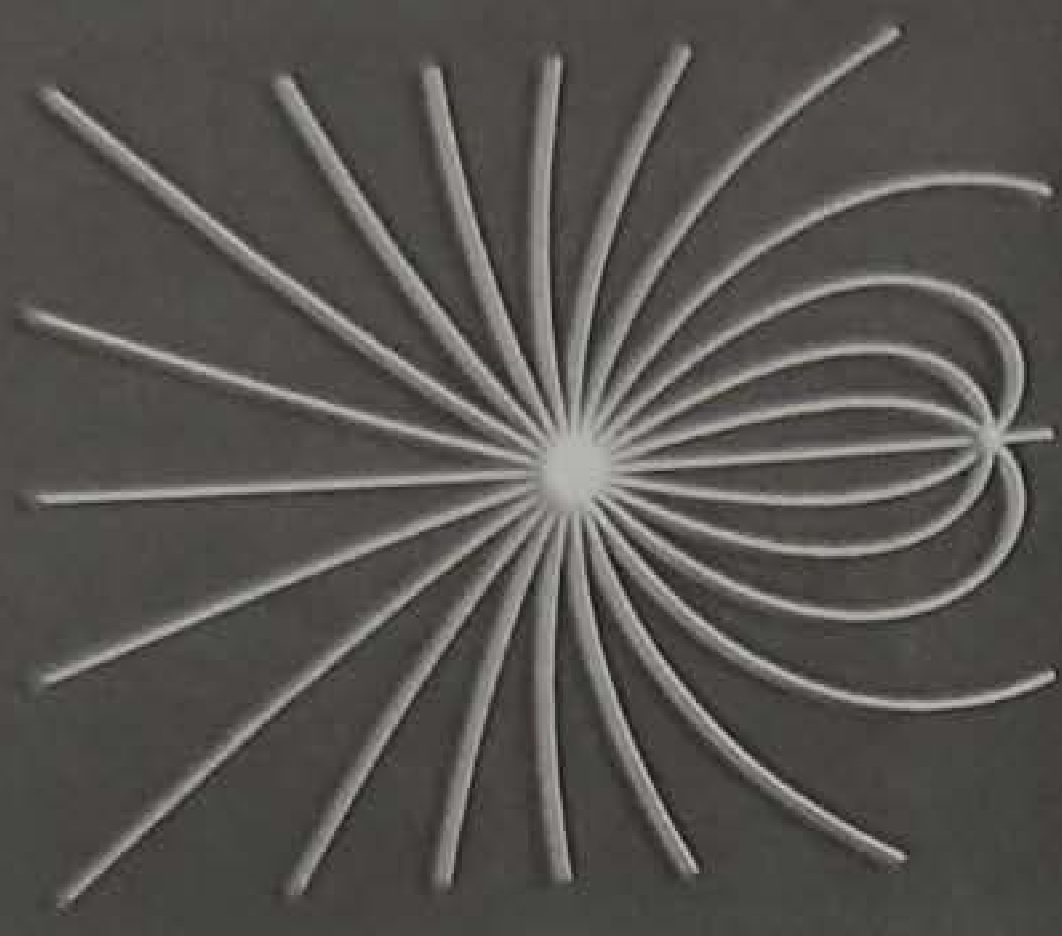
۲
الکتروستاتیک در فضای آزاد



۲-۱ قانون کولن و شدت میدان الکتریکی

اگر دو بار در فضایی همگن، همسانگرد، و خطی به فاصلهٔ R از هم قرار گرفته باشند، نیروی وارد بر هر یک از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

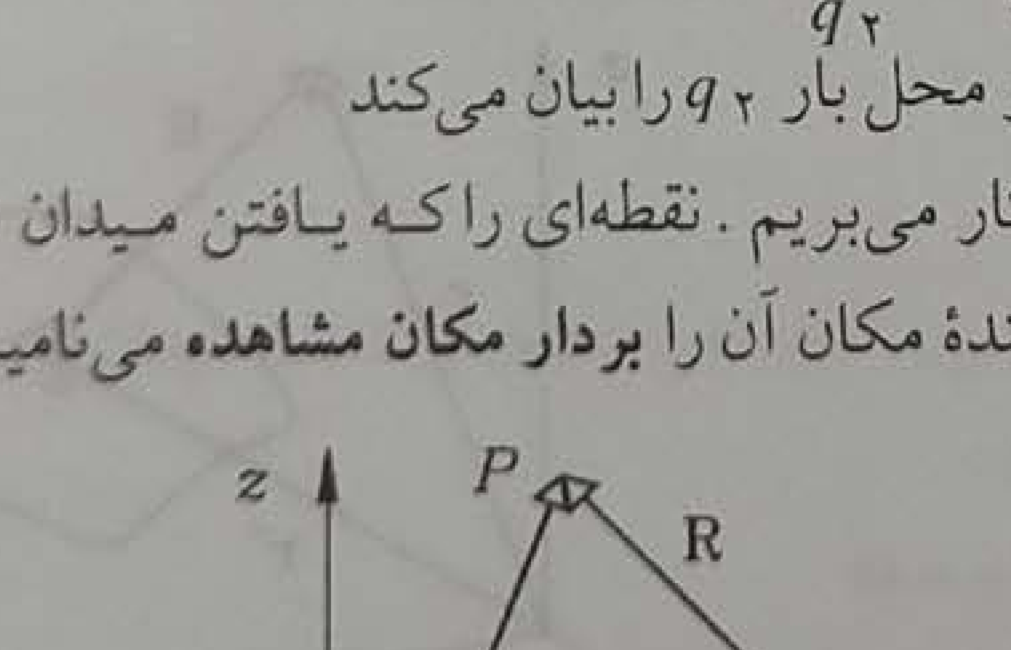
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{R^2}\hat{\mathbf{R}} \qquad (۲-۱)$$

ε گذردهی فضا نام دارد و برای فضای آزاد برابر 8.85×10^{-12} F/m است. $\hat{\mathbf{R}}$ بردار یکه‌ای است که امتداد خط گذرنده از دو بار را نشان می‌دهد. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای آزمون تقسیم بر مقدار بار **شدت میدان الکتریکی** خوانده می‌شود:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1}{R^2}\hat{\mathbf{R}} \qquad (۲-۲)$$

معادلهٔ فوق شدت میدان الکتریکی ناشی از بار q_1 در محل بار q_2 را بیان می‌کند

برای بیان دقیق رابطهٔ فوق نمادگذاری زیر را به کار می‌بریم. نقطه‌ای را که یافتن میدان در آن مورد نظر است **نقطهٔ مشاهده** یا **نقطهٔ میدان** و بردار تعیین کنندهٔ مکان آن را **بردار مکان مشاهده** می‌نامیم و آن را با $\mathbf{r}$



شکل ۲-۱ نقاط و بردارهای منبع و مشاهده.

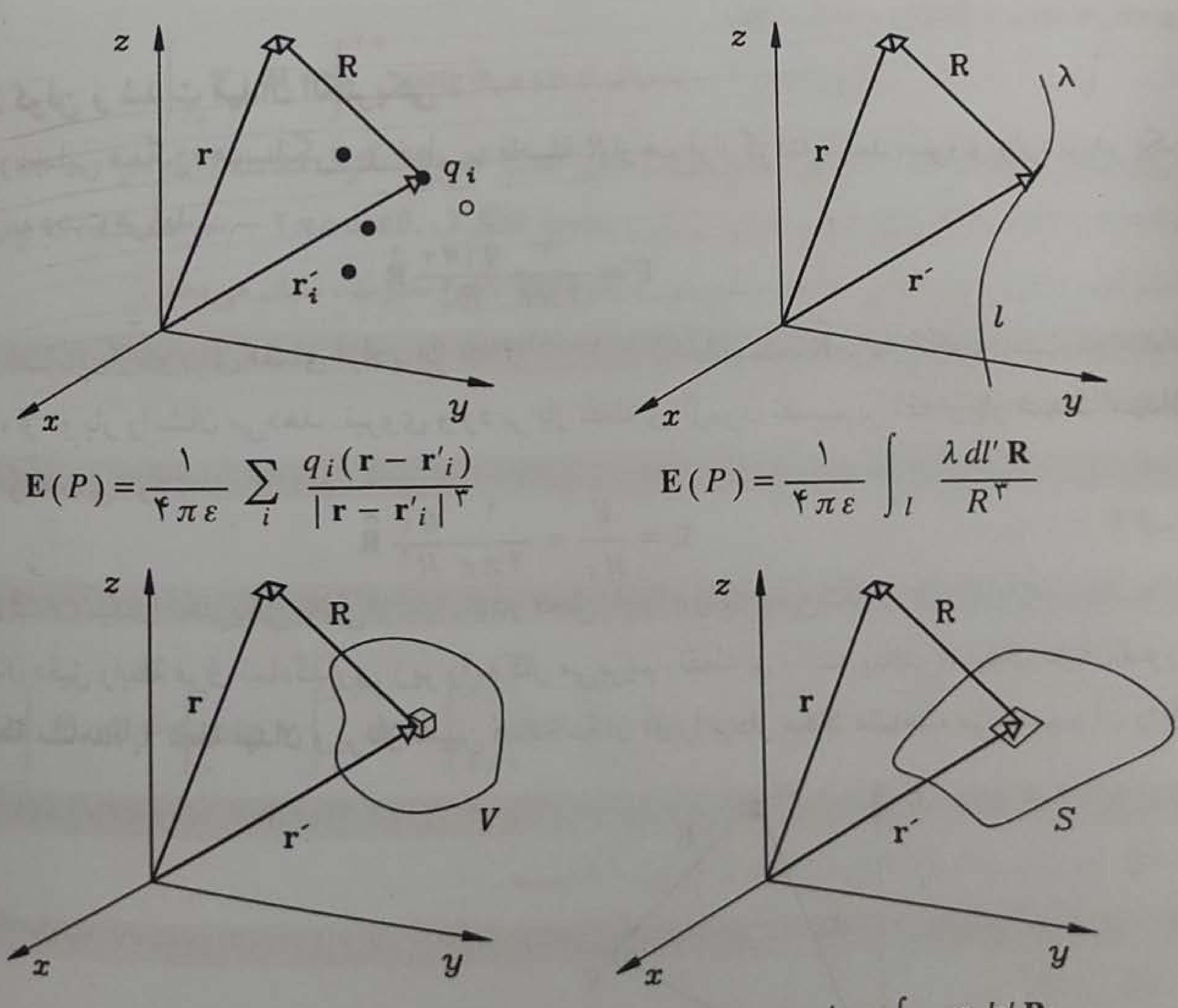
نشان می‌دهیم. نقطه‌ای را که منبع میدان در آن قرار دارد **نقطه منبع** و بردار تعیین کنندهٔ محل آن را **بردار مکان منبع** می‌نامیم و آن را با $\mathbf{r}'$ نشان می‌دهیم. بردار $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ برداری است که از نقطهٔ منبع به نقطهٔ مشاهده رسم می‌شود. پس اگر مطابق شکل ۲-۱ باری در نقطهٔ $\mathbf{r}'$ قرار داشته باشد، شدت میدان الکتریکی در نقطهٔ r برابر است با:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon}\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^{۲}} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{R}}{R^{۳}} \qquad (۳-۲)$$

با بردار $\mathbf{R}$ در مسئلهٔ ۱-۴۵ آشنا شدیم و تمرینهایی انجام دادیم.

۲-۲ اصل جمع آثار مجموعه‌های بار

میدان حاصل از چند بار، مجموع میدان حاصل از تک تک آن بارهاست. این اصل، **اصل جمع آثار** نامیده می‌شود. بنابراین اگر یک مجموعه بار نقطه‌ای داشته باشیم، برای یافتن میدان حاصل از آنها، میدان تک تک بارها را یافته، نتایج را با هم جمع می‌کنیم. اگر بار توزیع پیوسته‌ای داشته باشد، آن را به عناصر کوچک تقسیم می‌کنیم، اثر هر عنصر در ایجاد میدان را یافته، و با انتگرالگیری این آثار را با هم جمع می‌کنیم. شکل ۲-۲ خلاصهٔ این مطالب را نشان می‌دهد.



$$\mathbf{E}(P) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon}\sum_i \frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i|^{۳}} \qquad \mathbf{E}(P) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon}\int_l \frac{\lambda\, dl'\,\mathbf{R}}{R^{۳}}$$

$$\mathbf{E}(P) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dv'\,\mathbf{R}}{R^{۳}} \qquad \mathbf{E}(P) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma\, ds'\,\mathbf{R}}{R^{۳}}$$

شکل ۲-۲ میدان حاصل از توزیع بارهای نقطه‌ای، خطی، سطحی، و حجمی.

در این شکل از رابطهٔ زیر استفاده شده‌است

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}=\hat{\mathbf{R}}$$

توجه کنید که در تمام انتگرالهای فوق $\mathbf{r}$ ثابت و $\mathbf{r}'$ متغیر، و به تبع آن $\mathbf{R}$ نیز متغیرست.

۲-۳ خطوط میدان

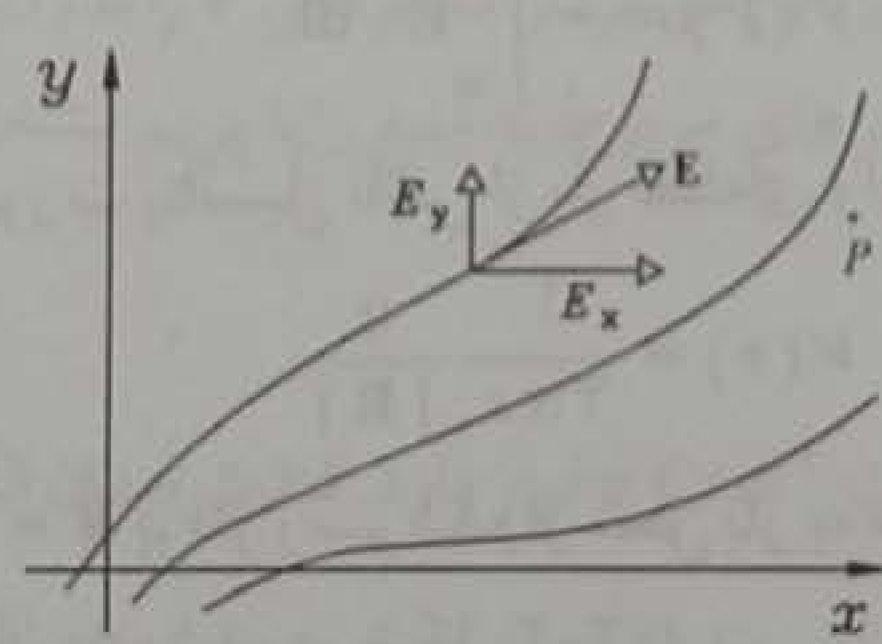
برای نمایش تصویری یک میدان راههای مختلفی وجود دارد. پرکاربردترین این روشها رسم خطوطی است که مماس بر آن خطوط در هر نقطهٔ جهت میدان را در آن نقطهٔ نشان می‌دهد. میزان انبوهی خطوط در یک ناحیه نشان دهندهٔ اندازهٔ شدت میدان الکتریکی در آن ناحیه است. هر چه در یک ناحیه تعداد خطوط زیادتر باشد، میدان در آن ناحیه قویترست. برای مثال در شکل ۲-۳ میدان در ناحیهٔ برخورد سه خط میدان با محور x قویتر از میدان در نقطهٔ P است. برای رسم خطوط میدان باید یک صفحهٔ مشخص انتخاب شود. در شکل ۲-۳ این صفحه z = ثابت است. معادلهٔ دیفرانسیلی که معادلهٔ هر خط از آن به دست می‌آید عبارت است از

$$\frac{dy}{dx}=\frac{E_y}{E_x} \tag{۲-۴}$$

واضح است که در صفحات دیگر معادلات دیفرانسیل دیگری داریم. مثلاً در صفحهٔ y = ثابت

$$\frac{dz}{dx}=\frac{E_z}{E_x}$$

در مسائل یافتن خطوط میدان در دستگاههای مختصات دیگر هم عنوان شده‌است.



شکل ۲-۳ خطوط میدان.

۲-۴ چگالی شار و شار الکتریکی

برای محیطهای همگن، همسانگرد و خطی حاصلضرب گذردهی محیط در شدت میدان الکتریکی **چگالی شار الکتریکی** یا **جابجایی الکتریکی** خوانده می‌شود:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E} \tag{۲-۵}$$

واحد $\mathbf{D}$ کولن بر متر مربع است. چون $\mathbf{D}$ چگالی شار الکتریکی است، انتگرال آن روی هر سطح S شار الکتریکی گذرنده از آن سطح را نشان می‌دهد

$$\Psi=\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} \tag{۲-۶}$$

نمایش یک میدان الکتریکی با خطوط میدان به شرطی نمایش درست محسوب می‌شود که شار گذرنده از

هر سطح با تعداد خطوط میدان گذرنده از آن سطح متناسب باشد.

۲-۵ قانون گوس

قانون گوس رابطهٔ شار خارج شده از یک سطح بسته و بار داخل آن سطح را بیان می‌کند

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \qquad (۷-۲)$$

به کمک قضیهٔ دیورژانس می‌توان قانون گوس را به شکل نقطه‌ای زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (۸-۲)$$

۲-۶ پتانسیل الکتریکی

کار بر واحدِ بارِ لازم برای جابجا کردن بار در یک میدان، از یک نقطه به نقطهٔ دیگر اختلاف پتانسیل بین آن دو نقطه نامیده می‌شود و عبارت است از

$$V(P) - V(P') = -\int_{P'}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad (۹-۲)$$

با انتخاب یک نقطهٔ مرجع برای پتانسیل می‌توان **پتانسیل مطلق** تعریف کرد. اگر منبع میدان الکتریکی به نحوی باشد که بتوان میدان در بینهایت، یعنی فواصل بسیار دور، را صفر فرض کرد، نقطهٔ بینهایت مرجع خوبی برای انتخاب پتانسیل صفرست. در این صورت

$$V(P) = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad (۱۰-۲)$$

می‌توان نشان داد که در این صورت پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای واقع در در نقطهٔ مشاهدهٔ $\mathbf{r}$ عبارت است از

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{|\mathbf{R}|} \qquad (۱۱-۲)$$

که در آن طبق معمول $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ بردار رسم شده از محل بار به محل مشاهده است.

برای مجموعه‌های بار نشان داده شده در شکل ۲-۲ داریم

$$\text{بارهای نقطه‌ای} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \qquad (۱۲-۲)$$

$$\text{بار خطی} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_l \frac{\lambda\, dl'}{|\mathbf{R}|} \qquad (۱۳-۲)$$

$$\text{بار سطحی} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \frac{\sigma\, ds'}{|\mathbf{R}|} \qquad (۱۴-۲)$$

$$\text{بار حجمی} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho\, dv'}{|\mathbf{R}|} \qquad (۱۵-۲)$$

به وضوح پیداست که محاسبهٔ معادلات فوق از محاسبهٔ روابط داده شده در شکل ۲-۲ آسانترست. پس اگر بتوان شدت میدان الکتریکی را از پتانسیل پیدا کرد، یافتن میدان الکتریکی به کمک روابط فوق ساده‌ترست.

رابطهٔ بین $\mathbf{E}$ و V به صورت زیرست

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{۲-۱۶}$$

چون میدان گرادیان یک تابع اسکالرست، بنابر اتحاد $\nabla \times (\nabla A) = 0$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{۲-۱۷}$$

و یا با توجه به قضیهٔ استوکس

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{۲-۱۸}$$

که می‌گوید در حرکت دادن یک بار در میدان الکتروستاتیک از یک نقطه تا برگشت به آن نقطه کل کار انجام شده صفرست. این بیانی از **پایستار بودن** میدان الکتروستاتیک است.

حل مسئله

یافتن میدان ناشی از یک توزیع بار دستهٔ مهمی از مسائلی را تشکیل می‌دهد که باید در حل آنها تبحر یابیم. این که یافتن $\mathbf{E}$ مورد نظرست یا V در فرمولبندی مسئله تفاوت زیادی ایجاد نمی‌کند. بار باید به بخشهای دیفرانسیلی تقسیم شود، میدان ناشی از هر بخش در نقطهٔ مشاهده محاسبه شود، و نتایج با هم جمع شوند. عمل جمع در مورد بارهای پیوسته با انتگرال صورت می‌گیرد. تعیین بردار $\mathbf{R}$ یک مرحلهٔ تعیین کننده است. ساده‌ترین راه انجام این کار توجه به رابطهٔ $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ است. $\mathbf{r}'$ برداری است که محل یک نقطهٔ عمومی بار را نشان می‌دهد. توجه کنید که هر دو بردار $\mathbf{r}'$ و $\mathbf{r}$ در یک دستگاه مختصات بیان می‌شوند، ولی $\mathbf{r}$ برداری ثابت است و $\mathbf{r}'$ برداری متغیر. برای تمییز این دو بردار متغیرهای $\mathbf{r}$ را بدون پریم و متغیرهای بردار $\mathbf{r}'$ را با پریم نمایش می‌دهیم. در واقع تمام متغیرهای مربوط به منبع را با پریم مشخص می‌کنیم.

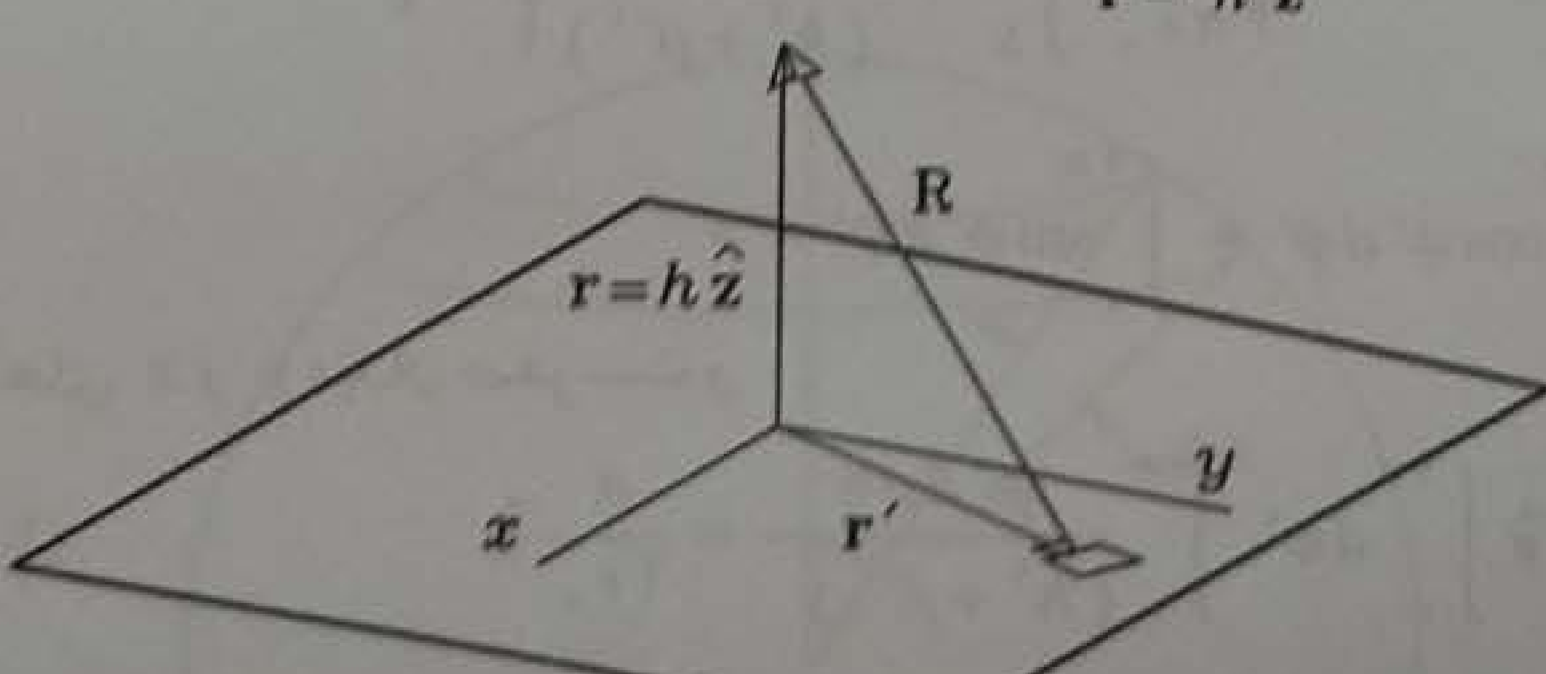
مثال ۱

روی صفحه‌ای بار سطحی با چگالی ثابت $\sigma\ \mathrm{C/m^2}$ قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصلهٔ h از صفحه بیابید.

حل

دستگاه مختصات را طوری برمی‌گزینیم که نقطهٔ مشاهده روی محور z قرار گیرد. پس

$$\mathbf{r} = h\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ۲-۴ تعریف بردار $\mathbf{R}$ برای مثال ۱.

بار روی صفحهٔ $z = \circ$ قرار دارد. عنصر سطح (در دستگاه مختصات استوانه‌ای) عبارت است از

$$ds' = \rho' \, d\rho' \, d\phi'$$

همچنین

$$\hat{\mathbf{r}}' = \rho' \hat{\boldsymbol{\rho}}'$$

به کاربرد پریم برای مشخص کردن متغیرهای منبع در هر دو مورد عنصر سطح و بردار منبع توجه کنید. حال می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = h\,\hat{\mathbf{z}} - \rho' \hat{\boldsymbol{\rho}}'$$

به اندازهٔ بردار $\mathbf{R}$ نیز نیاز داریم. چون $\hat{\mathbf{z}}$ و $\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ بردارهایی متعامدند، داریم

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{h^{۲} + \rho'^{۲}}$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ} \int_S \frac{\sigma \rho' \, d\rho' \, d\phi' \, (h\,\hat{\mathbf{z}} - \rho' \hat{\boldsymbol{\rho}}')}{(h^{۲} + \rho'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

حدود انتگرال باید به نحوی تعیین شود که اثر تمام بارها در میدان منظور شود؛ اگر ρ' از $\circ$ تا ∞ و ϕ' از $\circ$ تا ۲π تغییر کند، تمام سطح پوشیده می‌شود.

در محاسبهٔ انتگرال باید دقت کرد، زیرا این انتگرال یک انتگرال برداری است. چنانچه در فصل ۱ گفتیم ساده‌ترین و کم اشتباه‌ترین راه محاسبهٔ این انتگرالها، بیان بردارها در دستگاه مختصات قائم است، زیرا به علت ثابت بودن بردارهای یکهٔ این دستگاه می‌توان انتگرالها را به انتگرالهای غیر برداری تبدیل کرد. در مورد این مثال خاص داریم

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}' = \cos\phi' \, \hat{\mathbf{x}} + \sin\phi' \, \hat{\mathbf{y}}$$

اکنون سه انتگرال به صورت زیر داریم

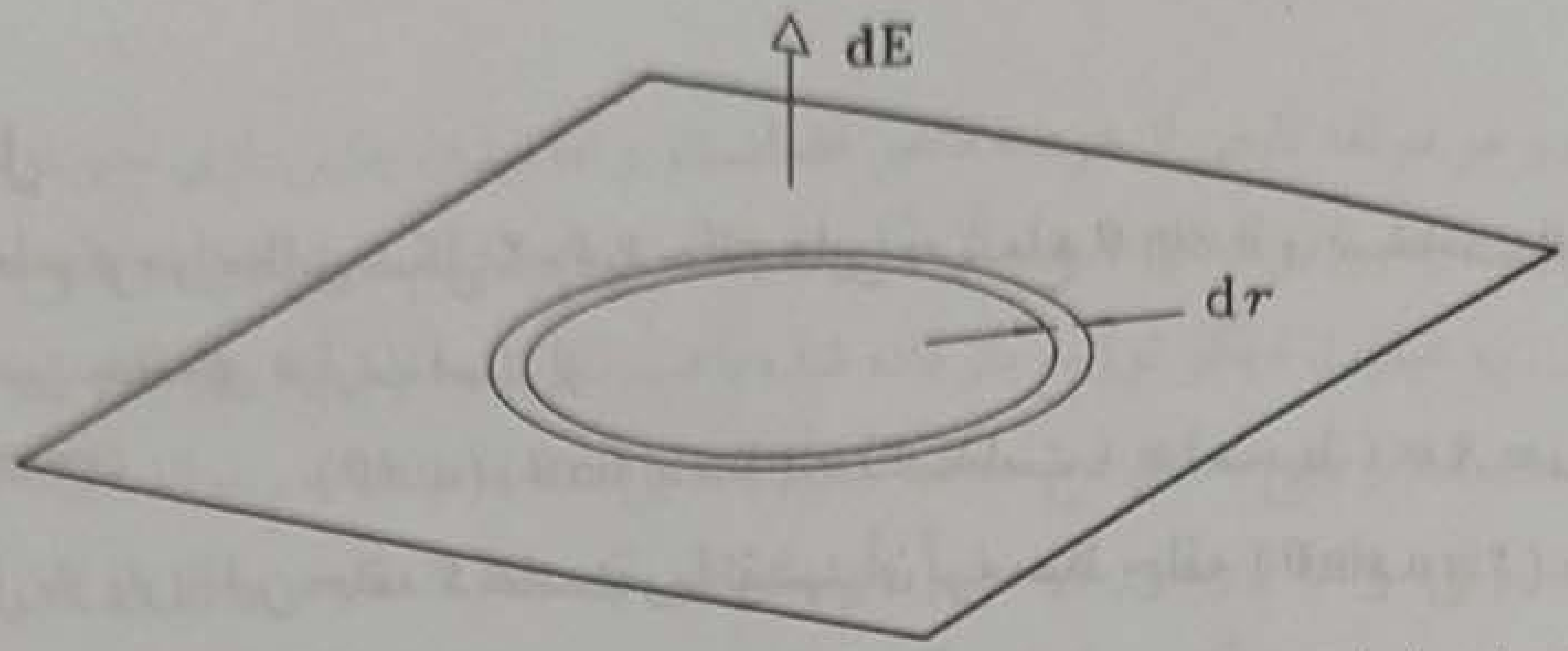
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{۴\pi\varepsilon_\circ} \int_S \frac{h \rho' \, d\rho' \, d\phi'}{(h^{۲} + \rho'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\sigma}{۴\pi\varepsilon_\circ} \int_S \frac{\rho'^{۲} \cos\phi' \, d\rho' \, d\phi'}{(h^{۲} + \rho'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\sigma}{۴\pi\varepsilon_\circ} \int_S \frac{\rho'^{۲} \sin\phi' \, d\rho' \, d\phi'}{(h^{۲} + \rho'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} \hat{\mathbf{y}}$$

چون

$$\int_\circ^{۲\pi} \cos\phi' \, d\phi' = \int_\circ^{۲\pi} \sin\phi' \, d\phi' = \circ$$

مولفه‌های x و y میدان صفرست و

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma h}{۴\pi\varepsilon_\circ} \hat{\mathbf{z}} \int_\circ^{۲\pi} d\phi' \int_\circ^{\infty} \frac{\rho' \, d\rho'}{(h^{۲} + \rho'^{۲})} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ} \hat{\mathbf{z}} \qquad (۲۱-۲)$$



شکل ۲-۵ تقسیم بار مثال ۱ به حلقه‌های باردار.

مسئلهٔ یافتن پتانسیل از توزیع بار داده شده نیز مسئلهٔ مشابهی است ولی ساده‌تر، زیرا دیگر با انتگرال برداری سر و کار نداریم.

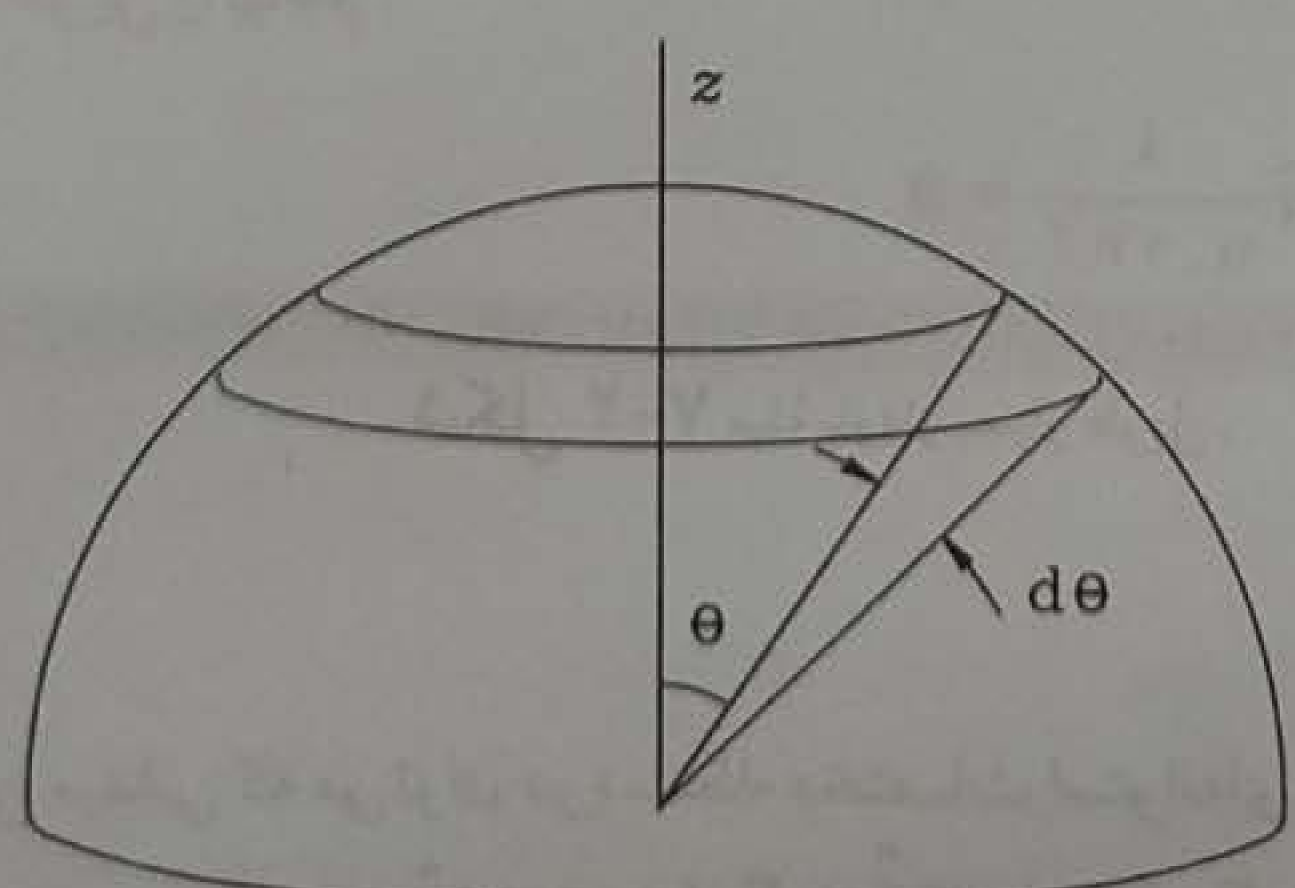
در حل بعضی مسائل می‌توان توزیع بار داده شده را به نحوی تقسیم کرد که بتوان به فرمولبندی ساده‌تری دست یافت. مثلاً بار صفحه‌ای مثال ۱ را می‌توان به رشته‌های موازی تقسیم کرد، هر کدام را یک خط بار به حساب آورد و میدان ناشی از آنها را با هم جمع کرد. همچنین می‌توان این سطح را مطابق شکل ۲-۵ به حلقه‌های باردار تقسیم کرد. میدان روی محور یک حلقهٔ باردار به صورت زیر است

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda R}{۲\varepsilon_۰} \frac{d}{(d^۲ + R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \hat{\mathbf{z}} \qquad (۲\text{-}۲۲)$$

که در آن λ بر حسب C/m چگالی بار خطی روی حلقه، R شعاع حلقه و d فاصلهٔ نقطهٔ مشاهده از مرکز حلقه است. نکته‌ای که در کاربرد این روش باید به آن توجه کرد این است که چگونه توزیع بار داده شده را به بار مربوط به تقسیم بندی جدید ارتباط دهیم. مشخصتر این که مثلاً در مثال فوق میدان روی حلقه را بر حسب چگالی بار خطی روی حلقه، λ، در اختیار داریم، چگونه باید λ را به σ ارتباط دهیم. چون مساحت حلقهٔ مفروض $۲\pi r\,dr$ است، کل بار روی حلقه $۲\pi\sigma r\,dr$ است. این بار روی حلقه‌ای به طول $۲\pi r$ به طور یکنواخت توزیع شده است، پس $\lambda = \sigma\,dr$.

