دیانی، محمود، - ۱۳۳۹
رهیافت حل مسئله در **الکترومغناطیس** / محمود دیانی.
تهران: نص، ۱۳۸۹.
۸۰۰۰۰ ریال
ISBN: 964-6264-64-6
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱. الکترومغناطیس - مسائل، تمرینها و غیره. ۲. الکترومغناطیس.
الف. عنوان
QC ۷۶۰/۵۲۶ /د ۹ ر۹
۵۳۷/۰۷۶
کتابخانه ملی ایران
۷۸-۱۹۲۵۹ م

موسسه علمی فرهنگی

الکترومغناطیس

رهیافت حل مسئله

مهندس محمود دیانی
چاپ نهم : زمستان ۸۹
تیراژ: ۲۵۰۰
ناشر: «نص»
طراحی، آماده‌سازی: موسسه علمی فرهنگی «نص»
قیمت: ۸۰۰۰ تومان

دفتر: تهران، میدان انقلاب، خ منیری جاوید، بن بست مبین، شماره ۶
تلفن: ۶۶۴۱۲۳۸۵ - ۶۶۴۶۵۶۷۴ - ۶۶۹۵۳۸۸۳ فاکس: ۶۶۹۵۷۶۹۰
ص.پ. ۸۶۳-۱۳۱۴۵ ایمیل: info@nasspub.com
وب سایت: www.nass.ir

فروشگاه ۱: تهران - ضلع جنوب‌شرقی میدان انقلاب، شماره ۱۵۰۰/۳
تلفن: ۶۶۴۰۵۳۷۲

فروشگاه ۲: یزد - فلکه اطلسی - بلوار دانشگاه - نرسیده به مجتمع خورشید
کتابفروشی بزرگ نص
تلفن: ۰۳۵۱-۸۲۵۷۱۰۵

شابک: ۹۶۴-۶۲۶۴-۶۴-۶ ISBN: 964-6264-64-6

فهرست

۱ حساب برداری

مقدمه

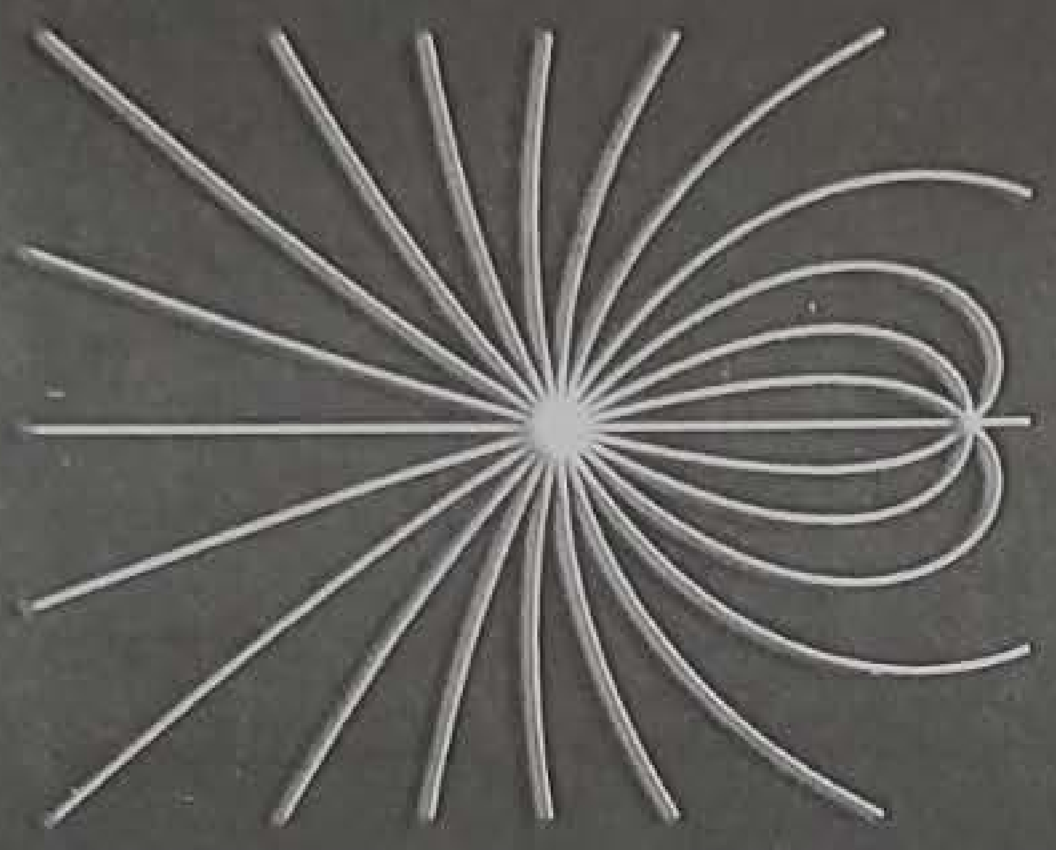
این نوشتار بعضی مباحث ریاضی مربوط به حساب‌برداری را، که دانستن آن برای دنبال کردن مطالب الکترومغناطیس ضروری است، در بردارد. هدف این نوشته شروع از صفر و ارائه تمامی مطالب نیست. انتظار می‌رود که خواننده قبلاً در درسهای ریاضی خود به تفصیل با این مطالب آشنا شده باشد و از این نوشته تنها به عنوان یادآوری و مرجع استفاده کند. به همین خاطر به کسانی که در درک مطلب مشکل دارند یا خواهان بررسی عمیقتر عناوین مورد بحث هستند، توصیه می‌شود به کتابهای ریاضی و حساب‌برداری مراجعه کنند. البته بعضی مطالب، به خصوص دستگاههای مختصات، با توجه به هدف ما که بررسی پدیده‌های الکترومغناطیسی و حل مسئله‌های مربوط به آنهاست، نسبت به کتابهای ریاضی مقدماتی بیان متفاوتی دارد.

