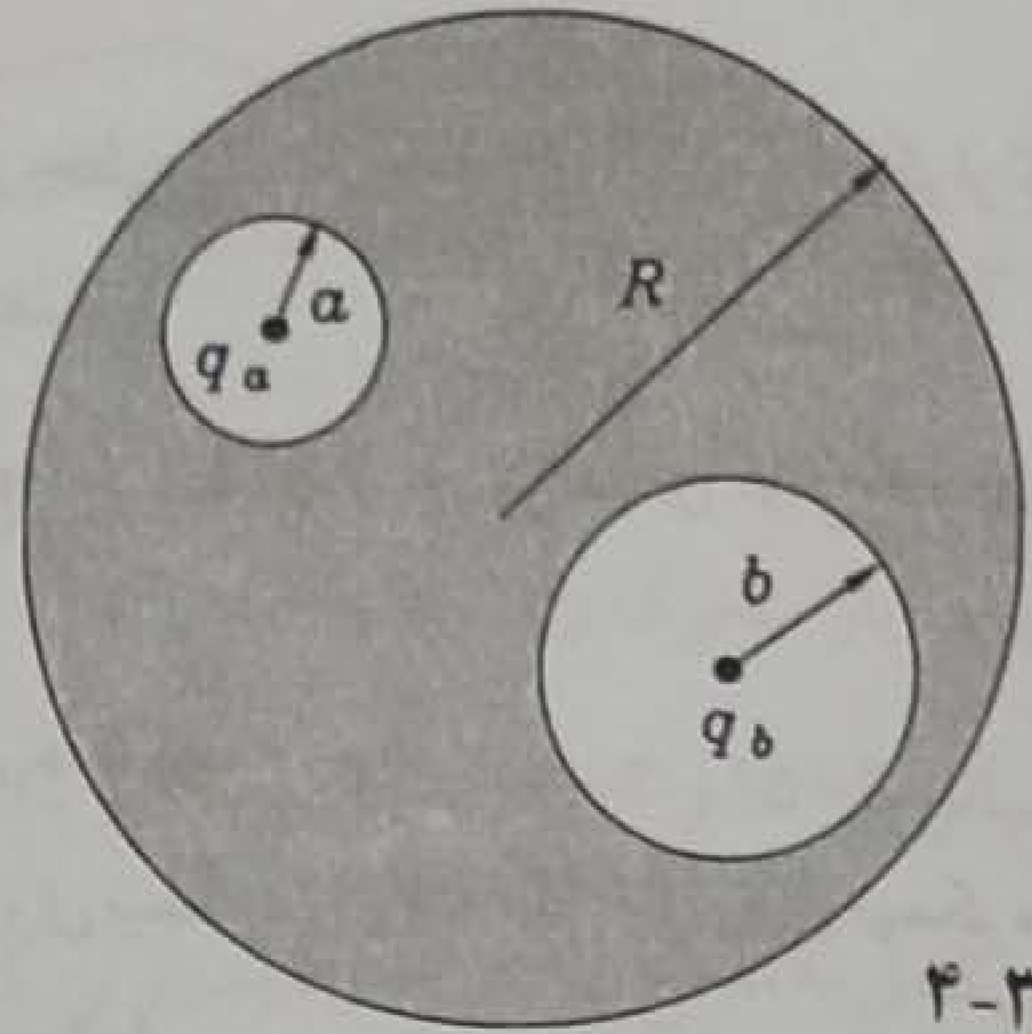
(ج) اگر بار سومی را به کرهٔ هادی فوق نزدیک کنیم کدام یک از جوابهای فوق تغییر می‌کند؟



شکل ۳-۲



شکل ۳-۵



شکل ۳-۴

۳-۵ بار q روی کره‌ای هادی به شعاع R قرار دارد. حول این کره پوستهٔ کروی هم مرکزی (با شعاع داخلی a، شعاع خارجی b و از جنس فلز) قرار دارد. روی پوسته بار خالصی وجود ندارد. شکل ۳-۵ را ببینید. (الف) چگالی بار سطحی در R، a و b را به دست آورید. (ب) پتانسیل مرکز کره را به دست آورید. (ج) بدنهٔ خارجی را به زمین وصل می کنیم تا پتانسیل آن به صفر برسد. جوابهای (الف) و (ب) چه تغییری می‌کنند؟

۳-۶ دو صفحهٔ هادی در $y = \pm \frac{۱}{a}$ قرار دارند. بار حجمی بین این دو صفحه میدان

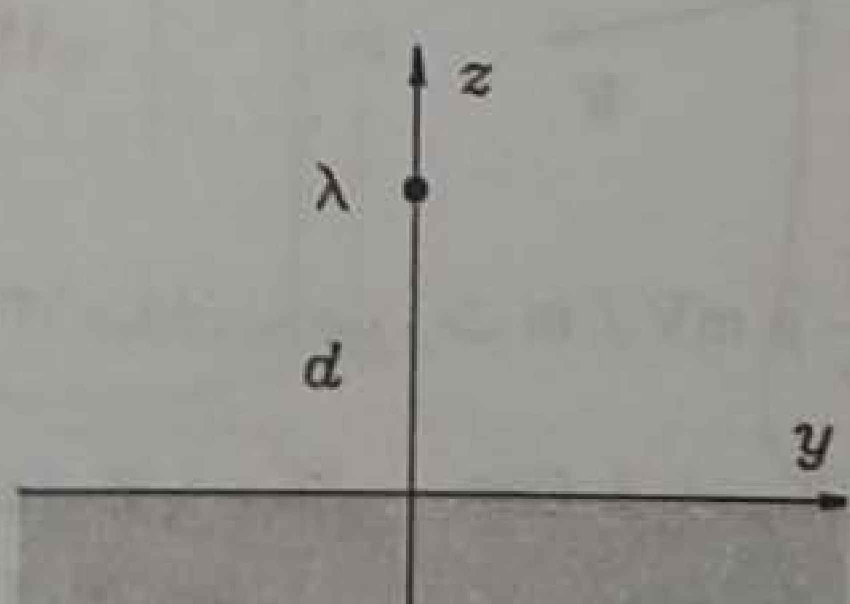
$$\mathbf{E} = \left(a\, y^{۳} + \frac{y}{a} \right) \hat{\mathbf{y}}$$

را ایجاد کرده است. چگالی بار و اختلاف پتانسیل بین دو صفحه را بیابید.

۳-۷ اگر دو صفحهٔ هادی توصیف شده در مسئلهٔ ۳-۶ را با سیم نازکی به هم وصل کنیم و بار حجمی بین دو صفحه تغییری نکند، $\mathbf{E}$ بین دو صفحه چه خواهد شد.؟

۳-۸ در لحظهٔ $t = ۰$ کره‌ای به شعاع R با رسانی ویژهٔ σ و گذردهی ε به طور یکنواخت و با چگالی k باردار شده است. می‌دانیم که به علت صفر نبودن σ این بار نهایتاً روی سطح کره ظاهر می‌شود. چگالی بار داخل کره، بار سطحی روی کره، میدانهای داخل و خارج کره را بر حسب زمان به دست آورید.

۳-۹ ناحیهٔ $z < ۰$ هادی است. یک بار خطی با چگالی λ به موازات محور x و در فاصلهٔ d از سطح $z = ۰$ قرار دارد. برای صفر شدن میدان داخل هادی بارهایی روی سطح القا می‌شود. چگالی این بارهای سطحی باید به چه نحوی باشد تا مجموع میدان حاصل از آنها و میدان ناشی از بار خطی در درون هادی صفر شود؟



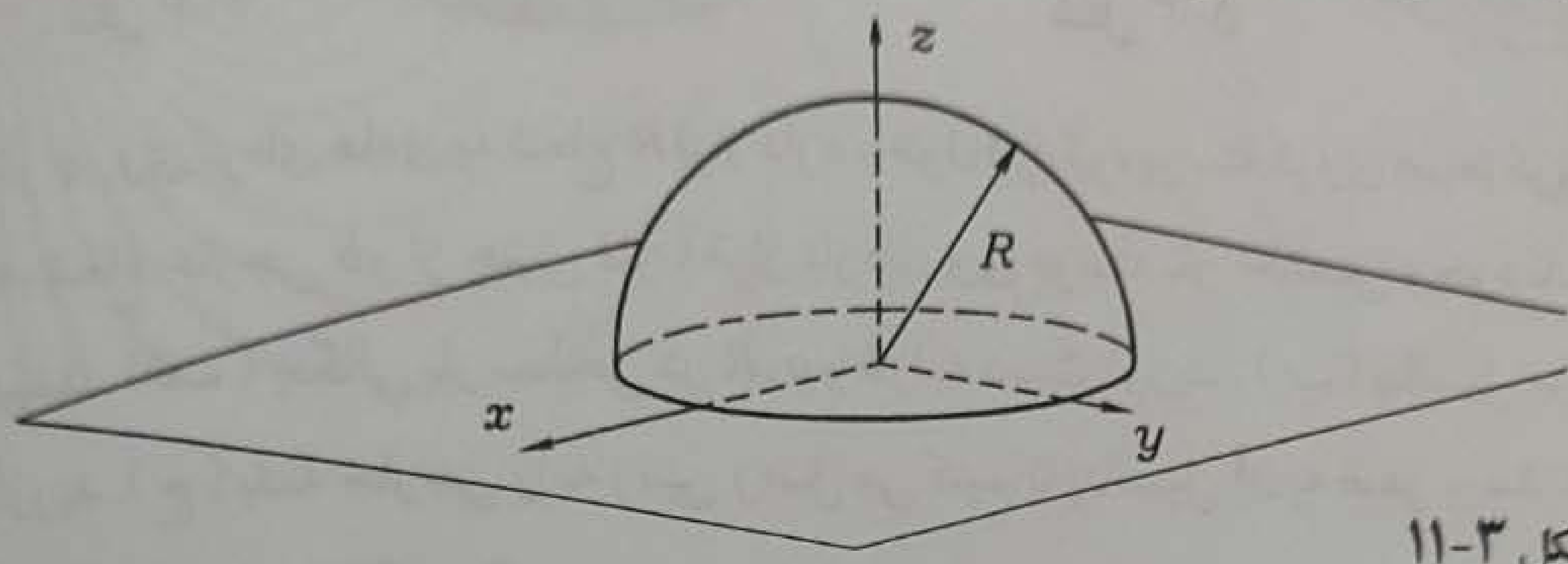
شکل ۳-۹

۳-۱۰ مسئلهٔ ۳-۹ را برای حالتی که به جای بار خطی یک بار نقطه ای قرار دارد تکرار کنید. در این حالت کل بار القاشده روی صفحهٔ هادی را بیابید.

۳-۱۱ صفحهٔ $z = 0$ و نیمکرهٔ برجستهٔ به شعاع a وسط آن از جنس هادی کامل هستند. تابع پتانسیل در فضای بالای این سطح عبارت است از

$$V = -r\cos\theta + a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}$$

چگالی بار سطحی روی سطح صاف و روی نیمکره را یافته، کل بار روی نیمکره را بیابید.



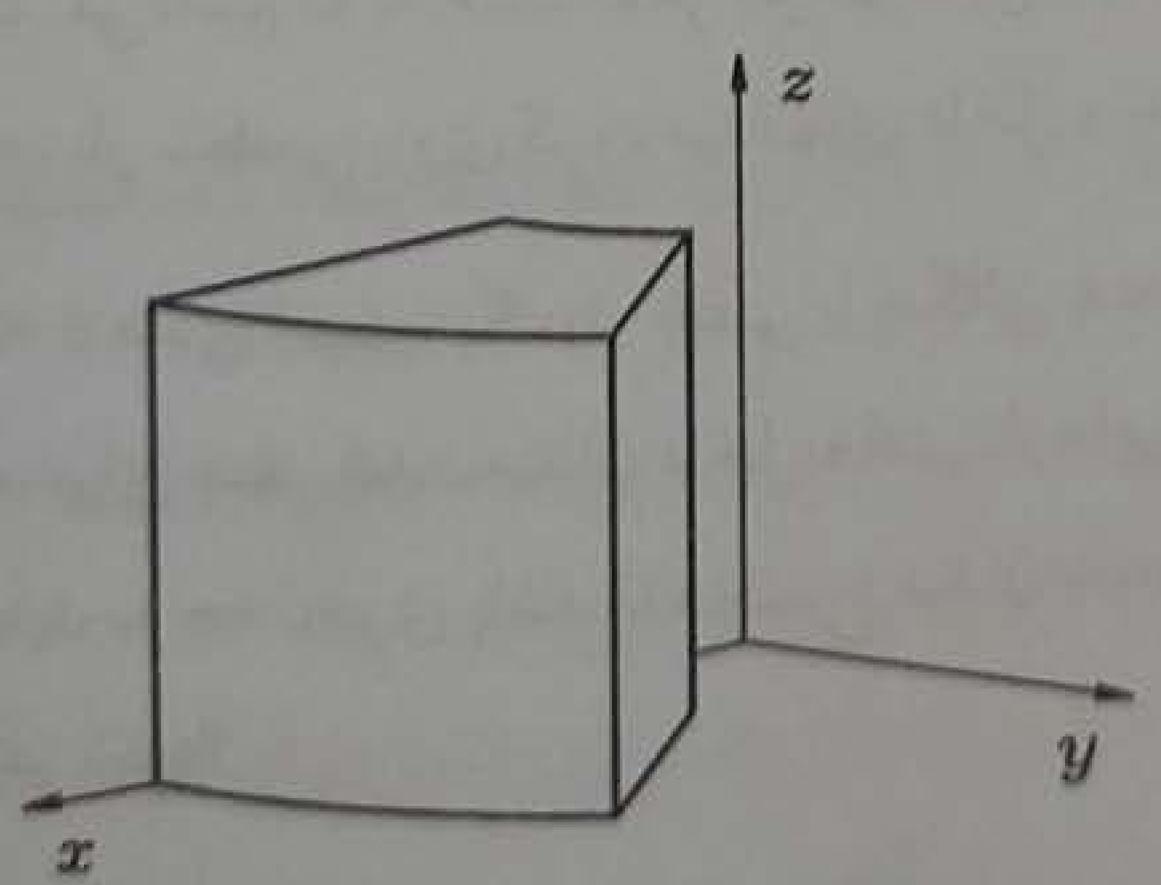
شکل ۳-۱۱

۳-۱۲ در اطراف نقطهٔ $P(5, 7, -5)$ چگالی جریان به صورت زیر است

$$\mathbf{J} = 2x^3y\hat{\mathbf{x}} - 5x^2z^2\,\hat{\mathbf{y}} + 4x^2yz\,\hat{\mathbf{z}}\ \mathrm{A/m^2}$$

مکعبی به ضلع یک متر، با اضلاع موازی محورهای مختصات و به مرکز نقطهٔ P در نظربگیرید. جریانی راکه از این مکعب خارج می‌شود به دست آورید. آهنگ افزایش چگالی بار در نقطهٔ P چقدرست؟

۳-۱۳ یک جسم با $\sigma = 5\ \mathrm{MS/m}$ فضای $4\ \mathrm{cm} < \rho < 10\ \mathrm{cm}$ ، $0 < z < 6\ \mathrm{cm}$ و $0 < \phi < 0/2\pi$ را اشغال کرده‌است. در این جسم $\mathbf{E} = \frac{2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}\ \mathrm{mV/m}$. (الف) کل جریانی که از این جسم می‌گذرد، و مقاومت این جسم را بیابید.



شکل ۳-۱۳

۳-۱۴ اگر در مسئله ۳-۱۳ میدان به صورت $E = \frac{2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}\ \mathrm{mV/m}$ باشد، جوابهای مسئله چه خواهد بود؟

۳-۱۵ یک بار خطی بی‌نهایت با چگالی $\lambda\ \mathrm{C/m}$ با سرعت v_0 در امتداد خط بار حرکت می‌کند. جریان معادل این بار چقدرست؟

شکل ۳-۱۶

۳-۱۶ صفحه‌ای با بار سطحی $\sigma\ \mathrm{C/m^2}$ با سرعت v در جهت مماس بر سطح حرکت می‌کند. چگالی جریان معادل این بار متحرک را بیابید.

۳-۱۷ جریانهای مسائل ۳-۱۵ و ۳-۱۶ با جریانی که از یک هادی می‌گذرد چه تفاوتی دارد؟

۳-۱۸ یک کرهٔ هادی کامل به شعاع R، در محیط بسیار بزرگی با رسانایی ویژه σ وگذردهی ε قرار دارد. مقاومت بین این کره و یک هادی واقع در بی‌نهایت چقدرست؟

۳-۱۹ ثابت کنید کل بارهای مقید یک جسم قطبیده صفر است.

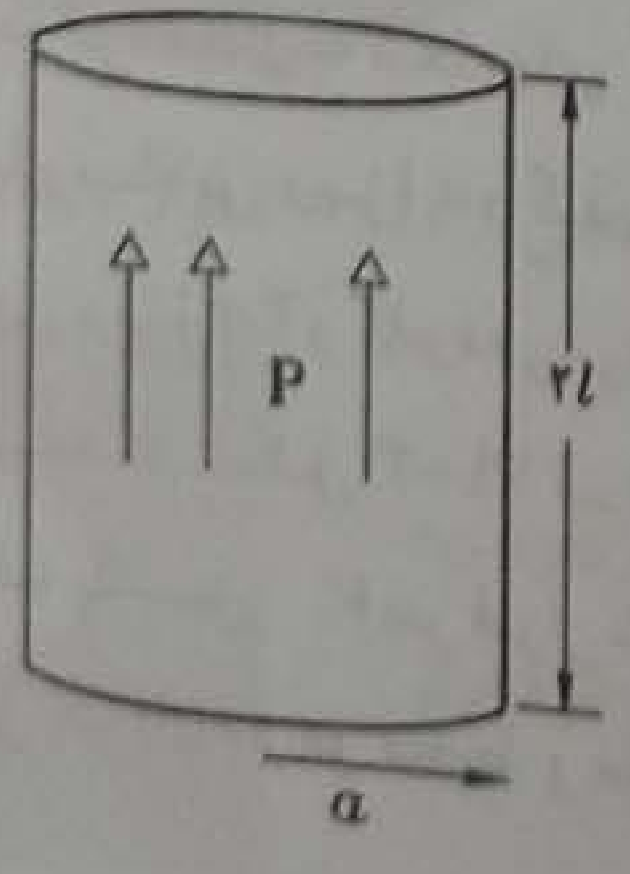
۳-۲۰ یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی a وشعاع خارجی b دارای قطبش $\mathbf{P} = k\,r\,\hat{\mathbf{r}}$ است. میدان الکتریکی سه ناحیهٔ $r < a$، $a < r < b$، و $r > b$ را بیابید.