مثال ۲

روی نیمکره‌ای به شعاع a باری با توزیع یکنواخت σ C/m^۲ قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در مرکز کره، با توجه به رابطهٔ میدان حلقهٔ باردار (معادلهٔ ۲-۲۲) بیابید.



شکل ۲-۶ تقسیم سطح کره به حلقه‌های باردار.

حل

سطح کره را مطابق شکل ۲-۶ به حلقه هایی به شعاع $a\sin\theta$ و ضخامت $a\,d\theta$ تقسیم می‌کنیم. مساحت چنین حلقه‌ای عبارت است از

$$\text{مساحت حلقه} = S = (\text{محیط}) \times (\text{ضخامت}) = (2\pi a\sin\theta)(a\,d\theta) \qquad (۲-۲۳)$$

کل بار روی این حلقه $S\sigma$ است و با تقسیم آن بر محیط حلقه $(2\pi a\sin\theta)$ در می‌یابیم که چگالی خطی بار روی حلقه عبارت است از

$$\lambda = \sigma a\,d\theta \qquad (۲-۲۳)$$

فاصلهٔ نقطهٔ مشاهده (مرکز کره) تا مرکز حلقه $a\cos\theta$ است. پس با توجه به معادلهٔ (۲-۲۲)

$$dE = \frac{(a\sin\theta)(\sigma a\,d\theta)}{2\varepsilon_0}\,\frac{a\cos\theta}{(a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}(-\hat{\mathbf{z}})$$
$$= \frac{\sigma\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{2\varepsilon_0}(-\hat{\mathbf{z}})$$

پس

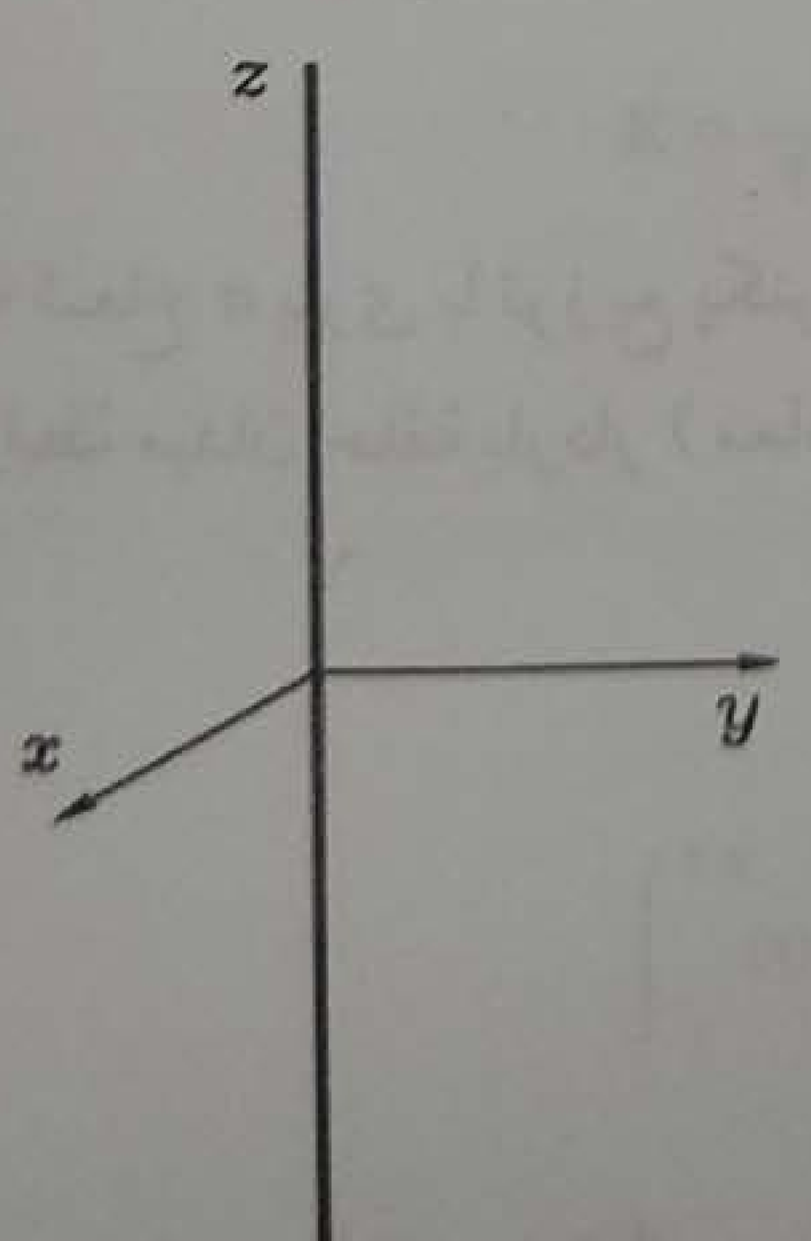
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{\mathbf{z}})\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

استفاده از تقارن می‌تواند در کاهش عملیات لازم برای حل مسائل موثر باشد. این امر به خصوص در کاربرد قانون گوس مشاهده می‌شود، زیرا برای استفاده از قانون گوس به اطلاعاتی پیشینی راجع به میدان نیاز داریم، اطلاعاتی که باید از تقارن کسب شود. اطلاعات لازم از این قرار است: (الف) میدان چه مولفه‌ای ندارد؟ (ب) مولفه‌های موجود تابعی از کدام متغیرها نیستند؟ این سوالها را به صورت منفی مطرح کردیم، زیرا تقارن به این سوالها راحتتر پاسخ می‌دهد.

مثال ۳

می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از یک میلهٔ باردار بینهایت طویل را بیابیم.



شکل ۲-۷ میلهٔ باردار بسیار طویل.

حل

کلی‌ترین میدانی که می‌توان در دستگاه مختصات استوانه‌ای در نظر گرفت به صورت زیرست

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho,\phi,z)\hat{\boldsymbol{\rho}} + E_\phi(\rho,\phi,z)\hat{\boldsymbol{\phi}} + E_z(\rho,\phi,z)\hat{\mathbf{z}}$$

یعنی میدان هر سه مولفه را دارد و هر مولفه تابعی از هر سه متغیر فضاست. و اما میدان چنین باری نمی‌تواند مولفهٔ z داشته باشد. به فرض وجود چنین مولفه‌ای جهت آن $\hat{\mathbf{z}}$ است یا $-\hat{\mathbf{z}}$؟ هیچکدام، زیرا این دو جهت از هیچ حیثی بر هم برتری ندارند. به عبارت دیگر توزیع بار داده شده باعث نمی‌شود یکی از دو جهت بر دیگری مرجح باشد، و به قول فلاسفه ترجیح بلا مرجح محال است. به دلیل مشابه میدان نمی‌تواند مولفهٔ ϕ داشته باشد (توضیح دهید چرا). ولی مولفهٔ ρ چطور؟ مسلماً جهتهای $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و $-\hat{\boldsymbol{\rho}}$ تفاوت دارند، یکی از این دو جهت ما را از بار دور می‌کند ولی در جهت دیگر به بار نزدیک می‌شویم. پس امری فیزیکی باعث می‌شود جهتهای $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و $-\hat{\boldsymbol{\rho}}$ متفاوت باشند.

اکنون فهمیده‌ایم که میدان این بار به صورت زیرست

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho, \phi, z)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

حال به پاسخ این سوال می‌پردازیم که مولفهٔ موجود تابعی از کدام متغیرها **نیست**. تقارن نشان می‌دهد که میدان نمی‌تواند تابعی از z و ϕ باشد. اگر خود را در فضایی که این بار در آن قرار دارد تصور کنیم، هیچ راهی برای این که بتوانیم نقاط دارای $z=1$ و $z=2$ را از هم تمییز دهیم وجود ندارد، همچنین دو نقطهٔ با $\phi = \pi/4$ و $\phi = \pi/6$ را. ولی دو نقطهٔ دارای ρ متفاوت را به سادگی می‌توان از هم تمییز داد. مثلاً نقطهٔ دارای $\rho = 2$ از نقطهٔ دارای $\rho = 3$ به بار نزدیکترست. اکنون به این نتیجه رسیده‌ایم که برای این بار

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

توجه کنید که این استدلالها بر دانسته‌های الکترومغناطیسی استوار نیستند.

اکنون استوانه‌ای هم محور با بار در نظر می‌گیریم. روی این استوانه $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = Q/\varepsilon_\circ$، که Q کل بار داخل استوانه است. اگر ارتفاع استوانه را h فرض کنیم $Q = \lambda h$. روی قاعده‌های استوانه $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \circ$، زیرا $\mathbf{E}$ و $d\mathbf{s}$ بر هم عمودند. روی سطح جانبی استوانه $d\mathbf{s} = \rho\, d\phi\, dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ که ρ شعاع استوانه است. پس

$$\iint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \iint E_\rho(\rho)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot \rho\, d\phi\, dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \iint E_\rho(\rho)\,\rho\, d\phi\, dz$$

چون E_ρ نه تابعی از ϕ است و نه تابعی از z، می‌توان آن را از داخل انتگرال بیرون آورد

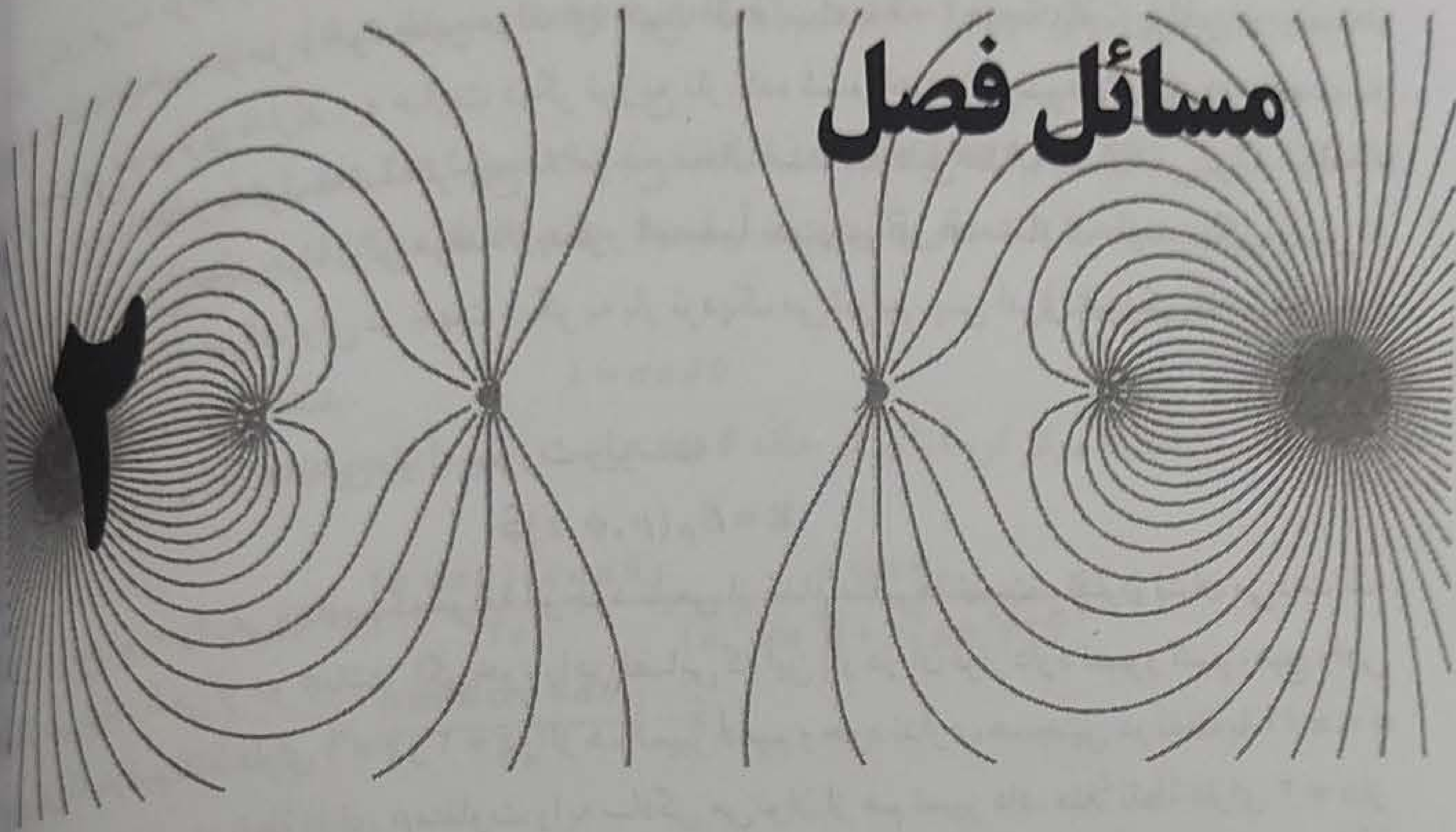
$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \iint E_\rho(\rho)\,\rho\, 2\pi h = \lambda h/\varepsilon_\circ$$

و سر انجام نتیجه گرفت

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ \rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

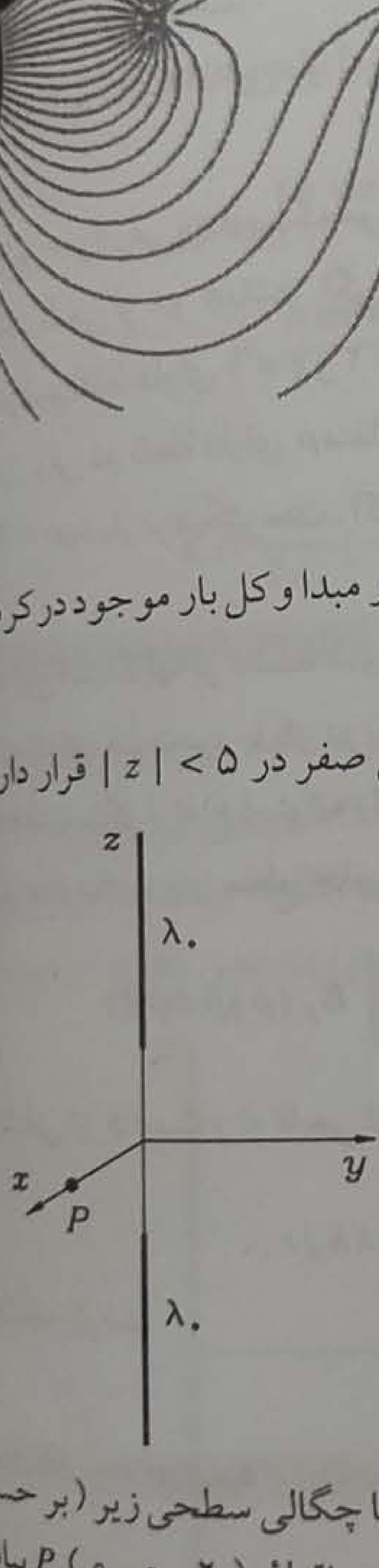
مسائل فصل

۲



۲-۱ چگالی بار $\rho = \frac{1}{r}\mu\ \mathrm{C/m^3}$ را در نظر بگیرید. چگالی بار در مبدا و کل بار موجود در کره‌ای به شعاع ۱ mm و به مرکز مبدا را بیابید.

۲-۲ روی محور z باری با چگالی λ_0 در $|z| > 5$ و با چگالی صفر در $|z| < 5$ قرار دارد. E را در $P(2, 0, 0)$ بیابید.

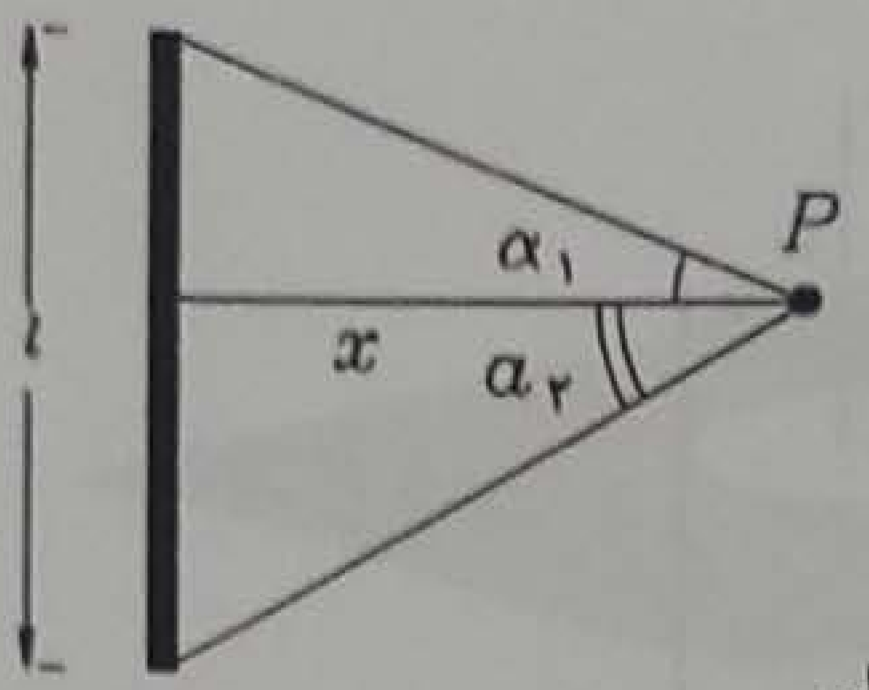


شکل ۲-۲

۲-۳ روی مربع $0 \le x \le 2\ \mathrm{m}$ ، $0 \le y \le 2\ \mathrm{m}$ و $z = 0$ باری با چگالی سطحی زیر (بر حسب $\mathrm{C/m^2}$) $\sigma = 2x(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}$ قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقطهٔ $P(0, 0, 2)$ بیابید.

۲-۴ روی مربع $-1 \le x \le 1$ ، $-1 \le y \le 1$ و $z = 0$ ، باری با چگالی سطحی $\sigma = |x|\ n\ \mathrm{C/m^2}$ قرار دارد. میدان الکتریکی را روی محور z ها بیابید.

۲-۵ شکل ۲-۵ میله‌ای به طول l را نشان می‌دهد که باری با چگالی یکنواخت $\lambda\ \mathrm{C/m}$ روی آن توزیع

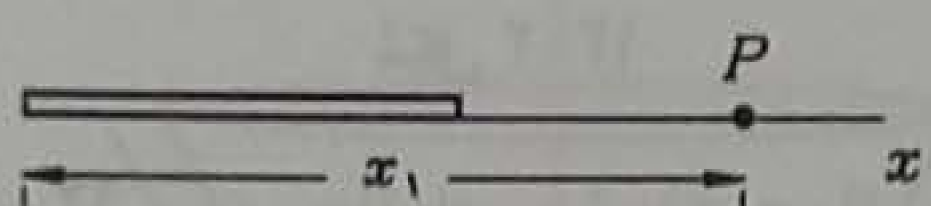


شکل ۲-۵

شده است. میدان $\mathbf{E}$ را در نقطهٔ P که فاصلهٔ عمودی آن تا میله برابر x است، بر حسب زاویه‌های α_1 و α_2 به دست آورید.

۲-۶ در مسئلهٔ ۲-۵ به ازای $l \gg x$ میدان چه مقداری دارد؟ آیا این جواب مطابق انتظار هست؟

۲-۷ میله‌ای به طول l روی محور x قرار دارد. باری با چگالی غیر یکنواخت $\lambda = k x^2$ C/m روی میله قرار دارد. میدان را در نقطهٔ P که روی محور x و به فاصلهٔ x_1 از آن قرار دارد، بیابید.



شکل ۲-۷

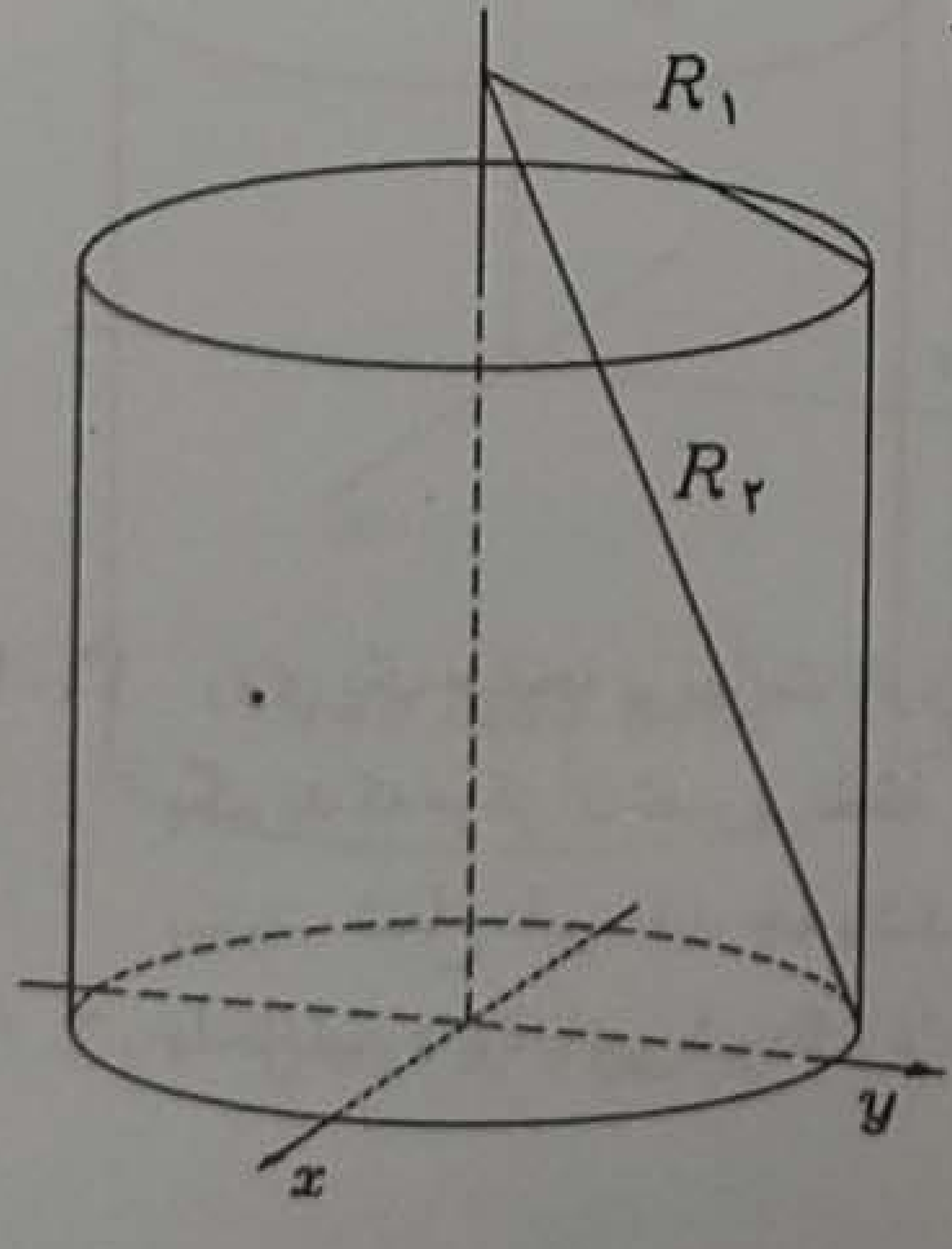
۲-۸ بر روی مخروط $\theta = \frac{\pi}{6}$، $0 < r < 2$ باری با چگالی $\sigma = k r$ C/m^2 قرار دارد. شدت میدان را در مبدا مختصات بیابید.

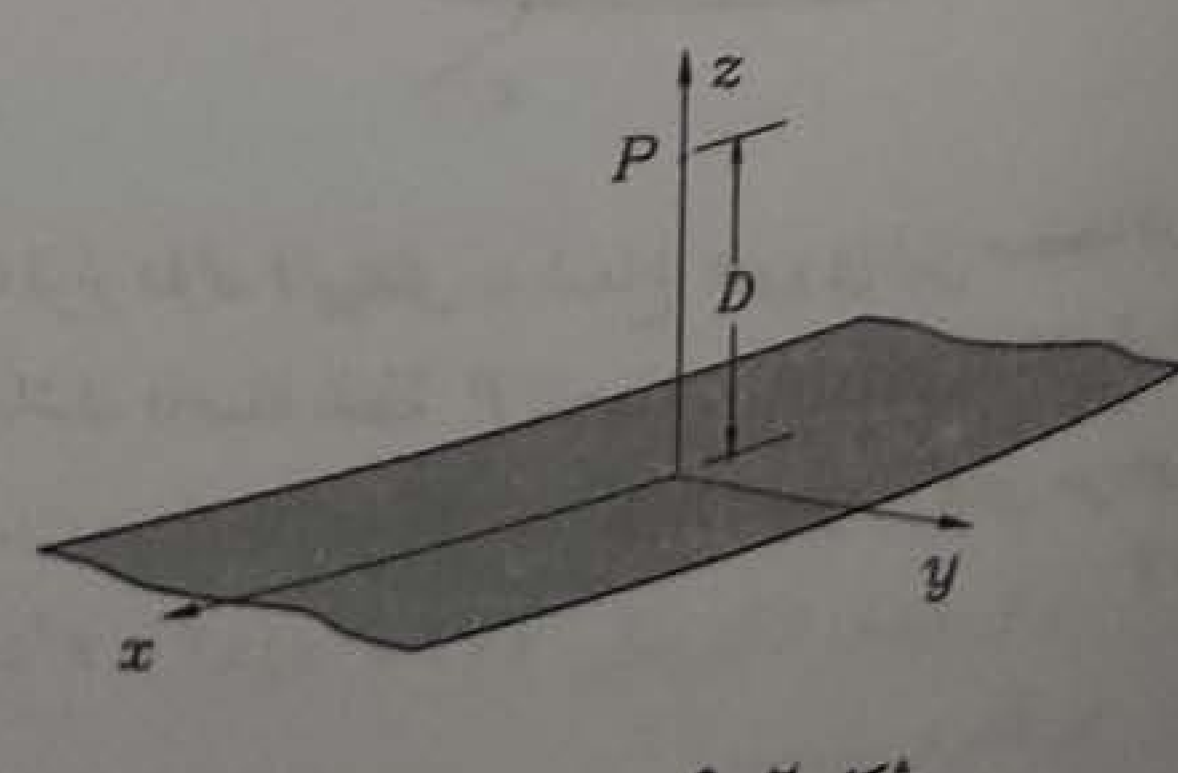
۲-۹ روی نواری به عرض $2a$ که به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۹ در صفحهٔ $z = 0$ قرار دارد و با معادلات $-\infty < x < \infty$ و $|y| < a$ توصیف می‌شود، باری با چگالی یکنواخت σ کولن بر متر مربع قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در نقطهٔ P، به فاصلهٔ D از نوار و بالای محور آن بیابید.

۲-۱۰ مسئلهٔ ۲-۹ را در حالتی که چگالی بار روی نوار است $\sigma = \frac{ky}{a}$ C/m^2، تکرار کنید.

۲-۱۱ روی استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع l باری با چگالی یکنواخت σ قرار دارد. نشان دهید که میدان الکتریکی روی محور استوانه، در نقطه‌ای که مطابق شکل ۲-۱۱ از لبه‌های دو قاعدهٔ به فاصلهٔ R_1 و R_2 قرار دارد عبارت است از

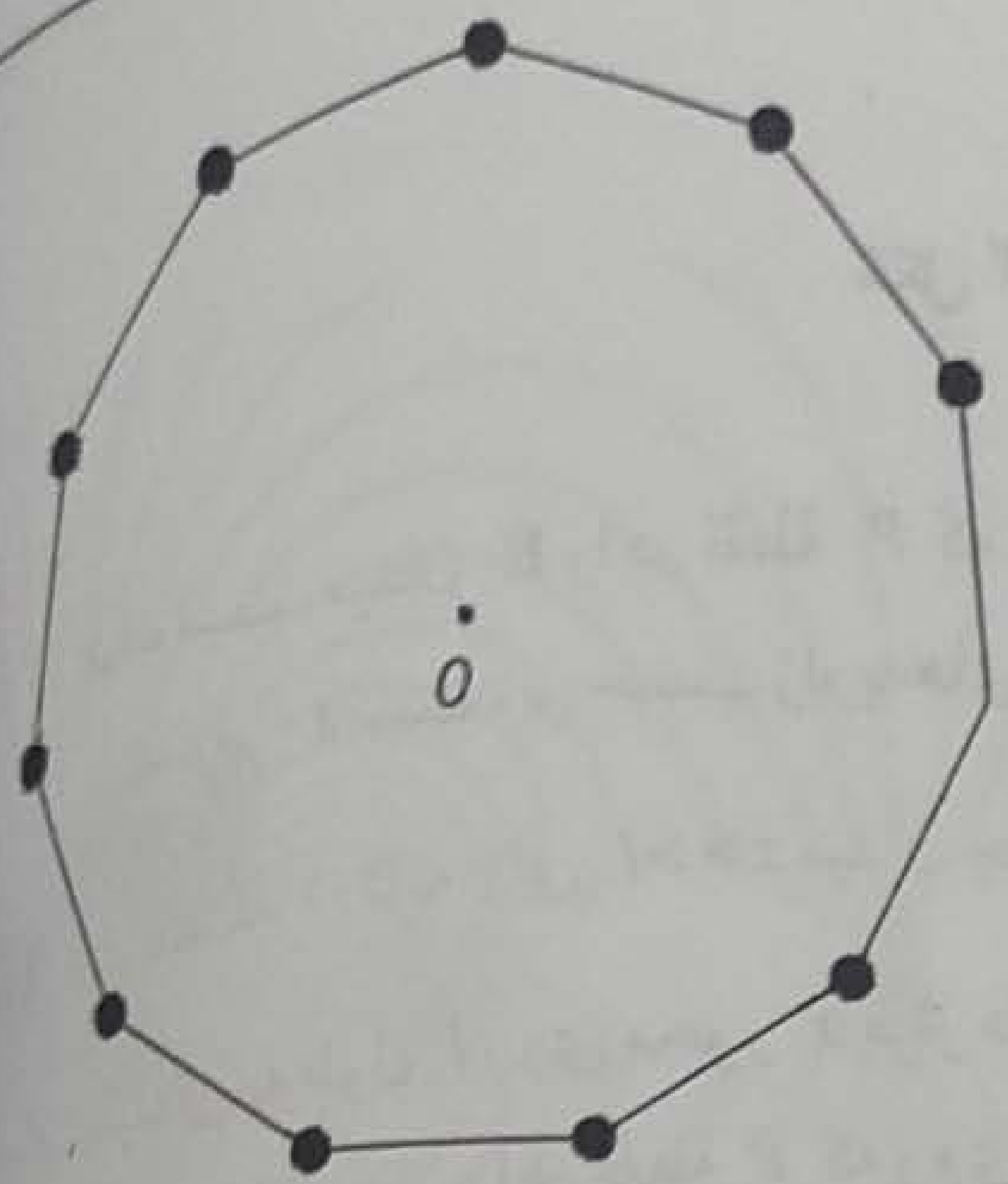
$$\mathbf{E} = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\hat{\mathbf{z}}$$



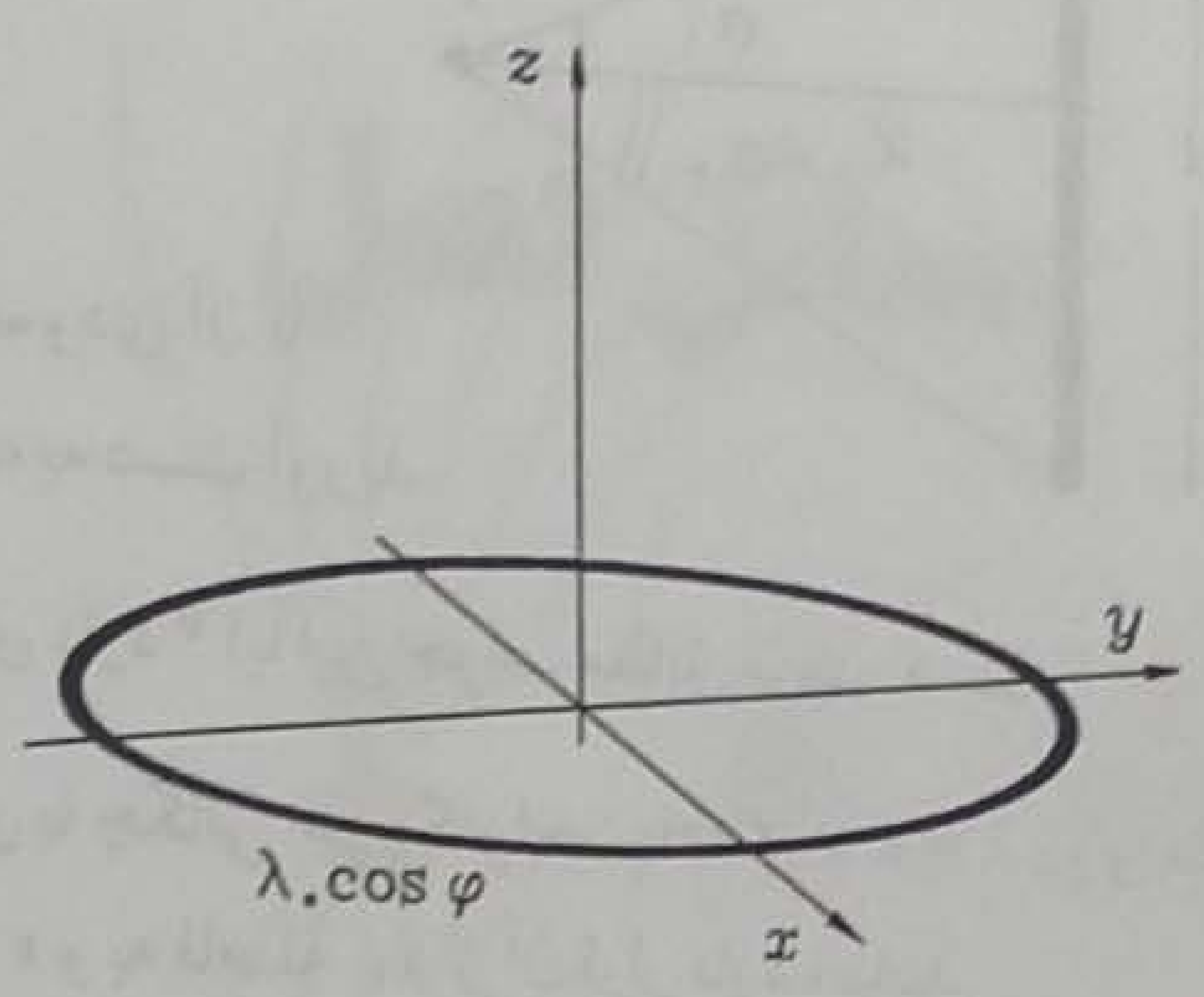


شکل ۲-۱۱

شکل ۲-۹



شکل ۲-۱۳



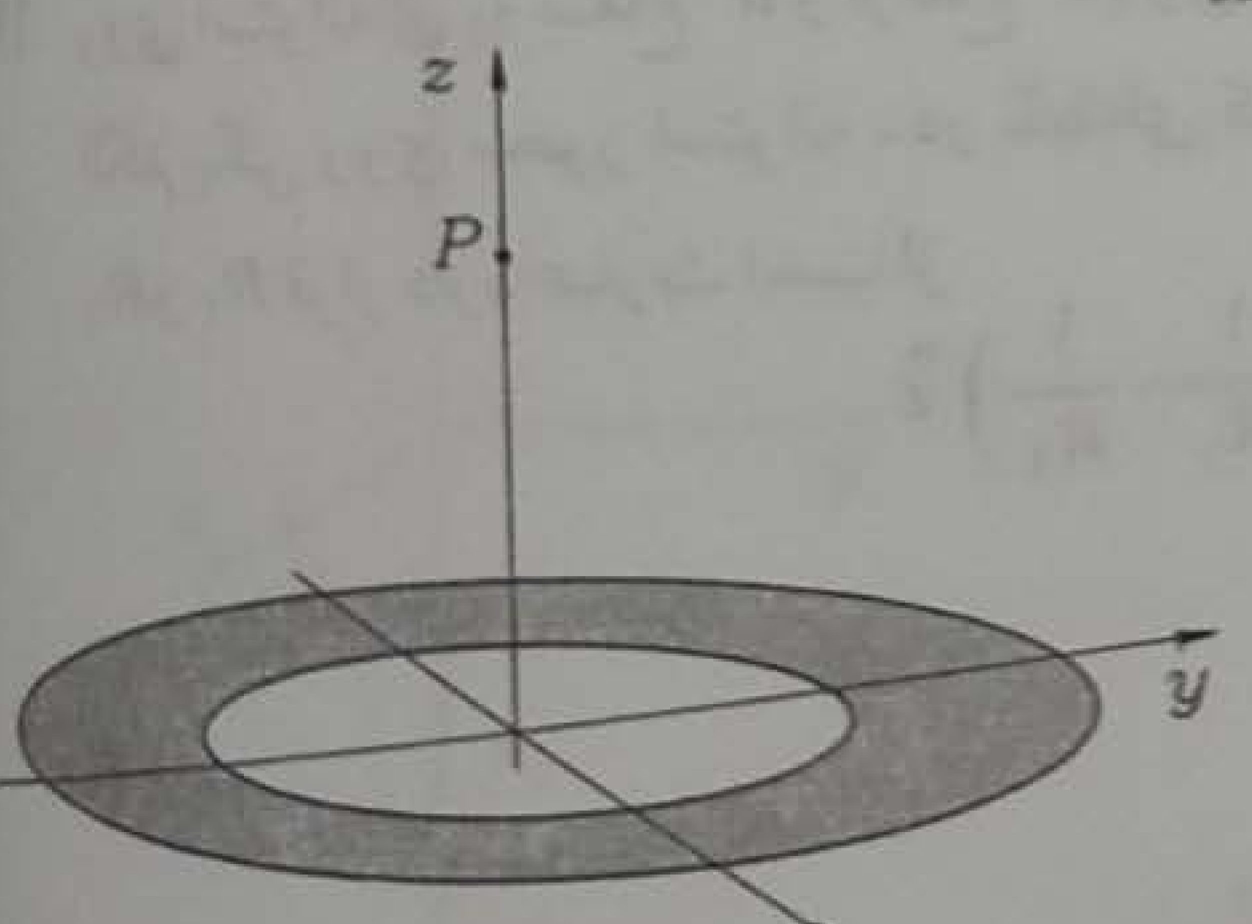
شکل ۲-۱۲

۲-۱۲ روی حلقه‌ای به شعاع a واقع در صفحهٔ xy و به مرکز مبدا مختصات باری با چگالی $\lambda=\lambda_\circ \cos\phi$ قرار دارد. میدان $\mathbf{E}$ را روی محور حلقه (محور z) بیابید.