به دلیل فوق‌الذکر در مورد تعریف بردار، جمع‌برداری، ضربهای داخلی و خارجی، خواص ضرب و جمع برداری، بردارهای یکه و تجزیه مؤلفه‌ها صحبتی نکرده، همه را دانسته فرض می‌کنیم. ولی تذکر چند نکته مفید است:

۱ ـ علامتگذاری در مطالب چاپ شده معمولاً نماد بردارها با حروف سیاه نشان داده می‌شود. در دستنویس به علت عدم داشتن این امکان بالای کمیات برداری خط کوچکی رسم می‌شود، مثل $\overline{A}$. برای نشان دادن اندازه یک بردار از دو خط راست در دو طرف آن استفاده می‌کنیم. مثلاً $|\mathbf{A}|$ اندازه بردار $\mathbf{A}$ است. بردارهایی که رویشان علامت ^ وجود دارد، بردار یکه هستند. مثلاً $\hat{\mathbf{k}}$.

۲ ـ جهت هر جهت در فضا با یک بردار یکه توصیف می‌شود. برای یافتن بردار یکه مربوط به یک جهت، برداری در آن جهت را بر اندازه آن بردار تقسیم می‌کنیم. پس جهت بردار $\mathbf{K}$ عبارت است از:

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} \qquad (۱)$$



۱
حساب برداری

مقدمه

این نوشتار بعضی مباحث ریاضی مربوط به حساب‌برداری را ، که دانستن آن برای دنبال کردن مطالب الکترومغناطیس ضروری است ، در بردارد . هدف این نوشته شروع از صفر و ارائه تمامی مطالب نیست. انتظار می‌رود که خواننده قبلاً در درسهای ریاضی خود به تفصیل با این مطالب آشنا شده باشد و از این نوشته تنها به عنوان یادآوری و مرجع استفاده کند . به همین خاطر به کسانی که در درک مطلب مشکل دارند یا خواهان بررسی عمیقتر عناوین مورد بحث هستند ، توصیه می‌شود به کتابهای ریاضی و حساب‌برداری مراجعه کنند. البته بعضی مطالب، به خصوص دستگاههای مختصات، با توجه به هدف ما که بررسی پدیده‌های الکترومغناطیسی و حل مسئله‌های مربوط به آنهاست ، نسبت به کتابهای ریاضی مقدماتی بیان متفاوتی دارد .

به دلیل فوق‌الذکر در مورد تعریف بردار، جمع‌برداری، ضربهای داخلی و خارجی، خواص ضرب و جمع برداری ، بردارهای یکه و تجزیه مؤلفه‌ها صحبتی نکرده، همه را دانسته فرض می‌کنیم. ولی تذکر چند نکته مفید است :

۱ ـ علامتگذاری در مطالب چاپ شده معمولاً نماد بردارها با حروف سیاه نشان داده می‌شود. در دستنویس به علت عدم داشتن این امکان بالای کمیات برداری خط کوچکی رسم می‌شود، مثل $\overline{A}$. برای نشان دادن اندازه یک بردار از دو خط راست در دو طرف آن استفاده می‌کنیم. مثلا $|\mathbf{A}|$ اندازه بردار $\mathbf{A}$ است . بردارهایی که رویشان علامت ^ وجود دارد ، بردار یکه هستند. مثلا $\hat{\mathbf{k}}$.

۲ ـ جهت هر جهت در فضا با یک بردار یکه توصیف می‌شود. برای یافتن بردار یکه مربوط به یک جهت، برداری در آن جهت را بر اندازه آن بردار تقسیم می‌کنیم . پس جهت بردار $\mathbf{K}$ عبارت است از:

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} \tag{1}$$

۳ ـ تصویر برای یافتن تصویر یک بردار در یک جهت، یا به عبارت دیگر مؤلفه بردار در آن جهت، از ضرب داخلی استفاده می‌کنیم:

$$A_k = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} \tag{۲}$$

که در آن A_k مؤلفهٔ بردار $\mathbf{A}$ در جهت $\hat{\mathbf{k}}$، و یک کمیت اسکالر، است.

۴ ـ زاویه بین دو بردار

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|} \tag{۳}$$

چون اندازه بردار یکه برابر واحد است، ضرب داخلی دو بردار یکه با کسینوس زاویه بین آن دو بردار برابرست.

۵ ـ میدان اسکالر یک میدان اسکالر یک نگاشت (تابع) از فضای $[R^3]$ است که به هر نقطه از قلمرو خود یک عدد نسبت می‌دهد. مثلا:

$P(x,y,z) = ۴$ (میدان چگالی برای یک ماده همگن)

$T(x,y,z) = ۳۰\,x$ (میدان درجه حرارت برای ناحیه‌ای که دمایش در جهت اضافه می‌شود)

$V(x,y,z) = \dfrac{۵}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ (میدان پتانسیل ناشی از بارنقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات)

$S(x,y,z) = xy + z^2 y$ (یک میدان دلخواه ریاضی)

۶ ـ میدان برداری میدان برداری یک نگاشت (تابع) از فضای $[R^3]$ است که به هر نقطه از قلمرو خود یک بردار نسبت می‌دهد. مثلا

$\mathbf{F}(x,y,z) = ۵\,\hat{\mathbf{i}}$ (میدان سرعت آب در رودی که در جهت حرکت می‌کند)

$\mathbf{g}(x,y,z) = -۹/۸\,\hat{\mathbf{k}}$ (میدان جاذبه در حوالی یک زمین مسطح)

$\mathbf{E}(x,y,z) = ۴\,\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)}\,\hat{\mathbf{i}} + ۴\,\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)}\,\hat{\mathbf{j}} + ۴\,\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)}\,\hat{\mathbf{k}}$ (یک میدان فرضی)

رویه و خم در فضا

مکان هندسی نقاطی که در یک معادله صدق می‌کنند یک رویه است، مثلا $z - ۲x^2 - ۲y^2 = ۳$. توجه کنید که این یک معادله است نه یک تابع. تابع $f(x,y,z) = z - ۲x^2 - ۲y^2$ رویه‌ای را تعریف نمی‌کند. با برابر قراردادن این تابع با یک عدد، مثلاً ۳، یک معادله به دست می‌آید که می‌تواند بیان کننده یک رویه باشد.

اگر دو معادله داشته باشیم نقاطی در آنها صدق می‌کنند که روی دو رویهٔ تعریف شده توسط دو معادله باشند. پس اگر دو رویه هم را قطع نکنند این مجموعه یک مجموعه تهی است و اگر هم را قطع کنند یک خم خواهیم داشت.پس برای تعریف یک خم درفضا به دو معادله نیاز داریم. برای مثال

$$\frac{x-۲}{۳} = \frac{y-۳}{۵} = \frac{۴-۲z}{۷} \tag{۴}$$

معادلهٔ یک خط راست است، عبارت فوق در واقع دو معادله است که هر کدام صفحه‌ای را توصیف می‌کنند. محل برخورد این دو صفحه یک خط راست است.