۳-۲۱ کره‌ای به شعاع R دارای بردار قطبش $\mathbf{P} = \dfrac{k}{r}\hat{\mathbf{r}}$ (k = ثابت) است. بارهای مقید σ_b و ρ_b را یافته، میدانهای داخل وخارج کره را به دست آورید.

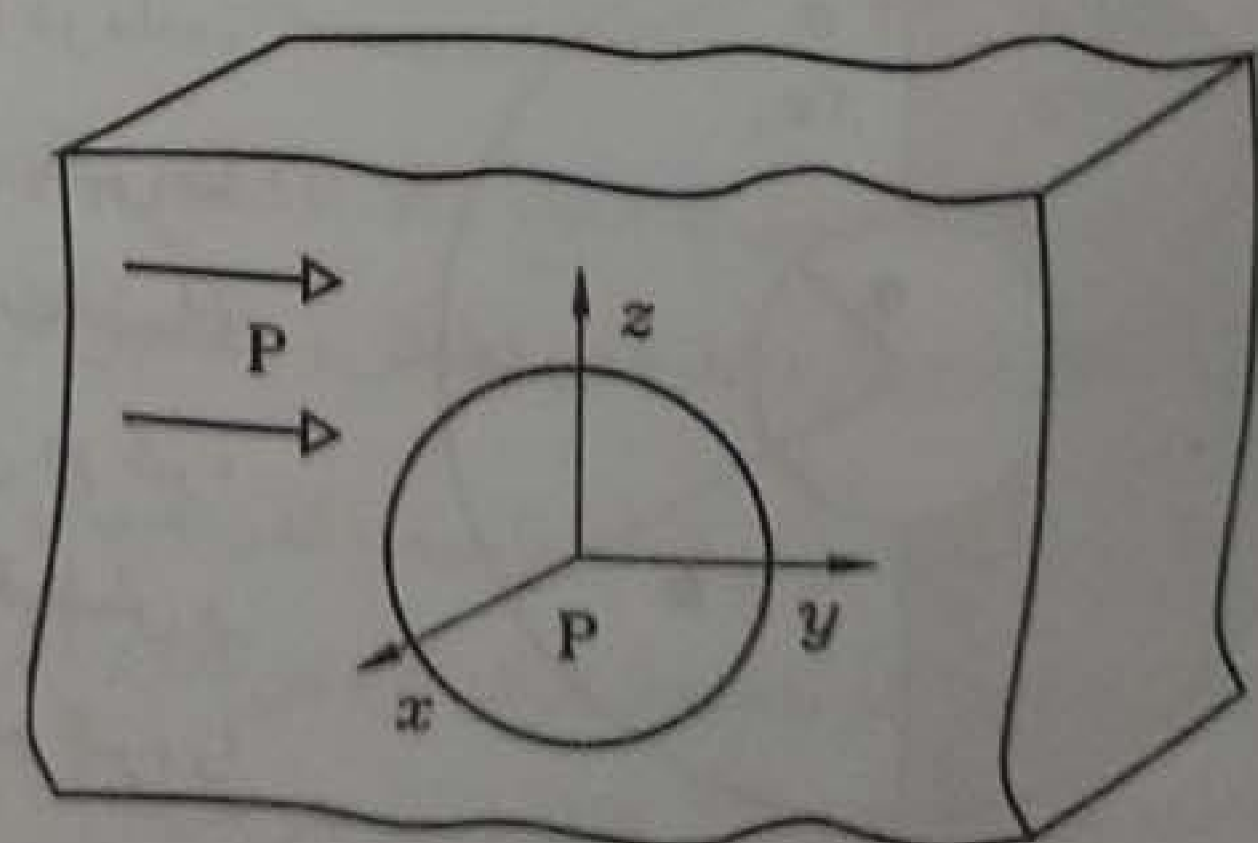
۳-۲۲ بین دو استوانهٔ هادی هم محور به شعاعهای a و b ($a < b$) عایقی غیر همگن قرار دارد. گذردهی این عایق باید به چه صورتی تغییر کند تا میدان الکتریکی در داخل آن مستقل از شعاع باشد؟ در این صورت چگالی بارهای مقید حجمی در عایق را بیابید.

۳-۲۳ یک قطعه بزرگ عایق به طور یکنواخت قطبیده شده و در داخل آن حفره‌ای کروی به شعاع a ایجاد شده است. اگر این حفره بر قطبش عایق تاثیری نگذارد، $\mathbf{E}$ در مرکز کره چقدرست؟

۳-۲۴ استوانه‌ای به شعاع a وارتفاع $2l$ به طور یکنواخت در امتداد محورش قطبیده شده است. پتانسیل الکتریکی V و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ روی محور استوانه را بیابید.



شکل ۳-۲۴



شکل ۳-۲۳

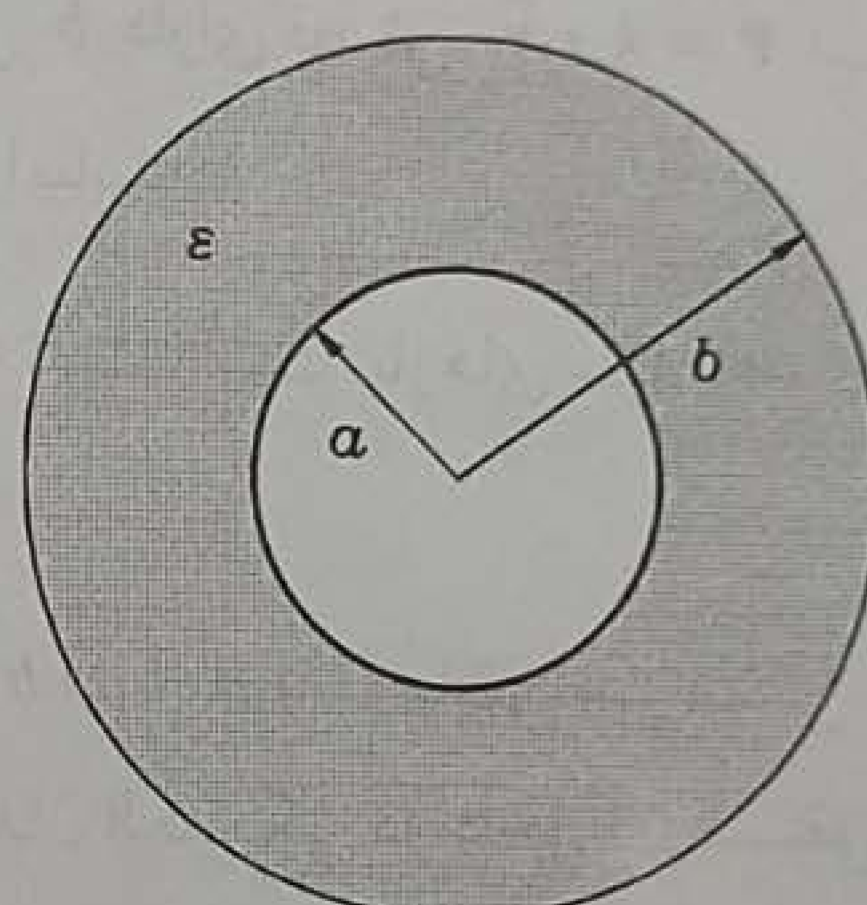
۳-۲۵ فضای بین دو سطح کروی هم مرکز به شعاعهای a و b ، $(b > a)$ عایقی ناهمگن است. بار نقطه‌ای Q را در مرکز این پوستهٔ کروی قرار داده‌ایم. E در عایق برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ b^۲}\hat{\mathbf{r}}$$

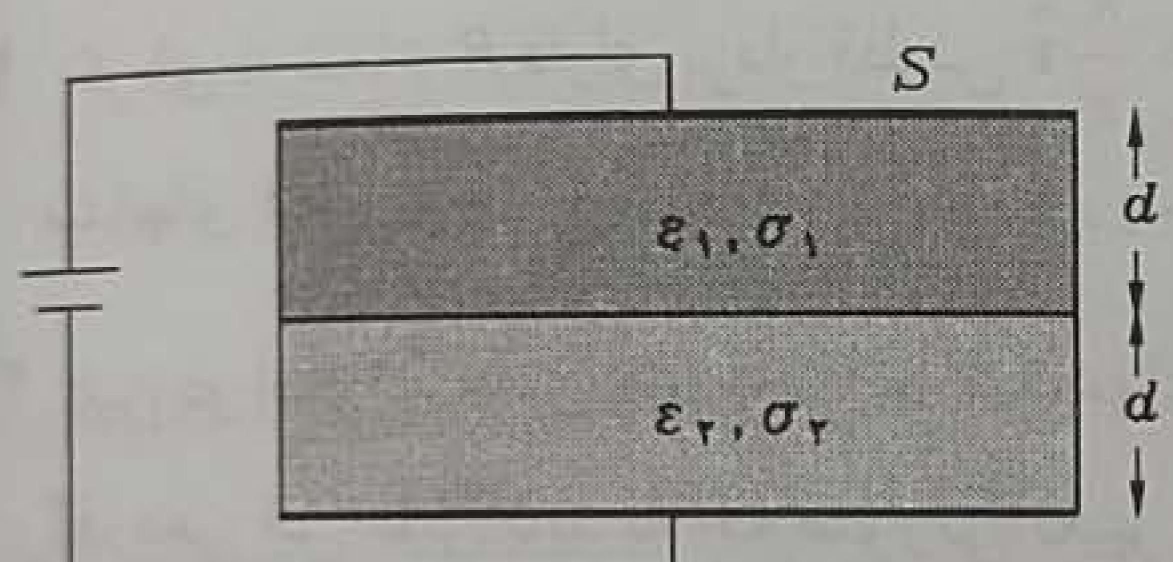
گذردهی عایق، و چگالی بارهای مقید درون و روی سطوح عایق را بیابید.

۳-۲۶ نشان دهید که در عایقهای خطی تنها در نقاطی بار مقید حجمی وجود دارد که بار آزاد وجود داشته باشد. رابطهٔ ρ_f و ρ_b را بیابید. ρ_f چگالی بار آزاد و ρ_b چگالی بار مقیدست.

۳-۲۷ بین کرهٔ هادی دارای شعاع a و پوستهٔ کروی هم مرکز با آن، به شعاع b، عایقی با گذردهی غیر یکنواخت $\varepsilon = \varepsilon_۰ / (C - \alpha r)$ قرار دارد (شکل ۳-۲۷). اگر روی هادی وسطی بار Q قرار داشته باشد، چگالی بارهای مقید داخل عایق چقدرست؟



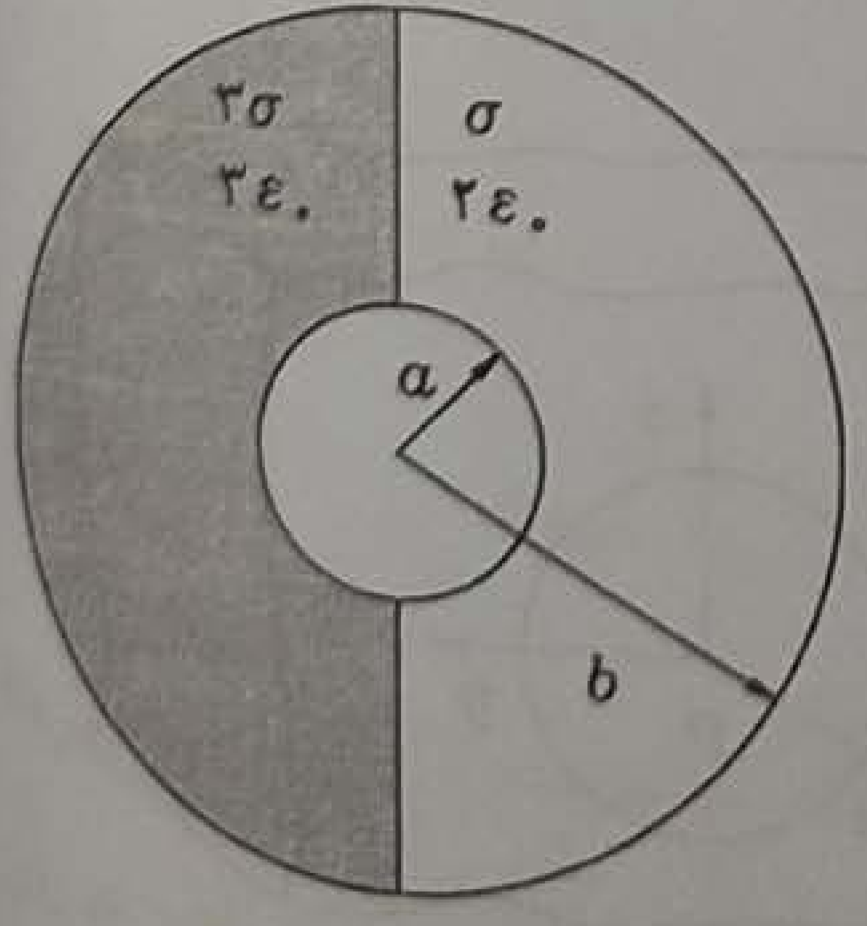
شکل ۳-۲۷



شکل ۳-۲۸

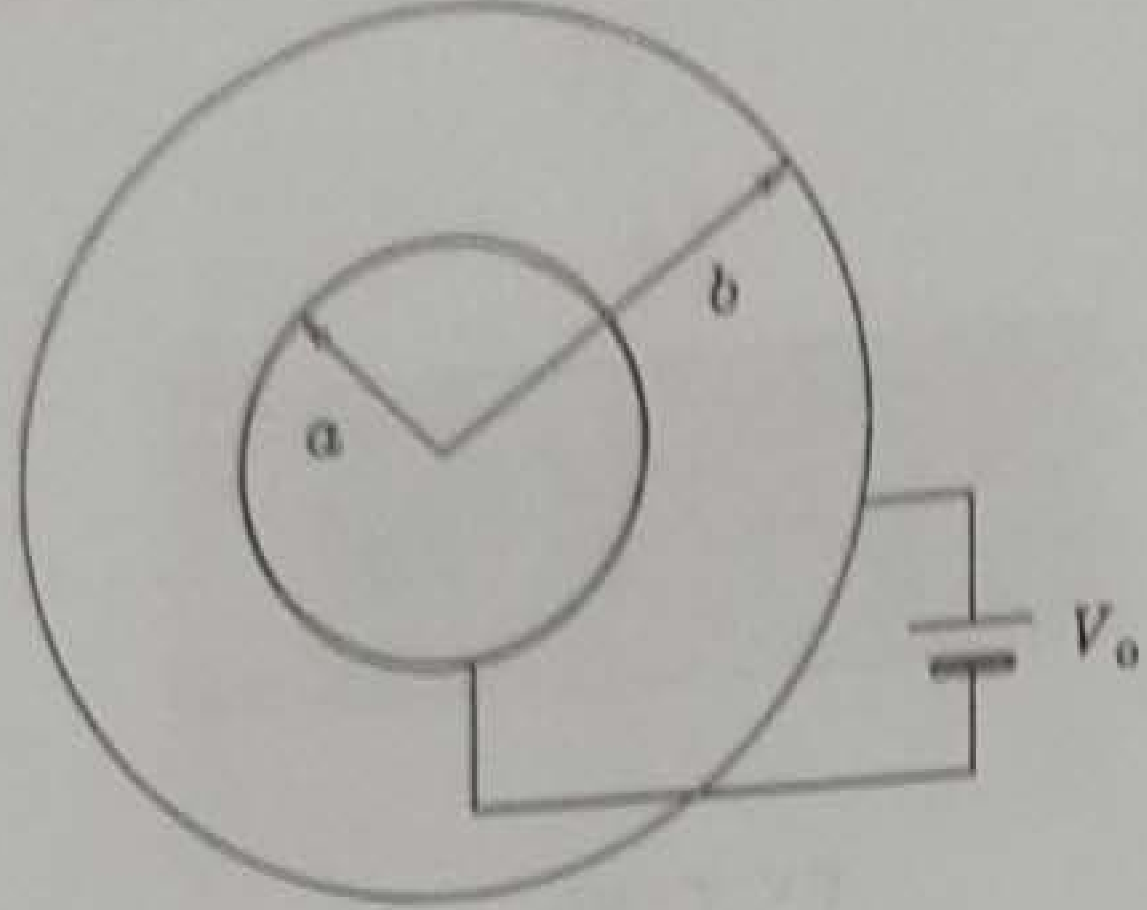
۳-۲۸ در بین دو سطح موازی که به فاصلهٔ $۲d$ از هم قرار دارند دو عایق ناقص با مشخصات $(\varepsilon_۱, \sigma_۱)$ و $(\varepsilon_۲, \sigma_۲)$ قرار دارد. مساحت صفحات S است و $\sqrt{S} >> d$. مطابق شکل ولتاژ $V_۰$ بین دو صفحه برقرار شده است. شدت میدان در دو ناحیه و چگالی بار سطحی روی صفحات و روی سطح مشترک دو عایق را بیابید.

۳-۲۹ بین دو کرهٔ هادی به شعاعهای a و $b = ۳a$ دو ماده، یکی با رسانایی ویژهٔ σ و گذردهی $۲\varepsilon_۰$ و یکی با رسانایی ویژهٔ ۳σ و گذردهی $۳\varepsilon_۰$، به صورت نشان داده‌شده در شکل ۳-۲۹ قرار دارد. بین دو کره اختلاف پتانسیل $V_۰$ برقرار شده است. قطبش و چگالی جریان در دو محیط و مقاومت بین دو کره را بیابید.



شکل ۳-۲۹

۳-۳۰ بین دو پوستهٔ هادی استوانه‌ای هم محور به شعاعهای a و b ماده‌ای با گذردهی ε و رسانایی ویژهٔ $\sigma = \frac{\sigma_0}{\rho}$ قرار دارد (ρ فاصلهٔ شعاعی تا محور استوانه است.) چگالی بارهای روی دو سطح و چگالی بار در ماده را بیابید.