۲-۱۳ در ده راس یک یازده ضلعی منتظم ده بار نقطه‌ای q قرار گرفته است. شعاع دایرهٔ محیطی یازده ضلعی R است. شدت میدان را در مرکز یازده ضلعی به دست آورید.

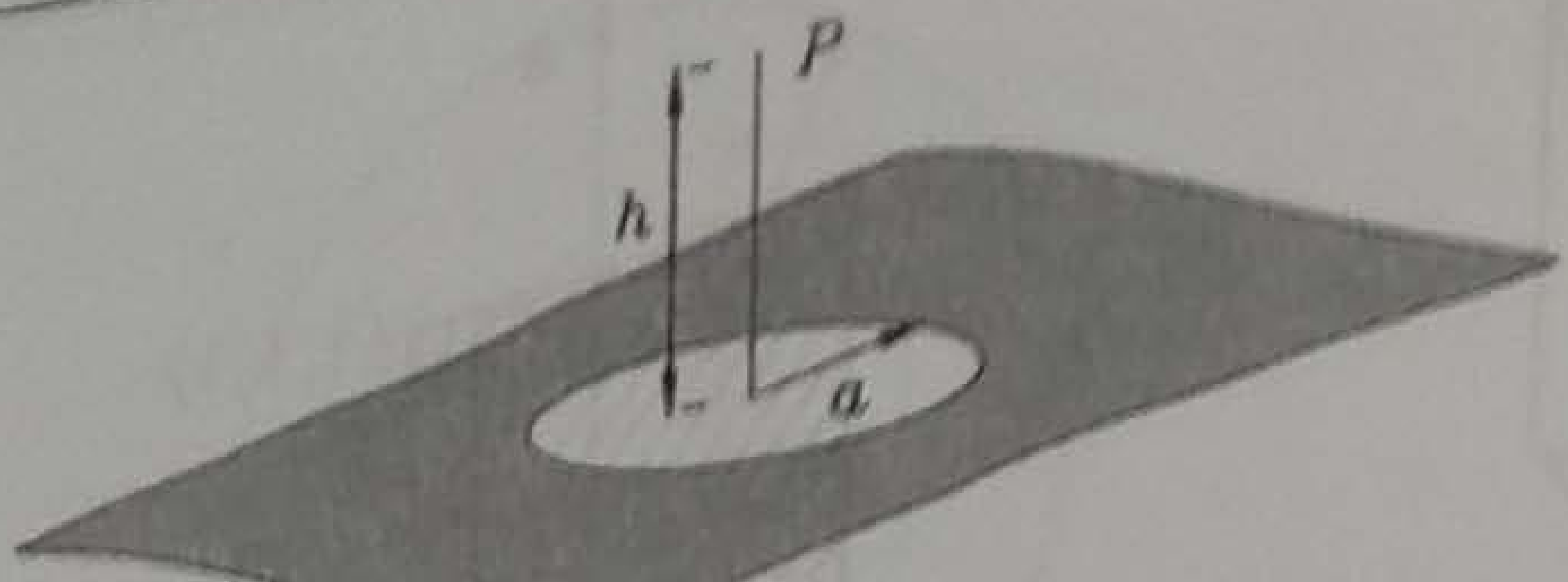
۲-۱۴ روی کره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع a باری با چگالی غیر یکنواخت $\sigma = k\cos\theta$ قرار دارد. میدان الکتریکی را روی محور z و در خارج کره بیابید.

۲-۱۵ روی واشری به شعاع داخلی ۱ cm و شعاع خارجی ۲ cm بار سطحی با چگالی $\sigma=\frac{100}{\rho}\mu\ \mathrm{C/m^2}$ قرار دارد. $\mathbf{E}$ را روی محور قرص به دست آورید.



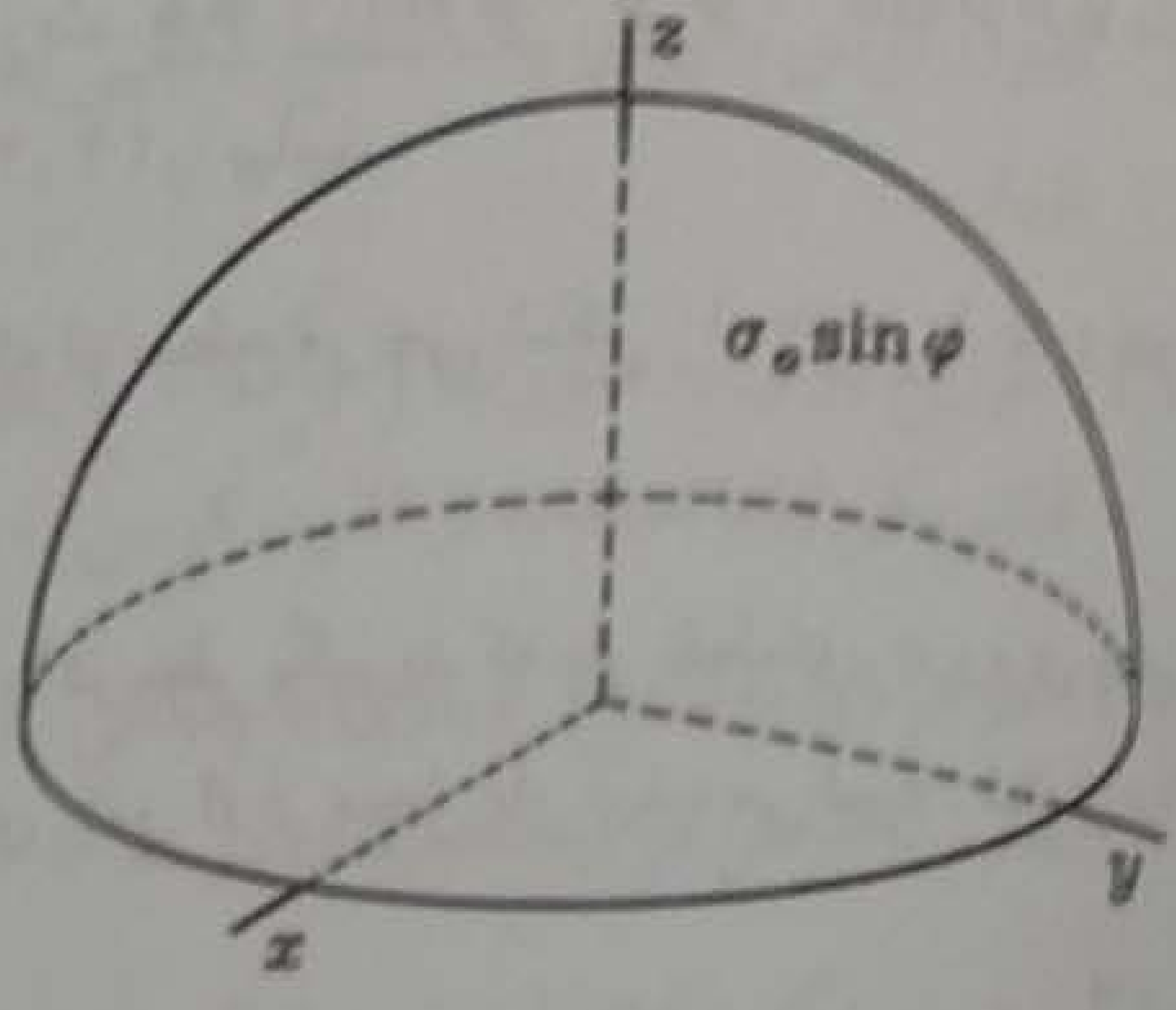
شکل ۲-۱۵

۲-۱۶ روی یک صفحهٔ بی‌نهایت باری با چگالی σ قرار دارد. دایره‌ای به شعاع a روی این صفحه در نظر بگیرید که مرکز آن تصویر نقطهٔ P بر صفحه باشد. فاصلهٔ نقطهٔ P تا صفحه h است. شکل ۲-۱۶ را ببینید. شعاع دایره باید چه باشد تا نصف شدت میدان الکتریکی در نقطهٔ p از بارهای موجود در داخل این دایره ناشی شود؟

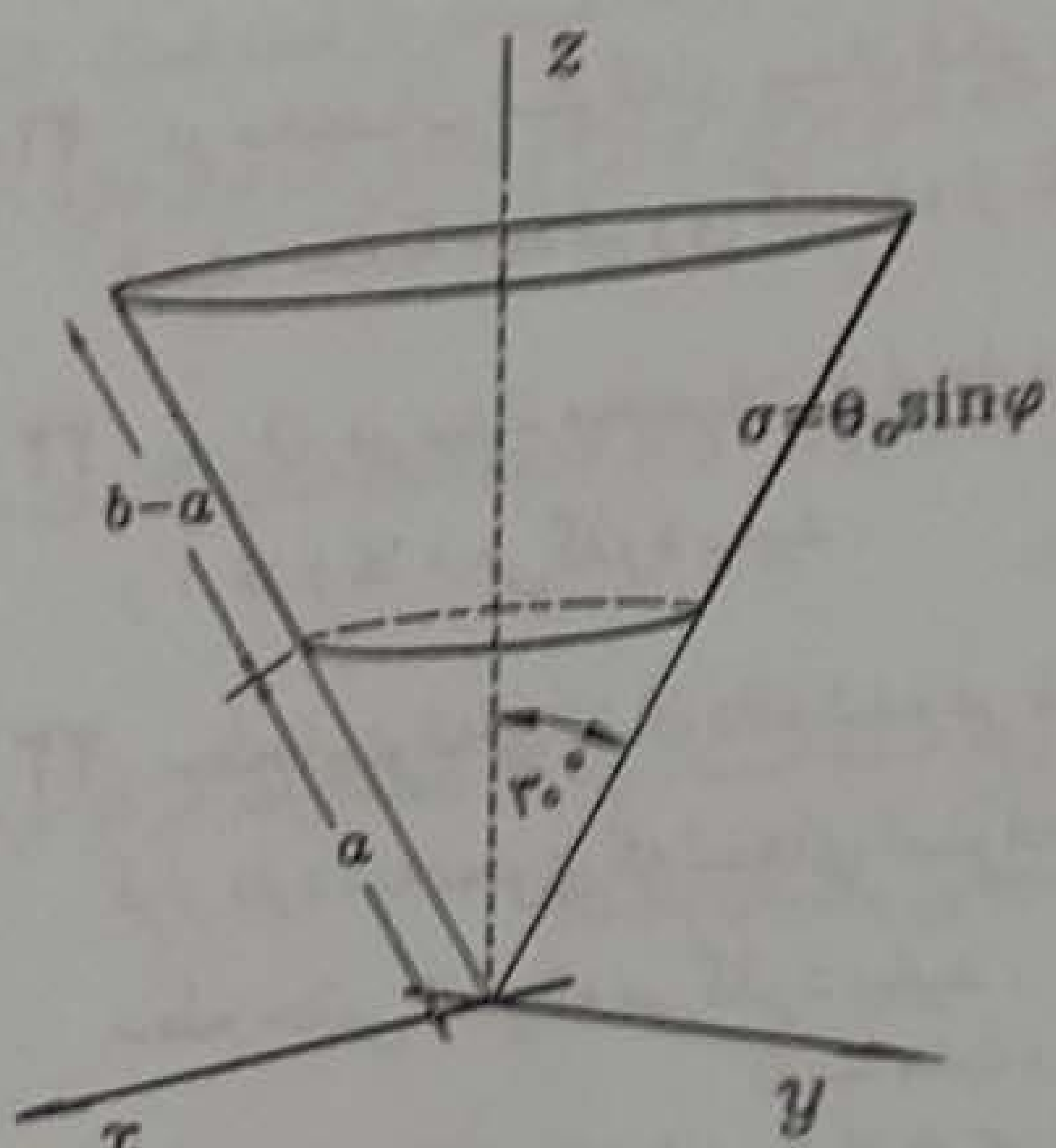


شکل ۲-۱۶

۲-۱۷ روی نیمکرهٔ شکل ۲-۱۷ باری با چگالی غیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \sin\phi$ C/m^2 قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در مبدا مختصات به دست آورید. شعاع نیمکره a است.



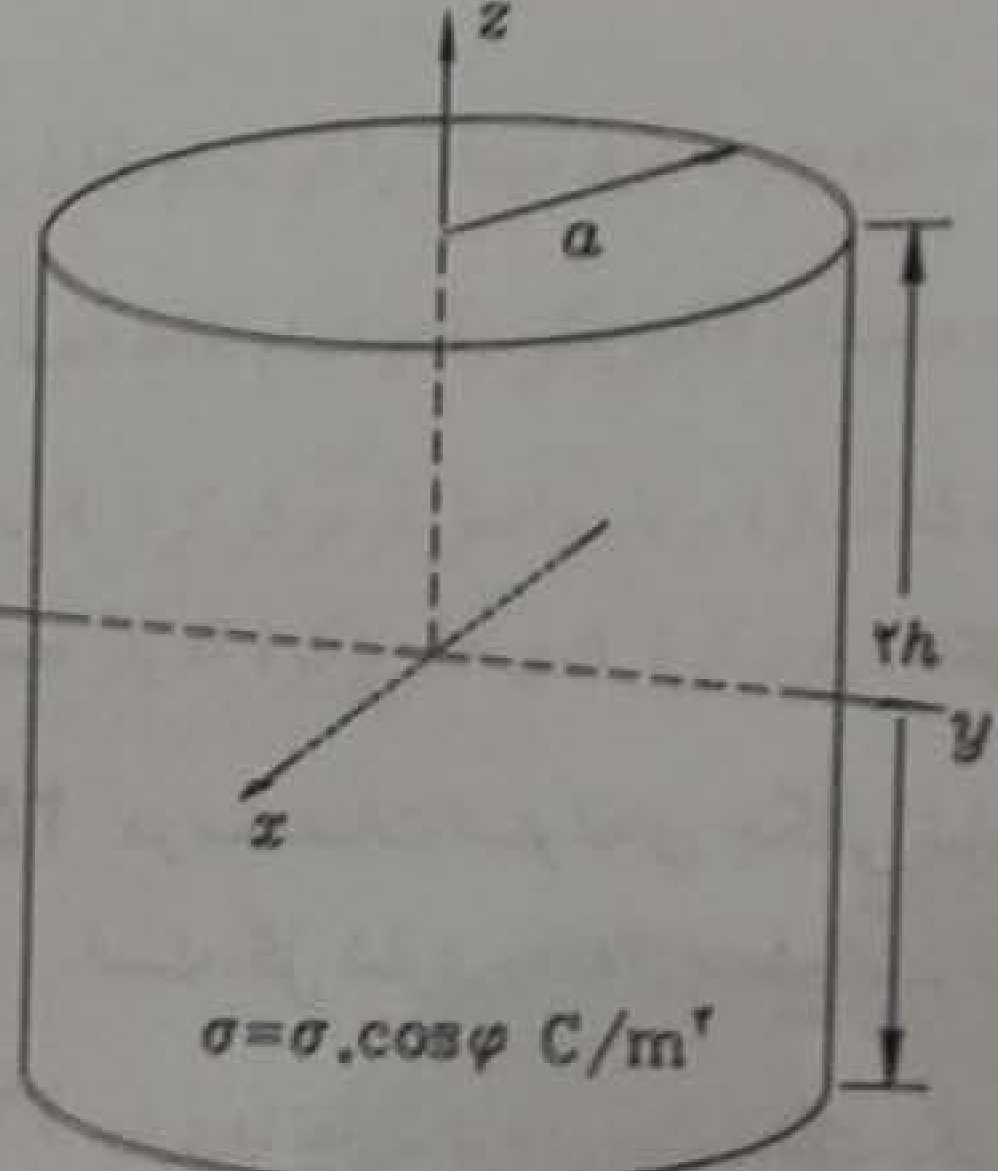
شکل ۲-۱۷



شکل ۲-۱۸

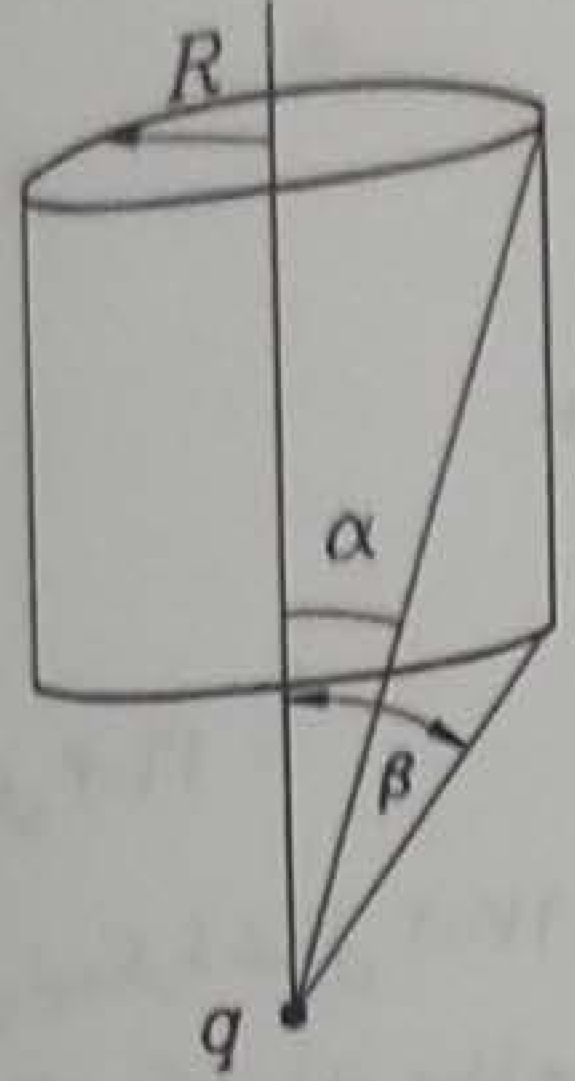
۲-۱۸ بر روی مخروط ناقص $a < r < b$ ، $0 \le \phi < 2\pi$ ، $\theta = 30°$، باری با چگالی غیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 \sin\phi$ قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در مبدا مختصات بیابید.

۲-۱۹ بر روی سطح جانبی استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع $2h$ طبق شکل ۲-۱۹ باری با چگالی سطحی $\sigma = \sigma_0 \cos\phi$ C/m^2 قرار دارد. شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در مبداء مختصات به دست آورید.

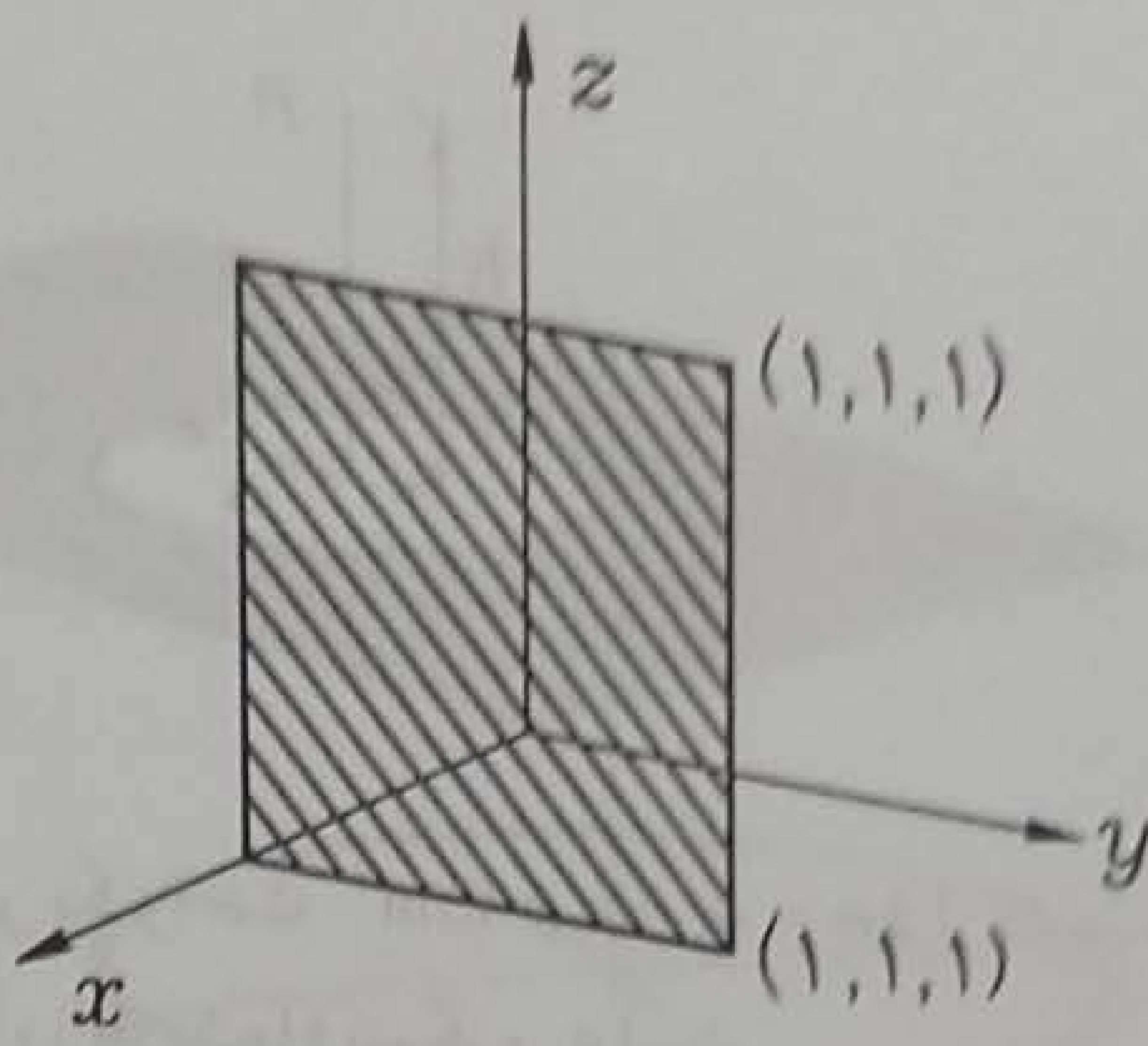


شکل ۲-۱۹

۲-۲۰ برای میدان الکتریکی $\mathbf{E} = 2xz^2\hat{\mathbf{x}} + 2z(x^2+1)\hat{\mathbf{z}}$ معادلهٔ خط نیرویی را که از نقطهٔ (۱،۳،-۱) می‌گذرد بیابید.



شکل ۲-۲۳



شکل ۲-۲۲

۲-۲۱ در مختصات استوانه‌ای میدان الکتریکی به صورت $\mathbf{E}=\rho\cos 2\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}-\rho\sin 2\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ داده شده است. معادلهٔ خط نیروی گذرنده از نقطهٔ (۲، ۳۰، ۰) را بیابید.

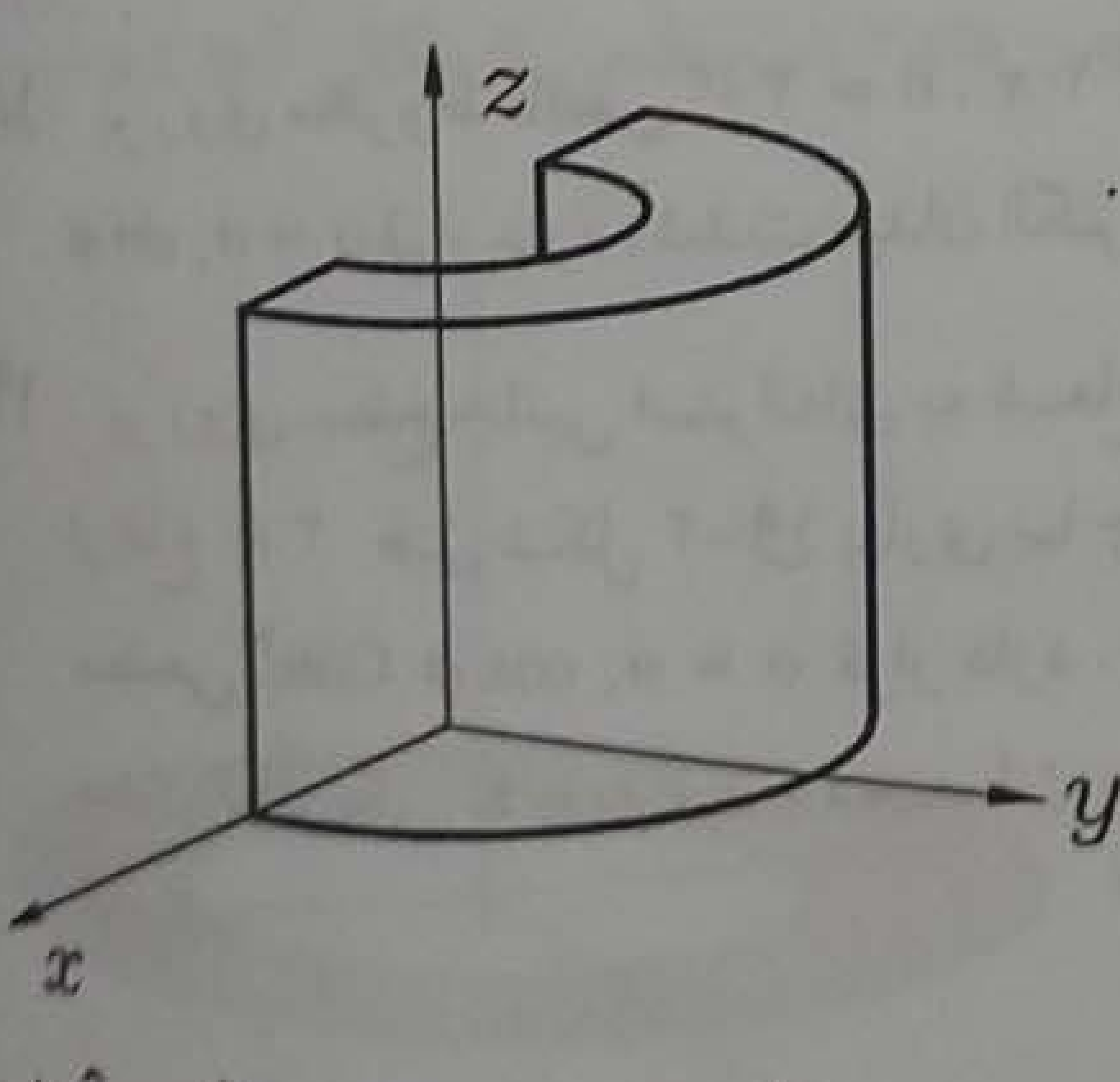
۲-۲۲ بار Q در مبداء مختصات قرار دارد. شاری را که از سطح مربعی شکل $x=1$، $0\le z\le 1$ و $0\le y\le 1$ می‌گذرد بیابید.

۲-۲۳ سطح استوانه‌ای نشان داده شده در شکل ۲-۲۳ را در نظر بگیرید که بار نقطه‌ای q روی محور آن قرار دارد، به نحوی که لبه‌های استوانه با زاویه‌های α و β از محل بار دیده می‌شود. شاری را که از سطح جانبی استوانه می‌گذرد بیابید.

۲-۲۴ در ناحیهٔ $1\le\rho\le 2$، $0\le\phi\le\pi$، $0\le z\le 2.5$ چگالی شار الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{D}=\frac{20}{\rho}\cos\frac{1}{2}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

کل بار موجود در این ناحیه را به دو روش بیابید.

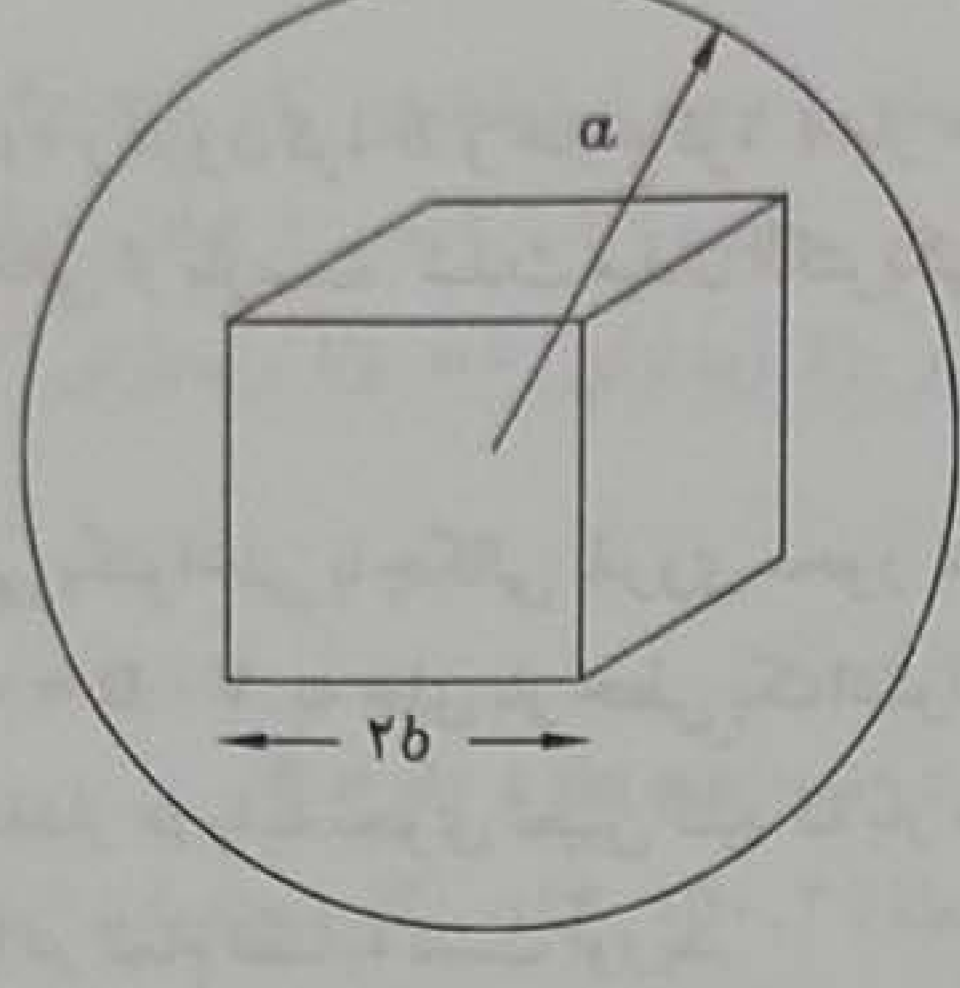


شکل ۲-۲۴

۲-۲۵ در مختصات استوانه‌ای چگالی شار الکتریکی به صورت $\mathbf{D}=(\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+z\hat{\mathbf{z}})/[4\pi(\rho^2+z^2)^{3/2}]$ است. کل شاری را که از سطح استوانه‌ای با مشخصات $\rho=7$، $|z|\le 10$ می‌گذرد، بیابید.

۲-۲۶ باری با تقارن کروی میدان الکتریکی $\mathbf{E}=\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{(1-e^{-ar})}{r^2}\right]\hat{\mathbf{r}}$ را ایجاد کرده است. توزیع بار را بدون استفاده از دیورژانس بیابید.

۲-۲۷ روی سطح $z=0$ باری با چگالی $\sigma\ \mathrm{C/m^2}$ قرار دارد. صحت قانون گوس را برای یک سطح کره‌ای ثابت کنید، چه این سطح $z=0$ را قطع کند و چه نکند.



شکل ۲-۲۸

۲-۲۸ کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت و با چگالی ρ کولن بر متر مکعب باردارشده است. صحت قانون گوس را برای یک سطح مکعبی به ضلع $2b$ که هم مرکز با کره و داخل آن قرار دارد، ثابت کنید.

۲-۲۹ توزیع باری به صورت $\rho_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$ در $r < a$ و $\rho = 0$ در $r > a$ داده شده است. شدت میدان الکتریکی را با استفاده از قانون گوس به دست آورید.