روش متداول دیگر توصیف خمها استفاده از یک متغیر چهارم به عنوان پارامتر است. این بیان را

معادلات پارامتری خم می‌نامند. در این حالت سه معادله لازم است که سه مختصه هر نقطهٔ خم را بـه ازای مقادیر مختلف پارامتر به دست دهند. معادلات

$$z = ۳t + ۷ \quad , \quad y = t - ۳ \quad , \quad x = ۲t$$

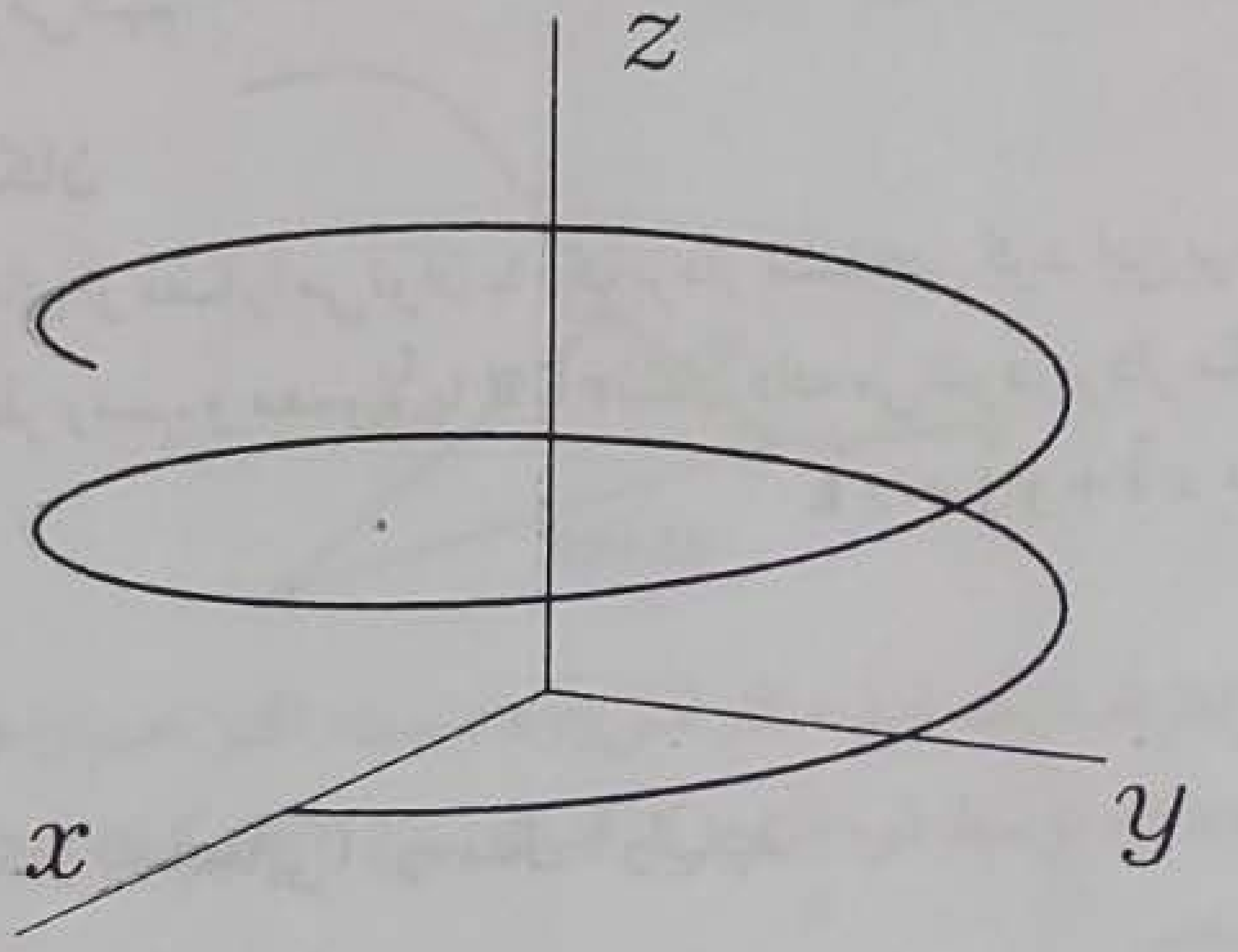
معادلات پارامتری یک خط راست هستند. متغیر چهارم(پارامتر) در معادلات پارامتری خم می‌تواند معنی فیزیکی داشته یا نداشته باشد. در بسیاری از موارد می‌توان خم را مسیر حرکت یک ذره دانست. در این صورت متغیر چهارم می‌تواند زمان باشد.

مثال ۱

معادلات زیر مسیر یک ذره را بیان می‌کنند

$$z = ۲t \quad , y = ۵ \sin t \quad , \quad x = ۵ \cos t$$

این ذره‌ای در $t = ۰$ در $(۵, ۰, ۰)$ قرار دارد و یک مسیر مارپیچی حول محور z می‌پیماید. تصویر این مسیر روی صفحه xy دایره‌ای به شعاع ۵ است.



شکل ۱ مسیر ذرهٔ مثال ۱.

اکثر اوقات تبدیل معادلات یک خم به معادلات پارامتری کاری ساده (و مناسب) است. خط راست معادله (۴) را در نظر بگیرید. کسرها را برابر قرار می‌دهیم و با کمی عملیات جبری به دست می‌آوریم