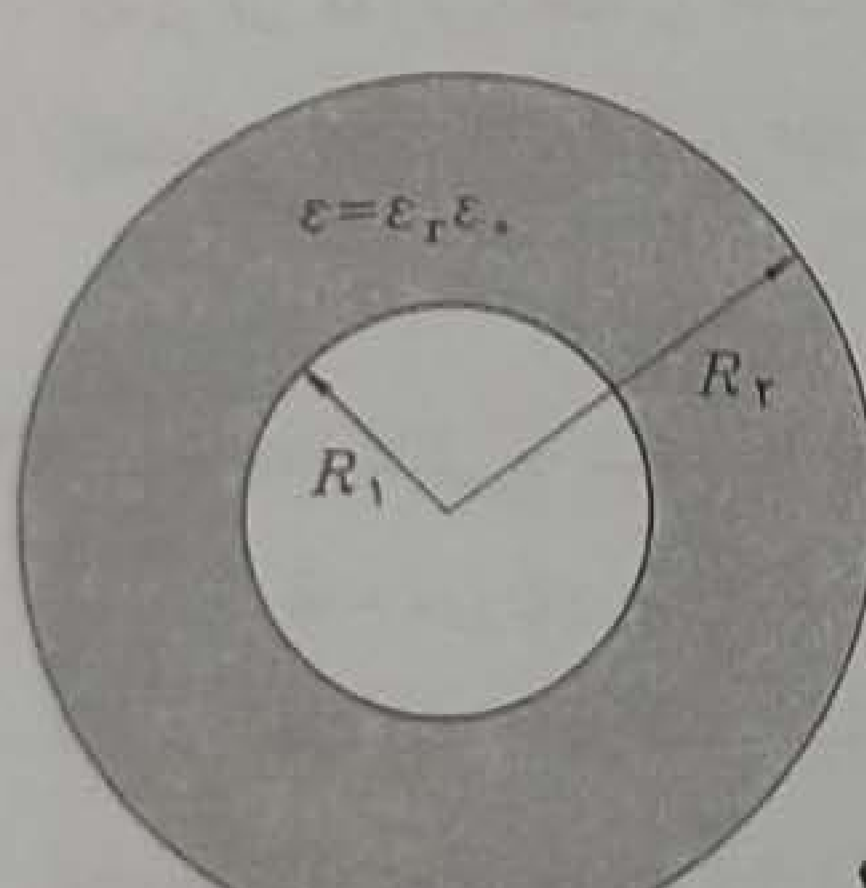


شکل ۳-۳۰

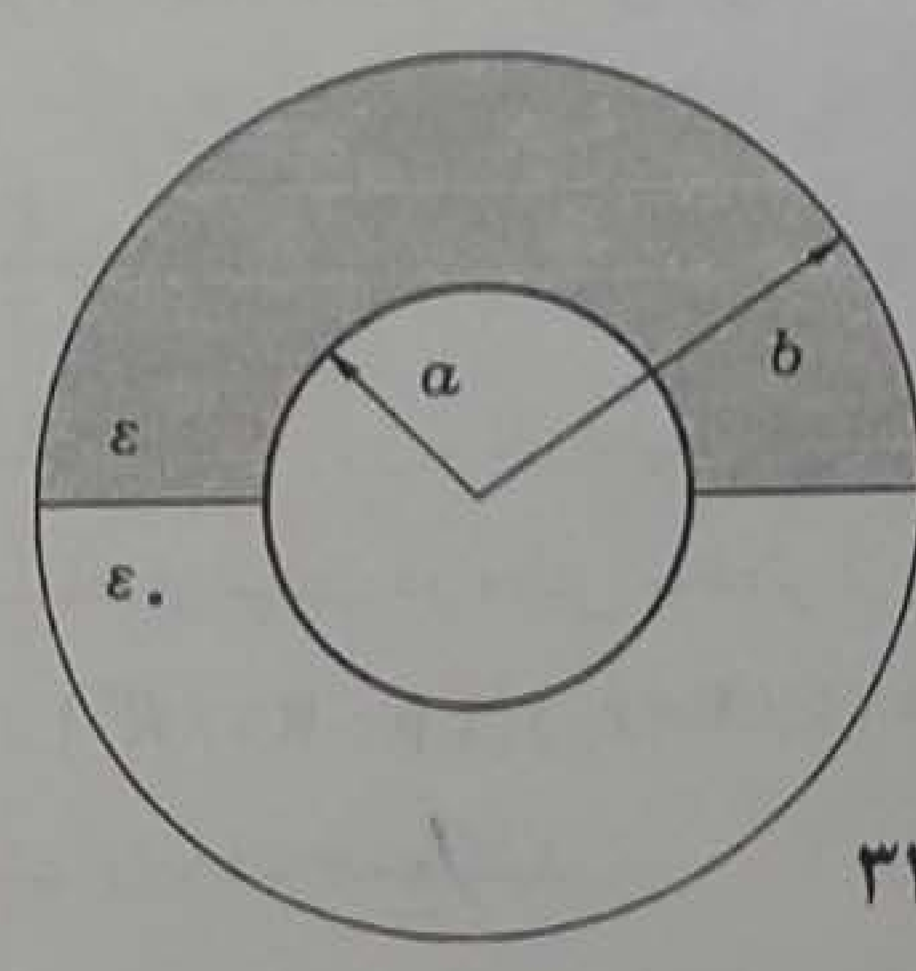
۳-۳۱ بار Q در داخل کره‌ای با گذردهی ε و شعاع a طوری توزیع شده است که میدان قطبش داخل کره در جهت شعاعی است و با $\frac{1}{r}$ متناسب است. میدانهای $\mathbf{D}$ ، $\mathbf{P}$ و $\mathbf{E}$ داخل کره و چگونگی توزیع بار را به دست آورید.

۳-۳۲ بار نقطه‌ای q در مرز دو ناحیه با گذردهی های ε_1 و ε_2 قرار دارد. $\mathbf{E}$ را در دو ناحیه بیابید.

۳-۳۳ دو کره هادی هم مرکز به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به صورت نشان داده شده در شکل ۳-۳۳ قرار دارند و نیمی از فضای بین آنها با عایقی دارای گذردهی ε پر شده و بار Q روی هادی داخلی قرار داده شده است. شدت میدان الکتریکی بین دو کره و چگالی بار روی کرهٔ داخلی، در طرف مماس با عایق و در طرف فضای آزاد را بیابید.



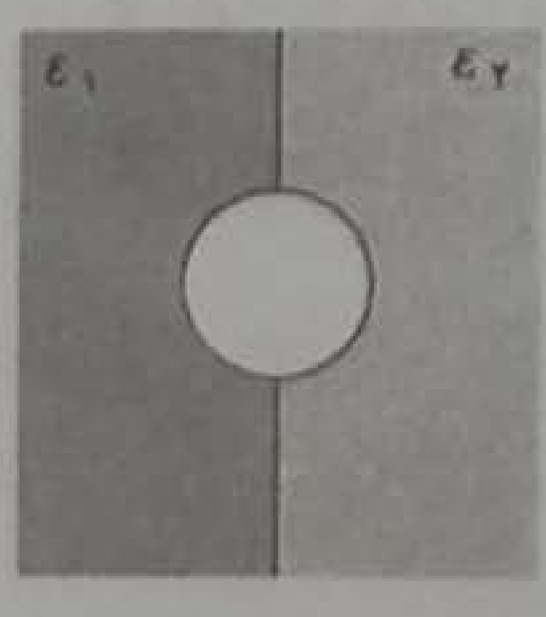
شکل ۳-۳۴



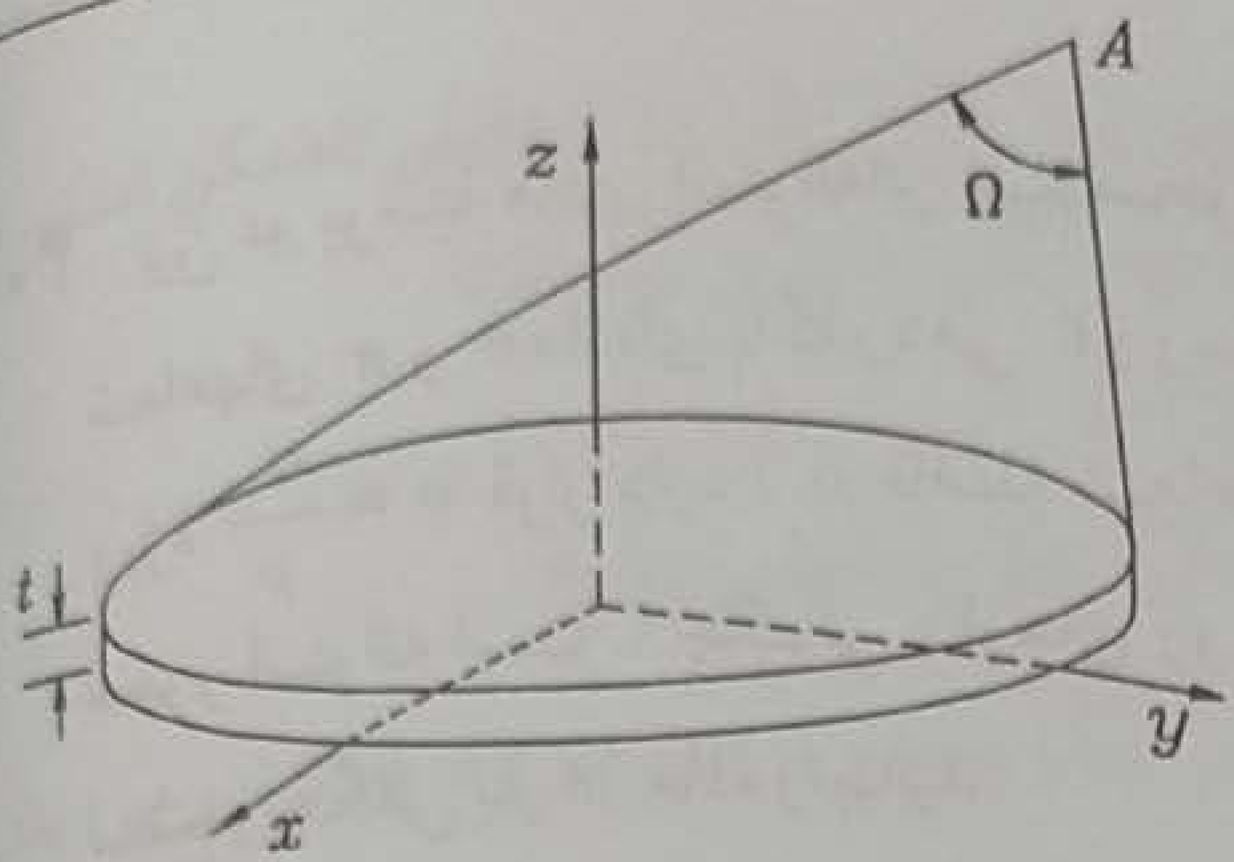
شکل ۳-۳۳

۳-۳۴ حول یک کرهٔ هادی به شعاع R_1 ، تا شعاع R_2 عایقی با گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ قرار دارد. بار Q روی کرهٔ هادی قرار دارد. بارهای قطبش و پتانسیل کرهٔ هادی را بیابید.

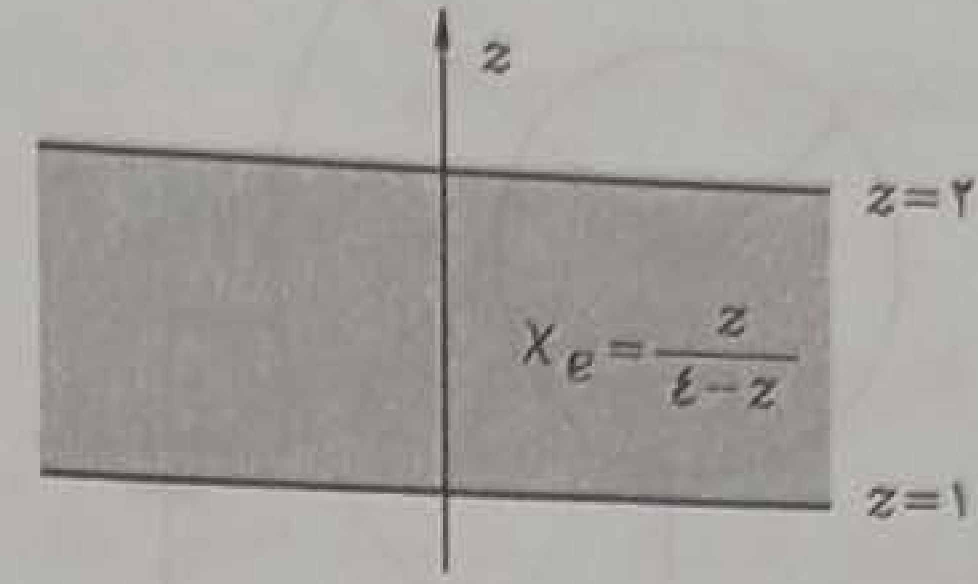
۳-۳۵ یک کرهٔ هادی در مرکز دو ناحیه با گذردهیهای ε_1 و ε_2 قرار دارد، به نحوی که مرز دو ناحیه از مرکز کره می‌گذرد. اگر بار q روی کره قرار داشته باشد، چگالی بار القاشده در هر طرف آن چقدرست؟



شکل ۳-۳۵



شکل ۳-۳۸



شکل ۳-۳۷

۳-۳٦ بار نقطه‌ای Q در مرکز یک پوستهٔ کروی عایق به شعاع داخلی $a = ۱$ و شعاع خارجی $b = ۲$ قرار دارد. گذردهی عایق به صورت $\varepsilon = \varepsilon_۰ / r$ تغییر می‌کند. چگالی بارهای مقید را بیابید.

۳-۳۷ در شکل ۳-۳۷ عایقی با گذردهی غیر یکنواخت در فضای $۱ < z < ۲$ قرار دارد. قبل از قرار گرفتن عایق میدان یکنواخت $E_۰\, \hat{\mathbf{z}}$ در فضا وجود داشته است. میدان جدید و چگالی بارهای القا شده را بیابید.

۳-۳۸ قرصی به شعاع a و ضخامت t به طور یکنواخت و عمود بر سطح آن قطبیده شده است (در شکل ۳-۳۸ $\mathbf{P} = P_۰\, \hat{\mathbf{z}}$). نشان دهید که اگر t بسیار کوچک باشد، پتانسیل در نقطهٔ A عبارت است از

$$V = \frac{P_۰\, t}{۴ \pi \varepsilon_۰} \Omega$$

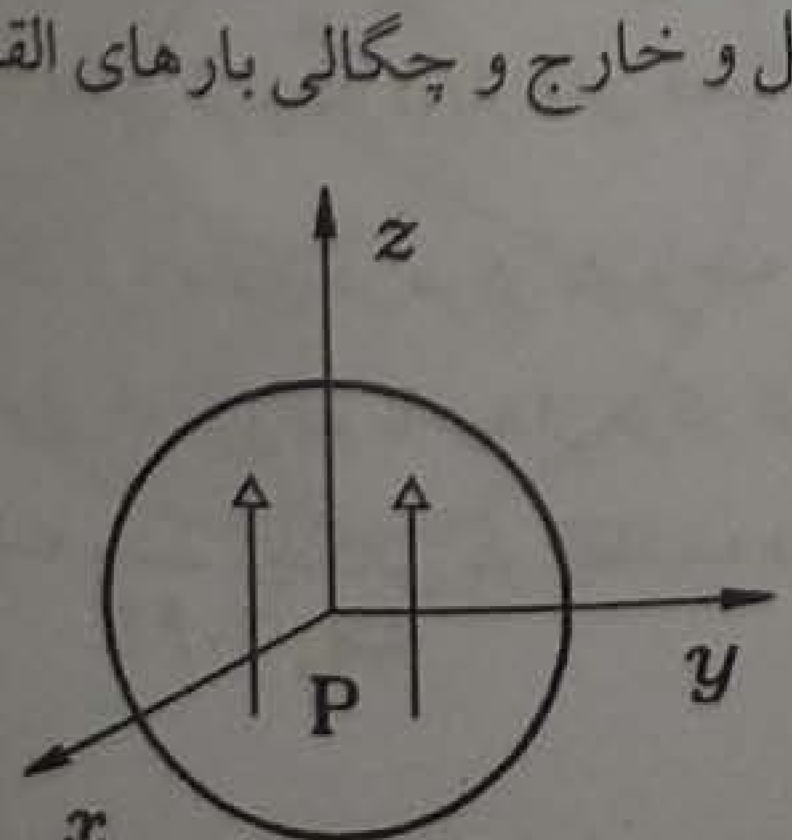
که در آن Ω زاویهٔ فضایی است که با آن قرص از نقطهٔ A مشاهده می‌شود.

راهنمایی: پتانسیل دو قطبی عبارت است از

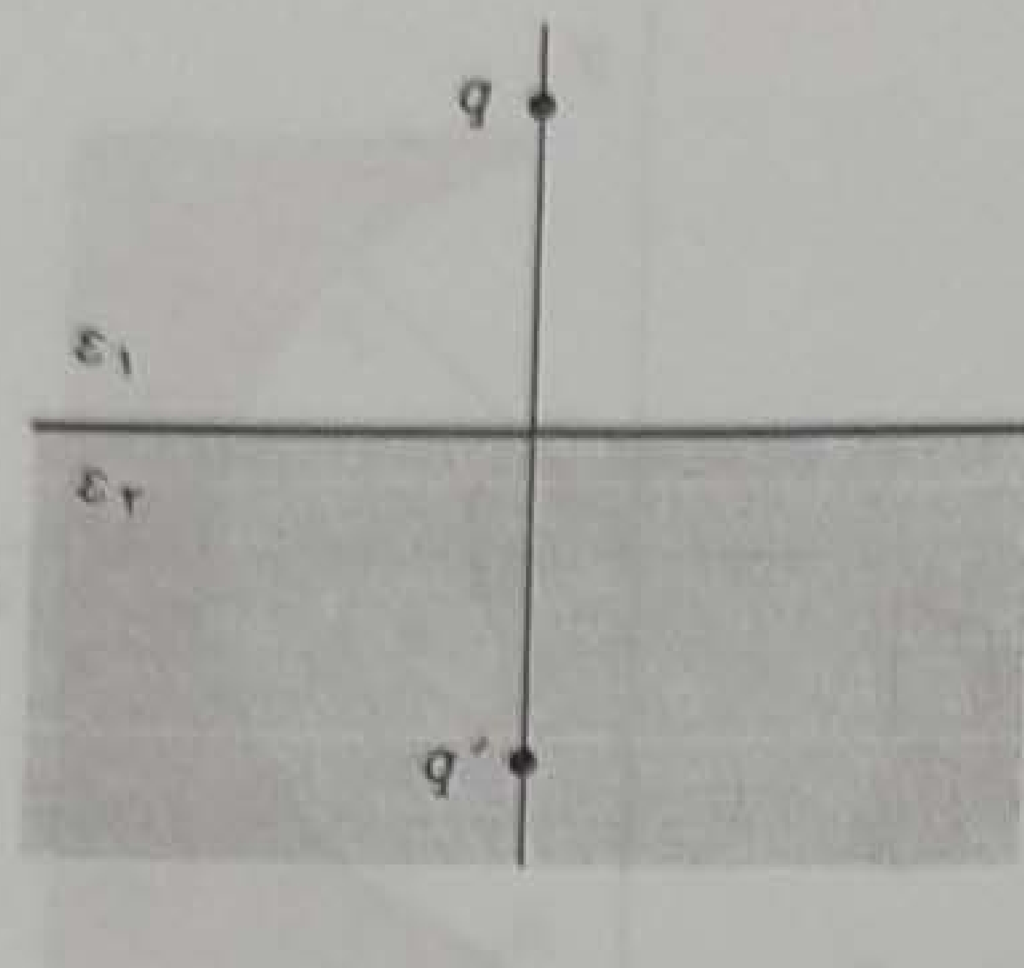
$$V = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{۴ \pi \varepsilon_۰ r^۳}$$

۳-۳۹ مرکز کرهٔ عایقی به شعاع R در مبدا مختصات قرار دارد و بردار قطبش در آن $\mathbf{P} = P_۰\, \hat{\mathbf{z}}$ است. پتانسیل نقاط درون و بیرون کره را بیابید. استفاده از میدان دو قطبی ساده‌تر از استفاده از بارهای قطبش است؛ میدان دو قطبی عبارت است از $V = (۱ / ۴ \pi \varepsilon_۰) [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}) / R^۳]$، حجم کره را به بخشهای کوچکی تقسیم کنید و پتانسیل بخشها را با هم جمع کنید.