۲-۳۰ در کره‌ای به شعاع a باری با چگالی $\rho = k/r$ توزیع شده است. چه بار نقطه‌ای در مرکز کره قرار دهیم تا اثرش در ایجاد میدان در $r > a$ با اثر بار حجمی یکسان باشد؟

۲-۳۱ در دستگاه مختصات استوانه‌ای توزیع بار زیر داده شده است

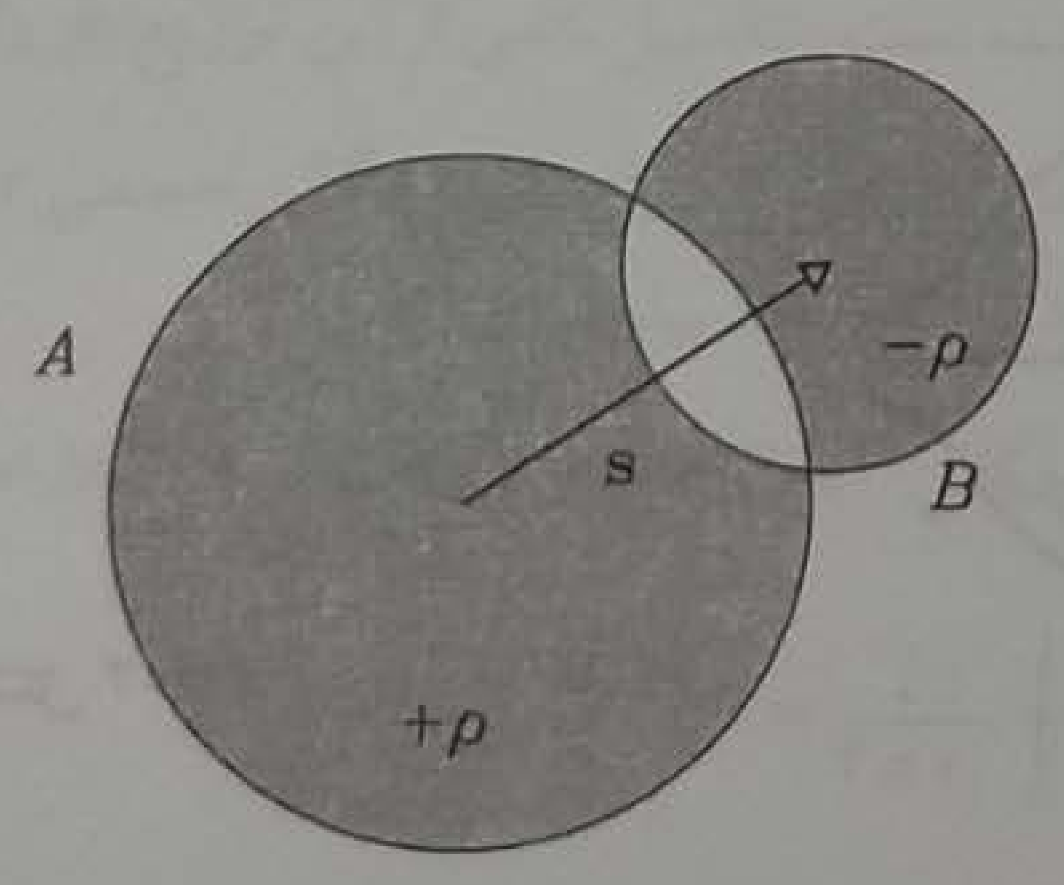
$$\rho = \begin{cases} \frac{k}{a}\rho & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

شدت میدان الکتریکی را بیابید.

۲-۳۲ در فضای $|z| < a$ باری با چگالی $\rho = |z| \; c/m^3$ وجود دارد. میدان را در تمام نقاط بیابید.

۲-۳۳ در $0 < x \le t$ باری با چگالی $\rho = \rho_0 \sin\frac{\pi x}{t}$ قرار دارد. میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا بیابید.

۲-۳۴ دو کره به شعاعهای R_1 و R_2 به صورتی قرار دارند که اندازهٔ بردار واصل از مرکز کرهٔ A به مرکز کرهٔ B (بردار شکل ۲-۳۴) از $R_1 + R_2$ کوچکتر است. درون کرهٔ A و خارج کرهٔ B بار حجمی با

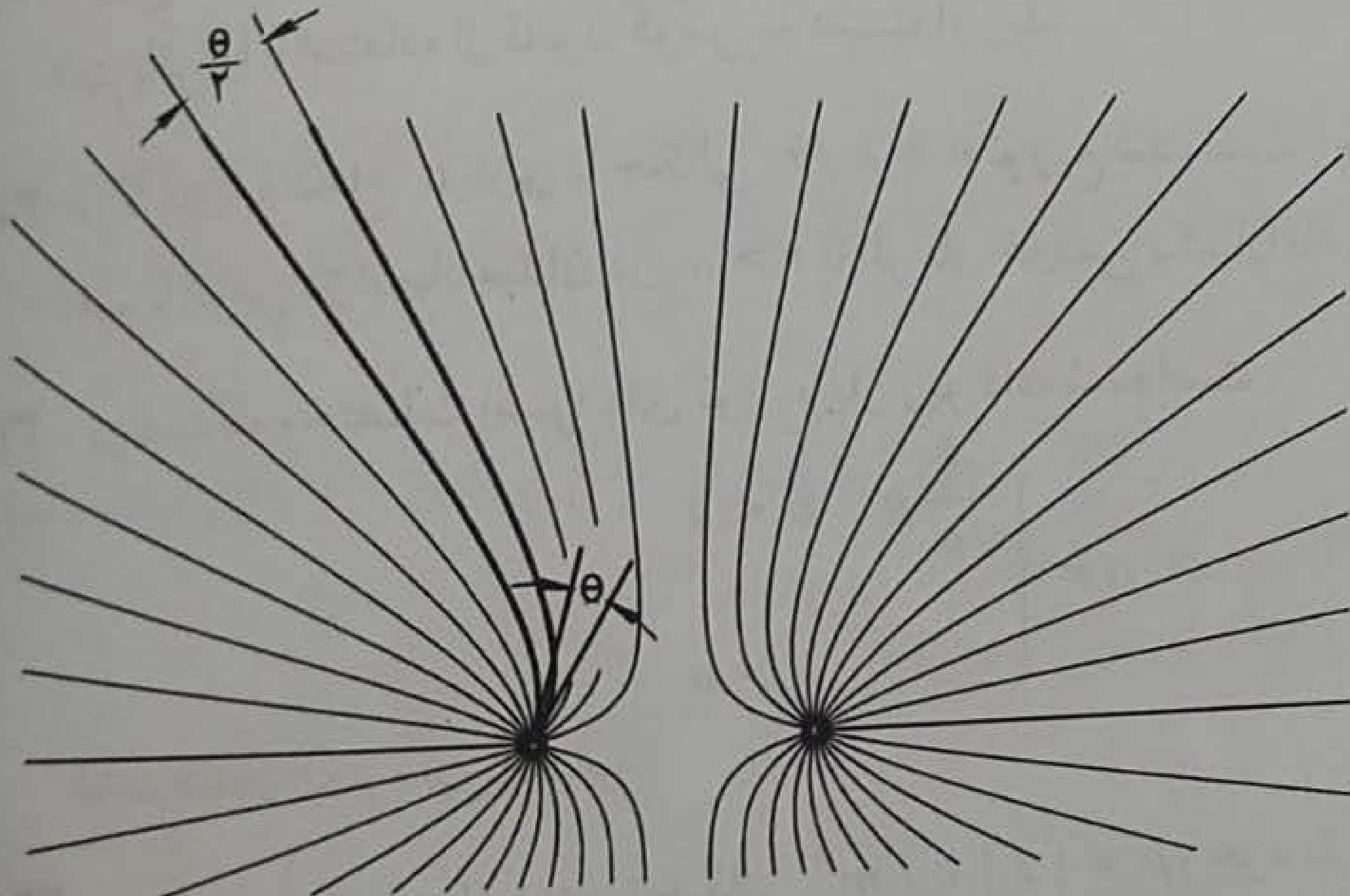


شکل ۲-۳۴

چگالی $\rho+$ و درون کرهٔ B و خارج کرهٔ A بار حجمی با چگالی $\rho-$ وجود دارد. فضای مشترک بین کره ها خالی از بارست. شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در این فضای مشترک خالی از بار به دست آورید.

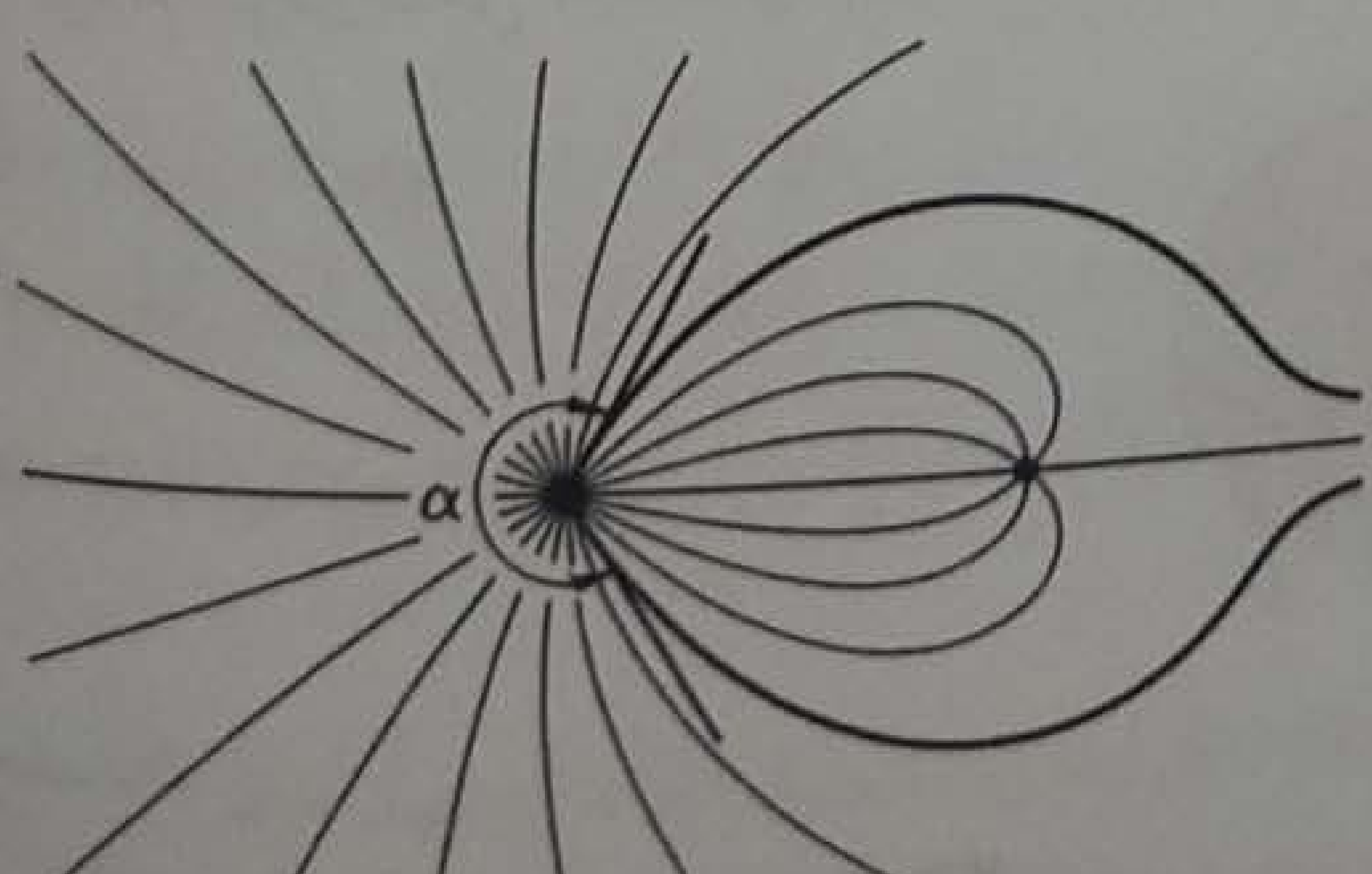
۲-۳۵ بار خطی یکنواختی با چگالی λ روی محور z قرار دارد. نشان دهید که در تمام فضا، بجز روی بار خطی، $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. به جای بار خطی یک استوانهٔ باردار با چگالی یکنواخت k در $0 \le \rho \le a$ قرار دهید و مقدار ρ را به نحوی تعیین کنید که بار در واحد طول در هر دو حالت یکسان باشد. اکنون $\nabla \cdot \mathbf{D}$ را در تمام فضا به دست آورید.

۲-۳۶ دو بار خطی بی‌نهایت به موازات محور z ها قرار دارند و باری با چگالی λ C/m روی هر دو وجود دارد. دو بار خطی از نقاط $x = \pm a$ محور x می‌گذرند (شکل ۲-۳۶). خطوط نیرو را در صفحهٔ $z = 0$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید دو خط نیرو که با زاویهٔ θ از یک بار جدا می‌شوند، در فواصل دور به دو مجانب که با هم زاویهٔ $\theta / ۲$ می‌سازند میل می‌کنند.



شکل ۲-۳۶

۲-۳۷ خطوط میدان دو خط بار با چگالیهای $\lambda-$ و $۳\lambda+$ را در صفحهٔ عمود بر دو خط بار رسم کرده‌ایم. بعضی از خطوط سرچشمه گرفته از خط بار $۳\lambda+$ به خط بار $\lambda-$ ختم می‌شوند و بعضی به بی‌نهایت می‌روند. ماکزیمم زاویه‌ای که بین دو خط ممتد تا بی‌نهایت وجود دارد (دو خط سیاه‌تر شکل ۲-۳۷) چقدر است؟



شکل ۲-۳۷

۳۸-۲ بار خطی $\lambda = 10\pi\varepsilon_\circ$ C/m در امتداد محور x و بار نقطه‌ای $Q = 40\pi\varepsilon_\circ$ C در نقطهٔ (۱ - ، ۴ - ، ۲) در فضای آزاد قرار دارند. نقاط A (۱ ، ۱ - ، ۲)، B (۴ ، ۰ ، ۵)، و C (۲ - ، ۵ - ، ۳) را در نظر گرفته V_{AB} و V_C (به ازای $V_B = 0$ و به ازای $V_A = 20\ V$) را بیابید.

۳۹-۲ میدان الکتریکی زیر در فضای آزاد داده شده است

$$\mathbf{E} = 50\, z \sin\phi\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + 50\, z \cos\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}} + 50\, \rho \sin\phi\, \hat{\mathbf{z}}$$

و در مبدا مختصات $V = 0$. پتانسیل را در نقطهٔ (۲ ,۱۵۰ ,۳) دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

۴۰-۲ میدان الکتریکی زیر داده شده است

$$\mathbf{E} = \frac{60\,(\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + 0/5\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})}{r^3}$$

اختلاف پتانسیل نقاط A (۳ ,°۶۰ ,°۹۰) و B (۲ ,°۱۲۰ ,°۰) را بیابید. نقاط در مختصات کروی بیان شده‌اند.

۴۱-۲ یک میدان الکتریکی در مختصات کروی به صورت $\mathbf{E} = \dfrac{2r}{(r^2 + a^2)^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ داده شده است. میدان پتانسیل را در تمام فضا بیابید اگر ؛ (الف) پتانسیل در مبدا برابر صفر باشد ؛ (ب) پتانسیل در $r = a$ برابر ۱۰۰ V باشد.

۴۲-۲ باری با چگالی غیر یکنواخت $\lambda = \dfrac{1}{y^2 + 1}$ n C/m در امتداد محور y و در بخش منفی آن توزیع شده است. با فرض صفر بودن پتانسیل بینهایت V را در نقاط A (۰ ، ۱ ، ۰) و B (۱ ، ۰ ، ۰) بیابید.

۴۳-۲ داخل استوانه‌ای به طول بینهایت و شعاع a باری با توزیع یکنواخت $\rho_\circ$ C/m³ وجود دارد. اگر پتانسیل محور استوانه $V_\circ$ باشد، پتانسیل نقاط داخل و خارج استوانه را بیابید.

۴۴-۲ ثابت کنید اگر باری با تقارن کروی داشته باشیم، پتانسیل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$V_{(r)} = \frac{1}{\varepsilon_\circ r}\int_\circ^r \rho\, r'^2\, dr' + \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_r^\infty \rho\, r'\, dr'$$

۴۵-۲ باری با چگالی $\rho_\circ e^{-ar}$ در فضا توزیع شده است. پتانسیل ناشی از این توزیع بار را بیابید.

۴۶-۲ یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای بار با چگالی حجمی $\rho = kr$ است. شدت میدان الکتریکی E و پتانسیل V را در تمام نقاط بیابید.

۴۷-۲ روی سطح کره‌ای به شعاع a باری با چگالی σ C/m² قرار دارد. پتانسیل نقاط اطراف کره را با استفاده از رابطهٔ زیر به دست آورید.

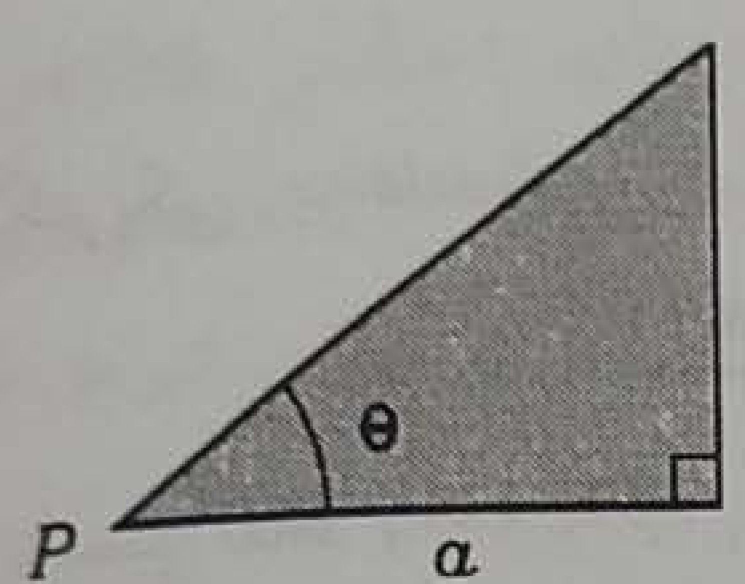
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int \frac{\sigma\, ds}{R}$$

۲-۴۸ روی سطح یک نیمکره و قاعدهٔ آن باری با چگالی یکنواخت σ قرار دارد. پتانسیل را در مرکز قاعده بیابید.

۲-۴۹ میله‌ای به طول $2a$ روی محور z ها و متقارن نسبت به مبدا قرار دارد. روی این میله بار Q به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل را روی محور z ها بیابید.

۲-۵۰ بر روی مخروط $\theta = \frac{\pi}{6}$، $0 < r < 2$ باری با چگالی $\sigma = \pi \varepsilon_0 \ \mathrm{C/m^2}$ قرار دارد. پتانسیل را در مبدا مختصات به دست آورید.

۲-۵۱ روی مثلث قائم الزاویه نشان داده شده در شکل ۲-۵۱ با چگالی σ وجود دارد. پتانسیل راس مثلث، نقطهٔ P را بیابید.



شکل ۲-۵۱

۲-۵۲ روی دایره‌ای به شعاع R باری با چگالی ثابت σ وجود دارد. پتانسیل را روی لبهٔ این دایره به دست آورید.

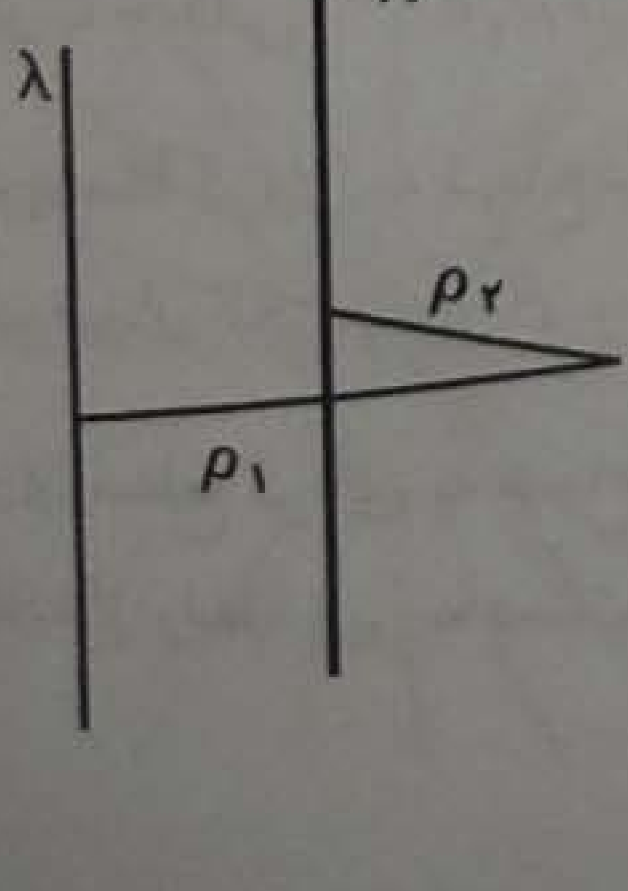
۲-۵۳ سطح $x^3 + y^2 + z = 1000$ یک سطح همپتانسیل است. اگر در نقطهٔ $P(7, 25, 32)$ داشته باشیم $|\mathbf{E}| = 50 \ \mathrm{V/m}$، $\mathbf{E}$ را در P بیابید.

۲-۵۴ در فضای آزاد میدان پتانسیل $V = 100 \, r^3 \sin\theta \ \mathrm{V}$ داده شده است. $\mathbf{E}$ و ρ (چگالی بار) را به دست آورید.

۲-۵۵ بار q در مبدأمختصات و بار $-q/2$ در روی محور xها در $x = a$ قرار دارد. سطح همپتانسیل $V = 0$ را تعیین کنید.

۲-۵۶ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ρ_A و ρ_B از یک بار خطی بی نهایت، با چگالی $\lambda \ \mathrm{C/m}$ قرار دارد. اختلاف پتانسیل دو نقطه را بیابید.

۲-۵۷ دو بار خطی با چگالیهای $\lambda \ \mathrm{C/m}$ و $-\lambda \ \mathrm{C/m}$ به موازات هم قرار دارند. پتانسیل نقطهٔ P را بیابید. فاصله نقطهٔ P از بارهای λ و $-\lambda$ به ترتیب ρ_1 و ρ_2 است.



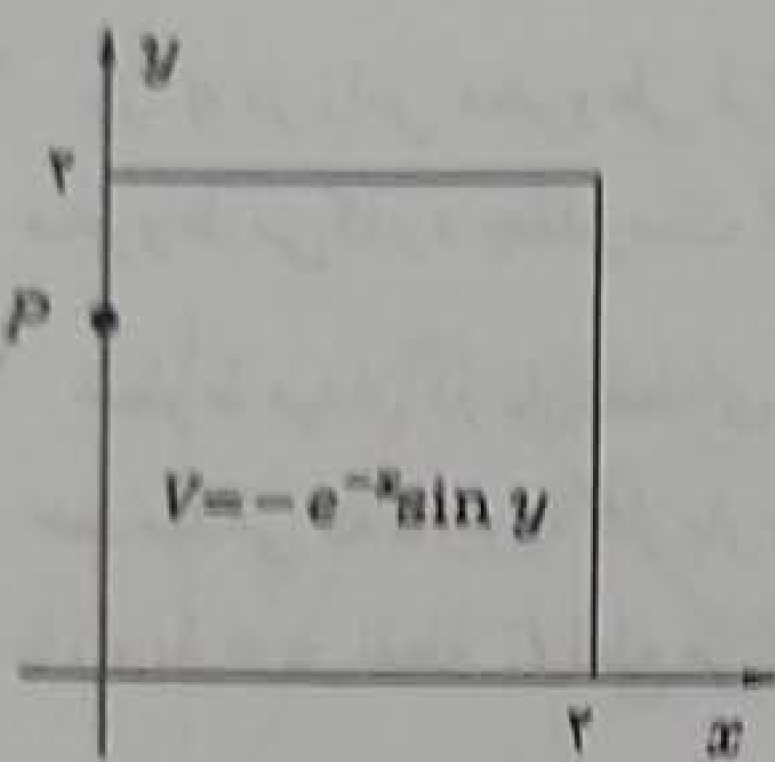
شکل ۲-۵۷

۲-۵۸ دو بار خطی با چگالیهای λ C/m و $-\lambda$ C/m به موازات هم و به فاصلهٔ d از هم قرار دارند. معادلات سطوح همپتانسیل را یافته، خطوط همپتانسیل را روی صفحه‌ای عمود بر خطوط بار رسم کنید.

۲-۵۹ در مربع $2 > x > 0$ ، $2 > y > 0$ پتانسیل به صورت زیر داده شده است

$$V = -e^{-x}\sin y$$

خط نیرویی که از نقطهٔ $P(0, \frac{\pi}{3})$ می‌گذرد، در چه نقطه‌ای لبهٔ دیگری از این ناحیه را قطع می‌کند؟



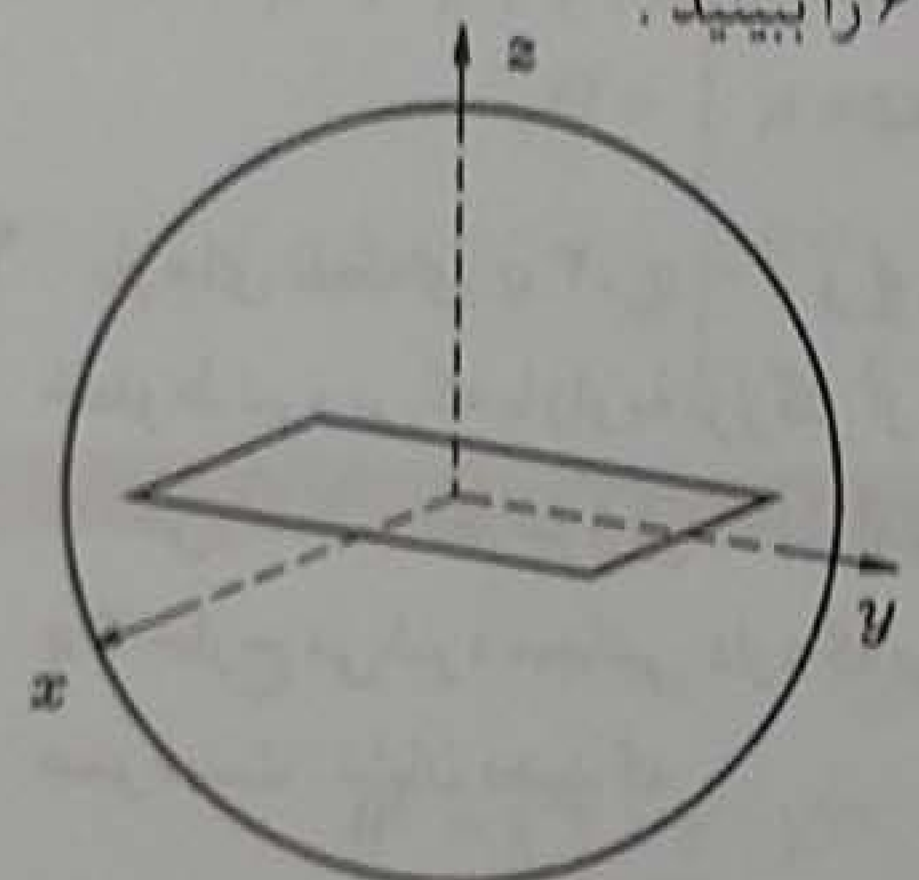
شکل ۲-۵۹

۲-۶۰ با گرفتن کرل از معادلهٔ کولن برای یافتن میدان الکتریکی، یعنی

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho'\,\mathbf{R}\,dv'}{|\mathbf{R}|^3}$$

نشان دهید که برای میدانهای الکتروستاتیک داریم $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

۲-۶۱ مسیر مستطیل شکلی در داخل یک کره دارای بار یکنواخت کولن بر متر مکعب انتخاب شده است. نشان دهید که برای این مسیر $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$. شکل ۲-۶۱ را ببینید.



شکل ۲-۶۱

۲-۶۲ آیا میدانهای برداری زیر می‌توانند میدان الکتروستاتیک باشند؟

(الف) $\mathbf{A} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}$ (ب) $\mathbf{B} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$

۲-۶۳ نشان دهید که میدان زیر

$$\mathbf{E} = -(y^2\cos x + z^3)\,\hat{\mathbf{x}} - (2y\sin x - 4)\,\hat{\mathbf{y}} - (3xz^2 + 2)\,\hat{\mathbf{z}}$$

یک میدان پایستار است و میدان پتانسیل متناظر با آن را بیابید.

۲-۶۴ نشان دهید که میدان برداری زیر

$$\mathbf{E} = -2xye^z\,\hat{\mathbf{x}} - e^z x^2\,\hat{\mathbf{y}} - (x^2ye^z + z^2)\,\hat{\mathbf{z}}$$

می‌تواند یک میدان الکتروستاتیک باشد. میدان پتانسیل متناظر با این میدان را بیابید.

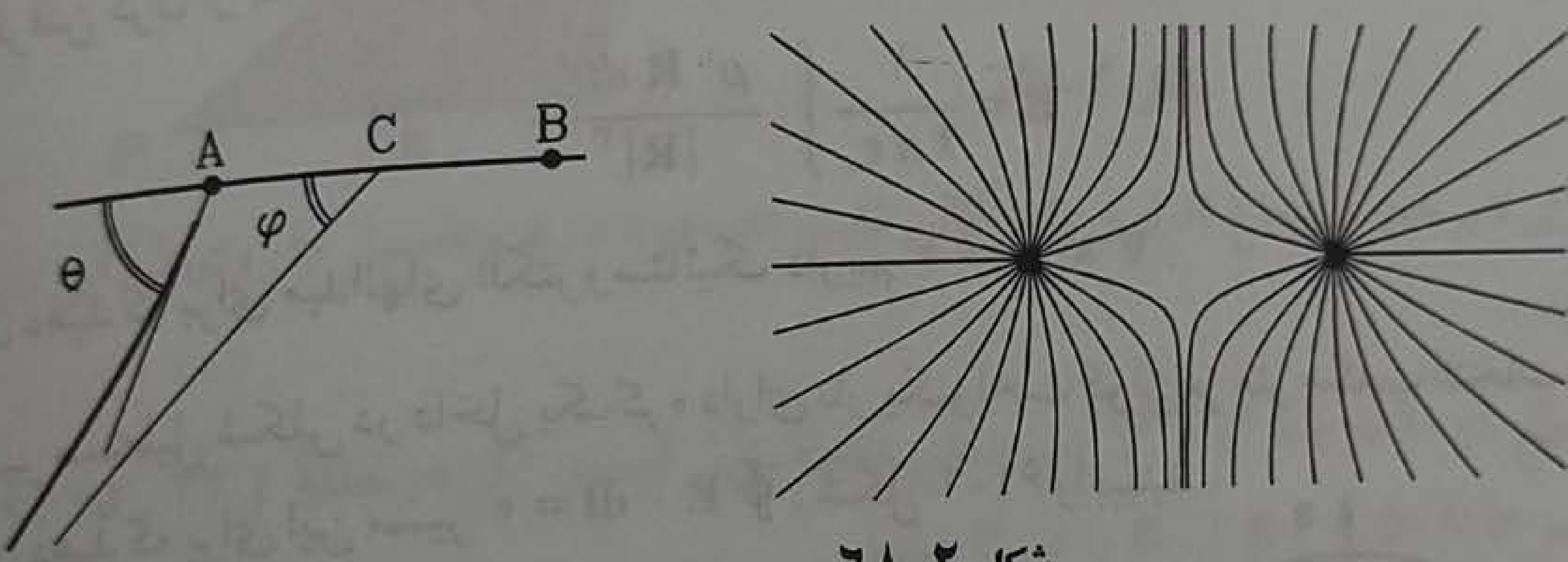
۲-۶۵ در تمام نقاط یک ناحیه میدان $\mathbf{E}$ در جهت x است (خطوط میدان موازی محور x هستند). ثابت کنید که در این ناحیه میدان مستقل از y و z است.

۲-۶۶ در مسئله ۲-۶۵ نشان دهید اگر ناحیه خالی از بار باشد، میدان $\mathbf{E}$ یک میدان یکنواخت است.