$$x = ۳t + ۲ \quad , \quad y = ۵t + ۳ \quad , \quad z = -۳/۵t + ۲$$

مثال ۲

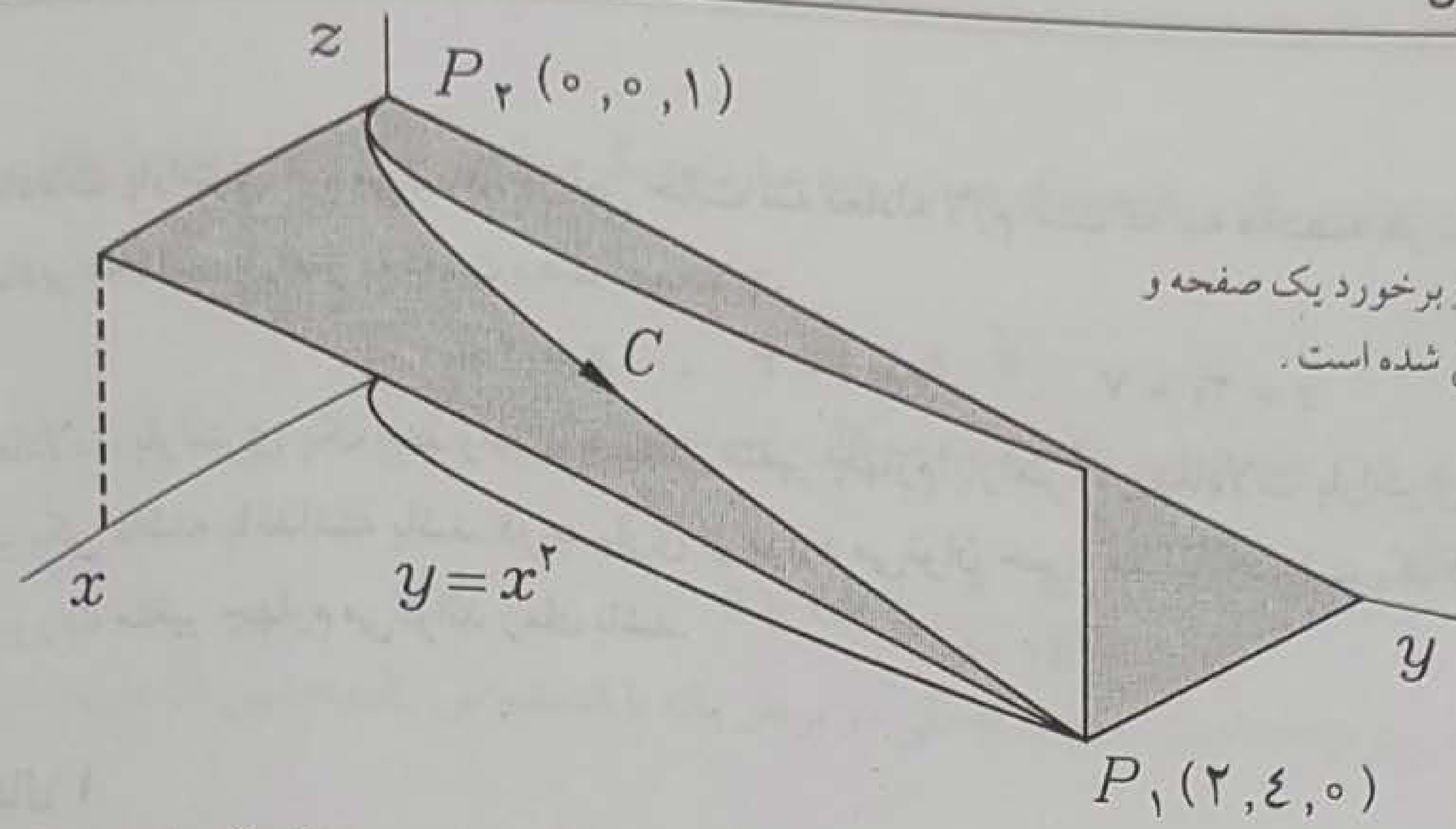
خم C محل برخورد صفحه مورب $۴z = ۴ - y$ و سطح سهموی $y = x^۲$ است (شکل ۲ را ببینید). معادلات پارامتری این خم را بیابید.

حل

فرض می‌کنیم $x = t$. معادلات پارامتری خم به این صورت به دست می‌آید

$$x = t \quad , \quad y = t^۲ \quad , \quad z = ۱ - \frac{t^۲}{۴}$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=۰ \,|\, \nabla\times B=\mu J \,|\, \nabla\times H=J \,|\, \nabla\cdot B=۰ \,|\, \nabla\cdot D=\rho \,|\, \nabla\times E=۰ \,|\, \oint D\cdot ds=Q \,|\, \int J\cdot ds=I \,|\, \oint H\cdot dl=I \,|\, \oint B\cdot ds=۰ \,|\, \oint E\cdot dl=۰$



شکل ۲ خم C از برخورد یک صفحه و یک سهموی حاصل شده است.

در واقع وارد کردن پارامتر در معادلات یک خم کار ساده‌ای است، **زیرا همیشه می‌توان یکی از سه متغیر اصلی فضا را یک پارامتر در نظر گرفت.**

روش سوم بیان یک خم استفاده از یک معادله برداری است، که به زودی در ارتباط با بردار مکان آن را معرفی می‌کنیم.

بردار مکان

هر نقطه‌ای از فضا را می‌توان با یک بردار مشخص کرد. این بردار، برداری است که از مبدأ مختصات به نقطه مورد نظر رسم، و معمولاً با $\mathbf{R}$ یا $\mathbf{r}$ نشان داده می‌شود. بردار مکان بیان کننده نقطه (x,y,z) عبارت است از

$$\mathbf{R} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (5)$$

مثال ۳

بردار مکان (جابجایی) ذره مثال ۱ رابیابید.

حل

به سادگی با توجه به معادله (۵) به دست می‌آوریم

$$\mathbf{R}(t) = 5\cos t\,\hat{\mathbf{i}} + 5\sin t\,\hat{\mathbf{j}} + 2t\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (6)$$

که نشان می‌دهد ذره در هر لحظه کجا قرار دارد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

روش سوم بیان یک خم استفاده از بردار مکان، به صورت انجام شده در مثال ۳ است. توجه کنید که این معادله در واقع با سه معادلهٔ اسکالر هم ارزست.

مشتق بردار مکان و دیفرانسیل طول [1]

اکنون می‌خواهیم دو مشتق بردار مکان را بررسی کنیم. فرض کنید بردار مکان $\mathbf{R}$ بر حسب t بیان شده

---

[1] اگرچه بحث زیر یک بحث کاملاً ریاضی و مستقل از معانی فیزیکی متغیرهاست، ولی تصور بردار مکان به عنوان مسیر حرکت یک ذره و مشتق این بردار به عنوان سرعت می‌تواند کمک شایانی به درک مطلب کند. بنابراین در مطالب آتی ازاین دیدگاه فیزیکی بسیار کمک می‌گیریم.