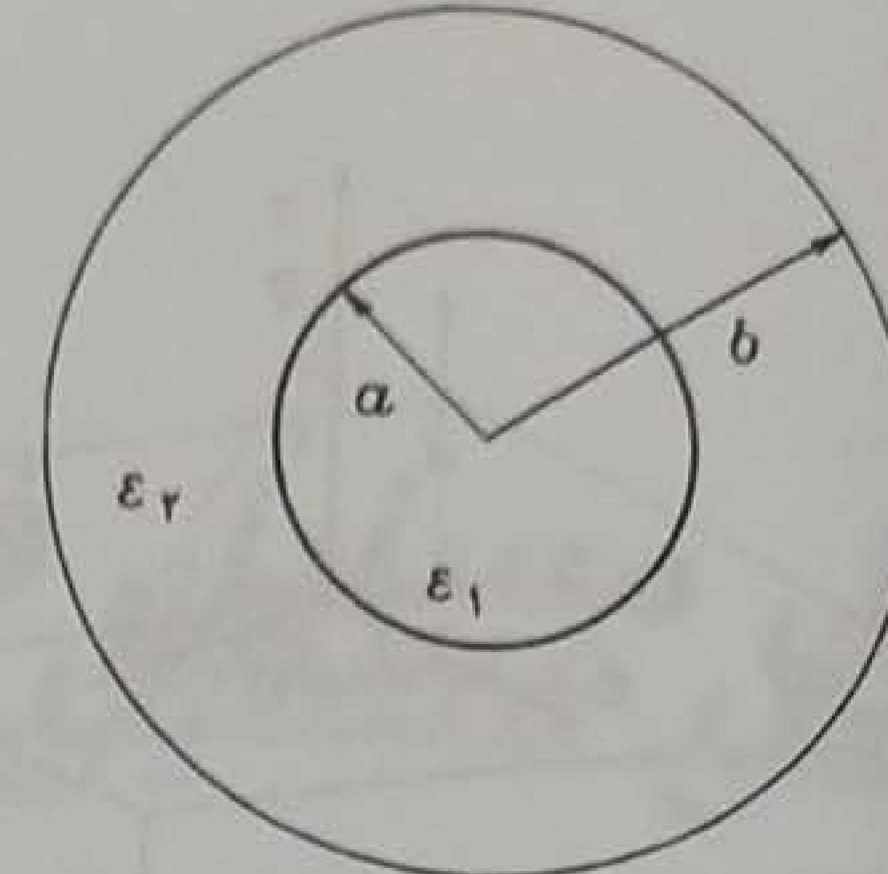
۳-۴۰ ماده‌ای با گذردهی $\varepsilon = ۴\varepsilon_۰ / (۱ + z / d)^۲$ در فضای $۰ < z < d$ قرار دارد. میدان الکتریکی $\mathbf{E} = E_۰\, \hat{\mathbf{z}}$ به این ماده اعمال شده است. میدان الکتریکی داخل و خارج و چگالی بارهای القا شده در ماده را بیابید.



شکل ۳-۳۹



شکل ۳-۴۲



شکل ۳-۴۱

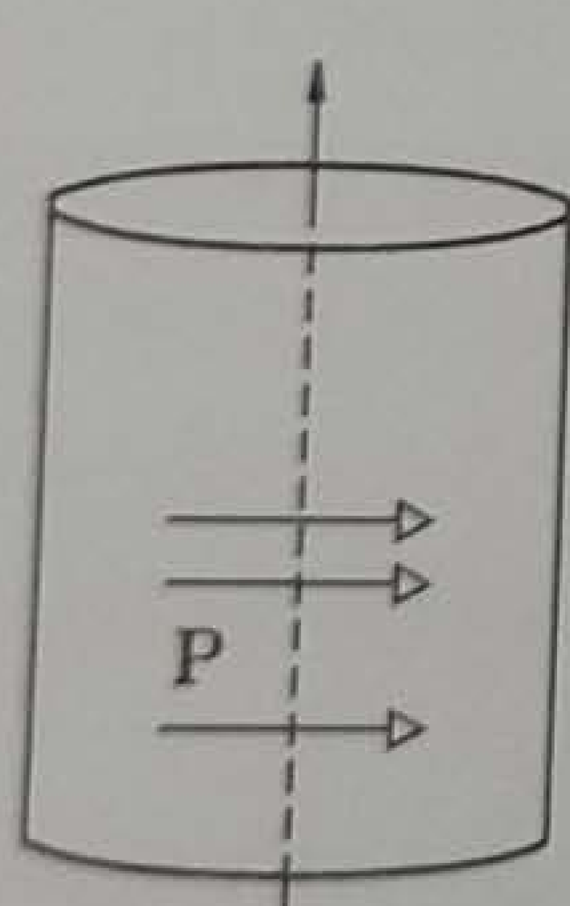
۳-۴۱ کره‌ای عایق به شعاع a دارای گذردهی ε_1 است. حول این کره تا شعاع b عایق دیگری با گذردهی ε_2 قرار دارد (شکل ۳-۴۱ را ببینید). تابع پتانسیل در کرهٔ وسطی $V_1 = A\,r\,\theta$ و در پوستهٔ کروی حول آن $V_2 = A\,a^2\,\theta\,/\,r$ است. چگالی بارهای مقید و آزاد کرهٔ داخلی را بیابید.

۳-۴۲ بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ d از مرز دو ناحیهٔ عایق با گذردهی‌های ε_1 و ε_2 قرار دارد. نشان دهید میدان داخل ناحیهٔ اول را می‌توان میدان ناشی از بار q و بار تصویر q' دانست، که هر دو در ناحیه‌ای با گذردهی ε_1 قرار داشته باشند؛ و میدان ناحیهٔ دوم را ناشی از بار q'' واقع در محل بار نقطه‌ای q، با فرض این که گذردهی کل فضا ε_2 است. به این منظور باید نشان دهید که چنین میدانهایی شرایط مرزی را ارضا می‌کنند و مقادیر مناسب q' و q'' را بیابید.

۳-۴۳ یک استوانهٔ بی نهایت به شعاع a به طور یکنواخت قطبیده شده و $\mathbf{P}$ عمود بر محور استوانه است. $\mathbf{E}$ را در داخل استوانه بیابید و نشان دهید که در بیرون استوانه

$$\mathbf{E} = \frac{a^2}{2\,\varepsilon_0\,R^2}\,[\,2\,(\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{R}})\,\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{P}\,]$$

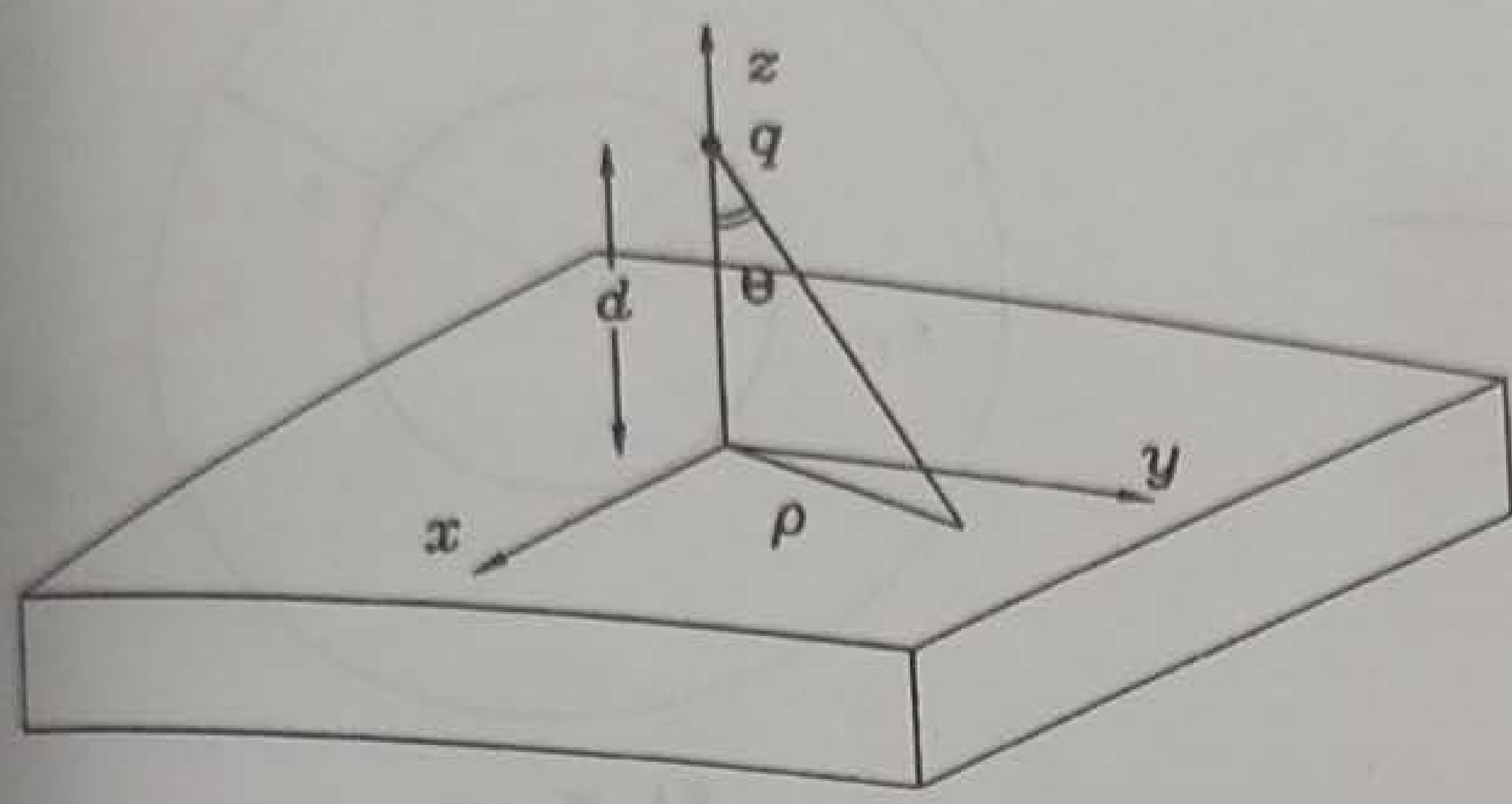
که در آن $\mathbf{R}$ بردار مکان و R اندازهٔ آن است.



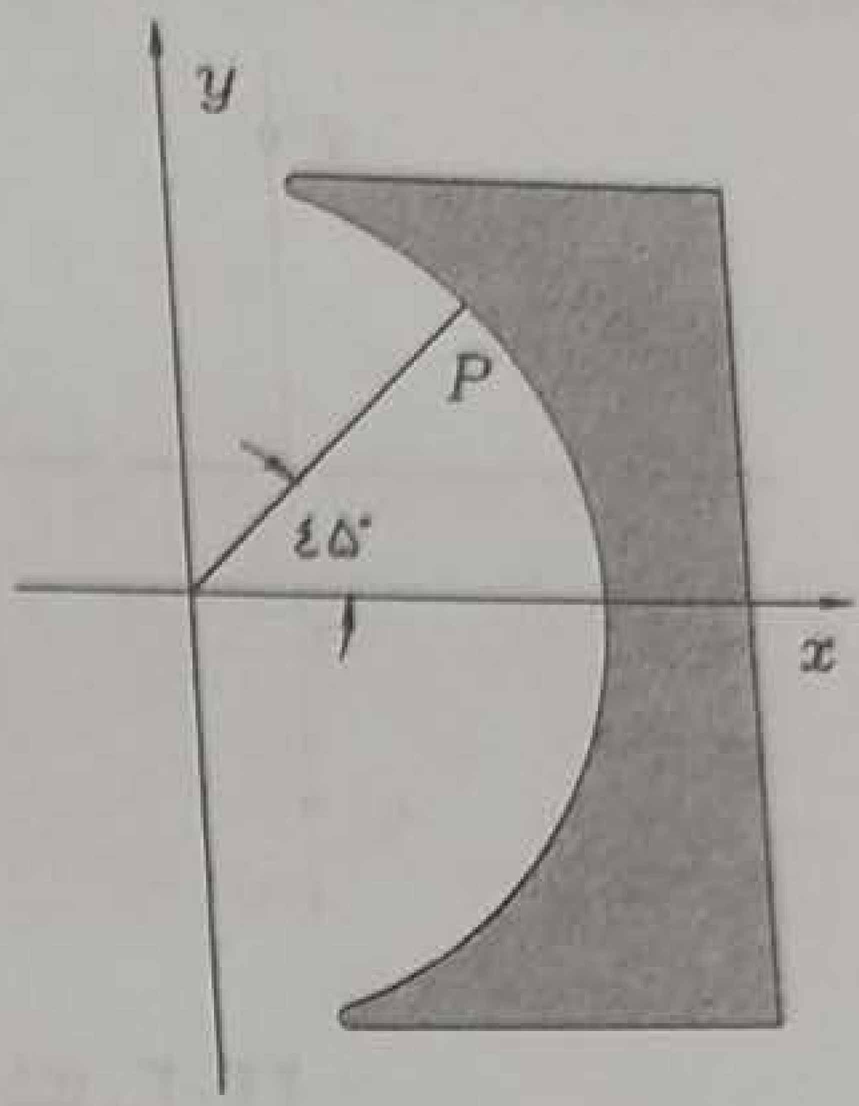
شکل ۳-۴۳

۳-۴۴ شرایط مرزی بردار قطبش $\mathbf{P}$ را بیابید.

۳-۴۵ برای همگرا کردن میدانهای الکتریکی می‌توان از عدسیهای عایق استفاده کرد. در شکل ۳-۴۵ یک عدسی نشان داده شده که سطح راست آن یک صفحه و سطح چپ آن کره‌ای به شعاع r_0 است. در نقطهٔ P میدان الکتریکی $5\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - 3\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ است. گذردهی عایق باید چه باشد تا میدان در سمت راست عدسی موازی محور x باشد؟



شکل ۳-۴۶



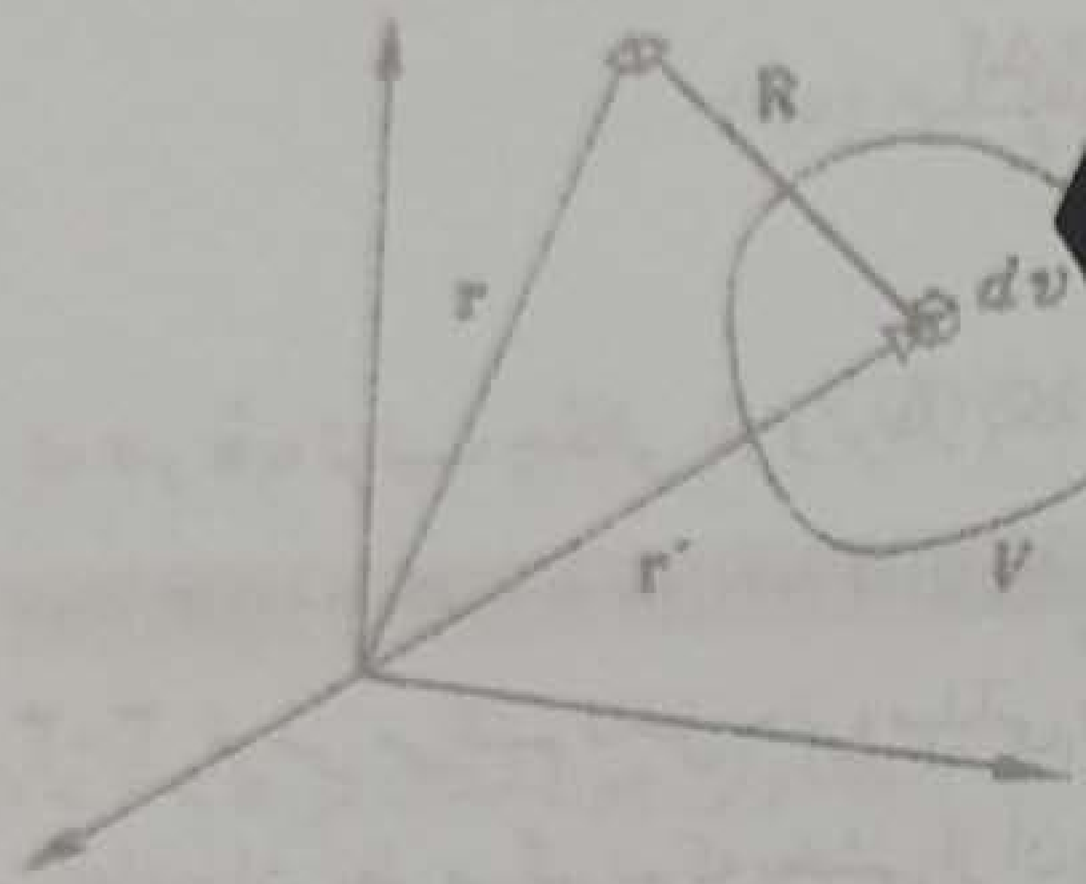
شکل ۳-۴۵

۳-۴۶ بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ d از مرز عایقی با گذردهی نسبی ε_R قراردارد. چگالی بار القا شده روی سطح را بیابید. دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ را به کار برید و کل بار القا شده روی سطح را نیز بیابید.