۲-۶۷ بار q در راس مخروطی قرار دارد و زاویهٔ راس این مخروط α است. کل شاری که از قاعدهٔ مخروط می‌گذرد چقدر است؟

۲-۶۸ خطوط میدان دو بار نقطه‌ای q شکل ۱-۶۸ را در نظر بگیرید، که در نقاط A و B قرار گرفته‌اند. خط میدانی که با زاویهٔ θ از بار واقع در A جدا می‌شود در نقاط بسیار دور مجانبی دارد که خط AB را با زاویهٔ ϕ در نقطهٔ C قطع می‌کند. نشان دهید که بین θ و ϕ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\sin\frac{\theta}{۲} = \sqrt{۲}\,\sin\frac{\phi}{۲}$$

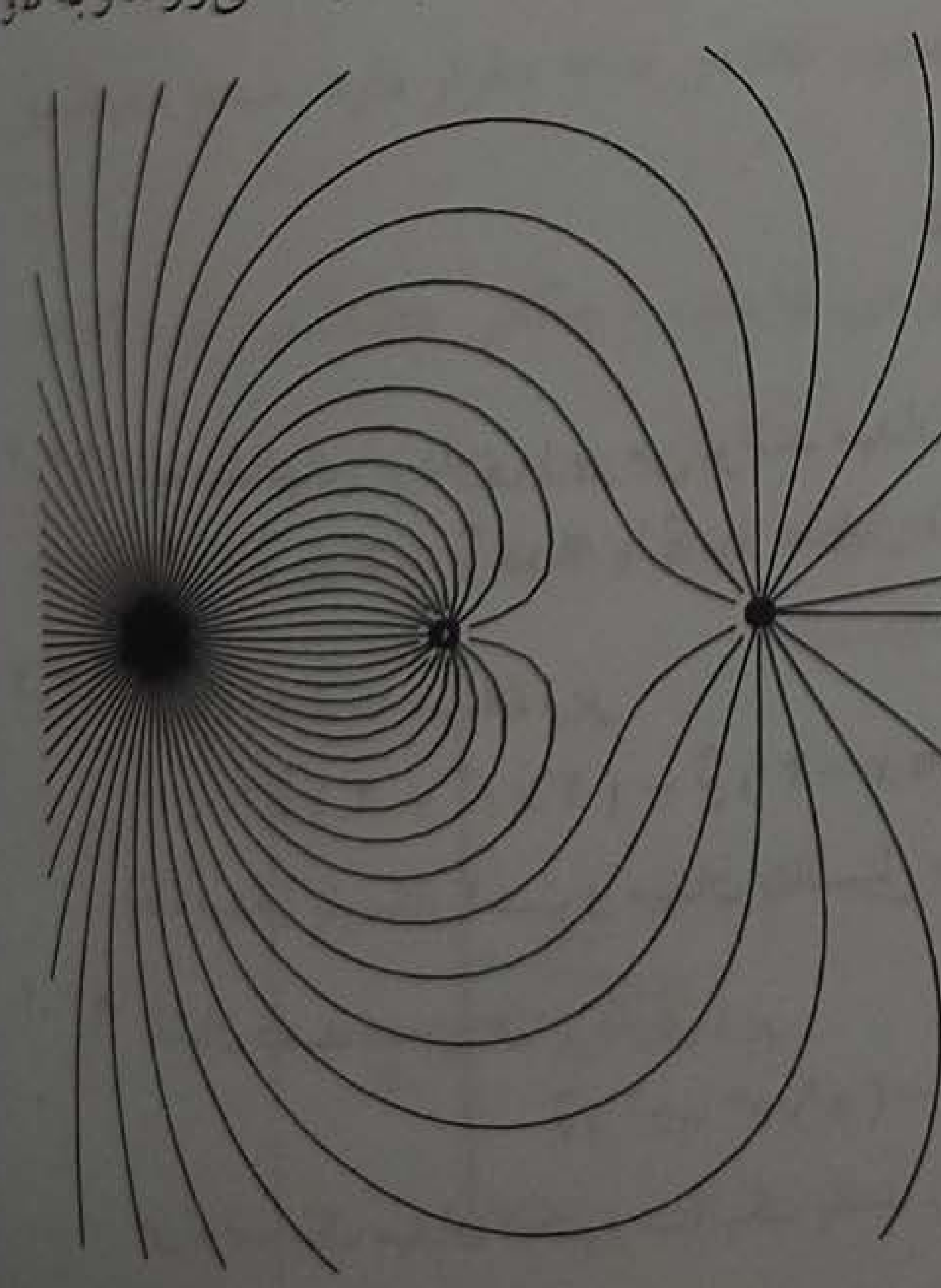


شکل ۲-۶۸

۲-۶۹ بارهای نقطه‌ای q ۳، $q-$، و $q-$ روی یک خط، به ترتیب در نقاط A، B، و C قرار دارند. خطوط نیرویی که با زاویهٔ بزرگتر از α از بار q ۳ خارج می‌شوند به سمت بینهایت می‌روند و به B و C نمی‌رسند. خط نیرویی که با زاویهٔ β از بار q ۳ خارج می‌شود مجانبی دارد که بر خط BC عمودست. نشان دهید که

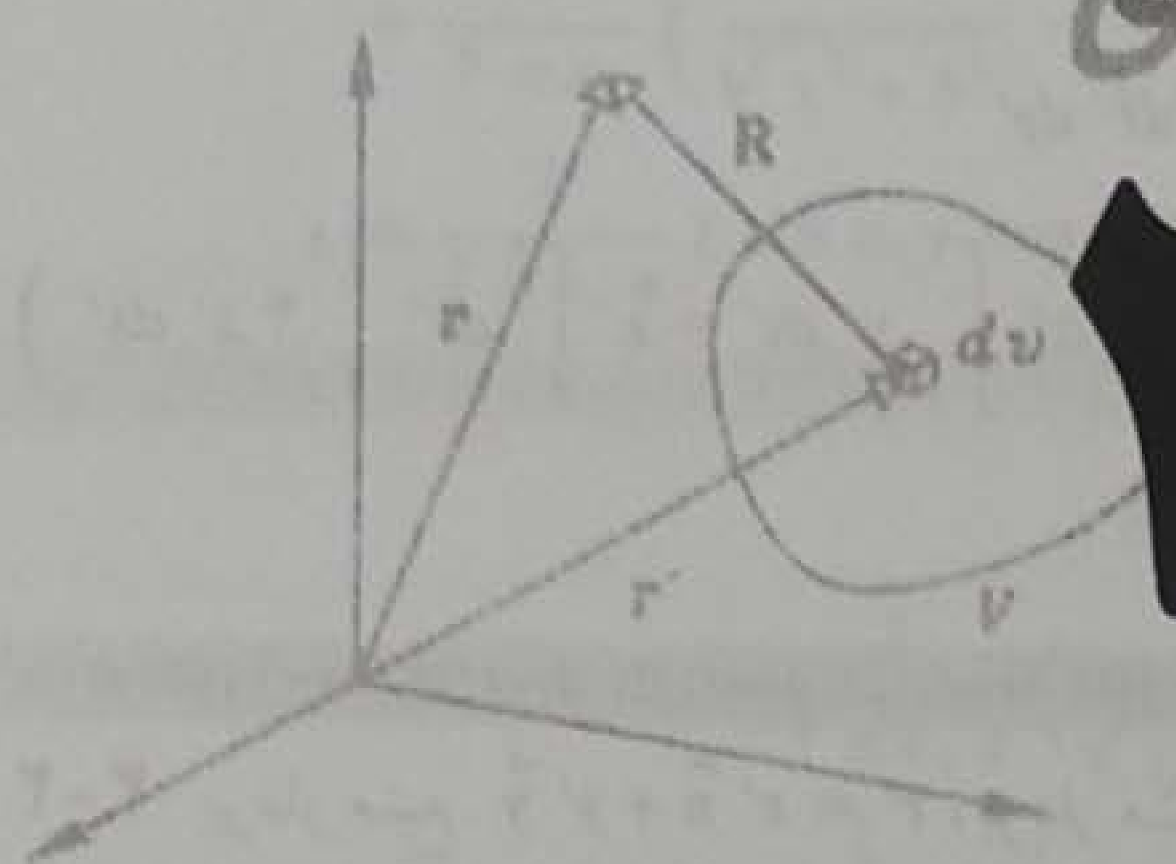
$$\cos\alpha = -\frac{۱}{۳}$$

$$\cos\beta = -\frac{۲}{۳}$$



شکل ۲-۶۹

حل مسایل فصل ۲



۲-۱ در $r = ۰$ ، $\rho = \infty$. ولی به رغم این چگالی بار نامحدود، در کرهٔ مورد نظر بار محدودی قرار دارد.

$$Q = \int \rho \, dv = \int \rho \, r^{۲} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$
$$= \int_{۰}^{۰/۰۰۱} \frac{۱}{r} r^{۲} \, dr \int_{۰}^{۲\pi} \sin\theta \, d\theta \int_{۰}^{\pi} d\phi = ۶/۲۸ \ \mathrm{pC}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۲ از رابطهٔ $E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \int \frac{\lambda \, dl \, \mathbf{R}}{R^{۳}}$ استفاده می‌کنیم که در آن

$$R^{۳} = (۲ + z'^{۲})^{۳/۲} \ , \ \ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = ۲\hat{\mathbf{x}} - z'\hat{\mathbf{z}} \ , \ \ dl' = dz'$$

پس

$$E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \int \frac{\lambda_۰ \, dz' \, (۲\hat{\mathbf{x}} - z'\hat{\mathbf{z}})}{(۲ + z'^{۲})^{۳/۲}}$$
$$= \frac{۲\lambda_۰ \hat{\mathbf{x}}}{۴\pi\varepsilon_۰} \int \frac{dz'}{(۲ + z'^{۲})^{۳/۲}} - \frac{\lambda_۰ \hat{\mathbf{z}}}{۴\pi\varepsilon_۰} \int \frac{z' \, dz'}{(۲ + z'^{۲})^{۳/۲}}$$

انتگرالی دومی انتگرال تابعی فرد روی فاصلهٔ متقارنی حول مبدا، و بنابراین صفرست.

$$E = \frac{۲\lambda_۰ \hat{\mathbf{x}}}{۴\pi\varepsilon_۰} \left(\int_{-\infty}^{-۵} \frac{dz'}{(۲ + z'^{۲})^{۳/۲}} + \int_{۵}^{\infty} \frac{dz'}{(۲ + z'^{۲})^{۳/۲}} \right)$$
$$= \frac{۲\lambda_۰ \hat{\mathbf{x}}}{۴\pi\varepsilon_۰} \left(\frac{z'}{۲\sqrt{۲ + z'^{۲}}} \Big|_{-\infty}^{-۵} + \frac{z'}{۲\sqrt{۲ + z'^{۲}}} \Big|_{۵}^{\infty} \right)$$
$$= \frac{\lambda_۰}{۲\pi\varepsilon_۰} \left(۱ - \frac{۵}{\sqrt{۲۷}} \right) \hat{\mathbf{x}}$$

۳-۲ از رابطهٔ $\mathbf{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\frac{\sigma\,ds'\,\mathbf{R}}{R^3}$ استفاده می‌کنیم که در آن

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'=2\,\hat{\mathbf{z}}-(x'\,\hat{\mathbf{x}}+y'\,\hat{\mathbf{y}})$$

$$ds'=dx'\,dy'\qquad R^3=(4+x'^2+y'^2)^{3/2}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{2x'(x'^2+y'^2+4)^{3/2}\,dx'\,dy'\,(2\,\hat{\mathbf{z}}-x'\,\hat{\mathbf{x}}-y'\,\hat{\mathbf{y}})}{(4+x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^2\!\!\int_0^2(4x'\,\hat{\mathbf{z}}-2x'^2\,\hat{\mathbf{x}}-2x'y'\,\hat{\mathbf{y}})\,dx'\,dy'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\hat{\mathbf{x}}\int_0^2 dy'\int_0^2 2x'^2\,dx'-2\,\hat{\mathbf{y}}\int_0^2 x'\,dx'\int_0^2 y'\,dy'+\hat{\mathbf{z}}\int_0^2 dy'\int_0^2 4x'\,dx'\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{32}{3}\,\hat{\mathbf{x}}-8\,\hat{\mathbf{y}}+16\,\hat{\mathbf{z}}\right)$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۴-۲ بردار منبع $\mathbf{r}'=x'\,\hat{\mathbf{x}}+y'\,\hat{\mathbf{y}}$، بردار مشاهده $\mathbf{r}=z\,\hat{\mathbf{z}}$ و بردار منبع به نقطهٔ مشاهده $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'=-x'\,\hat{\mathbf{x}}-y'\,\hat{\mathbf{y}}+z\,\hat{\mathbf{z}}$ است. $|R|=(x'^2+y'^2+z^2)^{0.5}$، $\sigma=|x'|\times10^{-9}$ و $ds=dx'\,dy'$

$$\mathbf{E}=\frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{|x'|\,dx'\,dy'\,\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

به علت تقارن مولفه‌های y و z میدان صفرست و

$$\mathbf{E}=\frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|x'|\,dx'\,dy'\,z\,\hat{\mathbf{z}}}{(x'^2+y'^2+z^2)^{1.5}}$$

باز به خاطر تقارن می‌توان انتگرال را روی یک ربع مربع حساب کرد

$$\mathbf{E}=\frac{z\,10^{-9}}{\pi\varepsilon_0}\int_0^1\!\!\int_0^1\frac{x'\,dx'\,dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{1.5}}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$=\frac{10^{-9}}{\pi\varepsilon_0}\,z\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{y'^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{y'^2+2}}\right)dy'\,\hat{\mathbf{z}}$$

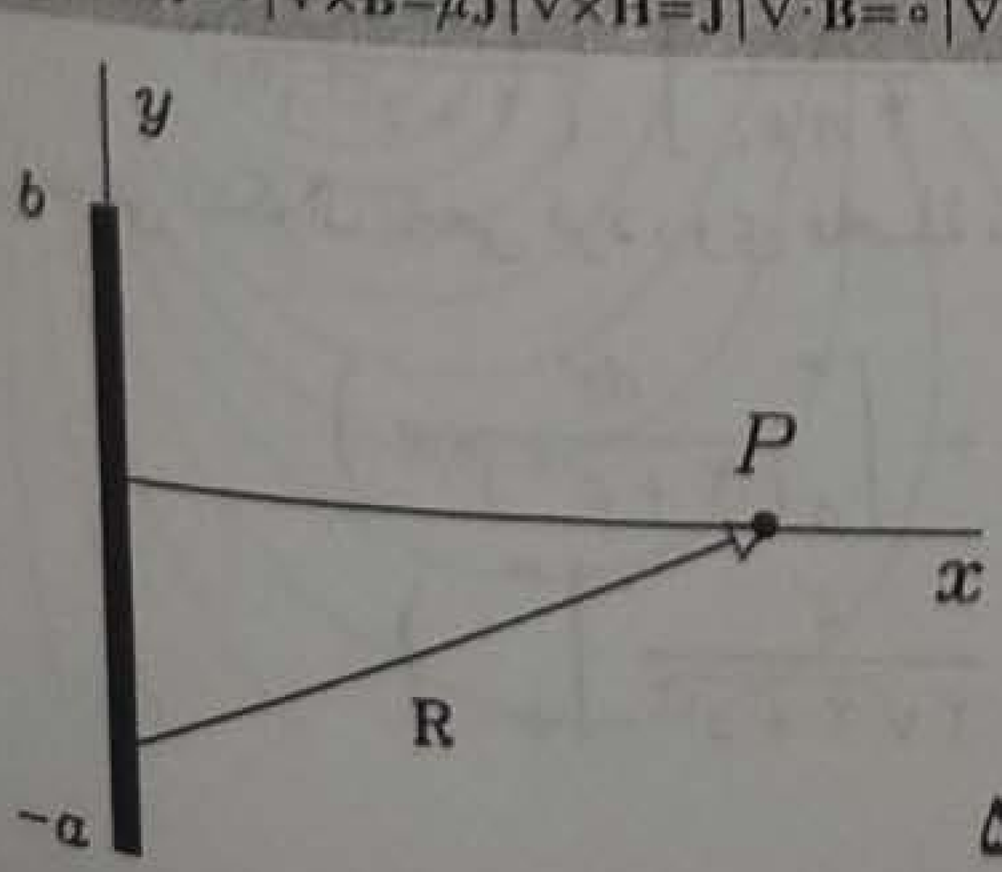
$$=\frac{10^{-9}z}{\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(y'+\sqrt{y'^2+1}\right)-\ln\left(y'+\sqrt{y'^2+2}\right)\right]\Big|_0^1\,\hat{\mathbf{z}}=8.01\,z\,\hat{\mathbf{z}}$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۵-۲ با توجه به شکل ح ۲-۵ داریم

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda\,dy'\,\mathbf{R}}{|\mathbf{R}^3|}$$

که در آن $\mathbf{R}=x\,\hat{\mathbf{x}}-y'\,\hat{\mathbf{y}}$. پس



شکل ح ۲-۵

$$\mathbf{E}_x = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{b}\frac{dy'}{[x^2+y'^2]^{1.5}} = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{x^2}\,\frac{y'}{\sqrt{x^2+y'^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left[\frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{b}\frac{y'\,dy'}{[x^2+y'^2]^{1.5}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y'^2}}\Bigg|_{-a}^{b}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۶ به ازای $x >> l$ ، $\alpha_1 \to 0$ و $\alpha_2 \to 0$. پس $E_y \to 0$ و

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(\frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2/x^2}}+\frac{a}{\sqrt{1+a^2/x^2}}\right)$$

$$\approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x^2}(b+a) = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

که λl کل بار روی میله است. چون به ازای $x >> l$ ، میله به صورت یک بار نقطه‌ای عمل می‌کند جواب کاملاً مطابق انتظار است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۷ در x عنصر بار $\lambda\,dx = k x^2\,dx$ میدان زیر را در P ایجاد می‌کند

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{k x^2\,dx}{(x_1-x)^2}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{\mathbf{x}}\int_0^l \frac{x^2\,dx}{(x_1-x)^2}$$

$$= \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{\mathbf{x}}\left[x-x_1+\frac{x_1^2}{x_1-x}+2x\ln(x_1-x)\right]\Bigg|_0^l$$

$$= \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\left[(l_1-x_1)+\frac{x_1^2}{x_1-l}+2x_1\ln\frac{x_1-l}{x_1}\right]\hat{\mathbf{x}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۸ چون نقطهٔ مشاهده $r = 0$ است داریم $\mathbf{R} = -\mathbf{r}' = -r'\,\hat{\mathbf{r}}'$. عنصر سطح روی مخروط نیز $ds' = r'\sin\theta\,dr'\,d\phi'$ است که در آن $\theta = \frac{\pi}{6}$. پس $ds' = \frac{1}{2}r'\,dr'\,d\phi'$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma\,ds\,\mathbf{R}}{|R|^3} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int\frac{k\,r'\,r'\,dr'\,d\phi'\,(-r')}{r'^3}\,\hat{\mathbf{r}}'$$

$$= \frac{-k}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} dr'\,d\phi'\,\hat{\mathbf{r}}'$$

برای محاسبهٔ انتگرال فوق باید $\hat{\mathbf{r}}'$ را در دستگاه مختصات قائم بیان کنیم

$$\hat{\mathbf{r}}' = \sin\theta' \cos\phi' \,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta' \cos\phi' \,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \,\hat{\mathbf{z}}$$

چون $\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} \cos\phi' \, d\phi' = \int_{\circ}^{\text{۲}\pi} \sin\phi' \, d\phi' = \circ$ ، در جهتهای $\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ شدت میدان صفرست و

$$E_z = \frac{-k}{\text{۸}\pi\varepsilon_\circ}\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} d\phi' \int_{\circ}^{\text{۲}} dr \cos\theta$$

$$\mathbf{E} = -\frac{k\sqrt{\text{۳}}}{\text{۴}\varepsilon_\circ}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۲-۹ نوار را به سیمهای طویلی به عرض dy تقسیم می‌کنیم (شکل ح ۲-۹ را ببینید). چگالی بار هر سیم $\lambda = \sigma\, dy$ است. میدان ناشی از هر سیم عبارت است از

$$dE = \frac{\sigma\, dy}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ r}$$

به ازای هر سیم واقع در y سیمی در $-y$ وجود دارد که میدانهای ناشی از آنها مولفه های y یکدیگر را خنثی می‌کنند و مولفه های z آنها با هم جمع می‌شود، پس

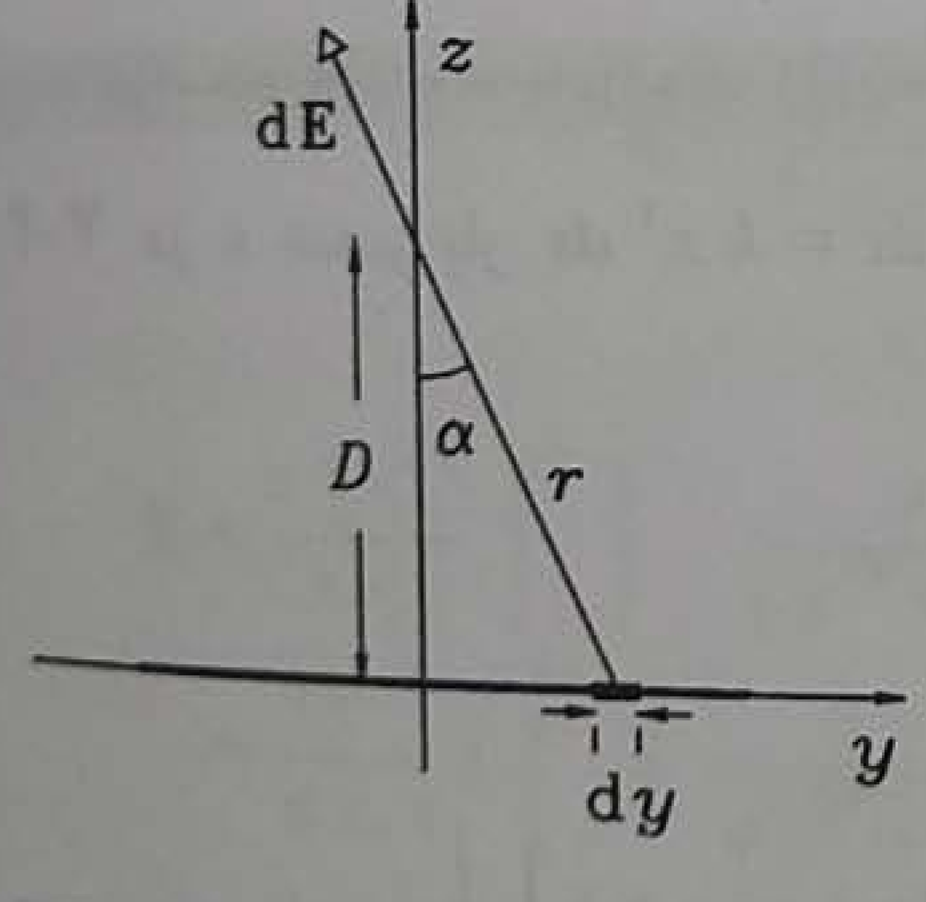
$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}\int_{\circ}^{a} \text{۲}\, dE \cos\alpha$$

توجه کنید که چون اثر سیمهای متقارن را با هم در نظر گرفته‌ایم حدود انتگرال از $\circ$ تا a است.

همچنین $\cos\alpha = D/r$ و $r = \sqrt{D^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}}$ ، پس

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\sigma D}{\pi\varepsilon_\circ}\int_{\circ}^{a}\frac{dy}{D^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_\circ}\,\hat{\mathbf{z}}\tan^{-\text{۱}}\frac{y}{D}\Big|_{\circ}^{a} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_\circ}\tan^{-\text{۱}}\frac{a}{D}\,\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۲-۹

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۲-۱۰ به صورت مسئلهٔ ۲-۹ عمل می‌کنیم، ولی این بار مولفه های y و z را در نظر می‌گیریم

$$dE = \frac{ky}{a}\;\frac{dy}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ r}\,(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{z}} - \sin\alpha\,\hat{\mathbf{y}})$$

که در آن $\cos\alpha = D/r$ ، $\sin\alpha = y/r$ و $r = \sqrt{D^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}}$ ، پس

$$\mathbf{E}_z = \frac{kD}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ a}\int_{-a}^{a}\frac{y\, dy}{D^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}} = \circ$$

زیرا انتگرال تابع فرد روی فاصلهٔ متقارن صفرست

$$\mathbf{E}_y = \frac{k}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ a}\int_{-a}^{a}\frac{-y^{\text{۲}}\, dy}{D^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}}$$

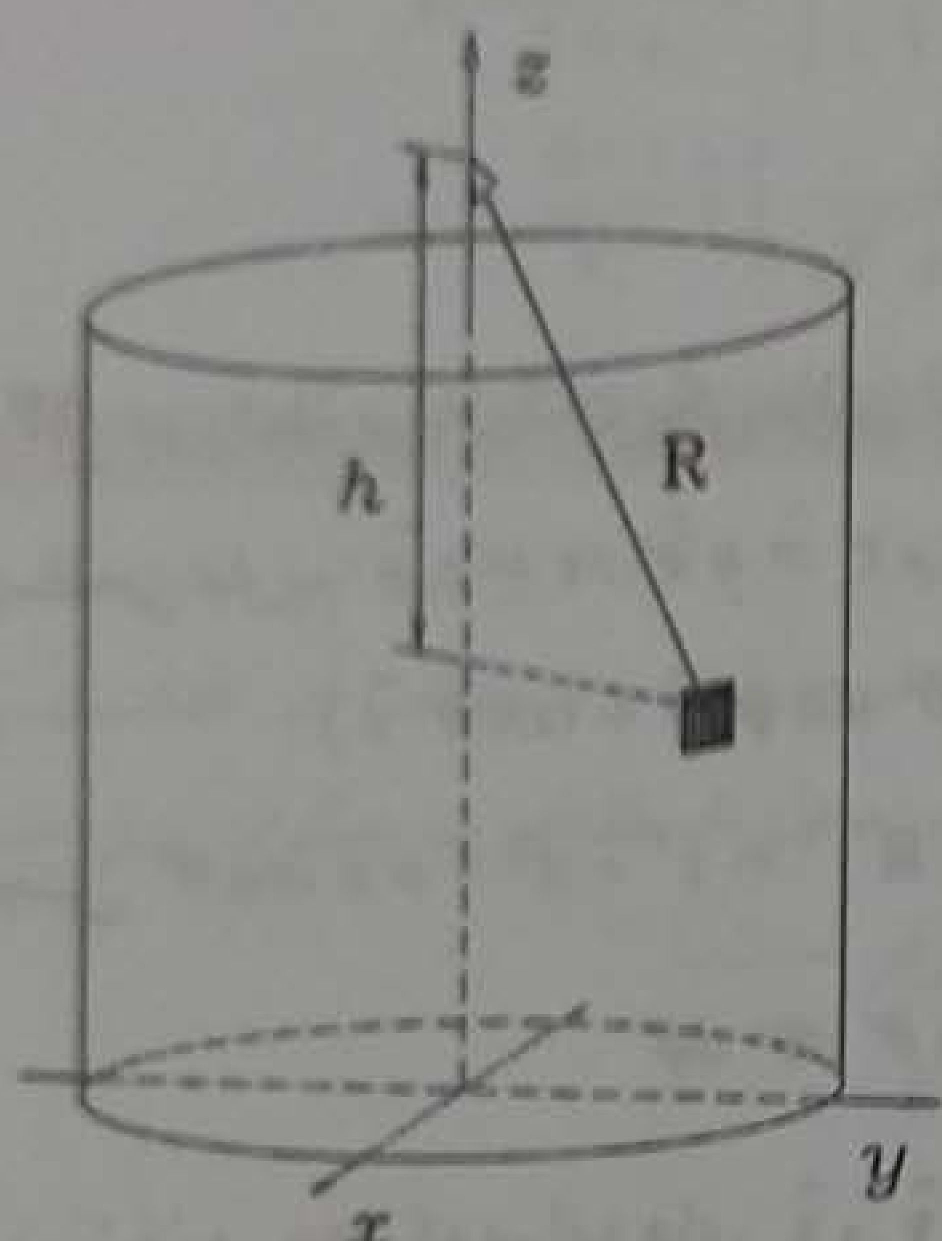
$$= \frac{k}{2\pi\varepsilon_0 a}\left[D\tan^{-1}\frac{a}{D} - y \right]\Big|_{-a}^{a} = \frac{k}{\pi\varepsilon_0 a}\left(D\tan^{-1}\frac{a}{D} - a \right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۱-۲ برای این مسئله داریم $ds = a\,d\phi\,dz$ ، $\mathbf{R} = -a\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\hat{\mathbf{z}}$ ، $|\mathbf{R}|^2 = a^2 + h^2$.پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, ds\, \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

$$= \frac{a\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{-a\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\hat{\mathbf{z}}}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\phi\, dz$$



شکل ح ۲-۱۱

$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}$ و چون انتگرال $\sin\phi$ و $\cos\phi$ در فاصلهٔ ۰ تا 2π برابر صفرست، $E_x = E_y = 0$

$$\mathbf{E} = \frac{a\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}\int\!\!\int \frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\phi\, dz$$

$$= \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}\int \frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz$$

که در آن $dz = dh$. چون $R = (a^2+h^2)^{\frac{1}{2}}$ داریم $dR = (a^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}\, dh$. پس

$$\mathbf{E} = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dR}{R^2} = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۲-۲ داریم $\mathbf{r}' = a\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ ، $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$ ، $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ و $|\mathbf{R}|^2 = (z^2 + a^2)$.پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda_0 \cos\phi'\, a\, d\phi'\, \mathbf{R}}{(z^2+a^2)^{1.5}}$$

برای محاسبهٔ انتگرال ابتدا $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ را در دستگاه مختصات قائم بیان می‌کنیم

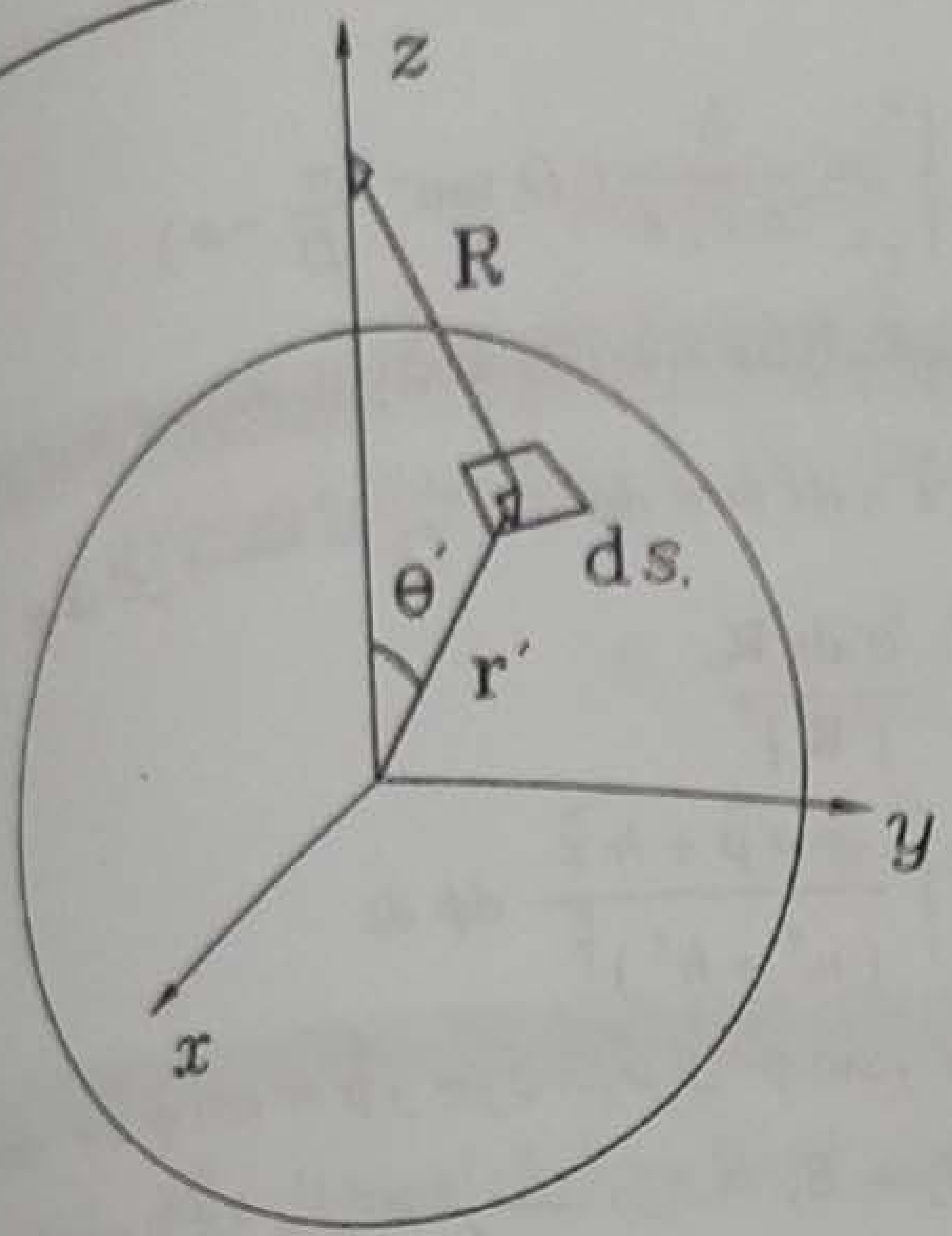
$$E = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+a^2)^{1.5}}\int_0^{2\pi}\cos\phi'\, d\phi'\,(z\hat{\mathbf{z}} - a\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} - a\sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}})$$

داریم $\int_0^{2\pi}\cos\phi'\, d\phi' = 0$ و $\int_0^{2\pi}\cos\phi'\sin\phi'\, d\phi' = 0$ ، پس $E_z = E_y = 0$ و

$$\mathbf{E} = \frac{-a^2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+a^2)^{1.5}}\hat{\mathbf{x}}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi'\, d\phi' = \frac{-a^2\lambda_0}{4\varepsilon_0 (z^2+a^2)^{1.5}}\hat{\mathbf{x}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱۳-۲ اگر در راس خالی دو بار $q-$ و $q+$ قرار دهیم وضعیت مسئله تغییری نمی‌کند. اکنون ۱۲ بار نقطه‌ای داریم و باید میدان آنها را بیابیم. میدان ناشی از ۱۱ بار $q+$ در مرکز یازده ضلعی صفرست. میدان ناشی از بار $q-$ برابر $-q/4\pi\varepsilon_0 R^2$ است، که به علت صفر بودن میدان بقیهٔ بارها میدان کل نیز هست.



شکل ح ۲-۱۴

۲-۱۴ در رابطهٔ میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار سطحی داریم $\mathbf{r} = z\,\hat{\mathbf{z}}$ ، $\mathbf{r}' = a\,\hat{\mathbf{r}}'$ و

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\,\hat{\mathbf{z}} - a\,(\,\sin\theta'\,\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta'\,\sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{z}}\,)$$

همچنین $|\,\mathbf{R}\,|^{۲} = z^{۲} + a^{۲} - a\,z\,\cos\theta'$ ، $\sigma = k\,\cos\theta'$ و $ds = a^{۲}\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'$. پس

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\int \frac{k\,\cos\theta'\,\mathbf{R}}{|\,\mathbf{R}\,|^{۳}}\,a^{۲}\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'$$

تقارن نشان می‌دهد که مولفه های $\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ میدان صفرست. پس

$$E_z = \frac{k\,a^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\iint \frac{(\,z - a\cos\theta'\,)\cos\theta'\,\sin\theta'}{(\,z^{۲} + a^{۲} - ۲\,a\,z\cos\theta'\,)^{۱/۵}}\,d\theta'\,d\phi'$$

انتگرال نسبت به ϕ' برابر ۲π است. برای محاسبهٔ انتگرال نسبت به θ' تغییر متغیر می‌دهیم. $R^{۲} = z^{۲} + a^{۲} - ۲\,a\,z\cos\theta'$، پس $۲\,a\,z\sin\theta'\,d\theta' = ۲\,R\,dR$ ، همچنین $۲\,a\,z\cos\theta' = z^{۲} + a^{۲} = R^{۲}$ و $۲z(z - a\cos\theta') = R^{۲} + z^{۲} - a^{۲}$. پس

$$E_z = \frac{k\,a^{۲}}{۲\varepsilon_{۰}}\int \frac{R^{۲} + z^{۲} - a^{۲}}{۲\,z}\;\frac{R^{۲}}{۲\,a\,z}\;\frac{R\,dR}{a\,z}\;\frac{۱}{R^{۳}}$$

$$= \frac{k}{۸z^{۳}\varepsilon_{۰}}\int \frac{z^{۴} - (\,a^{۲} - R^{۲}\,)^{۲}}{R^{۲}}\,dR$$

حدود انتگرال از $z - a$ تا $z + a$ است.

$$E_z = \frac{k}{۸z^{۳}\varepsilon_{۰}}\int_{z-a}^{z+a}\left(\,۲a^{۲} - R^{۲} + \frac{z^{۴} - a^{۴}}{R^{۲}}\,\right)dR$$

که انتگرالی عادی است و پس از کمی عملیات ریاضی به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{۲}{۳}\;\frac{ka^{۳}}{\varepsilon_{۰}\,z^{۳}}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۱۵ در رابطهٔ $\mathbf{E}$ داریم $\mathbf{R} = z\,\hat{\mathbf{z}} - \rho'\,\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ ، $|\,\mathbf{R}\,|^{۲} = z^{۲} + \rho'^{۲}$ ، $\sigma = ۱۰۰\,/\rho'$ و $ds = \rho'\,d\rho'\,d\phi'$. پس

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\int \frac{۱۰۰}{\rho'}\;\frac{\rho'\,d\rho'\,d\phi'\,\mathbf{R}}{(\,z^{۲} + \rho'^{۲}\,)^{۱/۵}}$$

برای محاسبهٔ انتگرال فوق باید $\mathbf{R}$ را در دستگاه مختصات قائم بیان کنیم

$$\mathbf{R} = z\,\hat{\mathbf{z}} - \rho'\,(\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}})$$

مولفه های $\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ میدان صفرند (به علت تقارن یا با توجه به صفر بودن انتگرال $\cos\phi$ و $\sin\phi$ روی یک دورهٔ تناوب). پس

$$\mathbf{E} = \frac{100\,z}{4\pi\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \int_1^2 \frac{d\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{1/5}} \int_0^{2\pi} d\phi'$$

$$= \frac{50\,z}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}\left[\frac{\rho'}{z\sqrt{z^2+\rho'^2}}\right]_1^2 = \frac{50}{\varepsilon_0 z}\left(\frac{2}{\sqrt{z^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

۲-۱۶ میدان الکتریکی در نقطهٔ P ناشی از تمام بارها عبارت است از $\hat{\mathbf{z}}\,\sigma/2\varepsilon_0$. برای یافتن میدان ناشی از بارهای داخل دایرهٔ a، دایره را به حلقه‌هایی تقسیم می‌کنیم. شعاع هر حلقه r و ضخامت آن dr است. پس به اندازهٔ $Q = 2\pi r\,dr\,\sigma$ بار روی آن وجود دارد که معادل حلقه‌ای با چگالی بار خطی $\lambda = Q/2\pi r = \sigma\,dr$ است. میدان روی محور حلقهٔ باردار برابر است با

$$E = \frac{\lambda r}{2\varepsilon_0}\,\frac{h}{(h^2+r^2)^{3/2}}$$

پس $dE = h\,r\,\sigma\,dr / 2\varepsilon_0 (h^2+r^2)^{3/2}$ و

$$E = \frac{h\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{r\,dr}{(h^2+r^2)^{1/5}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{h}{(h^2+a^2)}\right]$$

برای این که این میدان نصف $\sigma/2\varepsilon_0$ باشد باید داشته باشیم

$$\frac{h}{(h^2+a^2)} = \frac{1}{2}$$

که نتیجه می‌دهد $a = \sqrt{3}\,h$.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\oint D\cdot ds=Q\,|\int J\cdot ds=I\,|\oint H\cdot dl=I\,|\oint B\cdot ds=0\,|\oint E\cdot dl=0$

۲-۱۷ در رابطهٔ شدت میدان الکتریکی داریم $\sigma = \sigma_0 \sin\phi'$ ، $ds = a^2 \sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'$ ، $\mathbf{R} = -a\,\hat{\mathbf{r}}'$ ، $|\mathbf{R}| = a$، پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma_0 \sin\phi'\,a^2 \sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'}{a^3}(-a\,\hat{\mathbf{r}}')$$

$$= \frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \sigma_0 \sin\phi'\,\sin\theta'\,(\hat{\mathbf{r}}')\,d\theta'\,d\phi'$$

قرار می‌دهیم $\hat{\mathbf{r}}' = \sin\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta'\sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{z}}$ تا بتوانیم انتگرال برداری را به انتگرالهای اسکالر تبدیل کنیم. به این ترتیب خواهیم داشت

$$E_x = \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}\sin\phi'\cos\phi'\,d\phi' = 0$$

$$E_y = \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}\sin^2\phi'\,d\phi' = \frac{-\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{4}\right)\pi = \frac{-\sigma_0\pi}{16\varepsilon_0}$$

$$E_z = \frac{-\sigma_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^{\pi/2}\sin\theta'\cos\theta'\,d\theta'\int_\circ^{2\pi}\sin\phi'\,d\phi' = \circ$$