باشد (یعنی مختصات رأس بردار مکان بر حسب پارامتر t داده شده باشد.) $\mathbf{R}$ را مکان یک ذره و t را زمان تصور کنید. از درس فیزیک مکانیک به یاد دارید که $\mathbf{v} = \mathbf{dR} / \mathrm{d}t$ بردار سرعت را می‌دهد، که در هر نقطهٔ مسیر بر مسیر مماس است، پس

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{dR}}{\mathrm{d}t} = v_x\,\hat{\mathbf{i}} + v_y\,\hat{\mathbf{j}} + v_z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (۷)$$

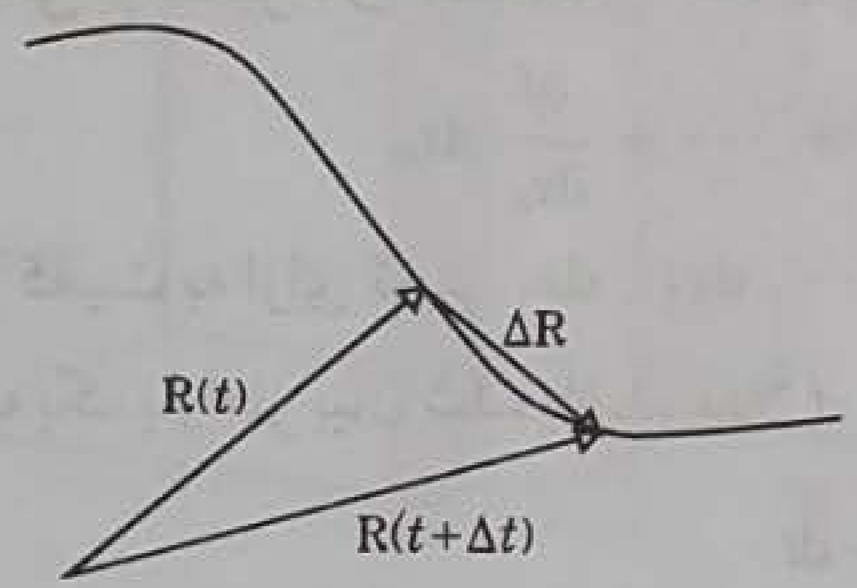
که در آن v_x، v_y و v_z به ترتیب مؤلفه‌های x، y و z بردار سرعت هستند و

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad , \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad (۸)$$

$\frac{\mathbf{dR}}{\mathrm{d}t}$ مانند تمام مشتقهایی که تاکنون دیده‌اید به این صورت تعریف می‌شود

$$\frac{\mathbf{dR}}{\mathrm{d}t} = \underset{\Delta t \to \circ}{\text{حد}} \frac{\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to \circ}{\text{حد}} \frac{\Delta \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \qquad (۹)$$

که با توجه به شکل ۳، $\mathbf{R}(t)$ مکان ذره در t، $\mathbf{R}(t+\Delta t)$ مکان ذره در $t+\Delta t$، $\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t) = \Delta\mathbf{R}$ جابجایی ذره در این فاصله زمانی، $\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t}$ سرعت متوسط در این فاصله $\underset{\Delta t \to \circ}{\text{حد}} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t}$ سرعت لحظه‌ای در لحظه t است.



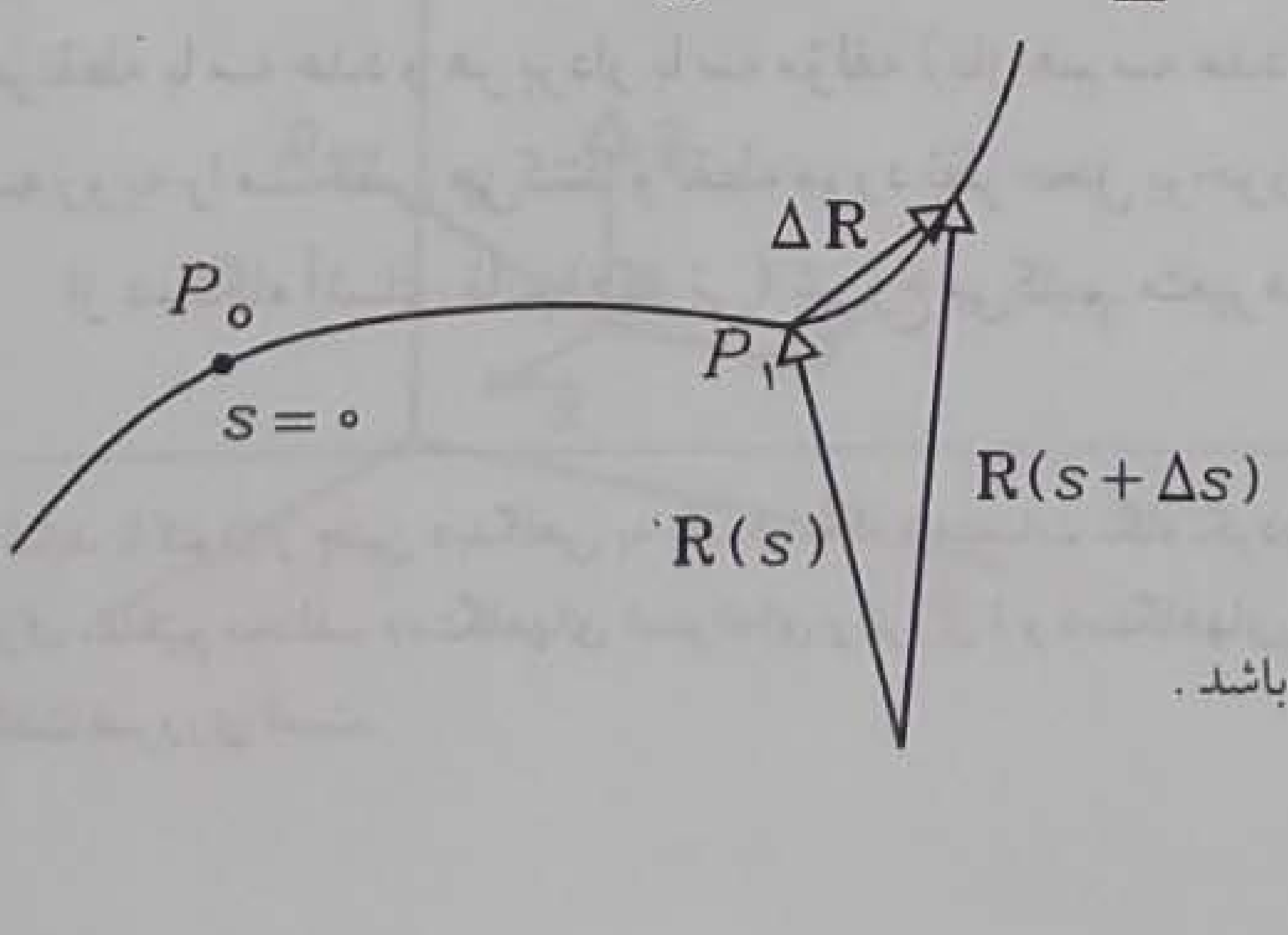
شکل ۳ معنی بردار $\Delta\mathbf{R}$ که تفاضل دو بردار $\mathbf{R}(t+\Delta t)$ و $\mathbf{R}(t)$ است.