۳-۴۷ ناحیهٔ ۱ دارای گذردهی نسبی ۱ و ناحیهٔ ۲ دارای گذردهی نسبی ۲ است. بردار عمود بر مرز، از ناحیهٔ ۱ به سمت ناحیهٔ ۲ عبارت است از $\mathbf{A} = -2\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 14\hat{\mathbf{z}}$. اگر $\mathbf{E}_1 = 30\hat{\mathbf{x}} - 15\hat{\mathbf{y}} + 45\hat{\mathbf{z}}$، زاویهٔ بین هر یک از بردارهای $\mathbf{E}_1$، $\mathbf{D}_1$، $\mathbf{E}_2$، $\mathbf{D}_2$ و $\mathbf{A}$ را بیابید.

۳-۴۸ در اطراف یک هادی کامل عایق تلفداری با رسانایی ویژهٔ g S/m قرار دارد. معادلهٔ دیفرانسیل توصیف کنندهٔ رفتار چگالی بار سطحیِ روی هادی را بیابید. معادلهٔ به دست آمده را حل کنید.

حل مسایل فصل ۳



۳-۱ چون نقطهٔ مورد نظر روی سطح هادی است ($۴۹ = ۶^۲ + ۳^۲ + ۲^۲$) میدان $\mathbf{E}$ باید در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ باشد یعنی

$$\mathbf{E} = k\,\hat{\mathbf{r}} = k\cos\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + k\sin\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} + k\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

در نقطهٔ مورد نظر

$$\theta = \cos^{-۱}\frac{z}{r} = \cos^{-۱}\left(-\frac{۶}{۷}\right) = ۱۴۹°$$

$$\phi = \tan^{-۱}\frac{y}{x} = \tan^{-۱}\left(-\frac{۳}{۲}\right) = -۵۶٫۳°$$

پس

$$k = \frac{۱۰}{\cos\phi\sin\theta} = ۳۵$$

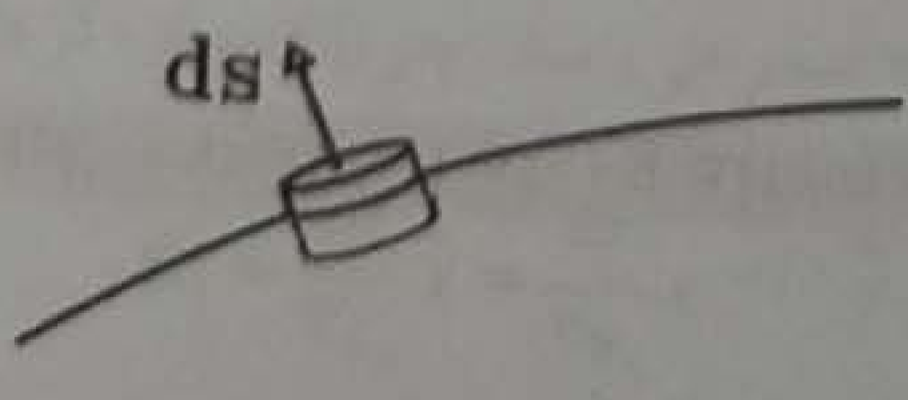
$$E_y = k\sin\phi\sin\theta = -۱۵$$

و بنابراین

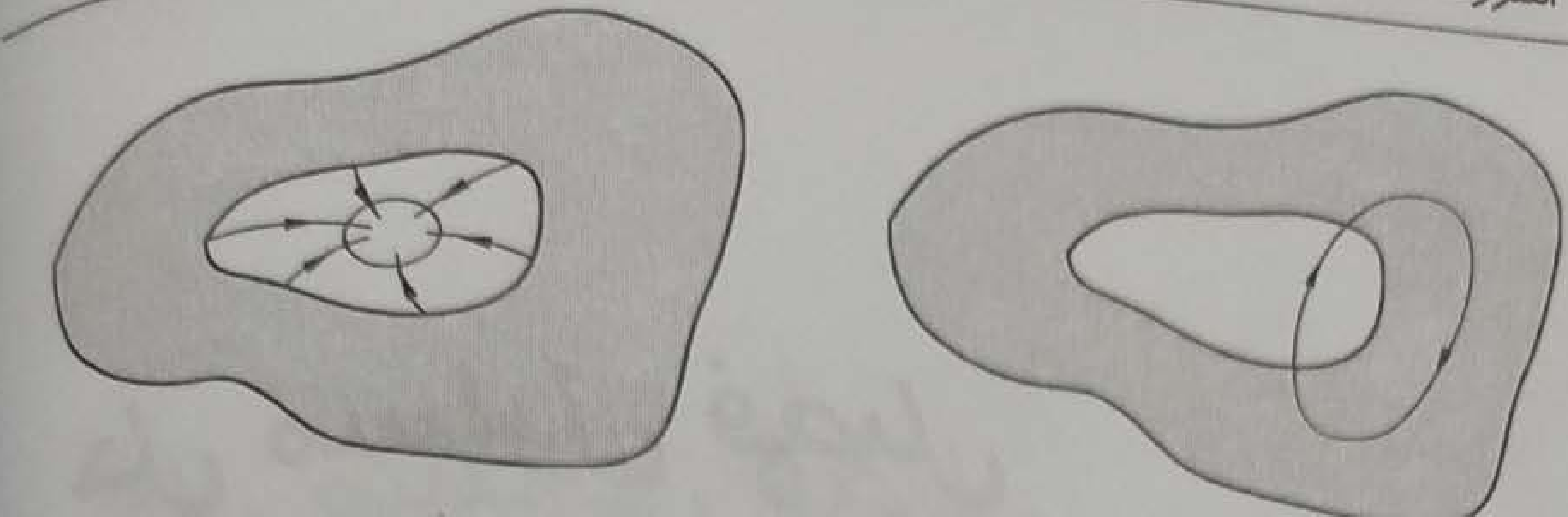
$$E_z = k\cos\theta = -۳۰$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳-۲ یک سطح گوس به صورت نشان داده شده در شکل ح ۳-۲ انتخاب می‌کنیم. میدان داخل هادی صفر است و در بالای هادی میدان بر سطح هادی عمود است. پس اگر سطح مقطع استوانه ΔS باشد



شکل ح ۳-۲



ب الف

شکل ح ۳-۳

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \Delta S \, E_n = \frac{Q}{\varepsilon_\circ} = \frac{\sigma \, \Delta S}{\varepsilon_\circ}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \hat{\mathbf{n}}$$

که σ و $\hat{\mathbf{n}}$ به ترتیب چگالی بار و بردار یکهٔ عمود بر سطح در نقطهٔ مورد نظر هستند.

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \circ \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = \circ \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = \circ \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \circ \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \circ$

۳-۳ فرض می‌کنیم داخل حفره میدانی به صورت نشان داده شده در شکل ح ۳-۳الف وجود دارد. مسیر بسته‌ای را در نظر می‌گیریم که بخشی از آن روی خط میدان و بخش دیگر آن درون هادی باشد. باید روی این مسیر داشته باشیم $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \circ$. چون داخل هادی $\mathbf{E} = \circ$، انتگرال روی بخش داخل هادی صفر می‌شود ولی در مسیر داخل حفره همواره $\mathbf{E}$ و $\mathbf{dl}$ هم جهت هستند. پس $\mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$ در تمام نقاط مسیر مقداری مثبت دارد و جمع (انتگرال) تعدادی مقدار مثبت نمی‌تواند صفر شود، پس رابطهٔ $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \circ$ برقرار نیست.

تنها راهی که برای صفر شدن انتگرال مسیر می‌ماند این است که خطوط میدان به صورت نشان داده شده در شکل ح ۳-۳ب در داخل حفره تغییر جهت دهند، ولی لازمهٔ این امر وجود بار در داخل حفره است. برای نشان دادن این امر قانون گوس را به سطح بستهٔ نشان داده شده در شکل اعمال می‌کنیم.

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \circ \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = \circ \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = \circ \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \circ \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \circ$

۴-۳ میدان داخل حفره‌ها، به خاطر تقارن و مستقل بودن میدان درون یک جسم هادی از بارهای خارج آن، عبارت است از $E_a = q_a / (۴\pi\varepsilon_\circ r^۲)$ و $E_b = q_b / (۴\pi\varepsilon_\circ r^۲)$. روی سطح داخل حفره‌ها $\sigma = -\varepsilon_\circ E_n$ (به جهت میدان توجه کنید) پس

$$\sigma_b = -q_b / ۴\pi b^۲ \quad ، \quad \sigma_a = -q_a / ۴\pi a^۲$$

برای یافتن میدان خارج کره از قانون گوس استفاده می‌کنیم و میدان را برابر $E_\circ = (q_a + q_b)/(۴\pi\varepsilon_\circ r^۲)$ به دست می‌آوریم. روی سطح کرهٔ خارجی $\sigma = \varepsilon_\circ E_n$، پس

$$\sigma_c = \frac{q_a + q_b}{۴\pi R^۲}$$

با آوردن بار سوم میدانهای داخل حفره‌ها و در نتیجه چگالیهای σ_a و σ_b تغییر نمی‌کنند، ولی میدان خارج و σ_c تغییر می‌کند.

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \circ \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = \circ \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = \circ \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \circ \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \circ$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \circ \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = \circ \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = \circ \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \circ \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \circ$

۵-۳ با استفاده از قانون گوس میدان در $a < r < R$ و $r > b$ برابر $q / ۴\pi\varepsilon_\circ r^۲$ به دست می‌آید. پس

$$\sigma_R = \varepsilon_\circ E_n = \frac{q}{۴\pi R^۲}$$
$$\sigma_a = -\varepsilon_\circ E_n = \frac{-q}{۴\pi a^۲}$$
$$\sigma_b = \varepsilon_\circ E_n = \frac{q}{۴\pi b^۲}$$

پتانسیل در $r = b$ و $r = a$ عبارت است از

$$V(a) = V(b) = -\int_\infty^b \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} dr = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ b}$$

پتانسیل در $r = R$ و $r = \circ$ عبارت است از

$$V(R) = -\int_a^R \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} dr + \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ b}$$
$$= \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{R} - \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}\right)$$

با اتصال بدنهٔ خارجی به زمین، چگالی بار روی آن صفر می‌شود ($\sigma_b = \circ$) ولی چون میدان در $a < r < b$ تغییر نمی‌کند، σR و σa همان مقدار قبلی را دارا خواهند بود. همچنین در این حالت

$$V(\circ) = V(R) = -\int_a^R \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} dr = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{R} - \frac{۱}{a}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۶-۳ به سادگی به دست می‌آوریم

$$\rho = \varepsilon_\circ \nabla\cdot\mathbf{E} = \varepsilon_\circ\left(۳ay^۲ + \frac{۱}{a}\right)$$
$$V = -\int_{-۱/a}^{۱/a}\left(ay^۳ + \frac{y}{a}\right)dy = \circ$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۷-۳ همان میدان قبلی را داریم زیرا پتانسیل دو صفحه برابر است و اتصال سیم چیزی را تغییر نمی‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۸-۳ معادلهٔ پیوستگی می‌گوید

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{J} = \sigma\,\nabla\cdot\mathbf{E} = \sigma\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$

یا $\partial\rho/\partial t + (\sigma/\varepsilon_\circ)\rho = \circ$. حل این معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$\rho = \rho_\circ e^{-t/\tau}$$

که در آن $\tau = \varepsilon_\circ/\sigma$ و $\rho_\circ$ مقدار اولیهٔ چگالی بار است. در مسئلهٔ فعلی $\rho_\circ = k$، پس $ke^{-t/\tau}$ یعنی چگالی بار تمام نقاط داخل کره کم شده و نهایتاً به صفر می‌رسد. چون همواره کره‌ای با چگالی بار یکنواخت داریم، در داخل کره

$$\mathbf{E}_i = \frac{\rho r}{۳\varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{r}} = \frac{kr}{۳\varepsilon_\circ}e^{-t/\tau}\hat{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

یعنی میدان داخل کره نیز با مرور زمان کم شده و نهایتاً به صفر می‌رسد.(همچنین چگالی جریان $\mathbf{J}$). کل بار داخل کره همواره برابر $k\,\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ می‌ماند و تقارن کروی‌اش را حفظ می‌کند، پس در خارج کره

$$\mathbf{E}_{\circ} = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ} r^{۲}}\hat{\mathbf{r}} = \frac{kR^{۳}}{۳\varepsilon_{\circ} r^{۲}}\hat{\mathbf{r}}$$

و چون در خارج کره $\sigma = \circ$، $\mathbf{J} = \circ$. روی مرز $r = a$، ناپیوستگی مولفهٔ عمودی میدان چگالی بار سطحی را به دست می‌دهد

$$\sigma_b = \varepsilon_{\circ}\mathbf{E}_{\circ} - \varepsilon_{\circ}\mathbf{E}_i$$

$$= \frac{kR^{۳}}{۳R^{۲}} - \frac{kR}{۳}e^{-t/\tau} = \frac{kR}{۳}(۱ - e^{-t/\tau})$$

یعنی چگالی بار در ابتدا صفر است و نهایتاً به $kR/۳$ می‌رسد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۳-۹ برای صفر شدن میدان داخل هادی یک بار سطحی روی هادی القا می‌شود. میدان الکتریکی ناشی از این بارها باید در داخل هادی ($z < \circ$) میدان اولیهٔ ناشی از بار خطی را خنثی کند، یعنی باید به صورت نشان داده شده در شکل ح ۳-۹ باشد. این بارها در ناحیهٔ $z > \circ$ نیز میدانی تولید می‌کنند که مشابه میدان تولید شده در $z < \circ$ است. پس در نقطهٔ دلخواه P

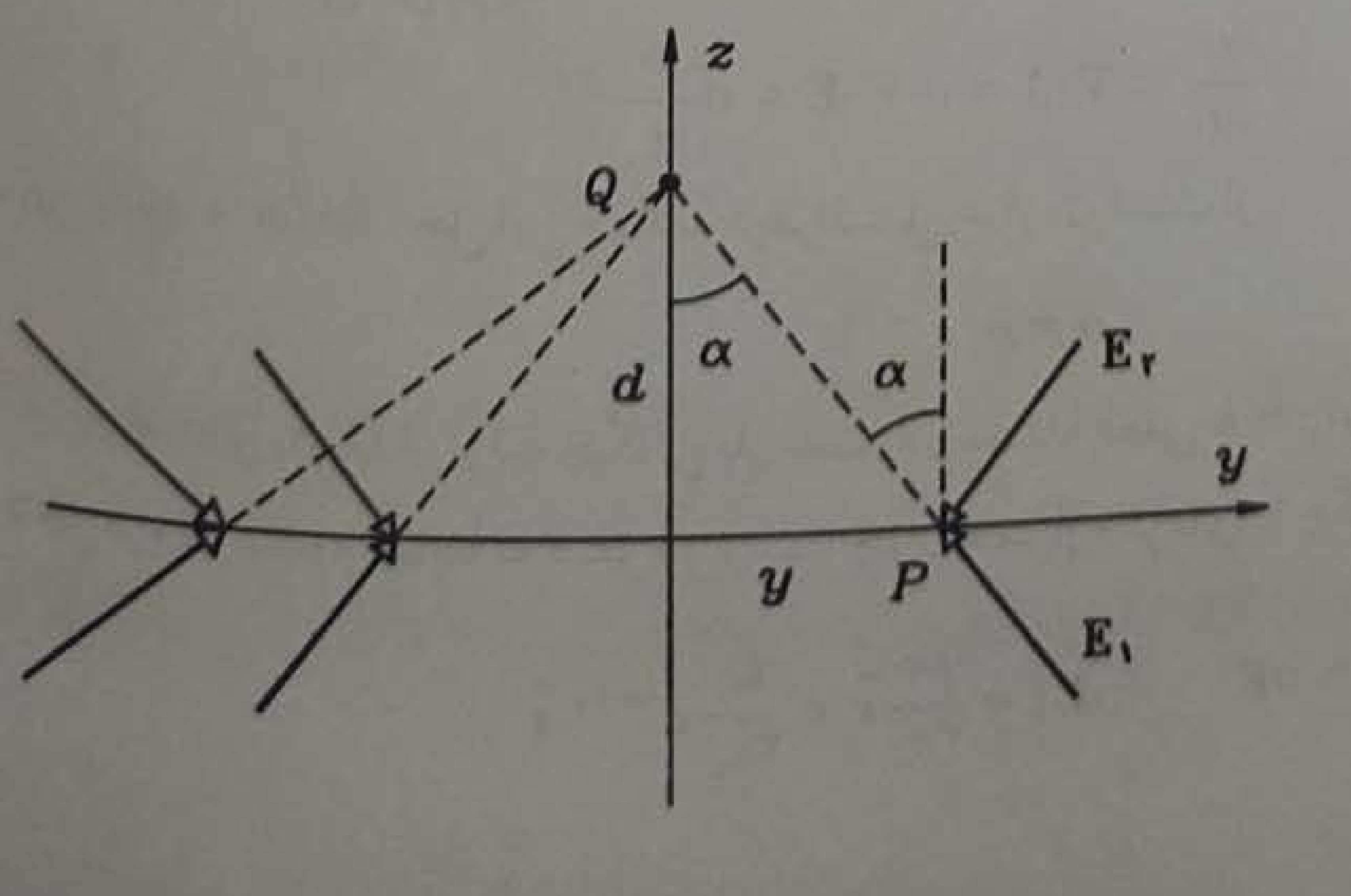
$$E_{۱} = -(\text{میدان ناشی از بار خطی در } P) = -\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_{\circ}\sqrt{d^{۲}+y^{۲}}}$$

$|\mathbf{E}_{۱}| = |\mathbf{E}_{۲}|$. جمع $\mathbf{E}_{۲}$ و میدان ناشی از بار خطی در بالای سطح هادی، میدانی عمود بر سطح هادی ایجاد می‌کنند، و اندازهٔ این میدان با چگالی بار در نقطهٔ P به صورت $E_n = \sigma/\varepsilon_{\circ}$ مرتبط است. پس

$$\sigma = -\varepsilon_{\circ}E_n = -۲\varepsilon_{\circ}|E_{۲}|\cos\alpha$$

$$= -۲\varepsilon_{\circ}\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_{\circ}\sqrt{d^{۲}+y^{۲}}}\frac{d}{\sqrt{d^{۲}+y^{۲}}}$$

$$= -\frac{\lambda d}{\pi\sqrt{d^{۲}+y^{۲}}}$$



شکل ح ۳-۹

علامت منفی به خاطر جهت میدان در سطح هادی است.