۱۸-۲ برای این مسئله داریم $\mathbf{r}=\circ$ ، $|\mathbf{R}| = r'\mathbf{r}' = r'\hat{\mathbf{r}}'$ و $\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}' = -r'\hat{\mathbf{r}}'$. عنصر سطح عبارت است از $ds = r'\sin\theta'\,dr'\,d\phi' = \frac{1}{2}r'\,dr'\,d\phi'$ ، پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{\sigma\,ds\,\mathbf{R}}{|R|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int(\sigma_\circ\sin\phi')\left(\frac{1}{2}r'\,dr'\,d\phi'\right)\frac{-(r'\hat{\mathbf{r}}')}{r'^3}$$

$$= \frac{-\sigma_\circ}{8\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^{2\pi}\int_a^b\frac{\hat{\mathbf{r}}'\sin\phi'}{r'}\,dr'\,d\phi'$$

بردار یکه $\hat{\mathbf{r}}'$ را به دستگاه مختصات دکارتی می‌بریم

$$\hat{\mathbf{r}}' = \sin\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta'\sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{z}}$$

حال باید سه انتگرال را محاسبه کنیم

$$E_x = \frac{-\sigma_\circ}{16\pi\varepsilon_\circ}\int_a^b\frac{dr'}{r'}\int_\circ^{2\pi}\sin\phi'\cos\phi'\,d\phi' = \circ$$

زیرا انتگرال مربوط به ϕ' صفر می‌شود. به همین ترتیب داریم $E_z = \circ$ زیرا $\int_\circ^{2\pi}\sin\phi'\,d\phi' = \circ$. سرانجام

$$E_y = \frac{-\sigma_\circ}{16\pi\varepsilon_\circ}\int_a^b\frac{dr'}{r'}\int_\circ^{2\pi}\sin^2\phi'\,d\phi'$$

$$= \frac{-\sigma_\circ}{16\pi\varepsilon_\circ}\left(\ln\frac{b}{a}\right)\pi = \frac{-\sigma_\circ}{16\varepsilon_\circ}\ln\frac{b}{a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=\circ\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=\circ\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=\circ\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=\circ\,|\,\oint E\cdot dl=\circ$

۱۹-۲ داریم $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{\sigma\,ds\,\mathbf{R}}{|R|^3}$ که در آن $ds = a\,d\phi'\,dz'$ ، $\sigma = \sigma_\circ\cos\phi'\ \mathrm{C/m^2}$ ، $\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}' = \circ-(a\hat{\boldsymbol{\rho}}+z'\hat{\mathbf{z}})$ ، $|\mathbf{R}|^3 = (a^2+z'^2)^{3/2}$. پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{\sigma_\circ\cos\phi'\,a\,d\phi'\,dz'}{(a^2+z'^2)^{3/2}}(-a\hat{\boldsymbol{\rho}}'-z'\hat{\mathbf{z}})$$

$$\mathbf{E}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{-h}^{h}\int_\circ^{2\pi}\frac{a\sigma_\circ}{(a^2+z'^2)^{3/2}}\cos\phi'\,d\phi'\,dz' = \circ$$

زیرا $\int_\circ^{2\pi}\cos\phi'\,d\phi' = \circ$. همچنین $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi'\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi'\,\hat{\mathbf{y}}$ پس

$$\mathbf{E}_x = -\frac{a^2\varepsilon_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{-h}^{h}\frac{dz'}{(a^2+z'^2)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}\cos^2\phi'\,d\phi' = \frac{-a\sigma_\circ h}{2\varepsilon_\circ\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{a^2\varepsilon_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{-h}^{h}\frac{z'\,dz'}{(a^2+z'^2)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi}\cos\phi'\sin\phi'\,d\phi' = \circ$$

زیرا $\int_0^{2\pi} \cos\phi' \sin\phi' \, d\phi' = 0$.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۲۰-۲ چون میدان مؤلفهٔ y ندارد، خطوط نیرو در صفحات $y = c$ قرار دارد

$$\frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x} = \frac{2z(x^2+1)}{2xz^2}$$

$$z\,dz = \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} x^2 + \ln x + c$$

در نقطهٔ (۱، ۳، ۱-)

$$\frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}(1)^2 + \ln 1 + c$$

که نتیجه می‌دهد $c = 0$ و

$$z^2 = x^2 + 2\ln x$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۲۱-۲ معادلهٔ دیفرانسیل خطوط نیرو در صفحهٔ z = ثابت دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$\frac{E_\rho}{E_\phi} = \frac{d\rho}{\rho d\phi} = \frac{\rho \cos 2\phi}{-\rho \sin 2\phi} = -\cot 2\phi$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\phi}{\tan 2\phi}$$

از دو طرف انتگرال می‌گیریم

$$\ln \rho = -\frac{1}{2} \ln \sin 2\phi + C$$

$$\rho = \frac{C_1}{\sqrt{\sin 2\phi}}$$

یا

$$\rho^2 = \frac{C_2}{\sin 2\phi}$$

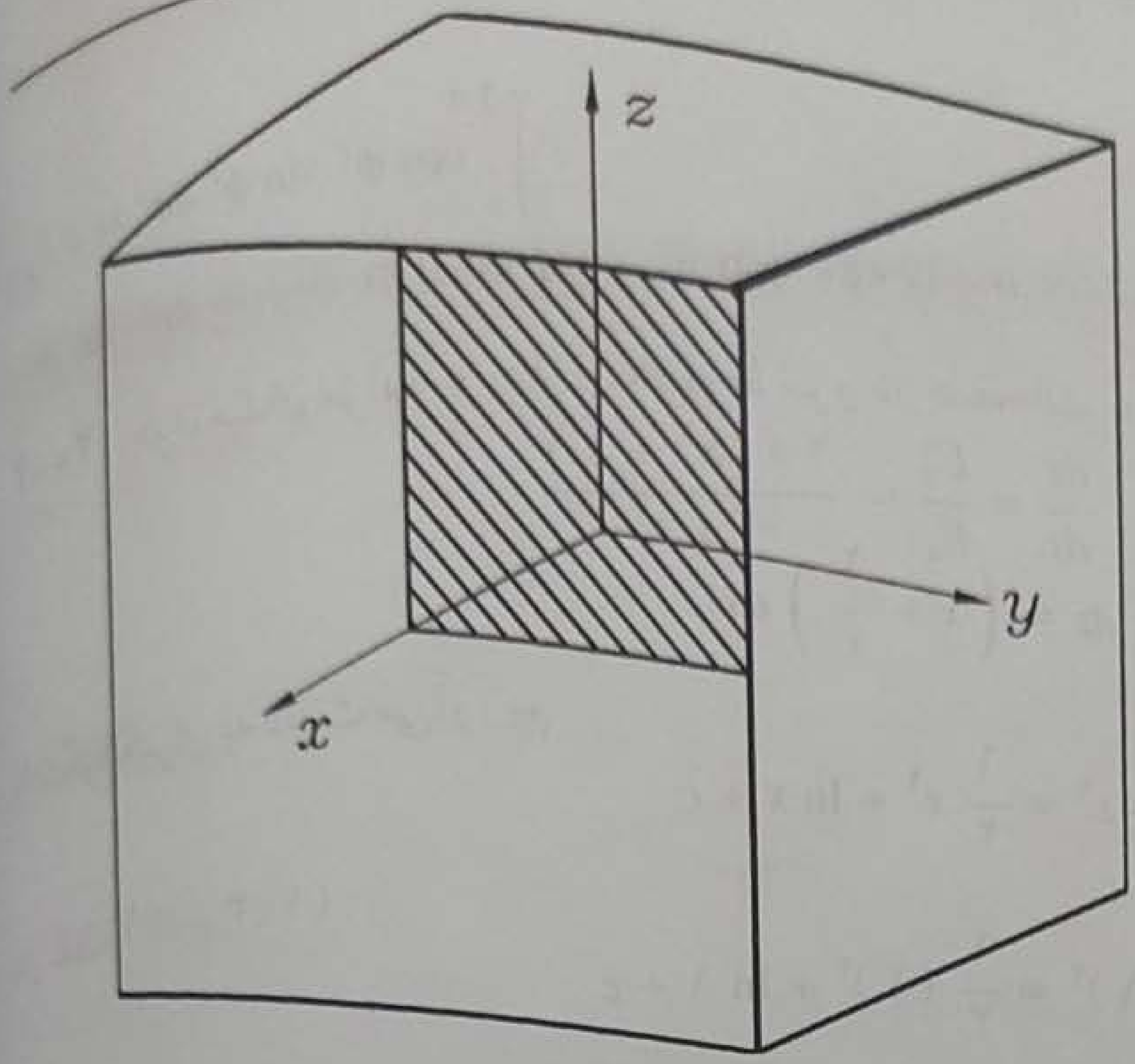
چون خط از نقطهٔ (۰، ۳۰، ۲) می‌گذرد C_2 برابر $2\sqrt{2}$ به دست می‌آید.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۲۲-۲ مکعب مشخص شده در شکل ح ۲-۲۲ (صفحهٔ بعد) مکعبی به ضلع ۱۲ m است که سطوح آن به موازات سطوح $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$ بوده، مرکز آن در مبداء مختصات است. به علت تقارن شاری که از هر یک از وجوه این مکعب می‌گذرد $\frac{Q}{6}$ است. باز تقارن نشان می‌دهد که شار گذشته از سطح مورد نظر یک چهارم شار گذرنده از وجه واقع در $x = 1$ است، پس

$$\psi = \frac{Q}{24}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$



شکل ح ۲۲-۲

۲-۲۳ اگر دستگاه مختصات را طوری برگزینیم که q در مبداء و محور استوانه روی محور z باشد $\mathbf{E} = (q / ۴\pi\varepsilon_{\circ} r^{۲})\hat{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{ds} = dz\, R\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$. پس

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \frac{q R}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} \int \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^{۲}}\, dz\, d\phi$$

$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta$ ، $R = r\sin\theta$ و $r^{۲} = R^{۲} + z^{۲}$ ، پس

$$\int \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^{۲}}\, dz\, d\phi = \int_{\circ}^{۲\pi} d\phi \int_{z_{۱}}^{z_{۲}} \frac{R\, dz}{(R^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= ۲\pi R \left. \frac{z}{R^{۲}(R^{۲}+z^{۲})^{\frac{۱}{۲}}} \right|_{z_{۱}}^{z_{۲}}$$

$$= \frac{۲\pi}{R}\left[\frac{z_{۲}}{\sqrt{R^{۲}+z_{۲}^{۲}}} - \frac{z_{۱}}{\sqrt{R^{۲}+z_{۱}^{۲}}}\right] = \frac{۲\pi}{R}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \frac{q}{۲\varepsilon_{\circ}}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

۲-۲۴ روش اول انتگرالگیری از چگالی بار است

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{۱\circ}{\rho^{۲}} \sin\frac{\phi}{۲}$$

$$Q = \int \rho\, dv = \int_{\circ}^{۲/۵}\int_{\circ}^{\pi}\int_{۱}^{۲}\left(-\frac{۱\circ}{\rho}\sin\frac{\phi}{۲}\right) d\rho\, d\phi\, dz = -۵\circ \ln ۲$$

روش دوم استفاده از قانون گوس است. $\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds}$ تنها روی سطح $\phi = \circ$ مقدار دارد. روی این سطح $\mathbf{ds} = d\rho\, dz\, (-\hat{\boldsymbol{\phi}})$ و

$$Q = \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = -\int_{\circ}^{۲/۵}\int_{۱}^{۲} \frac{۲\circ}{\rho}\, d\rho\, dz = -۵\circ \ln ۲$$

۲-۲۵ روی سطح استوانه $\mathbf{ds} = ۷\, d\phi\, dz\, \hat{\mathbf{\rho}}$، پس

$$\psi_۱ = \int D \cdot ds = \int_{-۱۰}^{۱۰} \int_{۰}^{۲\pi} \frac{۴۹\, d\phi\, dz}{۴\pi(۴۹ + z^۲)^{۱/۵}}$$

$$= \frac{۴۹}{۲} \int_{-۱۰}^{۱۰} \frac{dz}{(۴۹ + z^۲)^{۱/۵}} = \frac{۴۹}{۲} \left[\frac{۱}{۴۹} \frac{z}{\sqrt{۴۹ + z^۲}} \right] \Bigg|_{-۱۰}^{۱۰} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۴۹}}$$

روی سطح بالا و پایین $\mathbf{ds} = \pm \rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{\mathbf{z}}$، به علت تقارن میدان شار یکسانی از سطح بالایی و پایینی می‌گذرد، پس

$$\psi_۲ = ۲ \int_{۰}^{۷} \int_{۰}^{۲\pi} \frac{z\rho\, d\rho\, d\phi}{۴\pi(\rho^۲ + z^۲)^{۱/۵}}$$

که در آن $z = ۱۰$، و

$$\psi_۲ = ۱۰ \int_{۰}^{۷} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^۲ + ۱۰۰)^{۱/۵}} = \frac{-۱۰}{\sqrt{\rho^۲ + ۱۰۰}} \Bigg|_{۰}^{۷} = \frac{-۱۰}{\sqrt{۱۴۹}} + ۱$$

و

$$\psi = \psi_۱ + \psi_۲ = ۱\ \mathrm{C}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A = ۰ \,|\, \nabla\times B = \mu J \,|\, \nabla\times H = J \,|\, \nabla\cdot B = ۰ \,|\, \nabla\cdot D = \rho \,|\, \nabla\times E = ۰ \,|\, \oint D\cdot ds = Q \,|\, \int J\cdot ds = I \,|\, \oint H\cdot dl = I \,|\, \oint B\cdot ds = ۰ \,|\, \oint E\cdot dl = ۰$

۲-۲۶ بار داخل کره‌ای به شعاع R عبارت است از

$$Q = \varepsilon_۰ \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \frac{q_۰}{۴\pi} \int \frac{۱ - e^{-ar}}{R^۲} \cdot R^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{q_۰}{۴\pi} (۱ - e^{-ar}) \int_{۰}^{۲\pi} d\phi \int_{۰}^{\pi} \sin\theta\, d\theta = q_۰ (۱ - e^{-ar})$$

برای یافتن چگالی بار، بار داخل یک پوستهٔ کروی به شعاع r و ضخامت dr را یافته آن را بر حجم آن تقسیم می‌کنیم، زیرا در چنین پوسته ای، به علت تقارن کروی بار، چگالی بار ثابت است.

$$Q_۱ = q_۰ (۱ - e^{-a(r+dr)}) - q_۰ (۱ - e^{-ar})$$

$$= q_۰ (e^{-ar} - e^{-ar} e^{-a\,dr})$$

$$= q_۰ e^{-ar} (۱ - e^{-a\,dr})$$

چون به ازای x کوچک $e^x \approx ۱ + x$

$$Q_۱ = q_۰ e^{-ar} a\, dr$$

حجم پوستهٔ کروی $۴\pi r^۲ dr$ است، پس

$$\rho = \frac{Q_۱}{۴\pi r^۲ dr} = \frac{a q_۰ e^{-ar}}{۴\pi r^۲}$$

جواب را با استفاده از دیورژانس امتحان کنید.

$\nabla\cdot\nabla\times A = ۰ \,|\, \nabla\times B = \mu J \,|\, \nabla\times H = J \,|\, \nabla\cdot B = ۰ \,|\, \nabla\cdot D = \rho \,|\, \nabla\times E = ۰ \,|\, \oint D\cdot ds = Q \,|\, \int J\cdot ds = I \,|\, \oint H\cdot dl = I \,|\, \oint B\cdot ds = ۰ \,|\, \oint E\cdot dl = ۰$

۲-۲۷ یک دستگاه مختصات کروی که صفحهٔ xy آن به موازات سطح باردار و مرکز آن در مرکز کره واقع

است بر می‌گزینیم . در این دستگاه مختصات $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{\mathbf{z}}$ و $d\mathbf{s} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{\mathbf{r}}$. پس

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, (\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}})$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \cos\theta$$

برای حالتی که کره سطح $z = 0$ را قطع نمی‌کند $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ روی تمام سطح مقدار فوق را دارد و

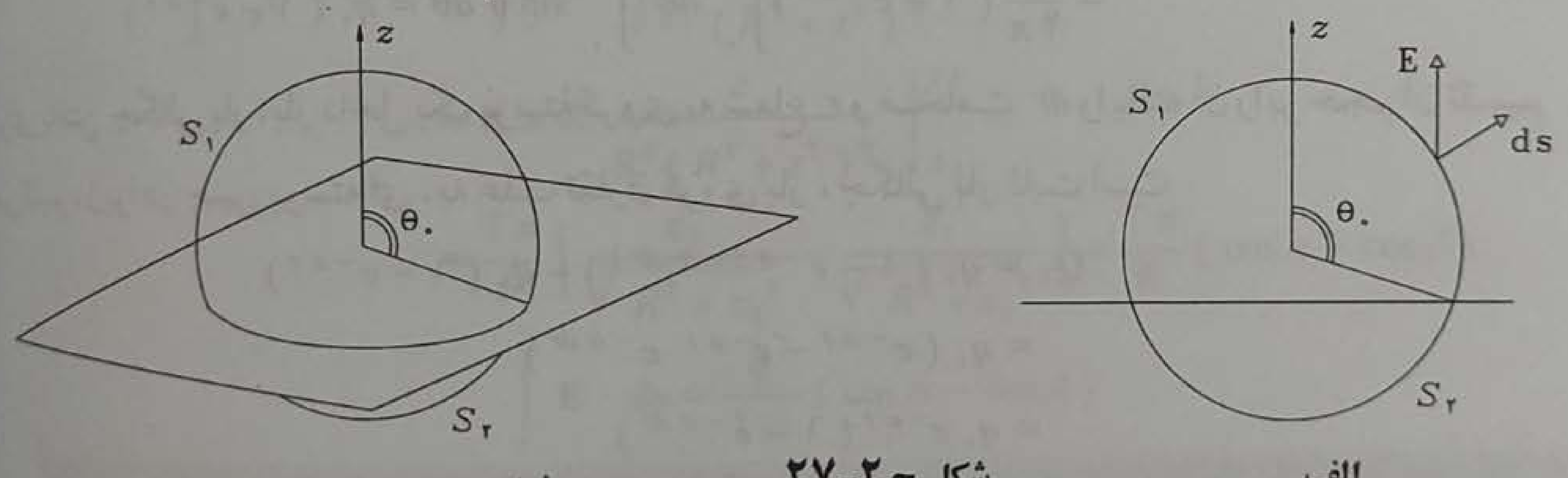
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\sigma r^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$$

در حالتی که کره سطح $z = 0$ را قطع می‌کند، روی بخش بالایی کره (s_1 در شکل ح ۲-۲۷) مقدار فوق را دارد، ولی روی بخش پایینی (s_2 در شکل ح ۲-۲۷) چون زیر سطح باردار هستیم $\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$، و $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ منفی مقدار فوق است . پس برای چنین کره‌ای

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi - \int_0^{2\pi}\int_{\theta_0}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi$$
$$= \frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0}\left[\int_0^{\theta_0} \sin\theta\cos\theta\, d\theta - \int_{\theta_0}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\right]$$
$$= \frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0}\sin^2\theta_0$$

چون $r\sin\theta_0 = R$ با شعاع دایرهٔ حاصل از برخورد کره و سطح برابر است

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



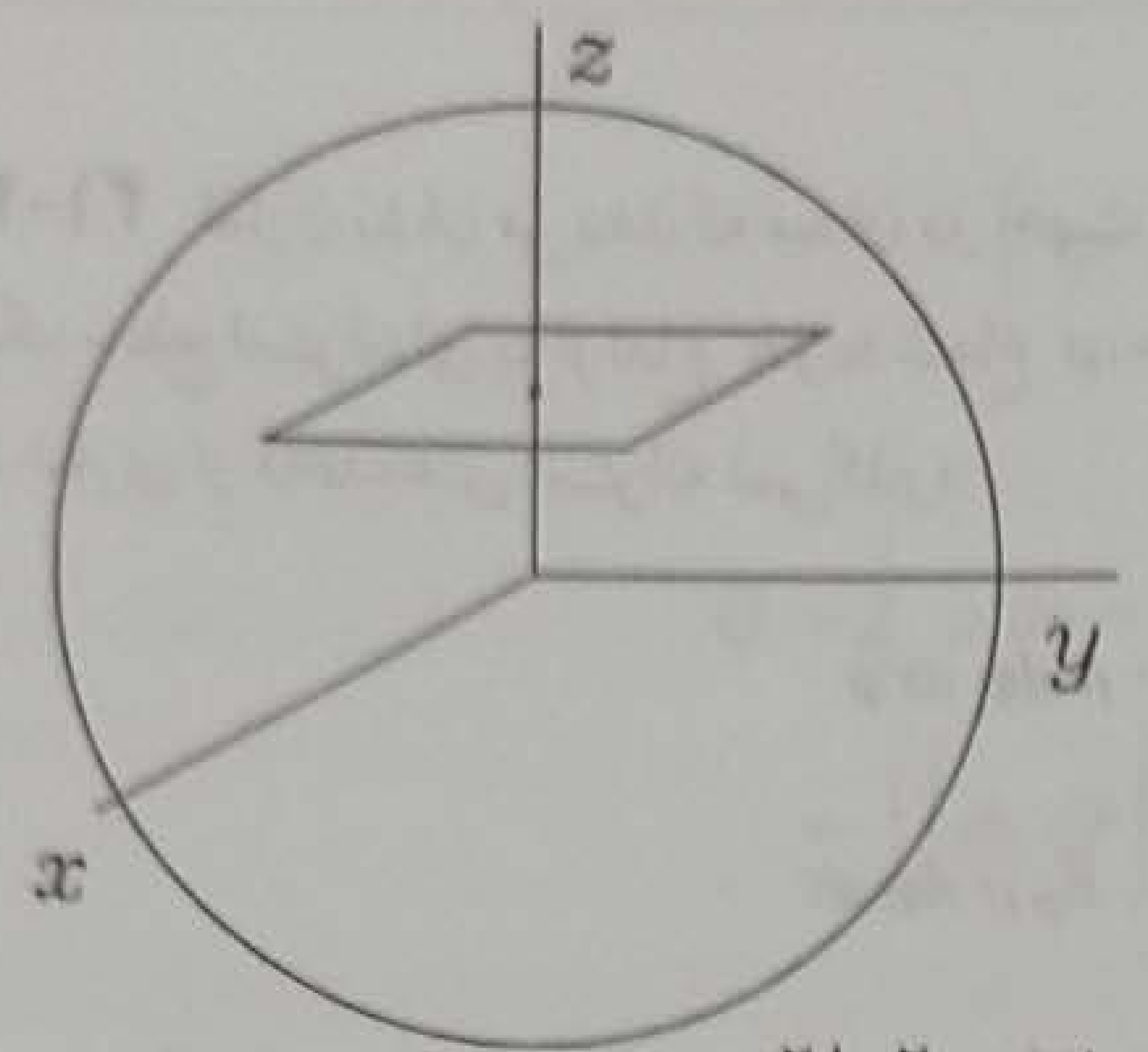
ب شکل ح ۲-۲۷ الف

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0$ | $\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}$ | $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$ | $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ | $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$ | $\nabla\times\mathbf{E}=0$ | $\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q$ | $\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I$ | $\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I$ | $\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0$ | $\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۲۸ بار داخل این سطح برابر است با

$$Q = \rho V = \rho\,(2b)^3$$
$$= 8\rho b^3$$

میدان داخل این کره را با استفاده از قانون گوس به صورت $\mathbf{D} = \rho r\,\hat{\mathbf{r}}/3$ به دست می‌آوریم . تقارن نشان می‌دهد که شار یکسانی از شش وجه مکعب می‌گذرد . پس شاری که از یک وجه مکعب می‌گذرد (سطح بالایی نشان داده شده در شکل ح ۲-۲۸) را به دست آورده، آن را در ۶ ضرب می‌کنیم تا کل شار خارج شده از



شکل ح ۲-۲۸

کره را بیابیم

$$\psi_۱ = \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = \int \frac{\rho r}{۳} \hat{\mathbf{r}} \cdot dx\, dy\, \hat{\mathbf{z}}$$

$$= \frac{\rho}{۳} \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} r \cos\theta\, dx\, dy$$

چون $z = r\cos\theta$ و روی این سطح $z = b$، پس

$$\psi_۱ = \frac{\rho\, b}{۳} \int_{-b}^{b} dx \int_{-b}^{b} dy = \frac{۴\rho\, b^۳}{۳}$$

و سرانجام

$$\psi = ۶\psi_۱ = ۸\rho\, b^۳ = Q$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۲۹ به خاطر تقارن بار میدان مولفه‌ای در جهت ϕ یا θ ندارد. سطح گوس را کره‌ای به مرکز مبدا مختصات در نظر می‌گیریم.

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_۰} = \frac{۱}{\varepsilon_۰} \int \rho\, dv$$

چون E روی تمام سطح کره بر آن عمودست و مقدار ثابتی دارد، انتگرال سمت چپ حاصلضرب مساحت کره در مقدار شدت میدان است. اگر شعاع کره کوچکتر از a باشد

$$۴\pi r^۲ E = \frac{۱}{\varepsilon_۰} \int \rho_۰ \left(۱ - \frac{r^۲}{a^۲} \right) r^۲ \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\rho_۰}{\varepsilon_۰} \int_۰^r \left(۱ - \frac{r^۲}{a^۲} \right) r^۲\, dr \int_۰^{\pi} \sin\theta \int_۰^{۲\pi} d\phi$$

$$= \frac{۴\pi \rho_۰}{\varepsilon_۰} \left[\frac{۱}{۳} r^۳ - \frac{۱}{۵a^۲} r^۵ \right] \Bigg|_۰^r = \frac{۴\pi\rho_۰}{\varepsilon_۰} \left(\frac{r^۳}{۳} - \frac{r^۵}{۵a^۲} \right)$$

$$E = \frac{\rho_۰}{\varepsilon_۰} \left(\frac{r}{۳} - \frac{r^۳}{۵a^۲} \right)$$

اگر شعاع کره بزرگتر از a باشد $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$ تغییری نمی‌کند، ولی چون تنها تا شعاع $r = a$ بار داریم، در $\int \rho\, dv$، r بین ۰ تا a است و

$$E = \frac{\rho_۰}{\varepsilon_۰ r^۲} \left(\frac{a^۳}{۳} - \frac{a^۳}{۵} \right) = \frac{۲\rho_۰\, a^۳}{۱۵\,\varepsilon_۰\, r^۲}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۳۰ مقدار این بار باید با کل بار داخل کره هم اندازه باشد، پس

$$Q = \int \rho\, dv = ۴\pi \int_۰^a k\, r\, dr = ۲\pi k a^۲$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۳۱ تقارن نشان می‌دهد که میدان در جهت z و ϕ مولفه‌ای ندارد. همچنین E_ρ تابعی از z و ϕ نیست یک سطح استوانه‌ای به ارتفاع h و به شعاع ρ، هم محور با محور z در نظر می‌گیریم. به علت نداشتن مولفهٔ z شاری از قاعده‌های استوانه نمی‌گذرد

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \int E_\rho \,\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \rho \, d\phi \, dz \,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$= \int_{\circ}^{h} \int_{\circ}^{۲\pi} E_\rho \, \rho \, d\phi \, dz$$

چون E_ρ تابعی از ϕ و z نیست می‌توان آن را از داخل انتگرال بیرون آورد

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \rho \, E_\rho \int_{\circ}^{۲\pi} d\phi \int_{\circ}^{h} dz = ۲\, \pi \rho \, h \, E_\rho$$

حال بار داخل سطح گوس را می‌یابیم. برای $\rho < a$

$$Q_۱ = \int \rho \, dv = \int \frac{k}{a} \rho \, d\phi \, dz \, d\rho$$

$$= \frac{k}{a} \int_{\circ}^{\rho} \rho^۲ \, d\rho \int_{\circ}^{h} dz \int_{\circ}^{۲\pi} d\phi = ۲\, \pi \, h \frac{k}{a} \frac{\rho^۳}{۳}$$

برای $\rho > a$ انتگرال نسبت به ρ از $\circ$ تا a حساب می‌شود

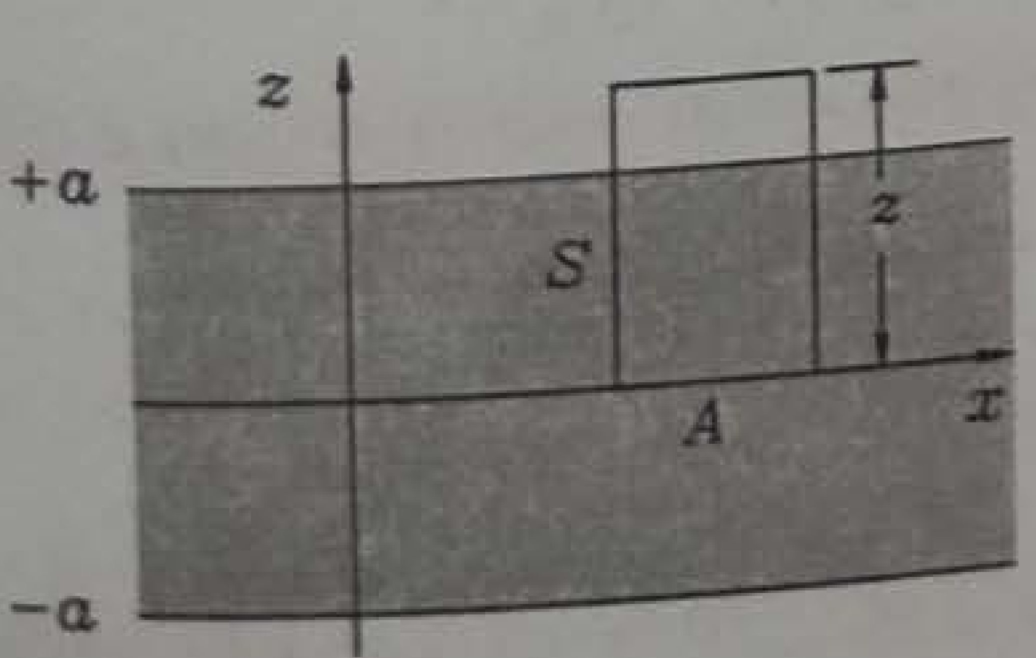
$$Q_۲ = ۲\, \pi \, h \, k \, \frac{a^۲}{۳}$$

پس

$$E = \begin{cases} \dfrac{k \rho^۲}{۳ \varepsilon_\circ a} & \rho < a \\[2ex] \dfrac{k \, a^۲}{۳ \, \varepsilon_\circ \rho} & \rho > a \end{cases}$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \circ \,|\, \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \,|\, \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \,|\, \nabla \cdot \mathbf{B} = \circ \,|\, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,|\, \nabla \times \mathbf{E} = \circ \,|\, \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{ds} = Q \,|\, \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = I \,|\, \oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I \,|\, \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \circ \,|\, \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \circ$

۲-۳۲ اگر بار را به لایه های نازکی به موازات صفحهٔ $z = \circ$ تقسیم کنیم، یک مجموعه لایهٔ باردار به دست می‌آوریم که همگی میدانی در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ تولید می‌کنند. پس میدان کل نیز تنها در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ مولفهٔ دارد. با توجه به تقارن مسئله میدان در صفحهٔ $z = \circ$ باید برابر صفر باشد. سطح بستهٔ S را به صورت نشان داده شده در شکل ح ۲-۳۲، یعنی استوانه‌ای به مساحت قاعدهٔ A و ارتفاع z در نظر می‌گیریم. انتگرال E روی سطح جانبی S برابر صفرست. انتگرال $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$ روی قاعدهٔ واقع در $z = \circ$ نیز صفرست، زیرا در این محل $E = \circ$. روی قاعدهٔ بالایی سطح S



شکل ح ۲-۳۲

$$\int \varepsilon_\circ \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \varepsilon_\circ E A$$

حال بار داخل S را به دست می‌آوریم. اگر $z < a$

$$Q = \int \rho\, dv = \iiint |z|\, dx\, dy\, dz$$
$$= \iint dx\, dy \int z\, dz = A \int_\circ^z z\, dz = A \frac{z^۲}{۲}$$

حال با قرار دادن $\varepsilon_\circ E A$ و Q به دست می‌آوریم

$$E = \frac{z^۲}{۲\varepsilon_\circ} \qquad z < a$$

برای $z > a$

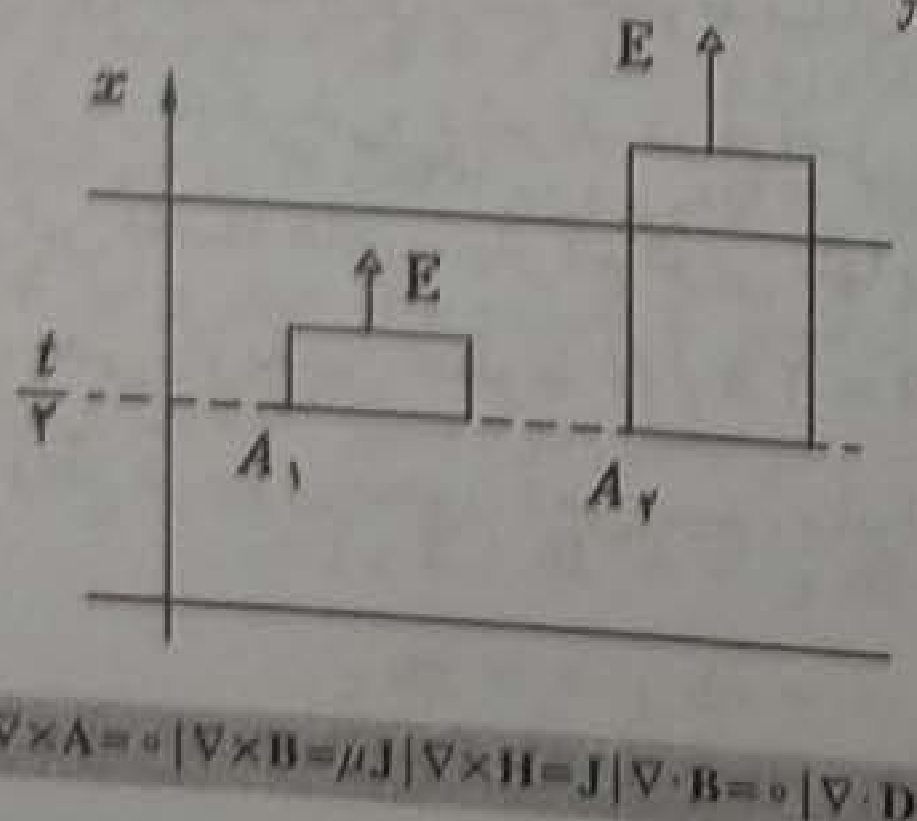
$$Q = \iiint |z|\, dx\, dy\, dz = A \int_\circ^a z\, dz = \frac{A a^۲}{۲}$$
$$E = \frac{a^۲}{۲\varepsilon_\circ}$$

۲-۳۳ با استدلالی شبیه آنچه در حل مسئلهٔ ۲-۳۲ عنوان شد در می‌یابیم که میدان تنها مولفهٔ x دارد و در صفحهٔ $x = \frac{t}{۲}$ میدان صفر است. سطوح گوس را به شکل مکعبی به مساحت قاعدهٔ S در نظر می‌گیریم که یک وجه آن روی صفحهٔ $x = \frac{t}{۲}$ قرار داشته باشد (شکل ح ۲-۳۳). برای $x < t$

$$\oint_{A_۱} \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = E S = \frac{۱}{\varepsilon_\circ} \int_{t/۲}^{x} S\, dx\, \rho_\circ \sin \frac{\pi x}{t}$$
$$= \frac{S\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi x}{t}\right)\Bigg|_{t/۲}^{x} = -\frac{S\rho_\circ t}{\varepsilon_\circ \pi}\cos\frac{\pi x}{t}$$
$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_\circ}{\pi\varepsilon_\circ} t \cos\frac{\pi x}{t}\,\hat{\mathbf{x}} \qquad x < t$$

برای $x \geq t$ از سطح گوس $A_۲$ استفاده می‌کنیم

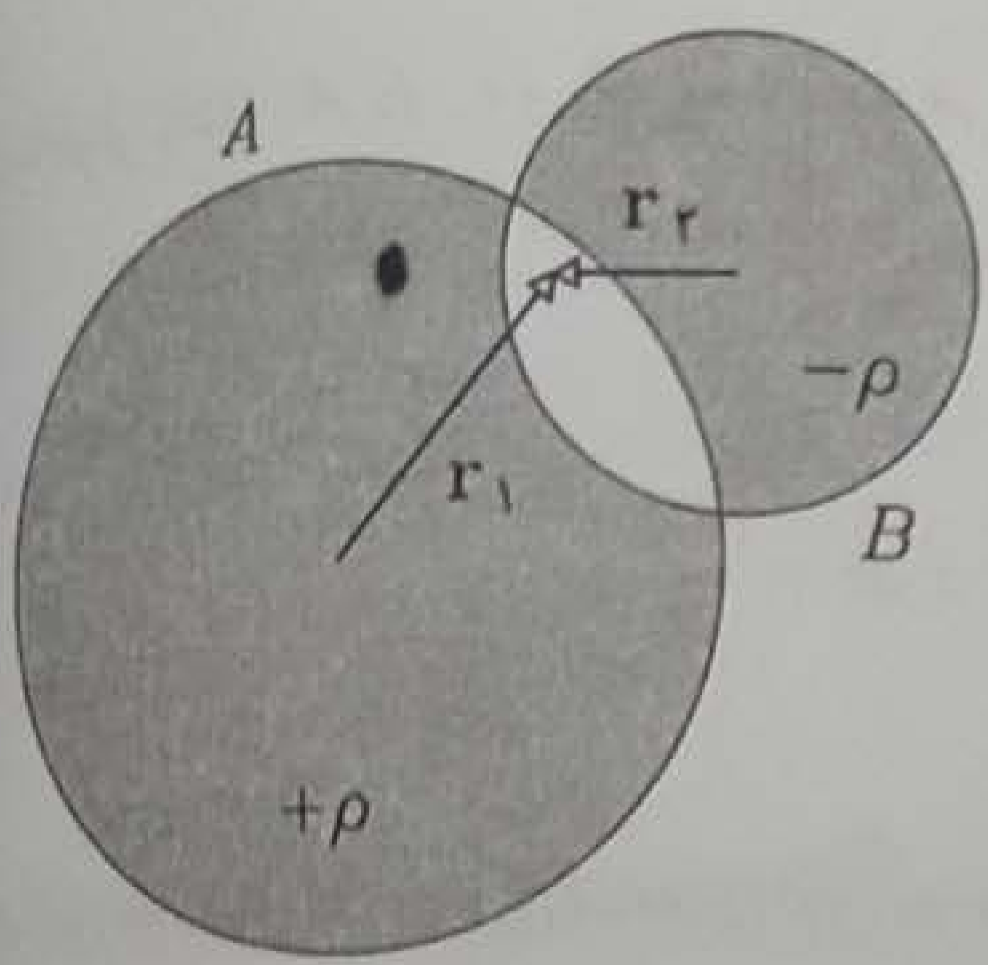
$$\oint_{A_۲} \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = E S = \frac{۱}{\varepsilon_\circ} \int_{t/۲}^{t} S\, dx\, \rho_\circ \sin \frac{\pi x}{t} = \frac{S\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\frac{t}{\pi}$$
$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_\circ t}{\pi \varepsilon_\circ}\hat{\mathbf{x}} \qquad x > t$$



شکل ح ۲-۳۳

است. فرض می‌کنیم که $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}$ ،ρ میدان داخل کره‌ای با بار دارای چگالی یکنواخت

۲-۳۴ میدان داخل کره‌ای با بار دارای چگالی یکنواخت ρ پر شده است، یعنی باز هم این فضا خالی از فضای داخل فصل مشترک دو کره از باری با چگالی $\rho -$ و $\rho +$ پر شده است، یعنی باز هم این فضا خالی از بارست. برای یافتن میدان در این فضا میدان ناشی از بارهای داخل کرهٔ A و میدان ناشی از بارهای داخل کرهٔ B را با هم جمع می‌کنیم. بار $\rho+$ فضای مشترک را همراه بارهای کرهٔ Aو بار $\rho-$ فضای مشترک را همراه بارهای کرهٔ B در نظر می‌گیریم. به این ترتیب دو کره خواهیم داشت که با چگالی یکنواخت باردار شده‌اند و باید میدان را در نقطه‌ای داخل آنها بیابیم. پس داریم



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}_1 + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}_2$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{s}$$

می‌بینیم که در این فضا میدانی یکنواخت داریم.