یکی از پارامترهای متداول دیگری که برای تعریف یک خم به کار می‌رود s است. اگر خم را مسیر حرکت یک ذره در نظر بگیریم s مسافت پیموده شده توسط ذره متحرک است. پس $\mathbf{R}(s)$ مکان ذره را در موقعی که مسافت s را طی کرده است، نشان می‌دهد.

شکل ۴ یک مسیر را نشان می‌دهد. نقطه $P_\circ$ (متناظر با $s = \circ$) مبدأ حرکت ذره را نشان می‌دهد. وقتی ذره به نقطه $P_۱$ می‌رسد مسافتی برابر s را پیموده و مکان آن $\mathbf{R}(s)$ است. ذره پس از طی مسافت اضافی Δs به نقطه $\mathbf{R}(s+\Delta s)$ می‌رسد.

حال یک مشتق دیگر برای بردار مکان تعریف می‌کنیم

$$\frac{\mathbf{dR}}{\mathrm{d}s} = \underset{\Delta t \to \circ}{\text{حد}} \frac{\mathbf{R}(s+\Delta s) - \mathbf{R}(s)}{\Delta s} = \underset{\Delta t \to \circ}{\text{حد}} \frac{\Delta \mathbf{R}(s)}{\Delta s} \qquad (۱۰)$$



شکل ۴ معنی $\Delta\mathbf{R}$ وقتی $\mathbf{R}$ به حسب s بیان شده باشد.

وقتی Δs به صفر میل می‌کند اندازه $\Delta \mathbf{R}$ با اندازه Δs برابر می‌شود. پس $\mathrm{d}\mathbf{R} / \mathrm{d}s$ طولی برابر واحد دارد و یک بردار یکه است. از تعریف مماس می‌دانیم که بردار حاصل در نقطه P، بر مسیر مماس خواهد بود.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}s} = \hat{\mathbf{t}} \tag{۱۱}$$

که $\hat{\mathbf{t}}$ بردار یکه مماس بر مسیر است.

می‌دانید که اندازه سرعت لحظه‌ای راتندی لحظه‌ای می‌نامند. تندی مسافت پیموده شده در واحد زمان است ($\mathrm{d}s / \mathrm{d}t$). پس معادله (۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{t}} \tag{۱۲}$$

زیرا $\boldsymbol{\upsilon}$ برداری است که اندازه آن تندی و جهت آن مماس بر مسیرست. همچنین از قاعدهٔ زنجیری مشتق هم داریم

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{t}}$$

اگر کمیت f تابعی از متغیرهای $x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ باشد، دیفرانسیل f برابرست با

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{۱۳}$$

که میزان تغییر کمیت به ازای تغییر $\mathrm{d}x_1 , \mathrm{d}x_2 , \cdots , \mathrm{d}x_n$ در متغیرهای $x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ است. وقتی بردار مکان بر حسب یک پارامتر بیان شده باشد، مثلاً t، دیفرانسیل طول $\mathrm{d}\mathbf{R}$ برابرست با

$$\mathrm{d}\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{۱۴}$$

وقتی بردار مکان بر حسب متغیرهای فضا (x,y,z) بیان شده باشد، $\mathrm{d}\mathbf{R}$ برابرست با

$$\mathrm{d}\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{۱۵}$$

مثلاً در دستگاه مختصات قائم

$$\mathbf{R} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$$

و

$$\mathrm{d}\mathbf{R} = \mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}} \tag{۱۶}$$

دستگاههای مختصات

برای بیان نقاط مختلف فضا و توصیف یک بردار در فضا از دستگاه مختصات استفاده می‌کنیم. در فضا هر نقطه با سه عدد و هر بردار با سه مؤلفه (باز هم سه عدد) بیان می‌شوند. سه عددِ تعیین کنندهٔ محل نقطه، سه رویه را مشخص می‌کنند و نقطه مورد نظر محل برخورد این سه رویه است.[1]

از دستگاه آشنای قائم (دکارتی) شروع می‌کنیم. متغیرهای دستگاه مختصات قائم x,y,z هستند. منظور از