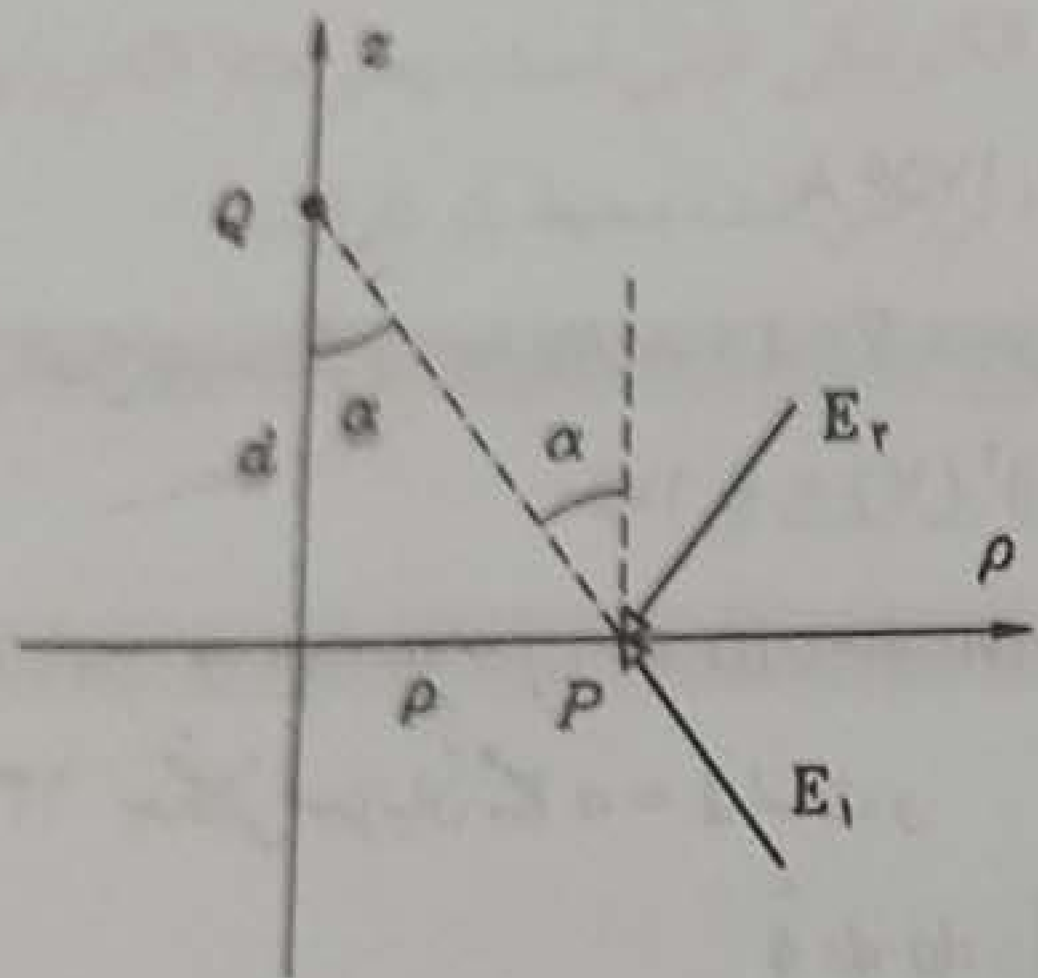
$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۳-۱۰ به همان ترتیب مسئلهٔ ۳-۹ عمل می‌کنیم ولی در دستگاه مختصات استوانه‌ای، داریم

$$E_1 = -(\text{میدان ناشی از بار } Q) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+\rho^2)}$$

کل بار القاشده روی سطح عبارت است از

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_n = -2\varepsilon_0 |E_1| \cos\alpha$$
$$= -2\varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+\rho^2)} \frac{d}{\sqrt{d^2+\rho^2}}$$
$$= -\frac{Q\,d}{2\pi(d^2+\rho^2)^{1.5}}$$



شکل ح ۳-۱۰

کل بار القاشده روی سطح عبارت است از $Q_i = \int \sigma\, ds$

$$Q_i = \frac{-Q\,d}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{(d^2+\rho^2)^{1.5}}\,\rho\, d\rho\, d\phi$$

$$Q_i = -Q\,d\int_0^{\infty}\frac{\rho\, d\rho}{(d^2+\rho^2)^{1.5}} = Qd\,\frac{1}{\sqrt{(d^2+\rho^2)}}\Bigg|_0^{\infty} = -Q$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۳-۱۱ ابتدا شدت میدان الکتریکی را می‌یابیم

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \cos\theta\left(1+\frac{2a^3}{r^3}\right)\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

شرط مرزی روی هادی کامل عبارت است از $\sigma=\varepsilon_0 E_n$. مولفهٔ عمود بر سطح روی نیمکره مولفهٔ E_r است، و چون روی این سطح $r = a$

$$\sigma = \varepsilon_0 \cos\theta\left(1+\frac{2a^3}{a^3}\right) = 3\varepsilon_0\cos\theta$$

روی سطح صاف مولفهٔ عمود بر سطح و در جهت رو به خارج هادی E_θ − است، و چون روی این سطح $\theta = \pi/2$

$$\sigma = \varepsilon_0\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)$$

کل بار روی نیمکره با انتگرالگیری به دست می‌آید

$$Q = \int \sigma\, ds = \int 3\varepsilon_0 \cos\theta\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= ۳\varepsilon_۰ a^۲ \int_۰^{۲\pi} d\phi \int_۰^{\pi/۲} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = ۳\varepsilon_۰ \pi a^۲$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳-۱۲ داریم $I = \oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla\cdot\mathbf{J})\, dv$. پس

$$I = \int_{-۵/۵}^{-۴/۵} \int_{۶/۵}^{۷/۵} \int_{۴/۵}^{۵/۵} (۶x^۲y + ۴x^۲y)\, dx\, dy\, dz$$

$$= ۱۰ \int_{۴/۵}^{۵/۵} x^۲\, dx \int_{۶/۵}^{۷/۵} y\, dy = ۱۷۵۶ \text{ A}$$

طبق اصل پیوستگی $\nabla\cdot\mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = ۰$، پس $\partial\rho/\partial t$ در نقطهٔ P برابر $-\nabla\cdot\mathbf{J}$ در آن نقطه است

$$-\nabla\cdot\mathbf{J} = -۱۰\, x^۲y = -۱۰\,(۵)^۲(۷) = -۱۷۵۰$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳-۱۳ چگالی جریان $\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E}$ است و

$$I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \int \frac{۲\sigma}{\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot d\rho\, dz\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$= ۲\times ۱۰^{-۳}\times ۵\times ۱۰^{۶} \int_{۰/۰۴}^{۰/۱} \frac{d\rho}{\rho} \int_۰^{۰/۰۶} dz = ۵۵۰ \text{ A}$$

اختلاف پتانسیل بین دو سطح را از رابطهٔ $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ می‌یابیم که در آن $d\mathbf{l} = \rho\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$، پس

$$V = \int_۰^{۰/۲\pi} d\phi = ۰{,}۴\,\pi \text{ mV}$$

و سرانجام

$$R = \frac{V}{I} = ۲{,}۲۹\ \mu\Omega$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳-۱۴ در این حالت $\mathbf{J} = \frac{۱۰^۴}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و

$$I = \int_۰^{۰/۰۶} \int_۰^{\pi/۲} \frac{۱۰^۴}{\rho}\rho\, d\phi\, dz = ۱۲۰\,\pi = ۳۷۷ \text{ A}$$

$$V = \int_{۰/۰۴}^{۰/۰۶} \frac{۲}{\rho}\, d\rho = ۲\ \ln ۲{,}۵ \text{ mV}$$

$$R = \frac{V}{I} = ۴{,}۸۶\ \mu\Omega$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳-۱۵ اگر یک نقطهٔ فرضی روی بار در نظر بگیریم در زمان Δt طولی برابر $v\,\Delta t$ از آن نقطه می‌گذرد. روی این طول بار $\Delta Q = \lambda\, v\,\Delta t$ قرار دارد، پس

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda\, v$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۴-۱۶ عنصر ds را روی سطح در نظر می‌گیریم، بار روی این عنصر $\sigma\, ds$ است که با سرعت حرکت v می‌کند. ضخامت صفحه را t در نظر می‌گیریم. پس

$$\mathbf{J} = \rho\, \mathbf{v} = \left(\frac{\text{بار}}{\text{حجم}}\right) \mathbf{v} = \frac{\sigma\, ds}{t\, ds}\, \mathbf{v} = \frac{\rho}{t}\, \mathbf{v}$$

با میل t به صفر جریان حجمی به جریان سطحی تبدیل می‌شود و $\mathbf{K} = \sigma\, \mathbf{v}$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0|\nabla\times B=\mu J|\nabla\times H=J|\nabla\cdot B=0|\nabla\cdot D=\rho|\nabla\times E=0|\oint D\cdot ds=Q|\int J\cdot ds=I|\oint H\cdot dl=I|\oint B\cdot ds=0|\oint E\cdot dl=0$

۴-۱۷ در سیمهای هادی کل محیط حامل جریان از لحاظ الکتریکی خنثی است، یعنی مثلاً الکترونها در محیطی پر از یونهای مثبت حرکت می‌کنند، ولی در دو مورد بررسی شده محیط بار دارست.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0|\nabla\times B=\mu J|\nabla\times H=J|\nabla\cdot B=0|\nabla\cdot D=\rho|\nabla\times E=0|\oint D\cdot ds=Q|\int J\cdot ds=I|\oint H\cdot dl=I|\oint B\cdot ds=0|\oint E\cdot dl=0$

۴-۱۸ شدت میدان اطراف کرهٔ هادی در محیط همگن عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{A}{r^2}\, \hat{\mathbf{r}}$$

پتانسیل این کره نسبت به بی‌نهایت عبارت است از

$$V = -\int_{\infty}^{R_0} \mathbf{E} \cdot dr = \frac{A}{R_0}$$

چگالی جریان در محیط $\mathbf{J} = \sigma\, \mathbf{E}$ است و کل جریانی را که از کره خارج می‌شود می‌توان با انتگرالگیری از چگالی جریان یافت

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{J} \cdot ds = \sigma A \int \frac{1}{r^2}\, \hat{\mathbf{r}} \cdot r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi\sigma \mathrm{A}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{A}{r_0\, 4\pi\sigma A} = \frac{1}{4\pi\sigma r_0}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0|\nabla\times B=\mu J|\nabla\times H=J|\nabla\cdot B=0|\nabla\cdot D=\rho|\nabla\times E=0|\oint D\cdot ds=Q|\int J\cdot ds=I|\oint H\cdot dl=I|\oint B\cdot ds=0|\oint E\cdot dl=0$

۳-۱۹ بارهای داخل جسم قطبیده دارای چگالی $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ هستند. کل بار داخل حجم جسم عبارت است از

$$Q_{bi} = \int \rho_b\, dv = -\int \nabla \cdot \mathbf{P}\, dv$$

طبق قضیهٔ دیورژانس

$$Q_{bi} = -\int \mathbf{P} \cdot \mathbf{ds} = -\int \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds$$

که $\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر سطح است. چون $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_b$ و $\int \sigma_b\, ds$ کل بار القا شده روی سطح است، بار القا شده روی سطح منفی بار داخل جسم، و کل بار القا شده صفرست.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0|\nabla\times B=\mu J|\nabla\times H=J|\nabla\cdot B=0|\nabla\cdot D=\rho|\nabla\times E=0|\oint D\cdot ds=Q|\int J\cdot ds=I|\oint H\cdot dl=I|\oint B\cdot ds=0|\oint E\cdot dl=0$

۳-۲۰ بارهای قطبش عبارت‌اند از

$$\rho_b = \nabla \cdot \mathbf{P} = -3k$$

چگالی بار سطحی در $r = a$ برابر $\mathbf{P} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) = -ka$ و در $r = b$ برابر $\mathbf{P} \cdot (\hat{\mathbf{r}}) = kb$ است. تمام بارها تقارن کروی دارند، پس می‌توان با استفاده از قانون گوس E را یافت

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

در $r < a$ بار صفرست، پس $E = 0$. در $b > r > a$ بار سطحی در $r = a$ و بار حجمی در فاصلهٔ b تا r باید به حساب آید. پس

$$Q = 4\pi a^2(-ka) + \int_a^r -3k\, dv$$
$$= -4\pi k a^3 - 4k\pi(r^3 - a^3) = -4k\pi r^3$$
$$\mathbf{E} = -\frac{kr}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} \qquad b > r > a$$

در $r > b$ دو بار سطحی داریم و

$$Q = 4\pi a^2(-ka) + \int_a^b -3k\, dv + 4\pi b^2(kb) = 0$$

پس در $r > b$ نیز $E = 0$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۲۱ ابتدا ρ_b را می‌یابیم

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{p} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{k}{r}\right) = -\frac{k}{r^2}$$

$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = k / R$ برای یافتن میدانها یک سطح گوس کروی در نظر می‌گیریم. به خاطر تقارن میدان تنها در جهت r مؤلفه دارد و مؤلفهٔ r نیز تابعی از θ و ϕ نیست. پس

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi r^2 E$$

به ازای $r < R$، بار داخل سطح گوس عبارت است از

$$Q = \int \rho_b\, dv = \int -\frac{k}{r^2} r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$
$$= -k\int_0^r dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -4k\pi r$$
$$\mathbf{E} = -\frac{k}{\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}} \qquad r < R$$

در $r > R$ کل بار داخل سطح صفرست زیرا جمع بارهای قطبش یک جسم صفرست و $\mathbf{E} = 0$. روش دیگر حل مسئله استفاده از این حقیقت است که چون بار آزاد نداریم $\mathbf{D} = 0$. پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}$$

در خارج کره $\mathbf{P} = 0$ پس $\mathbf{E} = 0$. در داخل کره نیز $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/\varepsilon_0 = -\frac{k}{\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}$.

۳-۲۲ در بین دو استوانه $\mathbf{D}$ عبارت است از

$$\mathbf{D} = \frac{k}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

چون $E = \dfrac{D}{\varepsilon}$ برای مستقل از ρ بودن E باید گذردهی با عکس شعاع تغییر کند، یعنی باید داشته باشیم

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\rho}$$

برای یافتن بارهای مقید ابتدا قطبش را می‌یابیم

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_{\circ}\,\mathbf{E} = \left(\frac{k}{\rho} - \frac{\varepsilon_{\circ}\,k}{\alpha}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\,D_\rho) = \frac{\varepsilon_{\circ}\,k}{\alpha\,\rho}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۳-۲۳ چگالی بارهای حجمی مقید صفر است زیرا $\nabla\cdot\mathbf{P} = \circ$. بارهای مقید سطحی عبارت‌اند از

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot(-\hat{\mathbf{r}}) = -P\,\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = -P\sin\theta\sin\phi$$

برای یافتن میدان در مرکز کره داریم $\mathbf{R} = -a\,\hat{\mathbf{r}}$ و $ds = a^{2}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$. پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\iint \frac{-P\sin\theta\sin\phi\,(-a\,\hat{\mathbf{r}})}{a^{3}}\,a^{2}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\iint \sin^{2}\theta\sin\phi\;\hat{\mathbf{r}}\,d\theta\,d\phi$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

چون در مؤلفهٔ z میدان انتگرال سینوس روی یک دورهٔ تناوب صفر است و در مؤلفهٔ x انتگرال $\sin\phi\cos\phi$ روی یک دورهٔ تناوب صفر است، میدان مؤلفهٔ z و x ندارد.

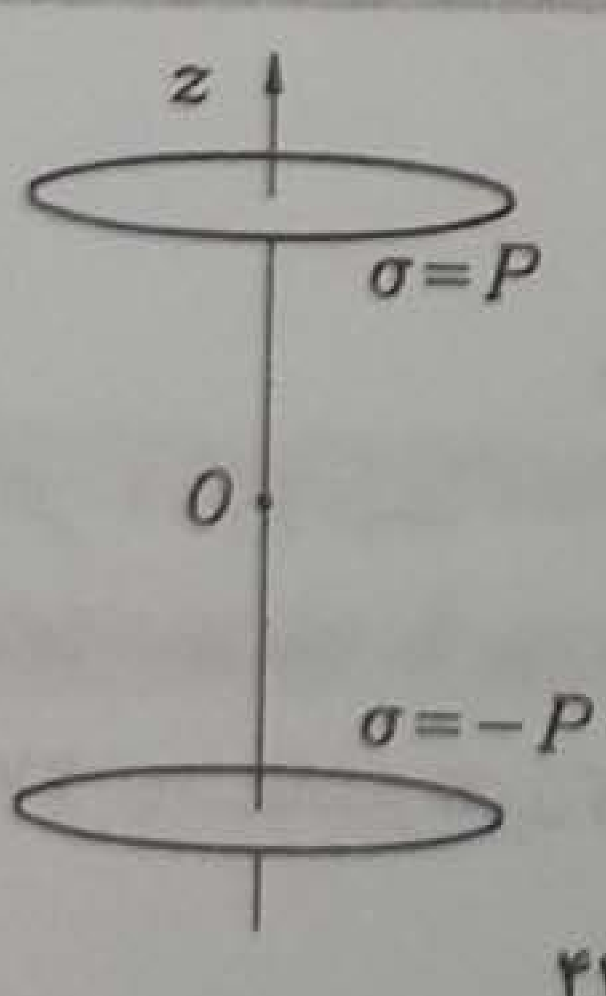
$$E_y = \frac{P}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{\pi}\sin^{3}\theta\,d\theta\int_{\circ}^{2\pi}\sin^{2}\phi\,d\phi = \frac{P}{3\varepsilon_{\circ}}$$

پس $\mathbf{E} = \mathbf{P}/3\varepsilon_{\circ}$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=\circ\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۳-۲۴ بار حجمی مقید ρ_b صفر است و روی سطوح بالا و پایین بارهای مقید با چگالی $\pm P$ وجود دارد. پس باید میدان ناشی از دو قرص دارای چگالیهای P و $-P$ واقع در $z = \pm l$ را بیابیم. چون روی محور قرصی با چگالی بار σ و شعاع R

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_{\circ}}\left(\sqrt{R^{2}+z^{2}} - z\right)$$



شکل ح ۳-۴۲

پس

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_\circ}\left(\sqrt{a^2+(z-l)^2}+2l-\sqrt{a^2+(z+l)^2}\right)$$

چون روی محور تنها مولفهٔ E_z داریم

$$E=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{P}{2\varepsilon_\circ}\left[\frac{z+l}{\sqrt{a^2+(z+l)^2}}-\frac{z-l}{\sqrt{a^2+(z-l)^2}}\right]$$