شکل ح ۲-۳۴

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۳۵ در فضای اطراف بار داریم $\mathbf{D} = (\lambda / 2\pi\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho) = \frac{1}{\rho}\times 0$$

که همه جا، جز $\rho = 0$ برابر صفرست. در حالت دوم داریم

$$\mathbf{D} = \frac{k\rho}{2}\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \rho < a$$

$$\mathbf{D} = \frac{a^2 k}{2\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \rho > a$$

(روابط بالا را می‌توان با استفاده از قانون گوس به دست آورد.) برای برابر بودن $\mathbf{D}$ در دو حالت باید داشته باشیم $k = \lambda / \pi a^2$. برای این حالت

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ k & \rho > a \end{cases}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۳۶ فرض می‌کنیم که برای رسم خطوط میدان $2N$ خط رسم کرده‌ایم. نیمی از این خطوط باید از یک بار و نیم دیگر از بار دیگر شروع شوند. در فواصل بسیار نزدیک به یک بار، اثر آن بار غالب و اثر بار دیگر ناچیز ست، در این فاصله های بسیار کم گویی تنها یک بار خطی داریم. پس خطوط با زاویه های برابر از بار جدا می‌شوند، یعنی زاویهٔ بین خطوط $\theta = 2\pi / N$ است. در فاصله های دور از دو بار، آن دو را به صورت یک بار خطی واقع در روی محور z می‌بینیم. بنابراین زاویهٔ بین خطوط $2\pi / 2N$ می‌شود که برابر $\theta / 2$ است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۳۷ اگر N خط نیرو به بار $q-$ ختم شود باید $3N$ خط از بار $+3q$ شروع شود. در فواصل بسیار نزدیک به هر بار میدان تحت تاثیر همان بار تعیین می‌شود و بار دیگر اثر چندانی ندارد. پس زاویهٔ بین خطوطی که از بار $+3q$ شروع می‌شوند $\frac{2\pi}{3N}$ است. از این خطوط N عدد به بار $q-$ ختم می‌شوند، پس خطوط واقع در زاویهٔ $N \times \frac{2\pi}{3N} = \frac{2\pi}{3}$ به بار $q-$ ختم می‌شوند و زاویهٔ خواسته شده در مسئله عبارت است از

$$2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۲-۳۸ بارها در تولید پتانسیل به صورت مستقل عمل می‌کنند. پس

$$V_{AB} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

که در آن r_A و r_B فاصلهٔ نقاط B و A تا محل بار نقطه‌ای و ρ_B و ρ_A فاصلهٔ شعاعی تا بار خطی است.

پس

$$V_{AB} = \frac{10\pi\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{40\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+25+9}} - \frac{1}{\sqrt{4+16+36}}\right) = 4/38\ \mathrm{V}$$

در قسمت دوم داریم

$$V_C = V_{CB} = 5 \ln \frac{\rho_B}{\rho_C} + 10\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right)$$

$$= 5 \ln \frac{5}{\sqrt{34}} + 10\left(\frac{1}{\sqrt{113}} - \frac{1}{\sqrt{56}}\right) = -1/164\ \mathrm{V}$$

و در قسمت سوم

$$V_C = V_{CA} + V_A = 20 + 5 \ln \frac{\rho_A}{\rho_C} + 10\left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$= 20 + 5 \ln \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{34}} + 10\left(\frac{1}{\sqrt{113}} - \frac{1}{\sqrt{35}}\right) = 14/46\ \mathrm{V}$$

∇·∇×A=0|∇×B=μJ|∇×H=J|∇·B=0|∇·D=ρ|∇×E=0|∮D·ds=Q|∫J·ds=I|∮H·dl=I|∮B·ds=0|∮E·dl=0

۲-۳۹ داریم $V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ و در دستگاه مختصات استوانه‌ای

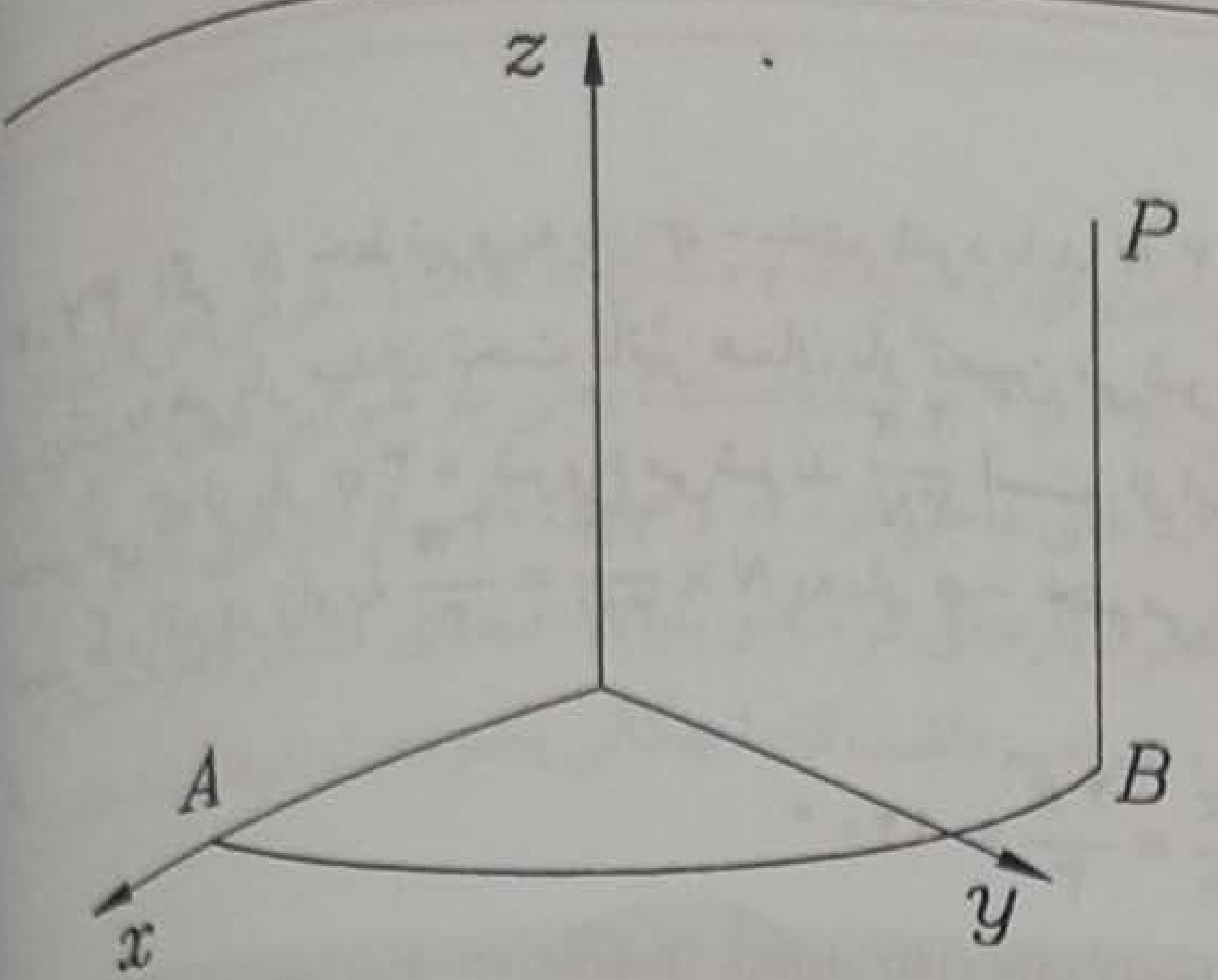
$$d\mathbf{l} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\, d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 50\, z \sin\phi\, dr + 50\, z\rho \cos\phi\, d\phi + 50\, \rho \sin\phi\, dz$$

برای سهولت مسیری به شرح زیر برمی‌گزینیم. ابتدا از مبدا، روی خط $\phi = 0$، $z = 0$ به $\rho = 2$ می‌رویم (نقطهٔ A)، سپس روی مسیر $\rho = 2$، $z = 0$ به نقطهٔ $\phi = 150^\circ$ می‌رویم (نقطهٔ B) و سرانجام روی مسیر $\rho = 2$، $\phi = 150^\circ$ به (نقطهٔ C) می‌رویم. در بخش اول مسیر z ثابت و برابر صفر و نیز ϕ ثابت و برابر صفرست. پس $dz = 0$، $d\phi = 0$ و $-\int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$. در بخش دوم مسیر ρ ثابت و برابر ۲ است، همچنین z ثابت و برابر صفرست. پس $d\rho = 0$ ، $dz = 0$ و $-\int_2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$.

در بخش سوم مسیر ϕ ثابت و برابر 150° است، پس $d\rho = 0$ و $d\phi = 0$ و



شکل ح ۲-۳۹

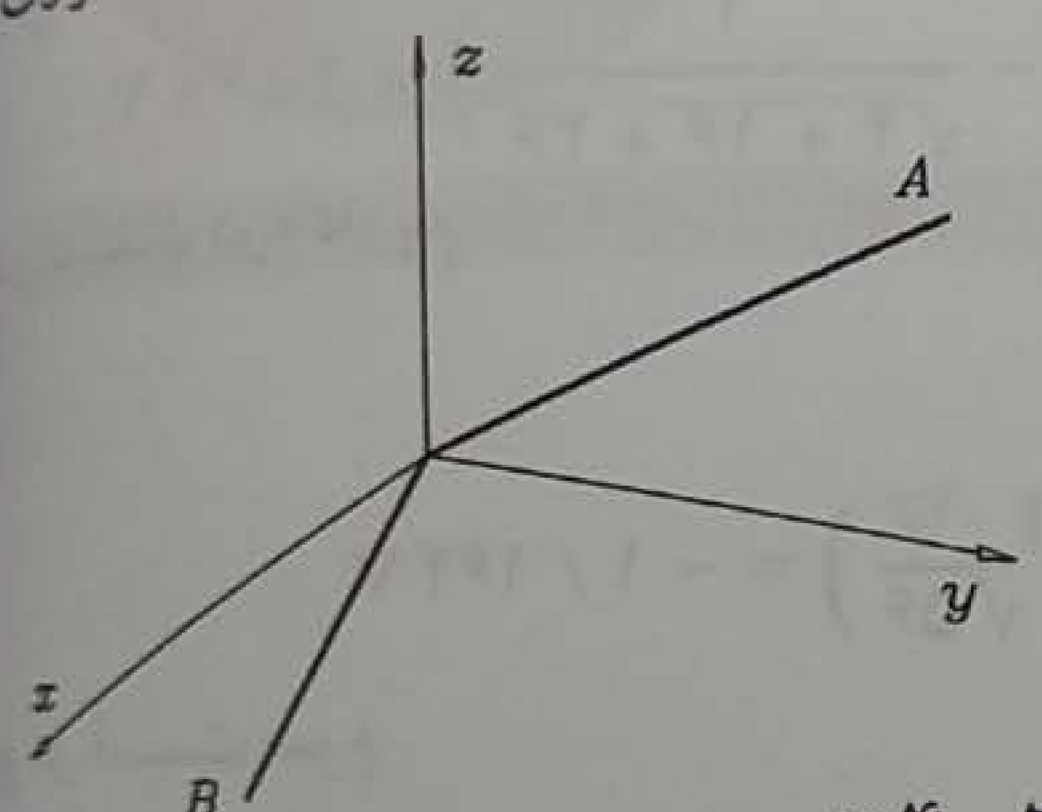
$$-\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{۰}^{۳} ۵۰\,\rho \sin\phi\, dz = -۵۰\int_{۰}^{۳} dz = -۱۵۰\ \text{V}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۴۰ مسیر انتگرالگیری را به این صورت بر می‌گزینیم ؛ ابتدا روی خط $\phi = ۹۰°$، $\theta = ۶۰°$ از نقطهٔ A به مبدا می‌رویم . سپس از مبدا روی خط $\theta = ۱۲۰°$، $\phi = ۰°$ به نقطهٔ B می‌رویم . در دستگاه مختصات کروی

$$\mathbf{dl} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \frac{۶۰\cos\theta}{r^{۳}}\,dr + \frac{۳۰\sin\theta}{r^{۲}}\,d\theta$$

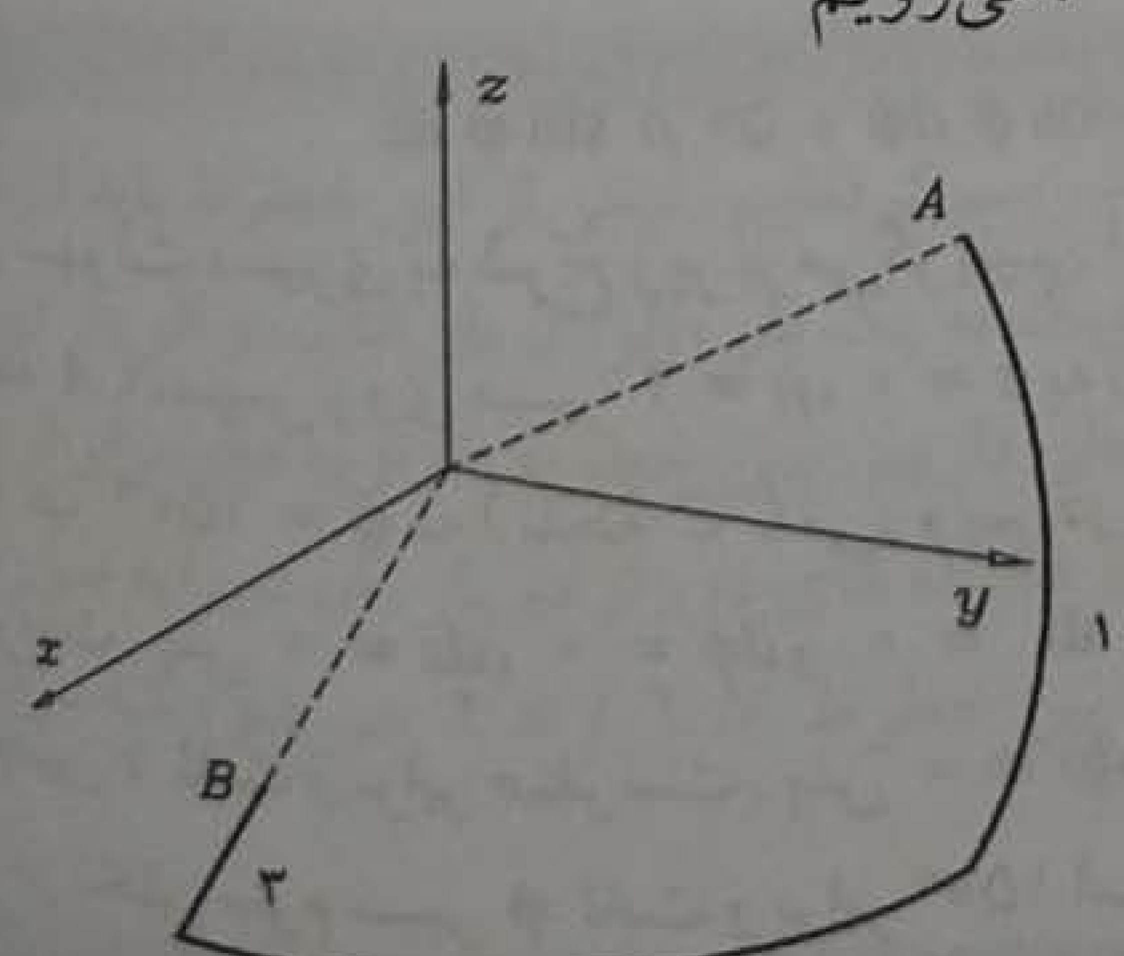


شکل ح ۲-۴۰الف

در هر دو بخش مسیر θ ثابت است ، پس $d\theta = ۰$

$$\int_{۱}\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\int_{۳}^{۰}\frac{۶۰\cos ۶۰}{r^{۳}}\,dr = \frac{۱۵}{r^{۲}}\Bigg|_{۳}^{۰}$$

چون انتگرال فوق مقداری مبهم دارد ، باید روی مسیری که از مبدا نگذرد انتگرالگیری کنیم . از نقطهٔ A روی خط $r = ۳$ ، $\theta = ۹۰°$ به $\phi = ۹۰°$ ، $\theta = ۱۲۰°$ می‌رویم ؛ سپس روی خط $r = ۳$ ، $\theta = ۱۲۰°$ به $\phi = ۰°$ می‌رویم و سرانجام روی خط $\theta = ۱۲۰°$ ، $\phi = ۰°$ از $r = ۳$ به $r = ۲$ می‌رویم



شکل ح ۲-۴۰ب

$$-\int_{۱} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{۳۰}{۹}\int_{۶۰^\circ}^{۱۲۰^\circ} \sin\theta\, d\theta = -\frac{۱۰}{۳}$$

$$-\int_{۲} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = ۰$$

$$-\int_{۳} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = ۳۰\int_{۳}^{۲} \frac{dr}{r^{۳}} = \frac{-۱۵}{r^{۲}}\Big|_{۳}^{۲} = -۲/۱$$

$$-\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -۲/۱ - ۳/۳ = -۵/۴$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۴۱-۲ در دستگاه مختصات کروی $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + r\, d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. پس $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{۲r}{(r^{۲}+a^{۲})^{۲}}dr$ و برای حالت الف

$$V = -\int_{۰}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{۱}{r^{۲}+a^{۲}}\Big|_{۰}^{r} = \frac{۱}{r^{۲}+a^{۲}} - \frac{۱}{a^{۲}}$$

برای حالت ب

$$V = -\int_{a}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + ۱۰۰ = \frac{۱}{r^{۲}+a^{۲}}\Big|_{a}^{r} + ۱۰۰ = \frac{۱}{r^{۲}+a^{۲}} - \frac{۱}{۲a^{۲}} + ۱۰۰$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۴۲-۲ در نقطهٔ A

$$V_{(A)} = \frac{۱۰^{-۹}}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\int_{-\infty}^{۰} \frac{۱}{y^{۲}+۱}\,\frac{dy}{(۱-y)}$$

$$= \frac{۱۰^{-۹}}{۸\pi\varepsilon_{۰}}\int_{-\infty}^{۰} \left(\frac{۱}{(۱-y)} + \frac{۱+y}{y^{۲}+۱}\right)dy$$

$$= \frac{۱۲۵}{۸/۸۵\,\pi}\left[-\ln(۱-y) + \tan^{-۱}y + \frac{۱}{۲}\ln(۱+y^{۲})\right]\Big|_{-\infty}^{۰} = ۷/۰۶\ \text{V}$$

در نقطهٔ B فاصلهٔ B تا عناصر روی بار خطی $\sqrt{۱+y^{۲}}$ است، پس

$$V_{(B)} = \frac{۱۰^{-۹}}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\int_{-\infty}^{۰} \frac{۱}{y^{۲}+۱}\,\frac{dy}{\sqrt{۱+y^{۲}}} = \frac{۱۰۰۰}{۴\pi\times ۸/۸۵}\,\frac{y}{\sqrt{۱+y^{۲}}}\Big|_{-\infty}^{۰} = ۸/۹۹\ \text{V}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۴۳-۲ ابتدا با استفاده از قانون گوس میدان الکتریکی داخل و خارج استوانه را می‌یابیم

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{۰}\, a^{۲}}{۲\varepsilon_{۰}\rho} \qquad \rho > a$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{۰}\,\rho}{۲\varepsilon_{۰}} \qquad \rho < a$$

برای نقاط داخل استوانه

$$V - V_{۰} = -\int_{۰}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\rho_{۰}}{۲\varepsilon_{۰}}\int_{۰}^{r} \rho\, d\rho = -\frac{\rho_{۰}}{۴\varepsilon_{۰}}\rho^{۲}$$

$$V = V_0 - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\rho^2 \qquad \rho < a$$

در سطح استوانه پتانسیل برابرست با

$$V_{(a)} = V_0 - \frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0}$$

در خارج استوانه

$$V - V_{(a)} = -\int_a^\rho \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 \rho}\, d\rho = -\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{\rho}{a}$$

$$V = V_0 - \frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{\rho}{a}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۲-۴۴ بار را به پوسته های کروی تقسیم می‌کنیم. اگر بخواهیم پتانسیل را در نقطهٔ P شکل ح ۲-۴۴ بیابیم، این نقطه خارج بعضی پوسته ها، مثل A، و داخل بعضی پوسته ها مثل B قرار می‌گیرد. پتانسیل ناشی از پوستهٔ A با پتانسیل یک بار نقطه‌ای واقع در مرکز کره، که باری برابر بار روی پوسته دارد، برابرست. پس

$$dV_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{4\pi r'^2\, dr'\, \rho'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

و میدان پتانسیل ناشی از تمام این پوسته‌ها عبارت است از

$$V_1 = \int dV_1 = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r \rho\, r'^2\, dr'$$

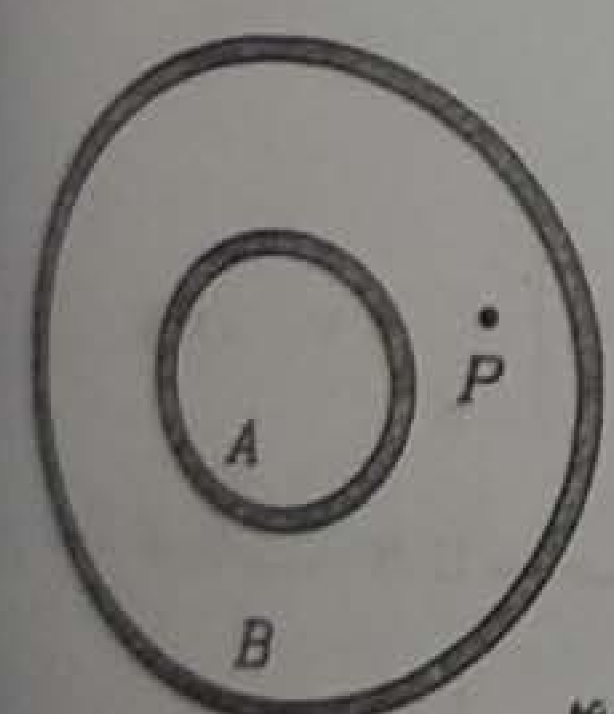
اگر پوسته B را در نظر بگیریم، چون میدان داخل پوسته صفرست، پتانسیل نقطهٔ P با پتانسیل روی سطح پوسته برابرست، یعنی

$$dV_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{4\pi r'^2\, dr'\, \rho}{4\pi\varepsilon_0 r'}$$

و میدان پتانسیل ناشی از تمام این پوسته ها برابرست با

$$V_2 = \int dV_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^\infty \rho\, r'\, dr'$$

پتانسیل کل جمع V_1 و V_2 است.



شکل ح ۲-۴۴

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۲-۴۵ می‌توان $\mathbf{E}$ را با استفاده از قانون گوس به دست آورد و سپس از رابطهٔ $V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ استفاده کرد، ولی به کار بردن رابطهٔ داده شده در مسئلهٔ ۲-۴۴ کار را بسیار ساده می‌کند

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r \rho_0 e^{-\alpha r'}\, r'^2\, dr' + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^\infty \rho_0 e^{-\alpha r'} r'\, dr'$$

با استفاده از جدول انتگرال به دست می‌آوریم

$$V = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0 \alpha^3 r}(1 - e^{-\alpha r}) - \frac{\rho_0 e^{-\alpha r}}{\varepsilon_0 \alpha^2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=0 \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=0 \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=0 \,|\, \oint E\cdot dl=0$

۴۶-۲ میدانهای خارج پوسته ($r > b$) مانند میدانهای یک بار نقطه‌ای واقع در مبدا مختصات است که مقداری برابر کل بار پوسته داشته باشد، پس در $r > b$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{و} \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

که در آن

$$Q = \int \rho\, dv = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \int_a^b (k r) r^2\, dr$$
$$= 2\pi \times 2 \times k\left(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) = \pi k (b^4 - a^4)$$

در داخل پوسته ($a < r < b$) میدان E از قانون گوس به دست می‌آید

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} = \int_a^r \rho\, dv = 4\pi k \int_a^r r^3\, dr = \pi k (r^4 - a^4)$$
$$\mathbf{E} = \frac{k(r^4 - a^4)}{4\varepsilon_0 r^2}$$

همچنین V به صورت زیر به دست می‌آید

$$V_{(r)} - V_{(b)} = -\int_b^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{k}{4\varepsilon_0}\left[\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^4}{b}\right) - \left(\frac{r^3}{3} + \frac{a^4}{r}\right)\right]$$
$$V_{(r)} = \frac{k}{4\varepsilon_0}\left[\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^4}{b}\right) - \left(\frac{r^3}{3} + \frac{a^4}{r}\right)\right] + \frac{\pi k (b^4 - a^4)}{4\varepsilon_0 b}$$
$$= -\frac{k}{4\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} + \frac{a^4}{r}\right) + \frac{k b^3}{3\varepsilon_0}$$

در $r < a$ شدت میدان الکتریکی صفرست و

$$V_{(r)} = V_{(a)} = \frac{k}{3\varepsilon_0}(b^3 - a^3)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=0 \mid \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \mid \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=$

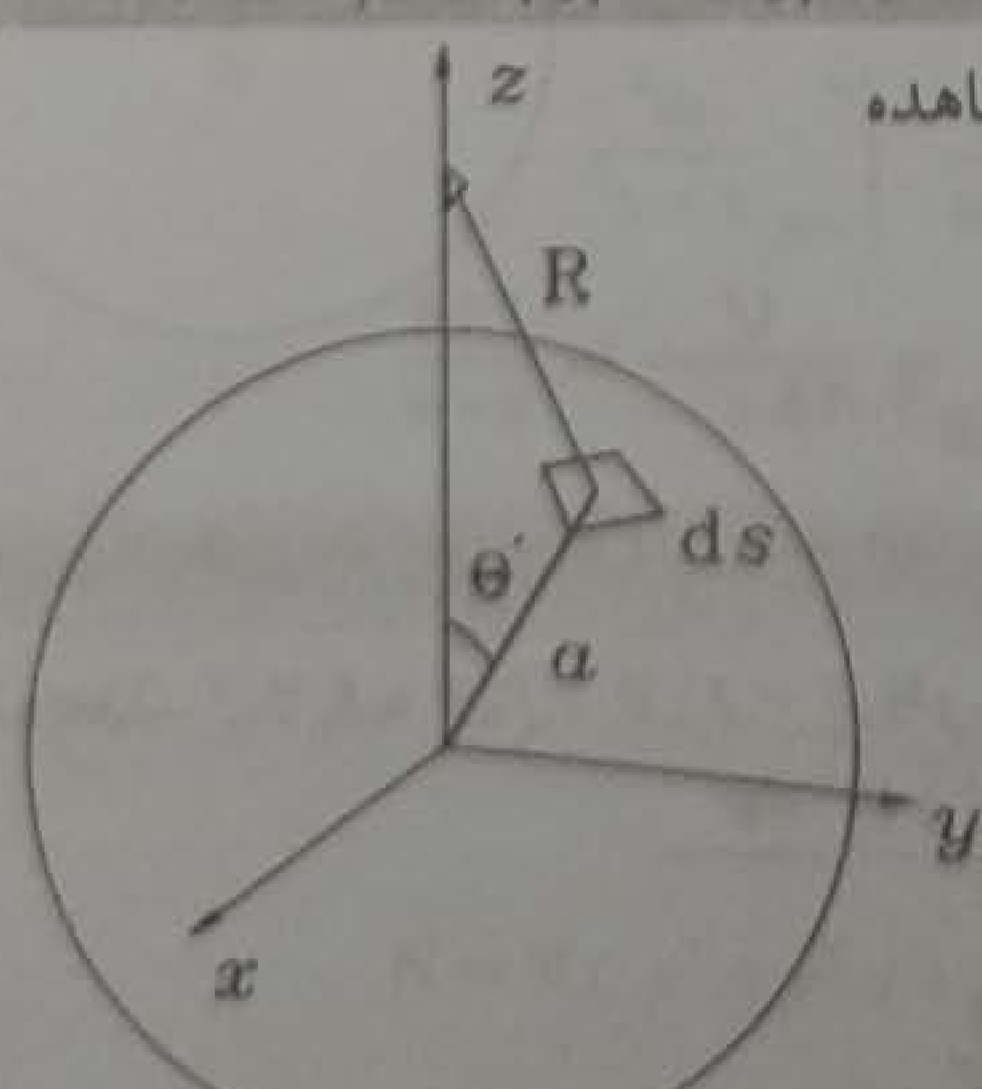
۴۷-۲ دستگاه مختصات را طوری بر می‌گزینیم که نقطهٔ مشاهده روی محور z قرار گیرد. با توجه به شکل ح ۲-۴۷ داریم

$$ds = a^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'$$
$$R^2 = z^2 + a^2 - 2 a z \cos\theta'$$

با دیفرانسیل گیری به دست می‌آوریم

$$2R\, dR = 2 a z \sin\theta'\, d\theta'$$

حال داریم



شکل ح ۲-۴۷

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'}{R}$$

$$= \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta'\,d\theta'}{R} = \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{dR}{za}$$

$$= \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0 z}\int_{z-a}^{z+a} dR = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 z} \qquad z > a$$

اگر نقطهٔ میدان در داخل کره باشد، تنها در بخش آخر حل مسئله حدود انتگرال تغییر می‌کند؛ به ازای $\theta' = 0$ داریم $R = a - z$ و به ازای $\theta' = \pi$ داریم $R = a + z$

$$V = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0 z}\int_{a-z}^{a+z} dR = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \qquad z < a$$

۲-۴۸ تمام نقاط روی سطح نیمکره از مرکز آن به یک فاصله‌اند. پس بارهای نیمکره پتانسیل زیر را در مرکز نیمکره ایجاد می‌کنند

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} = \frac{2\pi a^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}$$

حال اثر بارهای روی قاعده را می‌یابیم. از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma\,ds}{R}$$

که در آن $ds = \rho\,d\rho\,d\phi$ ، $R = \rho$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sigma\,d\rho\,d\phi = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}$$

یعنی هر دو قسمت اثر یکسانی در ایجاد پتانسیل دارند و

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

۲-۴۹ چگالی بار $\lambda = Q/2a$ است، پس

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\,dz'}{z-z'} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\int_{-a}^{a}\frac{dz'}{z-z'}$$

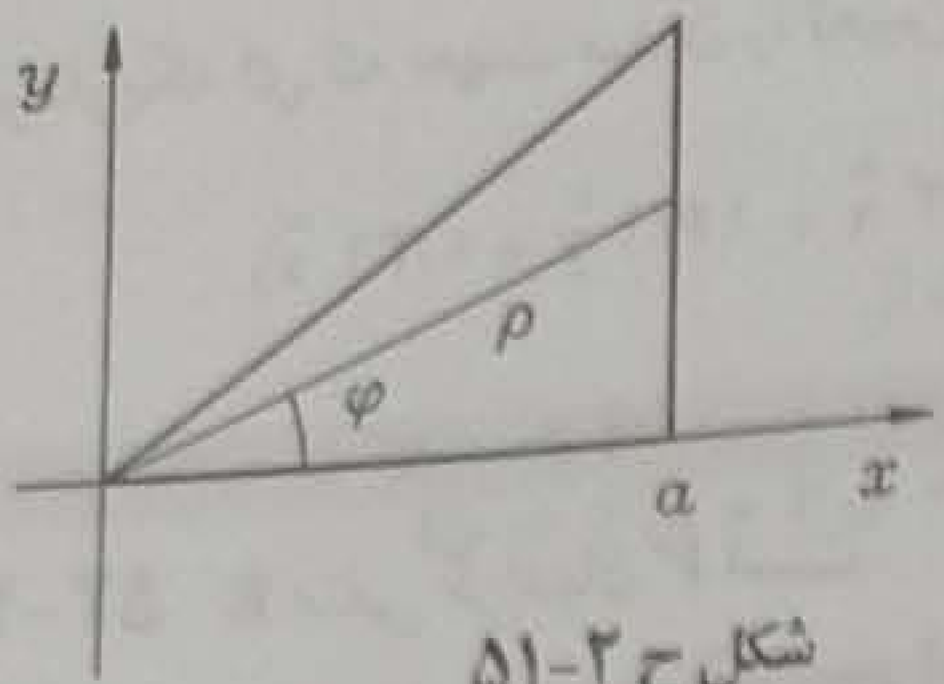
$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\Big[-\ln(z-z')\Big]_{-a}^{a} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln\frac{z+a}{z-a}$$

۲-۵۰ چون $\mathbf{r} = 0$ ، $\mathbf{R} = -\mathbf{r}' = -r'\hat{\mathbf{r}}$ و $|\mathbf{R}| = r'$. همچنین $ds' = r'\sin 30^\circ\,dr'\,d\phi'$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\pi\varepsilon_0(0/5\,r')\,dr'\,d\phi'}{r'}$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^{2}dr' = \frac{\pi}{2}$$

۲-۵۱ از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم



شکل ح ۲-۵۱

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int \frac{\sigma\rho\, d\rho\, d\phi}{\rho}$$
$$= \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int \sigma\, d\rho\, d\phi$$

ϕ بین ۰ و θ تغییر می‌کند و ρ بین ۰ تا $a / \cos\phi$

$$V = \frac{\sigma}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{\theta} d\phi \int_۰^{a/\cos\phi} d\rho$$
$$= \frac{\sigma}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^{\theta}\frac{a\, d\phi}{\cos\phi} = \frac{a\sigma}{۴\pi\varepsilon_۰}\Big[\ln(\tan\phi + \sec\phi)\Big]\Big|_۰^{\theta}$$
$$= \frac{a\sigma}{۴\pi\varepsilon_۰}\ln[(۱+\sin\theta)/\cos\theta]$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=۰ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=۰ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=۰ \,|\, \oint E\cdot dl=۰$

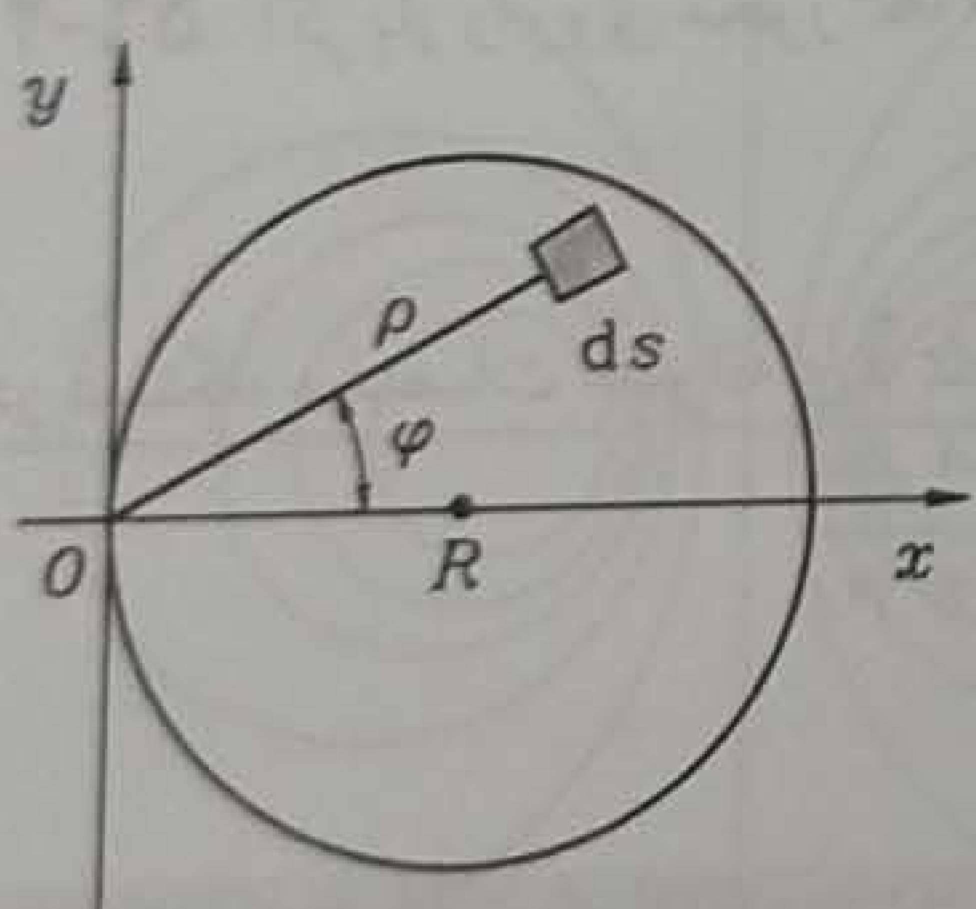
۲-۵۲ دستگاه مختصات را به صورتی برمی‌گزینیم که مبدا نقطهٔ مشاهده باشد(نقطه‌ای که یافتن پتانسیل در آن مورد نظرست) و محور x از مرکز دایره بگذرد (شکل ح ۲-۵۲) . باکمال تعجب حل این مسئله در این دستگاه مختصات استوانه‌ای بسیار ساده ، و در هردستگاه مختصات دیگری با مبدایی دیگر تقریباًناممکن است .