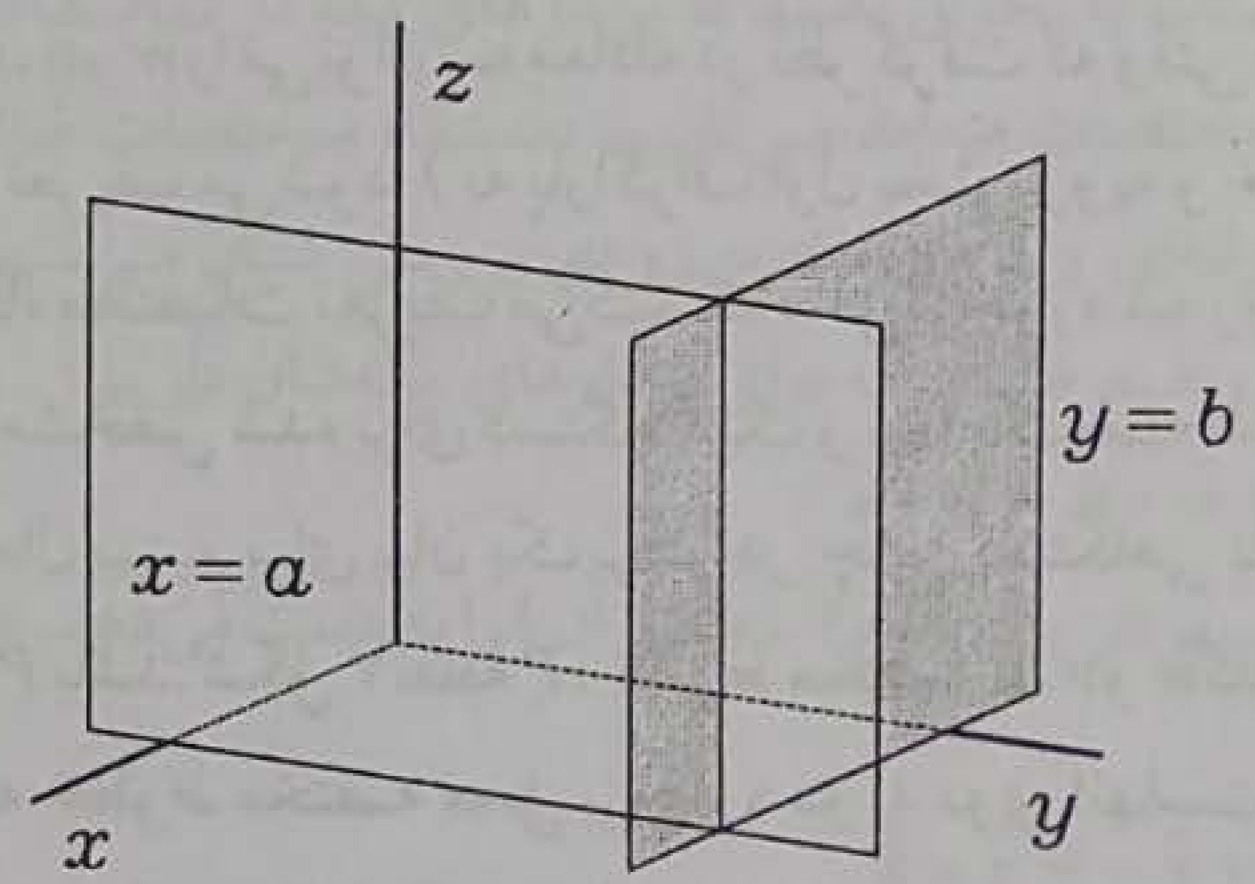
---

[1] شاید تا کنون از چنین دیدگاهی به یک دستگاه مختصات نگاه نکرده باشید و در اول کار چنین دیدگاهی را نپسندید ولی برای درک مفاهیم مختلف دستگاههای استوانه‌ای و کروی (و دستگاههای مختصات دیگر) این دیدگاه بسیار راهگشا، و شاید بتوان گفت ضروری است.

نقطهٔ $P(a\ ,b\ ,c)$ نقطه‌ای است که در سه معادله، $x = a$، $y = b$، و $z = c$ صدق می‌کند. به یاد دارید که هر معادله یک رویه را توصیف می‌کند. این سه معادله بیان کننده سه صفحه در فضا هستند. $x = a$ صفحه‌ای که محور x را در نقطه a قطع می‌کند و با محورهای y و z موازی است.

محل برخورد هر دو صفحه‌ای از این سه رویه یک خط راست است. چنین خطی را **خط مختصه** می‌نامند. شکل ۵ دو صفحه $x = a$ و $y = b$ و محل برخوردشان را نشان می‌دهد. تمام نقاط روی خط مختصه z دارای x و y یکسانی هستند و تنها مختصه z آنها باهم فرق می‌کند. به همین ترتیب محل برخورد صفحات $x = a$ و $z = c$ خط مختصه y و محل برخورد صفحات $y = b$ و $z = c$ خط مختصه x است. محل بخورد سه صفحه (یا سه خط مختصه) یک و تنها یک نقطه است که با (a,b,c) مشخص می‌شود.

حال ببینیم یک بردار در فضا به چه صورت مشخص می‌شود. برداری را در نظر بگیرید که ته آن در نقطه P و رأس آن در نقطه Q باشد (بردار $\overline{PQ}$).

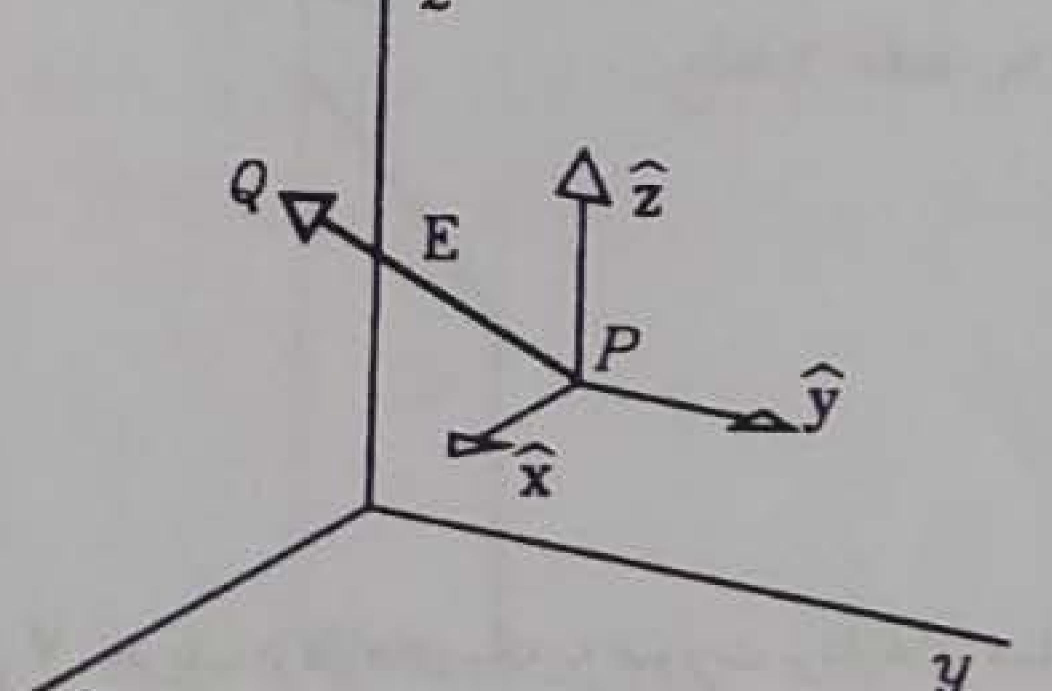


شکل ۵ خط مختصهٔ z محل برخورد رویه‌های $y=$ ثابت و $x=$ ثابت است.