به نحوی مشابه در $-l<z<l$ داریم

$$E=-\frac{P}{2\varepsilon_\circ}\left[2+\frac{l-z}{\sqrt{(l-z)^2+a^2}}+\frac{l+z}{\sqrt{(z+l)^2+a^2}}\right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۲۵ با توجه به تقارن کروی می‌توان $\mathbf{D}$ را با استفاده از قانون گوس یافت

$$\mathbf{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

در پوستهٔ کروی

$$\varepsilon=\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}}=\frac{\varepsilon_\circ b^2}{r^2}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{D}-\varepsilon_\circ\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

$$\rho_b=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_r)=\frac{Q}{2\pi r b^2}$$

$$\sigma a=\mathbf{P}\cdot(-\hat{\mathbf{r}})=\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$

$$\sigma b=\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}}=\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۲۶ در عایقهای خطی $\mathbf{D}=\varepsilon_\circ\mathbf{E}+\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}=\varepsilon_\circ\chi_e\mathbf{E}$. همچنین $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$ و $-\nabla\cdot\mathbf{P}=\rho_b$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_\circ\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_\circ\chi_e}+\mathbf{P}=\left(1+\frac{1}{\chi_e}\right)\mathbf{P}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\left(1+\frac{1}{\chi_e}\right)\nabla\cdot\mathbf{P}$$

پس

$$\rho_b=-\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\rho_f=-\frac{\varepsilon_R-1}{\varepsilon_R}\rho_f \qquad (1)$$

پس اگر $\rho_f=0$ نتیجتاً $\rho_b=0$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۲۷ با استفادهٔ از قانون گوس به سادگی چگالی شار الکتریکی D را به صورت زیر می‌یابیم

$$\mathbf{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

بردار قطبش داخل عایق عبارت است از

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_\circ \mathbf{E} = \mathbf{D} - \varepsilon_\circ \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \mathbf{D}\left(1 - \frac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon}\right)$$

$$= \mathbf{D}(1 - C + \alpha r) = \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}(1 - C + \alpha r)\,\hat{\mathbf{r}}$$

چگالی بارهای مقید از دیورژانس به دست می‌آید

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) = \frac{-Q\alpha}{4\pi r^2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۲۸ کل مقاومت بین دو صفحه عبارت است از

$$R = R_1 + R_2 = \frac{d}{\sigma_1 S} + \frac{d}{\sigma_2 S} = \frac{d}{S}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2}\right)$$

پس جریان زیر از دو عایق می‌گذرد

$$I = \frac{V_\circ}{R} = \frac{V_\circ S}{d}\,\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

چون $d << \sqrt{S}$ می‌توان از اثر لبه ها چشم پوشید و شدت میدان و چگالی جریان را یکنواخت فرض کرد

$$J_1 = J_2 = \frac{I}{S} = \frac{V_\circ}{d}\,\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

شدت میدان در دو ناحیه عبارت است از

$$E_1 = \frac{J_1}{\sigma_1} = \frac{V_\circ \sigma_2}{d(\sigma_1 + \sigma_2)} \qquad E_2 = \frac{J_2}{\sigma_2} = \frac{V_\circ \sigma_1}{d(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

چگالی بار روی سطح مشترک دو عایق با توجه به شرایط مرزی به دست می‌آید

$$\rho_s = D_1 - D_2 = \frac{V_\circ}{d(\sigma_1 + \sigma_2)}(\varepsilon_1 \sigma_2 - \varepsilon_2 \sigma_1)$$

چگالی بار سطحی روی صفحات هادی به صورت زیرست (به جهت میدانها نسبت به صفحات توجه کنید)

$$\rho_{s1} = D_1 = \frac{V_\circ \varepsilon_1 \sigma_2}{d(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

$$\rho_{s2} = -D_2 = \frac{-V_\circ \varepsilon_2 \sigma_1}{d(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۲۹ میدان الکتریکی در جهت شعاعی است و برای پیوستگی مولفهٔ مماسی $\mathbf{E}$ روی مرز باید داشته باشیم $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$. اگر جریان بین دو کره را $I_\circ$ بنامیم داریم

$$I_\circ = \int \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{s}$$

$$= 2\pi r^2 \mathbf{J}_1 + 2\pi r^2 \mathbf{J}_2 = 2\pi r^2(\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)$$

چون $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ و $\mathbf{E}_۲ = \mathbf{E}_۱$ پس $\mathbf{J}_۲ / \sigma_۲ = \mathbf{J}_۱ / \sigma_۱$، یا $\mathbf{J}_۲ = ۳\mathbf{J}_۱$ و

$$\mathbf{J}_۱ = \frac{I_۰}{۸\pi r^۲}$$

اختلاف پتانسیل بین دو کره برابر $V_۰$ است

$$V_۰ = -\int_{۳a}^{a} \mathbf{E}_۱ \cdot \mathbf{dr} = -\int_{۳a}^{a} \frac{\mathbf{J}_۱}{\sigma_۱} \mathbf{dr} = -\frac{I_۰}{۸\pi\sigma} \int \frac{dr}{r^۲} = \frac{I_۰}{۸\pi\sigma} \frac{۲}{۳a}$$

پس مقاومت عبارت است از

$$R = \frac{V_۰}{I_۰} = \frac{۱}{۱۲\pi\sigma a}$$

$$\mathbf{E}_۱ = \mathbf{E}_۲ = \frac{۳aV_۰}{۲r^۲}\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{J}_۲ = ۳\mathbf{J}_۱ \quad , \mathbf{J}_۱ = \frac{۳a\sigma V_۰}{۲r^۲}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{P}_۱ = \varepsilon_۰ (\varepsilon_{R۱} - ۱) \mathbf{E}_۱ = \frac{۳\varepsilon_۰ a\sigma V_۰}{۲r^۲}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{P}_۲ = \varepsilon_۰ (\varepsilon_{R۲} - ۱) \mathbf{E}_۲ = \frac{۳\varepsilon_۰ a\sigma V_۰}{r^۲}\hat{\mathbf{r}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ | \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} | \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} | \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ | \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho | \nabla\times\mathbf{E}=۰ | \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q | \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I | \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I | \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ | \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳۰-۳ جریانی را که از باتری می‌گذرد I فرض می‌کنیم. چگالی جریان به صورت شعاعی است و به خاطر تقارن به ϕ و z بستگی ندارد، پس $\mathbf{J} = I / ۲\pi\rho l \hat{\boldsymbol{\rho}}$. شدت میدان الکتریکی برابر $\mathbf{J}/\sigma$ است. پس

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = \frac{I}{۲\pi\sigma_۰ l}\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

حال اختلاف پتانسیل بین دو هادی را می‌یابیم

$$V_۰ = -\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\int \mathbf{E}\cdot d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{I}{۲\pi\sigma_۰ l}(b-a)$$

پس

$$\mathbf{E} = \frac{V_۰}{b-a}\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \text{و} \quad I = \frac{۲\pi\sigma_۰ l}{(b-a)}V_۰$$

$$\text{چگالی بار حجمی} = \nabla\cdot\mathbf{D} = \frac{\varepsilon V_۰}{\rho(b-a)} \quad , \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon V_۰}{b-a} \qquad \sigma_b = \frac{-\varepsilon V_۰}{b-a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ | \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} | \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} | \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ | \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho | \nabla\times\mathbf{E}=۰ | \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q | \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I | \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I | \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ | \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۳۱-۳ با توجه به شعاعی بودن میدان داریم

$$\mathbf{P} = \frac{K}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

حال رابطه‌ای بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{P}$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_۰\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E} - \varepsilon_۰\mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_۰)\mathbf{E}$$

و نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{E} = \frac{K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)\, r}\,\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{D} = \varepsilon\, \mathbf{E} = \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)\, r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)\, r^2}$$

تمام عبارتهای بالا بر حسب Kاست ؛اکنون باید K و Q را به هم ربط دهیم

$$Q = \int \rho\, dv = \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)} \int_0^{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r^2}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{\varepsilon K \times 4\pi a}{(\varepsilon - \varepsilon_0)}$$

پس Kعبارت است از

$$K = \frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{4\pi a \varepsilon}$$

و میدانها به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi a r}\,\hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi a \varepsilon r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a r^2} \quad , \quad \mathbf{P} = \frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{4\pi Q \varepsilon r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۳۲ میدان الکتریکی شعاعی می‌تواند جواب مسئله باشد. چون در مرز میدان الکتریکی مماسی پیوسته است نتیجه می‌گیریم $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$. در دو محیط $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}$ و $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}$. یک سطح کروی به عنوان سطح گوس در نظر می‌گیریم

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = q = 2\pi r^2 \mathbf{D}_1 + 2\pi r^2 \mathbf{D}_2$$

$$q = 2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, \mathbf{E}$$

پس میدان در دو محیط عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{q}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

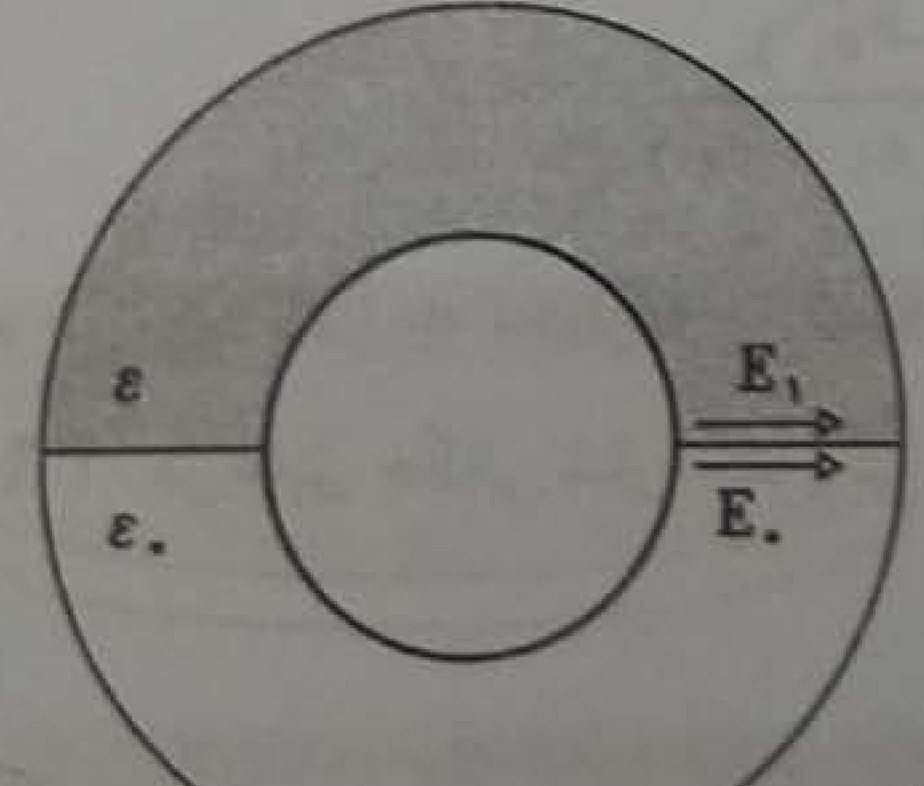
۳-۳۳ میدان شعاعی است و چون در مرز عایق باید مولفهٔ مماسی میدان الکتریکی پیوسته باشد $E_1 = E_0$ (شکل ح ۳-۳۳) . پس میدان داخل عایق و داخل فضای آزاد یکسان است. D در دو محیط εE_0 و $\varepsilon_0 E_0$ است. حال طبق قانون گوس

$$Q = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int \varepsilon E_0\, d\mathbf{s} + \int \varepsilon_0 E_0\, d\mathbf{s}$$

$$= 2\pi r^2 \varepsilon E_0 + 2\pi r^2 \varepsilon_0 E_0$$

پس

$$E_0 = \frac{Q}{2\pi r^2 (\varepsilon + \varepsilon_0)}$$



شکل ح ۳-۳۳

چگالی بار روی هادی با مولفهٔ عمودی D برابرست، پس

$$\sigma_1 = \varepsilon E_\circ = \frac{\varepsilon Q}{2\pi a^2 (\varepsilon + \varepsilon_\circ)} \qquad \sigma_\circ = \varepsilon_\circ E_\circ = \frac{\varepsilon_\circ Q}{2\pi a^2 (\varepsilon + \varepsilon_\circ)}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۳۴ با توجه به تقارن کروی مسئله می‌توانیم $\mathbf{D}$ را با استفاده از قانون گوس به صورت زیر بیابیم

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

در عایق $\mathbf{E}_i = \mathbf{D}/\varepsilon$ و

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_\circ \mathbf{E}_i = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

چگالی بارهای مقید به صورت زیرست

$$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P} = 0$$

$$\sigma_{b1} = \mathbf{P}\cdot(-\hat{\mathbf{r}}) = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\,\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} \qquad r = R_1$$

$$\sigma_{b2} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi R_2^2}\,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \qquad r = R_2$$

پتانسیل را اینگونه می‌یابیم

$$V = -\int_\infty^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\,dr - \int_{R_2}^{R_1}\mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_\circ R_2} + \frac{1}{\varepsilon R_1} - \frac{1}{\varepsilon R_2}\right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۳۵ همانند مسئلهٔ ۳-۳۲ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\hat{\mathbf{r}}$$

در دو محیط داریم $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_\circ)\mathbf{E}$ یعنی

$$\mathbf{P}_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_\circ)}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\,\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{P}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_\circ)}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\,\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

در روی کره $\sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$، یعنی

$$\sigma_1 = \mathbf{P}_1\cdot(-\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_\circ)}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\sigma_2 = \mathbf{P}_2\cdot(-\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_\circ)}{2\pi R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۳۶ در عایق چگالی شار الکتریکی عبارت است از $\mathbf{D} = [Q/4\pi r^2]\hat{\mathbf{r}}$. چون $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_\circ\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

اکنون بارهای مقید را به دست می‌آوریم

$$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{Q}{16\pi}$$ در $r=2$

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot(-\hat{\mathbf{r}}) = \frac{Q}{4\pi}(1-1) = 0$$ در $r=1$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۳۷ تقارن مسئله در جهتهای y و x نشان می‌دهد که میدان ثانویه مستقل از y و x است و تنها مولفهٔ $\hat{\mathbf{z}}$ دارد. میدان درون عایق را $\mathbf{D}=D_0\hat{\mathbf{z}}$ فرض می‌کنیم. به علت نداشتن بارهای آزاد و با توجه به شرایط مرزی روی عایقها در فضای بالا و پایین عایق نیز میدان $\mathbf{D}=D_0\hat{\mathbf{z}}$ است. در عایق

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{D_0\hat{\mathbf{z}}}{\varepsilon_0(1+x_e)} = \frac{D_0(4-z)}{4\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{D}-\varepsilon_0\mathbf{E}_1 = \frac{z\,D_0}{4}\hat{\mathbf{z}}$$

پس چگالی بارهای القا شده عبارت است از

$$\sigma_{b2} = \mathbf{P}_1\cdot(\hat{\mathbf{z}}) = \frac{D_0}{2}\quad,\quad \sigma_{b1} = \mathbf{P}_1\cdot(-\hat{\mathbf{z}}) = -\frac{D_0}{4}\quad,\quad \rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P}_1 = -\frac{D_0}{4}$$

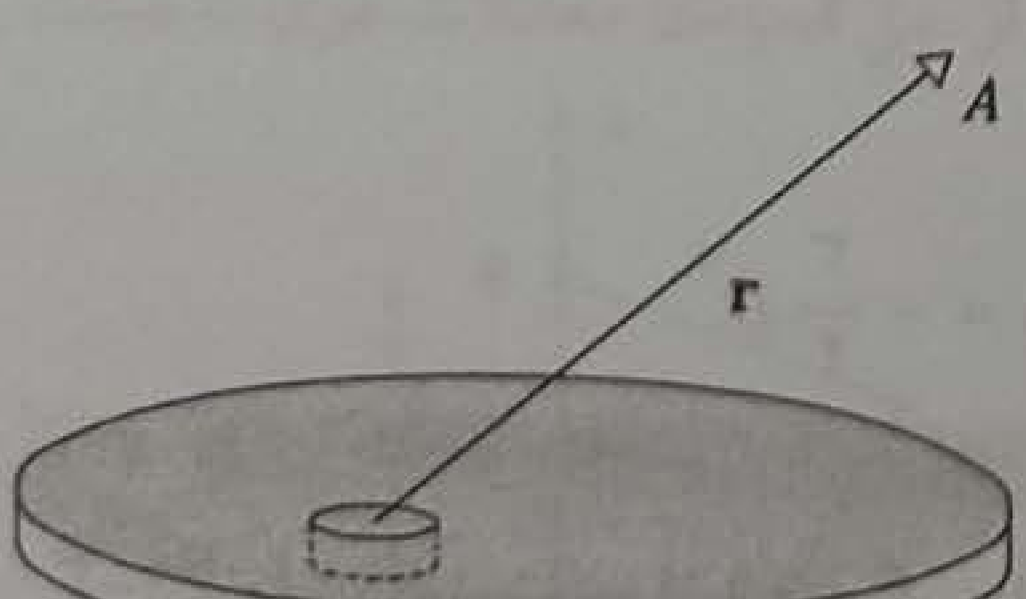
حال باید D_0 را بیابیم. عایق را به صورت لایه هایی به ضخامت $\mathbf{dz}$ در نظر می‌گیریم. هر یک از این لایه‌ها میدانهایی در بالا و پایین خود ایجاد می‌کنند. می‌توان نشان داد که این میدانها در $z>2$ و $z<1$ صفر هستند. پس در خارج عایق همان میدان اولیهٔ $E_0\hat{\mathbf{z}}$ را داریم و $D_0=\varepsilon_0 E_0$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۳۸ اگر قرص را به عناصر ds تقسیم کنیم، استوانه‌ای داریم که دو بار $P_0\,ds$ و $-P_0\,ds$ در دو قاعدهٔ آن قرار دارد، به عبارت دیگر یک دو قطبی با گشتاور $P_0\,ds\,t\,\hat{\mathbf{z}}$ داریم. ولتاژ این دو قطبی در نقطهٔ A عبارت است از

$$dV = \frac{P_0\,t\,ds\,\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{P_0\,t}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\hat{\mathbf{z}}\,ds\cdot(-\mathbf{r})}{r^3}\right] = \frac{P_0\,t}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

زیرا عبارت داخل کروشه طبق تعریف زاویهٔ فضایی است که با آن سطح کوچک ds از نقطهٔ A دیده می‌شود. اکنون با انتگرالگیری رابطهٔ خواسته شده به دست می‌آید.