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int\frac{\sigma\, ds}{\rho}$$

که در آن $ds = \rho\, d\rho\, d\phi$. پس

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\iint \sigma\, d\rho\, d\phi$$

برای پوشیده شدن تمام سطح ϕ باید بین $-\pi/۲$ تا $\pi/۲$ و ρ بین ۰ تا $۲R\cos\phi$ تغییر کند ، زیرا معادلهٔ دایره $\rho = ۲R\cos\phi$ است .



$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\int_۰^{۲R\cos\phi}\sigma\, d\rho\, d\phi$$
$$= \frac{\sigma}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} ۲R\cos\phi\, d\rho\, d\phi$$
$$= \frac{\sigma R}{۲\pi\varepsilon_۰}\sin\phi\,\Big|_{-\pi/۲}^{\pi/۲} = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_۰}$$

شکل ح ۲-۵۲

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=۰ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=۰ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=۰ \,|\, \oint E\cdot dl=۰$

۲-۵۳ نقطهٔ P روی سطح همپتانسیل قرار دارد. برای یافتن جهت میدان ، بردار عمود بر سطح همپتانسیل را در نقطهٔ P می‌یابیم

$$\mathbf{N} = \nabla(x^۳ + y^۲ + z - ۱۰۰۰) = ۱۴۷\,\hat{\mathbf{x}} + ۵۰\,\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$$

بردار یکه ای که جهت میدان را تعیین می‌کند عبارت است از $\hat{\mathbf{e}} = \pm \mathbf{N} / |\mathbf{N}|$ و

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}|\ \hat{\mathbf{e}} = \pm ۵۰\ \frac{۱۴۷\ \hat{\mathbf{x}} + ۵۰\ \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{(۱۴۷^۳ + ۵۰^۲ + ۱)^{\frac{۱}{۲}}} = \pm (۴۷/۳\ \hat{\mathbf{x}} + ۱۶/۱\ \hat{\mathbf{y}} + ۰/۳۲\ \hat{\mathbf{z}})$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۵۴ $\mathbf{E}$ منفی گرادیان V است

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -۳۰۰\ r^۲ \sin\theta\ \hat{\mathbf{r}} - ۱۰۰\ r^۲ \cos\theta\ \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ρ دیورژانس $\varepsilon_۰\ \mathbf{E}$ است

$$\rho = \varepsilon_۰ \nabla\cdot\mathbf{E} = -۱۰۰\ \varepsilon_۰\ r \left(\frac{۱}{\sin\theta} + ۱۰ \sin\theta \right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۵۵ تابع پتانسیل عبارت است از

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{q}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} - \frac{q}{۲\ \sqrt{(x-a)^۲+y^۲+z^۲}} \right]$$

برای یافتن سطح همپتانسیل $V = ۰$ تابع فوق را برابر صفر قرار داده به دست می‌آوریم

$$x^۲+y^۲+z^۲ = ۴(x-a)^۲+۴y^۲+۴z^۲$$

باکمی عملیات جبری خواهیم داشت

$$۴\left(x - \frac{۴a}{۳}\right)^۲+y^۲+z^۲ = \frac{۴a^۲}{۹}$$

که معادلهٔ کره‌ای به شعاع $\frac{۲a}{۳}$ و به مرکز $\left(\frac{۴a}{۳}, ۰, ۰\right)$ است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۵۶ اگر بار را روی محور zها فرض کنیم

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰\rho}\ \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای $d\mathbf{r} = d\rho\ \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\ d\phi\ \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\ \hat{\mathbf{z}}$. پس

$$V_A - V_B = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰}\int_{\rho_B}^{\rho_A}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$= -\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln\frac{\rho_B}{\rho_A}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰|\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}|\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}|\nabla\cdot\mathbf{B}=۰|\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho|\nabla\times\mathbf{E}=۰|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۵۷ روی صفحه‌ای که دو بار خطی نسبت به آن تقارن آینه‌ای دارند پتانسیل صفر است، زیرا روی این صفحه هر پتانسیلی که توسط بار λ ایجاد می‌شود، منفی آن توسط بار $\lambda -$ ایجاد می‌شود. نقطهٔ Q را روی این صفحه بر می گزینیم. با توجه به حل مسئلهٔ ۲-۵۶ V_{PQ} ناشی از بار λ و $\lambda -$ به ترتیب عبارت‌اند از

$$V_{۱P} - V_{۱Q} = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln\frac{\rho_Q}{\rho_۱}$$

$$V_{2P}-V_{2Q}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_Q}{\rho_2}$$

چون $V_{1Q}=V_{2Q}=0$، کل پتانسیل ناشی از دو بار خطی عبارت است از

$$V_P=V_{1P}+V_{2P}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{\rho_Q}{\rho_1}-\ln\frac{\rho_Q}{\rho_2}\right)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

۲-۵۸ در مسئلهٔ ۲-۵۷ تابع پتانسیل را به صورت $V=(\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln(\rho_2/\rho_1)$ یافتیم. پس سطوح همپتانسیل سطوحی هستند که برای آنها $k=\rho_2/\rho_1$. این سطوح مستقل از z هستند. اگر محور z را به موازات دو بار و درست بین آنها بر گزینیم (شکل ح ۲-۵۸ الف) داریم

$$\rho_2^2=\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2$$

$$\rho_1^2=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2$$

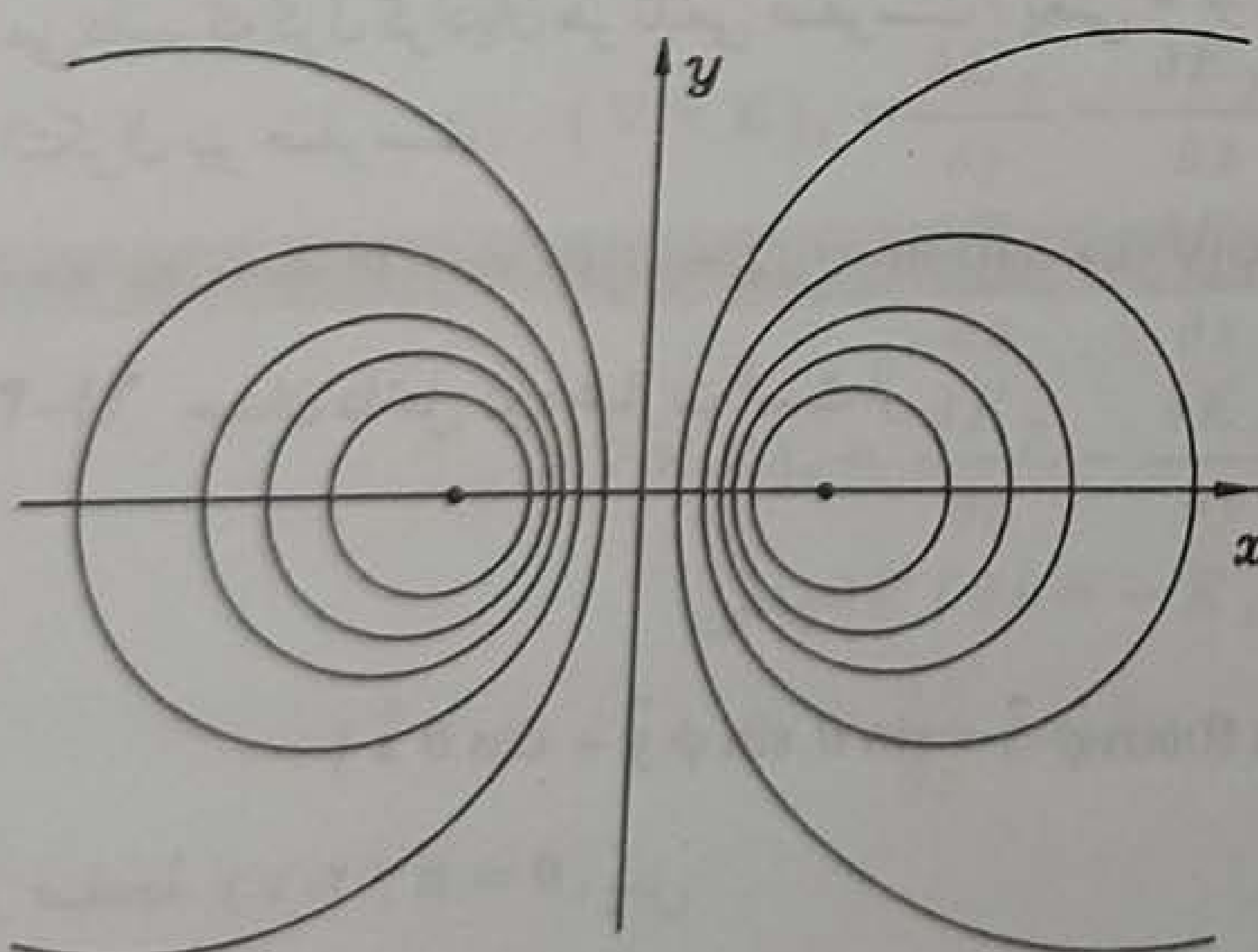
وباگذاشتن این روابط در $\rho_2=k\rho_1$ به دست می‌آوریم

$$\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2=k^2\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]$$

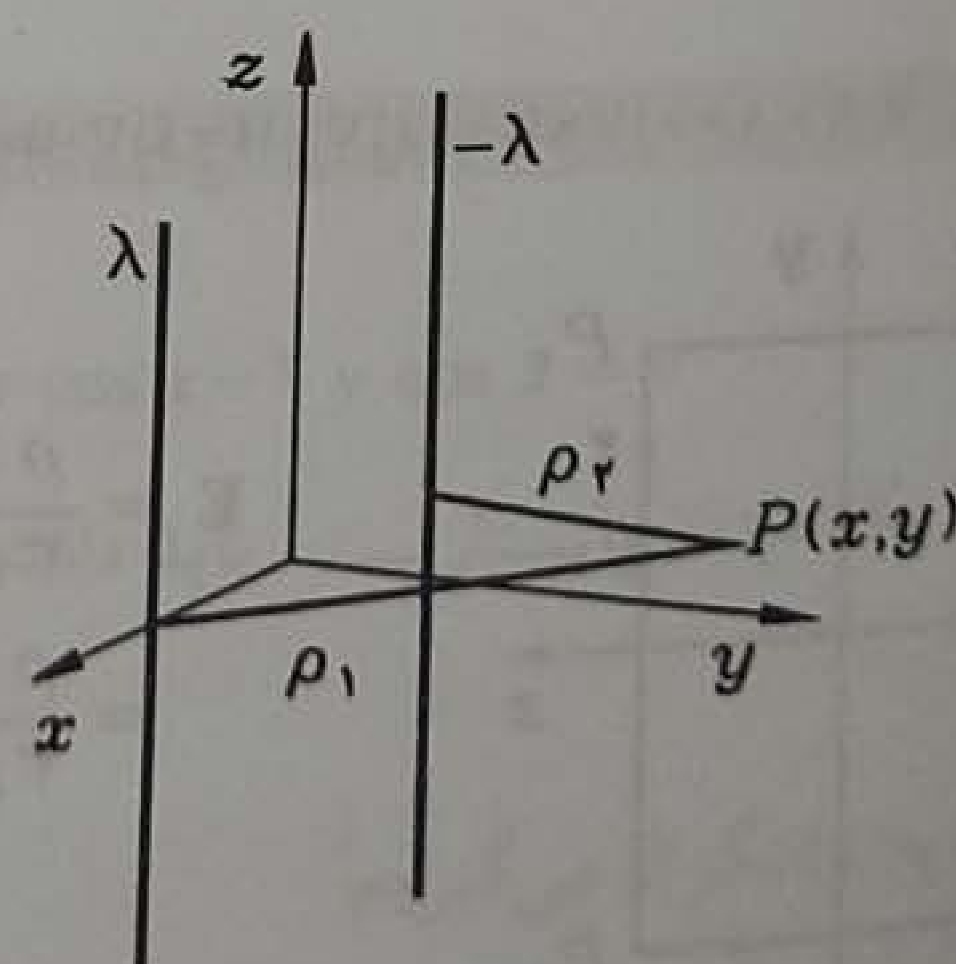
باکمی عملیات ریاضی به دست می‌آوریم

$$\left[x+\frac{d}{2}\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)\right]^2+y^2=\frac{k^2d^2}{(k^2-1)^2}$$

که دایره‌هایی به مراکز $\left[\pm\frac{d}{2}\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right),0\right]$ و شعاعهای $\frac{kd}{k^2-1}$ هستند. در شکل ح ۲-۵۸ ب تعدادی از این دوایر رسم شده‌اند.



ب



الف

شکل ح ۲-۵۸

۲-۵۹ می‌دانیم که $\mathbf{E}=-\nabla V=-(e^{-x}\sin y\,\hat{\mathbf{x}}-e^{-x}\cos y\,\hat{\mathbf{y}})$. معادلهٔ خطوط میدان عبارت است از

$$\frac{dy}{dx}=\frac{E_y}{E_x}=-\operatorname{cotg}y$$

حل این معادلهٔ دیفرانسیل به صورت زیر است

$$x = \ln \cos y + C$$

برای خط نیرویی که از نقطهٔ P می‌گذرد باید داشته باشیم

$$0 = \ln \cos \frac{\pi}{3} + C$$

که نتیجه می‌دهد $C = \ln 2$ و

$$x = \ln (2 \cos y)$$

این خط محور x را در نقطه‌ای که مختصهٔ x آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید، قطع می‌کند

$$x = \ln (2 \cos 0) = \ln 2$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۲-۶۰ داریم

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \times \int \frac{\rho' \mathbf{R}\, dv'}{|\mathbf{R}|^3}$$

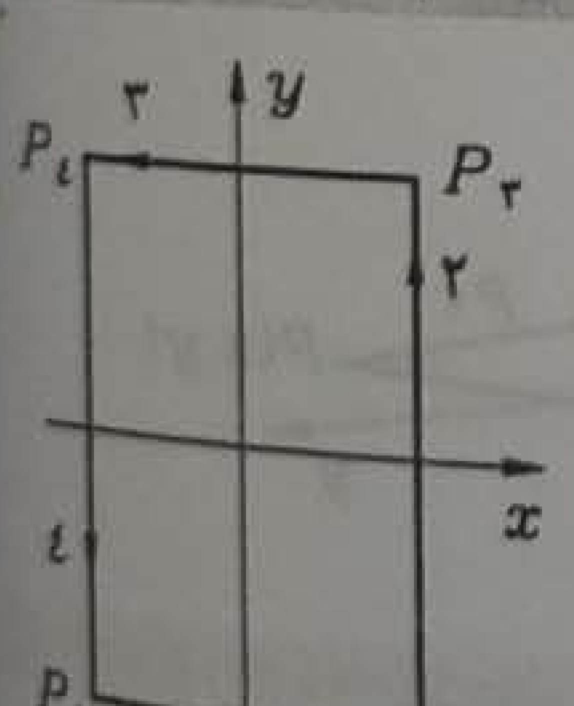
چون کرل مشتقگیری نسبت به متغیرهای بدون پریم (x, y, z) است و انتگرال نسبت به متغیرهای پریم‌دار (x', y', z') گرفته می‌شود می‌توانیم جای آنها را عوض کنیم.

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \nabla \times \frac{\rho' \mathbf{R}\, dv'}{|\mathbf{R}|^3}$$

$$\nabla \times \frac{\rho' \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \rho' \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} + \nabla\rho' \times \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

چون ρ' تابعی از x' و y' و z' است، $\nabla\rho' = 0$. در مسئلهٔ ۱-۴۵ دیدیم که $\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$ گرادیان $\frac{1}{|\mathbf{R}|^3}$ است، و می‌دانیم که کرل گرادیان هر تابعی صفرست (یعنی $\nabla \times \nabla f = 0$)، پس عبارت داخل انتگرال صفر و حاصل انتگرال نیز صفرست.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$



شکل ح ۲-۶۱

۲-۶۱ میدان داخل کره عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

$$= \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} (\sin\theta \cos\phi\, \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\phi\, \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\, \hat{\mathbf{z}})$$

در صفحهٔ xy، $\theta = \pi / 2$، پس

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (r\cos\phi\, \hat{\mathbf{x}} + r\sin\phi\, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (x\, \hat{\mathbf{x}} + y\, \hat{\mathbf{y}})$$

و اما

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot dx\, \hat{\mathbf{x}} + \int_{P_2}^{P_3} \mathbf{E}\cdot dy\, \hat{\mathbf{y}} + \int_{P_3}^{P_4} \mathbf{E}\cdot dx\, \hat{\mathbf{x}} + \int_{P_4}^{P_1} \mathbf{E}\cdot dy\, \hat{\mathbf{y}}$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} E_x\, dx + \int_{P_2}^{P_3} E_y\, dy + \int_{P_3}^{P_4} E_x\, dx + \int_{P_4}^{P_1} E_y\, dy$$

اگر مختصهٔ x نقاط P_1 تا P_4 را به ترتیب با x_1 تا x_4 و مختصهٔ y آنها را با y_1 تا y_4 نشان دهیم خواهیم داشت

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\int_{x_1}^{x_2} x\,dx + \int_{y_2}^{y_3} y\,dy + \int_{x_3}^{x_4} x\,dx + \int_{y_4}^{y_1} y\,dy\right\}$$

چون $x_2 = x_1$، $x_4 = x_3$، $y_1 = y_2$ و $y_3 = y_4$ حاصل انتگرال فوق صفر می‌شود.

$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0$

۲-۶۲ میدانی می‌تواند میدان الکتروستاتیک باشد که پایستار باشد، یعنی کرل آن صفر باشد

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2yz & 3xz \end{vmatrix} = -2y\,\hat{\mathbf{x}} - 3z\,\hat{\mathbf{y}} - x\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس $\mathbf{A}$ نمی‌تواند یک میدان الکتروستاتیک باشد

$$\nabla\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & (2xy+z^2) & 2yz \end{vmatrix} = (2z-2z)\,\hat{\mathbf{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} + (2y-2y)\,\hat{\mathbf{z}} = 0$$

پس $\mathbf{B}$ می‌تواند یک میدان الکتروستاتیک باشد.

$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0$

۲-۶۳ ابتدا $\nabla\times\mathbf{E}$ را حساب می‌کنیم

$$(\nabla\times\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0$$

$$(\nabla\times\mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 3z^2 - 3z^2 = 0$$

$$(\nabla\times\mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 2y\cos x - 2y\cos x = 0$$

پس $\mathbf{E}$ یک میدان پایستار است. باید داشته باشیم $\partial V/\partial x = -E_x$ یعنی

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y^2\cos x + z^3$$

نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$V = y^2\sin x + xz^3 + h(y,z)$$

چون $\partial V/\partial y = -E_y$ باید داشته باشیم

$$\frac{\partial V}{\partial y} = y^2\sin x + \frac{\partial h}{\partial y} = 2y\sin x - 4$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -4 \Rightarrow h = -4y + h_1(z)$$

چون $\partial V / \partial z = - E_z$ باید داشته باشیم

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 3 x z^2 + \frac{\partial h_1}{\partial z} = 3 x z^2 + 2$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} = 2 \Rightarrow h_1 = 2z + C$$

که C یک عدد ثابت است. بنابراین

$$V = y^2 \sin x + x z^3 - 4 y + 2 z + C$$

۲-۶۴ برای میدان الکترواستاتیک باید داشته باشیم $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{E} = (x^2 e^z - e^z x^2) \hat{\mathbf{x}} - (2 xy e^z - 2 xy e^z) \hat{\mathbf{y}} + (2 x e^z - 2 x e^z) \hat{\mathbf{z}} = 0$$

V مطلوب باید به نحوی باشد که $\mathbf{E} = - \nabla V$، یعنی باید داشته باشیم

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2 xy e^z \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = e^z x^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = x^2 y e^z + z^2$$

با انتگرالگیری نسبت به x به دست می‌آوریم

$$V = x^2 y e^z + h (y , z)$$

که در آن $h (y , z)$ تابعی از نیست x. از عبارت فوق نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial V}{\partial y} = e^z x^2 + \frac{\partial h}{\partial y}$$

که نشان می‌دهد مشتق h نسبت y به صفرست. با مشتقگیری از V بر حسب z خواهیم داشت

$$\frac{\partial V}{\partial z} = x^2 y e^z + + \frac{\partial h}{\partial z}$$

که نشان می‌دهد

$$\frac{\partial h}{\partial z} = z^2$$

پس h تنها تابعی از z است و از عبارت فوق به دست می‌آوریم

$$h = \frac{1}{3} z^3 + C$$

که در آن C مقداری ثابت است. سرانجام

$$V = x^2 y e^z + \frac{1}{3} z^3 + C$$

۲-۶۵ میدان مورد نظر به صورت $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}}$ است. باید داشته باشیم $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{\mathbf{z}}$$

برای صفر شدن $\nabla \times \mathbf{E}$ باید دو مشتق فوق صفر باشند، یعنی E_x نباید تابعی از y و z باشد.

۲-۶۶ چون ناحیه خالی از بار است $\nabla \cdot \mathbf{E} = ۰$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = ۰$$

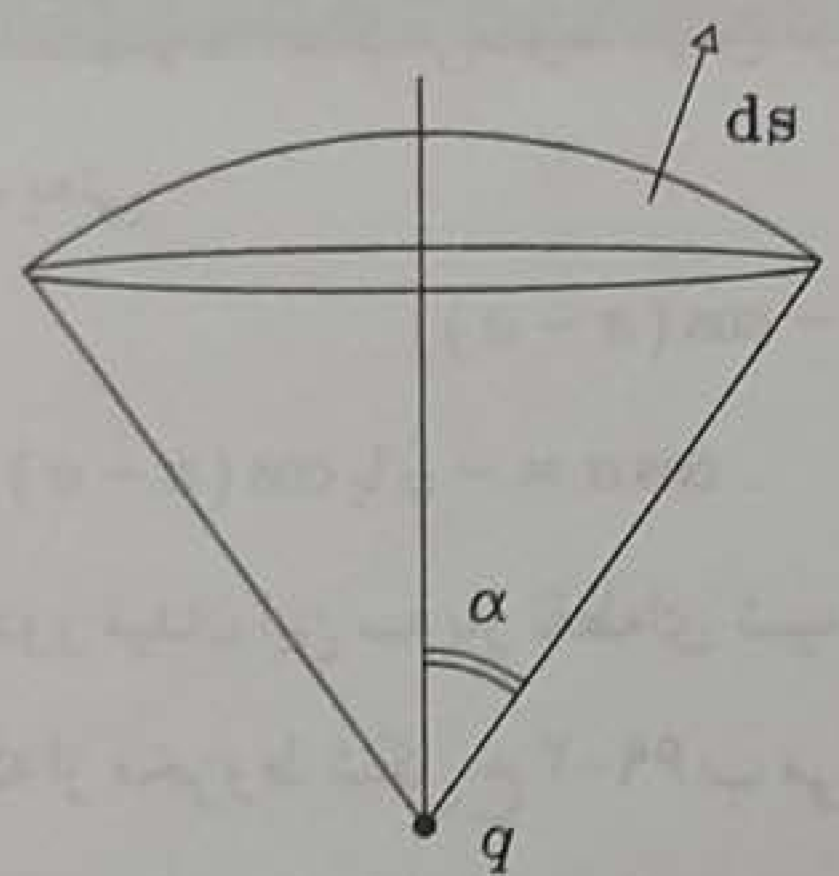
پس E_x تابعی از x نیست و میدان یکنواخت است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۶۷ چون از سطح جانبی شاری نمی‌گذرد، شار گذرنده از قاعده با شاری که از عرقچین کروی شکل ح ۲-۶۷ می‌گذرد برابر است. پس شار گذرنده از این عرقچین را می‌یابیم. داریم

$\mathbf{D} = (q / ۴\pi r^۲)\hat{\mathbf{r}}$ و $d\mathbf{s} = r^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{\mathbf{r}}$ پس

$$\Psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{۴\pi} \int_۰^\alpha \sin\theta\, d\theta \int_۰^{۲\pi} d\phi = \frac{q}{۲}(۱ - \cos\theta)$$



شکل ح ۲-۶۷

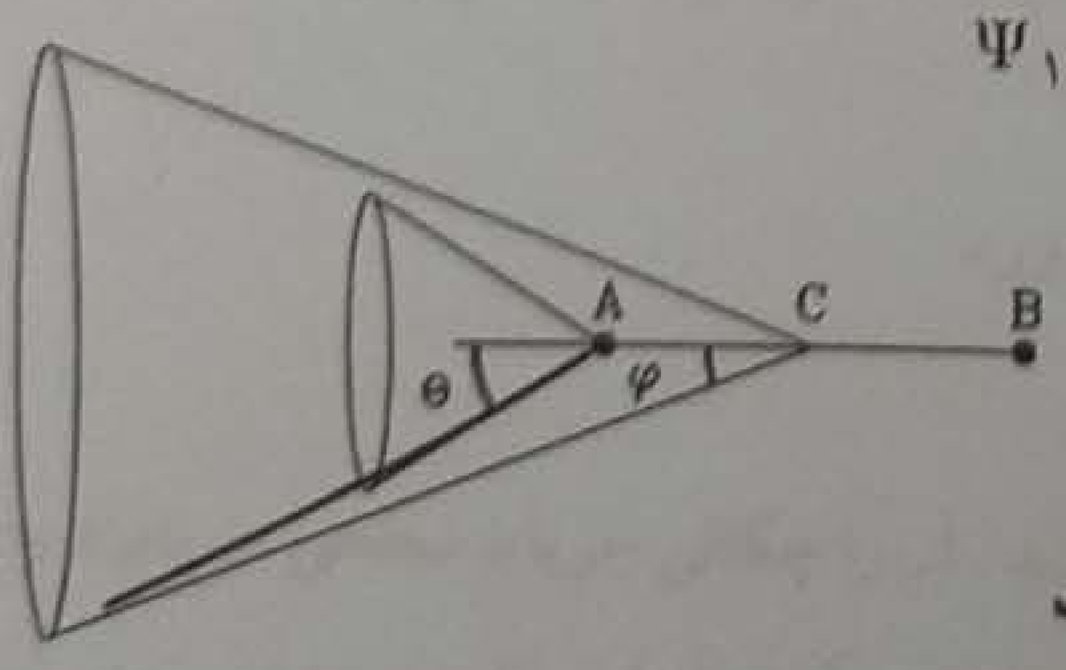
$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۲-۶۸ مسائل ۲-۳۶ و ۲-۳۷ را ببینید. در فواصل بسیار دور میدان این دو بار شبیه میدان یک بار نقطه‌ای $۲q$ واقع در C هستند. کل شاری که از مخروط نشان داده شده در شکل ح ۲-۶۸ با راس واقع در A می‌گذرد برابر است با

$$\Psi = \frac{q}{۲}(۱ - \cos\theta)$$

توجه کنید که در فواصل بسیار نزدیک به بار واقع در A، میدان شبیه میدان بار نقطه‌ای است، حل مسئلهٔ ۲-۶۷ را ببینید. میدان این شار باید با شاری که از مخروط به راس B شکل ح ۲-۶۸ می‌گذرد برابر باشد، و این شار عبارت است از

$$\Psi_۱ = \frac{۲q}{۲}(۱ - \cos\phi)$$



شکل ح ۲-۶۸

پس
$$\frac{q}{2}(1-\cos\theta)=q(1-\cos\phi)$$

با حذف q از دو طرف رابطه و استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2}\left(1-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=1-(1-2\sin^2\frac{\phi}{2})$$
$$\sin^2\frac{\theta}{2}=2\sin^2\frac{\phi}{2}$$

و با گرفتن جذر از معادلهٔ بالا رابطهٔ داده شده در صورت مسئله را به دست می‌آوریم.

۲-۶۹ مسائل ۲-۳۷، ۲-۶۷، و ۲-۶۸ را ببینید. کل خطوطی که با زاویهٔ کوچکتر از α از بار $3q$ خارج می‌شوند به بارهای $q-$ و $q-$ ختم می‌شوند. پس کل شار داخل مخروط شکل ح ۲-۶۹ الف باید برابر $q = 3q - 2q$ باشد، یعنی

$$q=\frac{3q}{2}[1-\cos(\pi-\alpha)]$$

که نتیجه می‌دهد $\cos(\pi-\alpha)=\frac{1}{3}$ یا $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$.

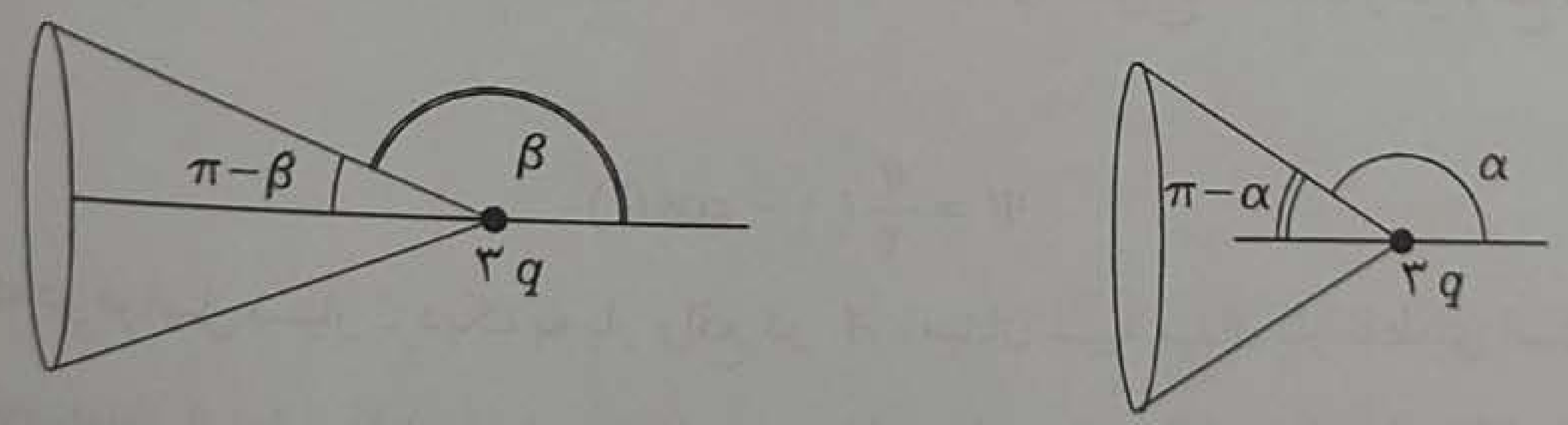
در فواصل خیلی دور میدان این سه بار نقطه‌ای شبیه میدان یک بار نقطه‌ای $q = 3q - q - q$ به نظر می‌رسد. پس شاری که از مخروط شکل ح ۲-۶۹ ب می‌گذرد باید برابر $q/2$ باشد، یعنی

$$\frac{q}{2}=\frac{3q}{2}[1-\cos(\pi-\beta)]$$

یا

$$\cos(\pi-\beta)=\frac{2}{3}$$

که نتیجه می‌دهد $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$.



ب شکل ح ۲-۶۷ الف