شکل ح ۳-۳۸

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۳۹ حجم کره را به عناصر dv تقسیم می‌کنیم. در هر عنصر دو قطبی $\mathbf{P}\,dv$ وجود دارد. پس

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathbf{P}\,dv \cdot \mathbf{R}}{R^3}$$

چون $\mathbf{P}$ بردار ثابتی است می‌توان آن را از انتگرال بیرون آورد

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{P}\cdot\int \frac{\mathbf{R}}{|R|^3}\,dv$$

اگر کره‌ای با چگالی بار $\rho = 1$ می‌داشتیم میدان الکتریکی ناشی از آن به صورت زیر به دست می‌آمد

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathbf{R}}{|R|^3}\,dv$$

پس

$$V = \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_1$$

که $\mathbf{E}_1$ میدان ناشی از کره‌ای با چگالی بار یکنواخت $\rho = 1$ است. می‌دانیم برای چنین کره‌ای

$$\mathbf{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} & r < a \\[2mm] \dfrac{a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} & r > a \end{cases}$$

بنابراین

$$V = \begin{cases} P_0\hat{\mathbf{z}}\cdot\dfrac{r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{P_0 r}{3\varepsilon_0}\cos\theta = \dfrac{P_0 z}{3\varepsilon_0} & r < a \\[2mm] P_0\hat{\mathbf{z}}\cdot\dfrac{a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{a^3 P_0\cos\theta}{3\varepsilon_0 r^2} & r > a \end{cases}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۴۰ به علت تقارن مسئله در جهت میدان اعمالی، بارهای القاشده تنها تابعی z از هستند. بنابراین میدانهای داخل و خارج تنها در جهت z مولفه دارند. همچنین چون جمع بارهای قطبش صفرست، میدان خارج ماده همان میدان $E_0\hat{\mathbf{z}}$ است. پس در خارج ماده $\mathbf{D} = \varepsilon_0 E_0\hat{\mathbf{z}}$ و چون بار آزاد نداریم در داخل ماده نیز $\mathbf{D} = \varepsilon_0 E_0\hat{\mathbf{z}}$. اکنون به ترتیب به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}_1 = \frac{D_0}{4\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{d}\right)^2 \qquad 0 < z < d$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E} = D_0\left[1 - \frac{(1 + z/d)^2}{4}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

$$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P} = \frac{D_0}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{z}{d^2}\right)$$

$$\sigma_1 = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0 \qquad \sigma_2 = \mathbf{P}\cdot(-\hat{\mathbf{z}}) = -\frac{3}{4}D_0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۴۱ ابتدا شدت میدان الکتریکی را از رابطهٔ $\mathbf{E} = -\nabla V$ می‌یابیم:

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla V_1 = -A\theta\hat{\mathbf{r}} - A\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla V_2 = -\frac{Aa^2\theta}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{Aa^2}{r^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

داریم $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}$ و $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$. از روابط $\rho = \nabla\cdot\mathbf{D}$ ، $\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P}$ و $\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ بارهای خواسته شده را می‌یابیم. جوابها عبارت اند از

$$\rho_b = -A\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,(2\theta + \cot\theta)\,/\,r \qquad r < a$$

و با توجه به معادلهٔ (۱) حل مسئلهٔ ۳–۲۶

$$\rho = -A\,\varepsilon_1\,(2\theta + \cot\theta)\,/\,r \qquad r < a$$

$$\rho_b = -A\,a^2\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\cot\theta\,/\,r^3 \qquad a < r < b$$

$$\sigma_b = A\,(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,\theta \qquad r = a$$

$$\sigma_b = A\,a^2\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,\theta\,/\,b^2 \qquad r = b$$

و سرانجام با توجه به شرایط مرزی چگالی بار آزاد روی مرز دو محیط عبارت است از

$$\sigma = A\,\theta\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۴۲ اگر چنین فرضی درست باشد میدان در ناحیهٔ ۱ عبارت است از

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r_2}$$

که r_1 و r_2 در شکل ح ۳–۴۲ نشان داده شده است. میدان در ناحیهٔ ۲ نیز باید به صورت زیر باشد

$$V_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r}$$

r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر تا بار q'' است. پتانسیل در مرز دو محیط باید پیوسته باشد، یعنی در مرز $V_1 = V_2$

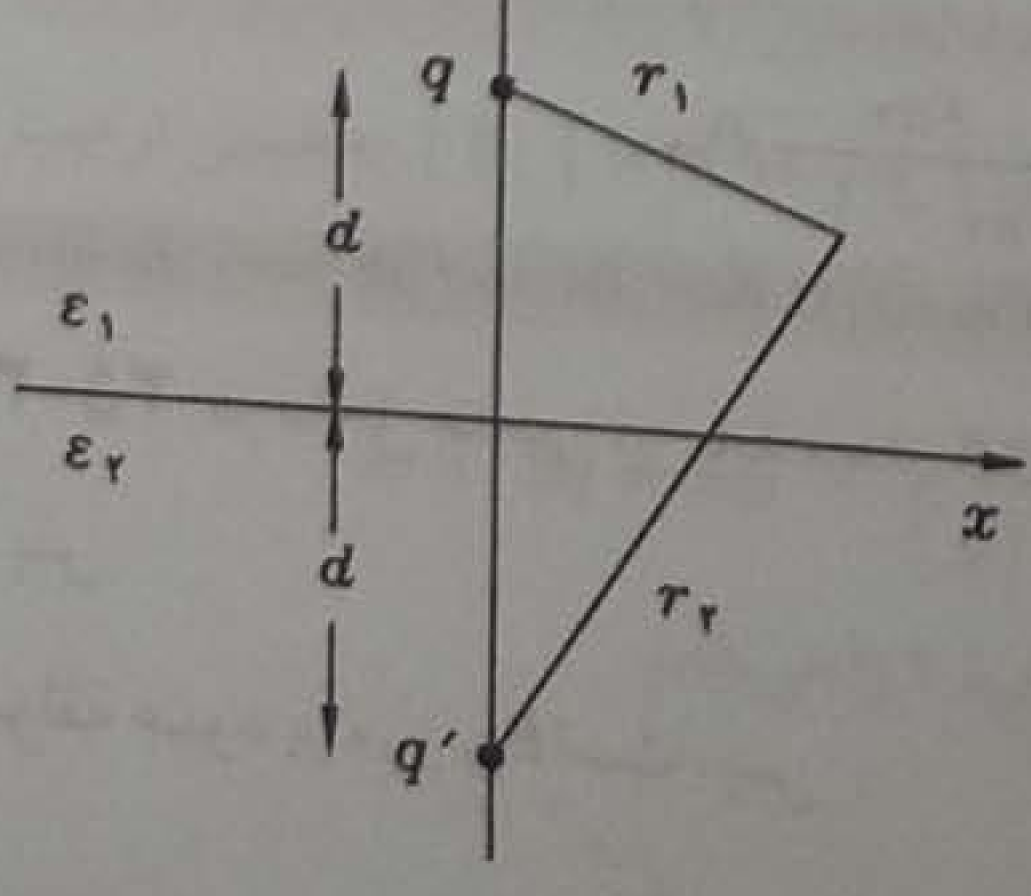
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\,\frac{q''}{r} \quad \text{یا} \quad \varepsilon_2\,(q + q') = \varepsilon_1\,q''$$

زیرا روی مرز $r_1 = r_2 = r$. همچنین مولفهٔ عمودی میدان چگالی شار الکتریکی باید روی مرز پیوسته باشد. چون $\mathbf{E} = -\nabla V$ و مولفه عمود بر مرز E_z است، باید داشته باشیم

$$\varepsilon_1\frac{\partial V_1}{\partial z} = \varepsilon_2\frac{\partial V_2}{\partial z} \quad , \quad z = 0 \ \text{در}$$

باگذاشتن $r^2 = x^2 + y^2 + (z-d)^2$ ، $r_1^2 = x^2 + y^2 + (z-d)^2$ ، $r_2^2 = x^2 + y^2 + (z+d)^2$ در معادلات پتانسیل و مشتقگیری به دست می‌آوریم $q'' = q - q'$. از حل همزمان معادلات فوق به دست می‌آوریم

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\,q \quad , \quad q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\,q$$



شکل ح ۳-۴۲

۳-۴۳ به شیوهٔ مسئلهٔ ۳-۳۹ عمل می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{P}\cdot\int\frac{\mathbf{R}}{|R|^3}dv$$

حاصل انتگرال و ضریب $1/4\pi\varepsilon_0$ میدان الکتریکی ناشی از استوانه‌ای با چگالی بار $\rho = 1$ است و برای چنین استوانه‌ای

$$\mathbf{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \dfrac{a^2}{2\varepsilon_0\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \end{cases}$$

چون $\mathbf{P} = P_0\,\hat{\mathbf{x}}$ ، $\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \cos\phi$ و $\rho\cos\phi = x$، در داخل استوانه

$$V = \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_1 = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}x$$

$$\mathbf{E}_i = -\nabla V = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$$

در خارج استوانه

$$V = \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_1 = \frac{a^2}{2\varepsilon_0\rho}P_0\cos\phi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{P_0 a^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\phi}{\rho^2}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\sin\phi}{\rho^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right]$$

در مختصات استوانه‌ای روی صفحهٔ z = ثابت ، $\mathbf{R} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$. با کمی عملیات جبری می‌توان رابطهٔ فوق را به رابطهٔ زیر تبدیل کرد که با رابطهٔ داده شده در صورت مسئله یکسان است .

$$\mathbf{E} = \frac{a^2}{2\varepsilon_0}\left[2(\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{P}\right]$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۴۴ داریم $\mathbf{E}(1-\varepsilon_R)\varepsilon_0 = \mathbf{E}\,x_e\,\varepsilon_0 = \mathbf{P}$. پس چون $E_{t1} = E_{t2}$

$$\frac{P_{t1}}{\varepsilon_0(\varepsilon_{R1}-1)} = \frac{P_{t2}}{\varepsilon_0(\varepsilon_{R2}-1)}$$

یا $P_{t1}(\varepsilon_{R2}-1) = P_{t2}(\varepsilon_{R1}-1)$ که به دست می‌دهد $P_{t1}\chi_2 = P_{t2}\chi_1$. همچنین داریم $\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$ ، پس

$$\frac{\varepsilon_1 P_{n1}}{\varepsilon_0(\varepsilon_{R1}-1)} = \frac{\varepsilon_2 P_{n2}}{\varepsilon_0(\varepsilon_{R2}-1)}$$

$$\frac{\varepsilon_{R1}}{\varepsilon_{R1}-1}P_{n1} = \frac{\varepsilon_{R2}}{\varepsilon_{R2}-1}P_{n2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۴۵ در داخل عدسی نیز باید میدان الکتریکی موازی محور x باشد. در نقطهٔ P مولفهٔ مماسی E_ϕ است ، پس

$$E_{2\phi} = E_{1\phi} = -3$$

مولفهٔ عمود بر مرز E_ρ است ، پس

شعاع

$$E_{\rho ۲}=\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲}E_{\rho ۱}=\frac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon_R+\varepsilon_\circ}E_{\rho ۱}=\frac{۵}{\varepsilon_{R۲}}$$

یا $\frac{۵}{\varepsilon_{R۲}}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\,۳-=\mathbf{E}_۲$. در مختصات قائم

$$\mathbf{E}_۲=-۳\,(-\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}}+\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}})+\frac{۵}{\varepsilon_{R۲}}(\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}}+\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}})$$

برای صفر شده مولفهٔ y باید داشته باشیم

$$-۳\cos ۴۵=\frac{۵}{\varepsilon_{R۲}}\sin ۴۵$$

که نتیجه می‌دهد

$$\varepsilon_{R۲}=\frac{۵}{۳}=۱{,}۶۶$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=\circ|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۳-۴۶ چون در فضای $z > \circ$ بار آزاد وجود ندارد، در این فضا چگالی بار حجمی مقید نیز صفر است (مسئلهٔ ۳-۲۶ را ببینید). یعنی تنها بار القا شده بارهای سطحی روی مرز عایق (در $z=\circ$) هستند. $\sigma_b=\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{z}}=P_z$ که در آن P_z قطبش در $z=\circ$ است. چون عایق خطی است $\mathbf{P}=\varepsilon_\circ x_e\mathbf{E}=\varepsilon_\circ(\varepsilon_R-۱)\mathbf{E}$ و $\sigma_b=\varepsilon_\circ(\varepsilon_R-۱)E_z$. E_z از دو بار ناشی شده است: بار نقطه‌ای q و بار القا شده روی سطح. چون تنها مولفهٔ عمودی میدان را نیاز داریم می‌توانیم به سادگی آن را بیابیم. مولفهٔ عمودی میدان الکتریکی ناشی از σ_b، درست بالای مرز $\hat{\mathbf{z}}(\sigma_b/۲\varepsilon_\circ)$ و درست زیر مرز $-(\sigma_b/۲\varepsilon_\circ)\hat{\mathbf{z}}$ است. همچنین مولفهٔ عمودی میدان ناشی از بار نقطه‌ای عبارت است از

$$\frac{q\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ(d^۲+\rho^۲)}(-\hat{\mathbf{z}})=-\frac{q\,d}{۴\pi\varepsilon_\circ(d^۲+\rho^۲)^{۱/۵}}\hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\sigma_b=\varepsilon_\circ(\varepsilon_R-۱)\left[-\frac{q\,d}{۴\pi\varepsilon_\circ(d^۲+\rho^۲)^{۱/۵}}-\frac{\sigma_b}{۲\varepsilon}\right]$$

از حل معادلهٔ بالا به دست می‌آوریم

$$\sigma_b=-\frac{۱}{۲\pi}\frac{\varepsilon_r-۱}{\varepsilon_r+۱}\frac{q\,d}{(d^۲+\rho^۲)^{۱/۵}}$$

کل بار القا شده عبارت است از

$$Q_b=\int\sigma_b\,ds=\int_\circ^\infty\int_\circ^{۲\pi}\sigma_b\,\rho\,d\phi\,d\rho=-\frac{\varepsilon_r-۱}{\varepsilon_r+۱}q$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=\circ|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۳-۴۷ دامنهٔ میدان در ناحیهٔ ۱ برابرست با $|\mathbf{E}_۱|=\sqrt{۹۰۰+۲۲۵+۲۰۲۵}=۵۶{,}۱۲$. به همین ترتیب $|\mathbf{A}|=۱۵$. پس

$$\angle\mathbf{A},\mathbf{E}_۱=\cos^{-۱}\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}_۱}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{E}_۱|}=\cos^{-۱}\frac{-۶۰-۷۵+۶۳۰}{۱۵\times ۵۶{,}۱۲}=۵۳{,}۹^\circ$$

چون $\mathbf{E}_۱$ و $\mathbf{D}_۱$ همراستا هستند، $\angle\mathbf{A},\mathbf{D}_۱=۵۳{,}۹$. میدان در ناحیهٔ ۲ را می‌یابیم

$$\mathbf{E}_{1n} = (\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}})\,\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = -۴{,}۴\,\hat{\mathbf{x}} + ۱۱\,\hat{\mathbf{y}} + ۳۰{,}۸\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = ۳۴{,}۴\,\hat{\mathbf{x}} - ۲۶\,\hat{\mathbf{y}} + ۱۴{,}۲\,\hat{\mathbf{z}}$$

با توجه به شرایط مرزی $\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t}$ و

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} = \varepsilon_1\,\mathbf{E}_{1n} = \varepsilon_0\,\mathbf{E}_{1n}$$

$$\mathbf{E}_{2n} = \frac{\mathbf{D}_{2n}}{\varepsilon_2} = \frac{\mathbf{D}_{2n}}{۲\varepsilon_0} = \frac{\mathbf{E}_{1n}}{۲} = -۲{,}۲\,\hat{\mathbf{x}} + ۵{,}۵\,\hat{\mathbf{y}} + ۱۵{,}۴\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} = ۳۲{,}۲\,\hat{\mathbf{x}} - ۲۰{,}۵\,\hat{\mathbf{y}} + ۲۹{,}۶\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\angle\,\mathbf{A}, \mathbf{E}_2 = \angle\,\mathbf{A}, \mathbf{D}_2 = \cos^{-1}\frac{\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{A}}{|\mathbf{E}_2|\,|\mathbf{A}|} = ۷۰{,}۰^\circ$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۳-۴۸ در اطراف هادی باردار میدان $\mathbf{D}$ عمود بر سطح هادی است و اندازهٔ آن با چگالی بار سطحی روی هادی σ برابر است. پس در عایق میدان $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$ و در نتیجه چگالی جریان زیر وجود دارد:

$$J = gE = \frac{gD}{\varepsilon} = \frac{g\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\tau}$$

که در آن $\tau = \varepsilon/\sigma$. اصل پیوستگی جریان را به جعبهٔ کوچک شکل ح ۳-۴۸ اعمال می‌کنیم. مساحت قاعدهٔ این جعبه ΔS است

$$\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma\Delta S) = \Delta S\frac{d\sigma}{dt}$$

چون تنها از قاعدهٔ واقع بر سطح هادی جریان خارج می‌شود و چون چگالی جریان بر سطح هادی عمود است، کل جریان خارج شده از جعبه $J\Delta S$ است و

$$J\Delta S = \Delta S\frac{d\sigma}{dt}$$

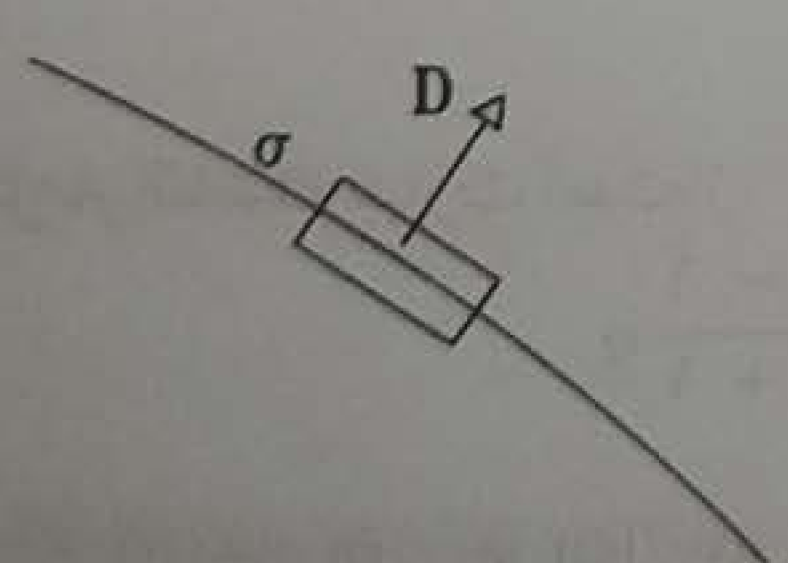
که نتیجه می‌دهد

$$J = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma}{\tau}$$

حل این معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$\sigma = \sigma_0\,e^{-t/\tau}$$

که در آن σ_0 مقدار اولیهٔ σ (مقدار σ در لحظهٔ صفر) است.



شکل ح ۳-۴۸