سه خط مختصه‌ای را که از نقطهٔ P می‌گذرد در نظر بگیرید (شکل ۶). یک بردار به طول واحد رسم می‌کنیم که در نقطه P بر خط مختصه x مماس و در جهت افزایش x باشد. نام این بردار یکه را $\hat{\mathbf{x}}$ می‌گذاریم. یک بردار یکه نیز به صورتی رسم می‌کنیم که در نقطه P بر خط مختصه y مماس و در جهت افزایش y باشد. نام این بردار یکه را $\hat{\mathbf{y}}$ می‌گذاریم، به ترتیبی مشابه بردار یکه $\hat{\mathbf{z}}$ را به دست می‌آوریم. حال تصویر بردار $\mathbf{E} = \overline{PQ}$ را روی این سه بردار یکه پیدا می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{x}} \\
E_y &= \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}} \\
E_z &= \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

اکنون می‌توانیم بردار $\mathbf{E}$ را به شکل زیر بیان کنیم



شکل ۶ تعریف بردارهای یکه در دستگاه مختصات قائم.

$$\mathbf{E} = E_x\,\hat{\mathbf{x}} + E_y\,\hat{\mathbf{y}} + E_z\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۸)$$

بردارهای یکه $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ همان بردارهای یکه $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ هستند؛ ولی از این پس آنهارا با نامهای $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ به کار می‌بریم. همچنین به زودی علت تعریف نسبتاً غریب بالا را بیان خواهیم کرد.

تعمیم به دستگاههای منحنی الخط (curvelinear)

یک دستگاه مختصات با متغیرهای u، v و w در نظر بگیرید. نقطه $P(a,b,c)$ در این دستگاه مختصات محل برخورد سه رویهٔ $u = a$، $v = b$ و $w = c$ است. محل برخورد رویهٔ $u = a$ و رویهٔ $v = b$ خط مختصهٔ w است. تمام نقاط روی این خط u و v یکسانی دارند و تنها مختصهٔ w آنها با هم تفاوت دارد. به همین ترتیب محل برخورد رویه‌های $u = a$ و $w = c$ خط مختصهٔ v و محل برخورد رویه‌های $v = b$ و $w = c$ خط مختصهٔ u است.

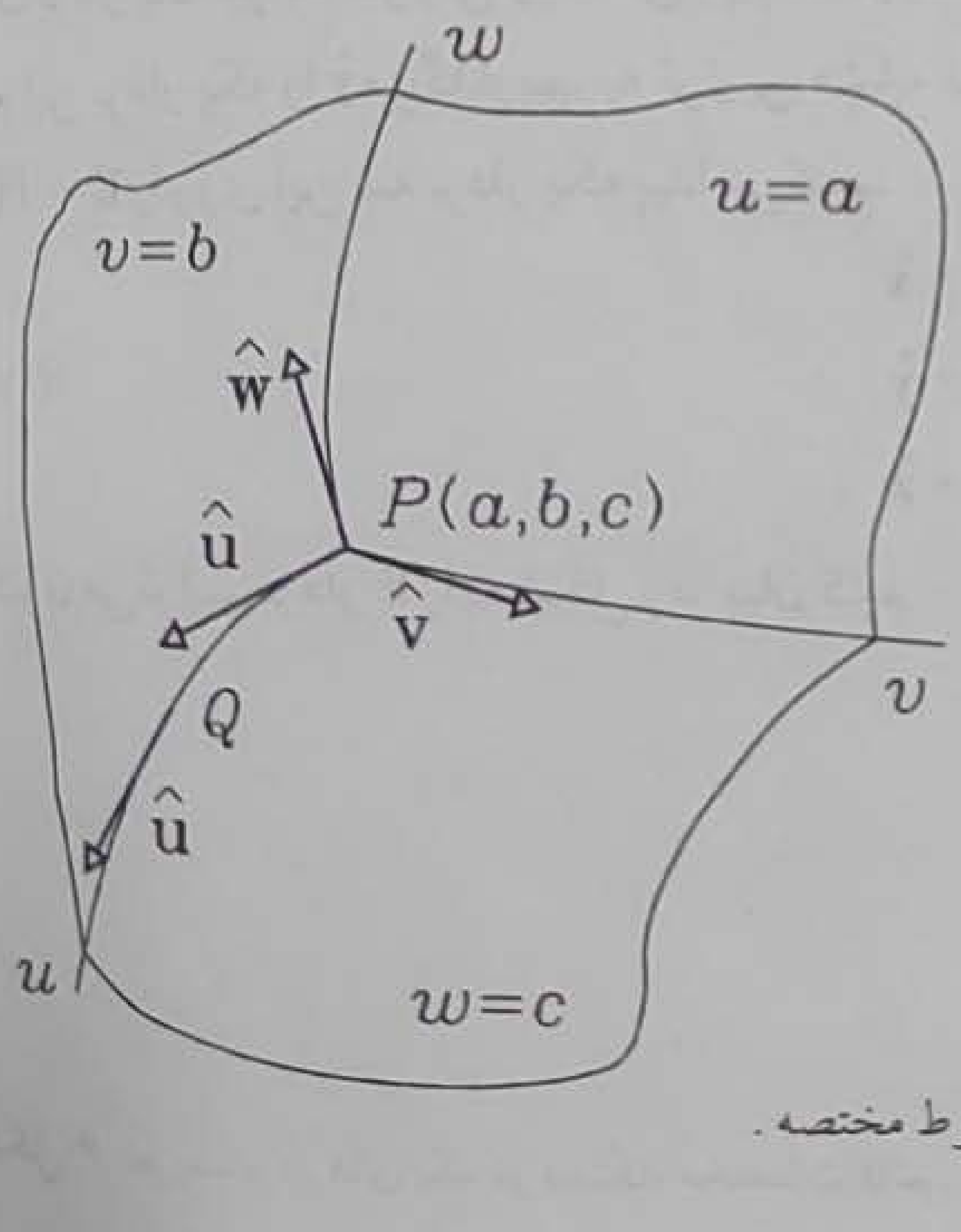
u، v و w را می‌توان سه معادله در نظر گرفت که وقتی هر یک از آنها با عددی برابر قرار داده می‌شوند یک رویه تعریف می‌شود. (به پاراگراف اول بخش رویه و خم در فضا رجوع کنید.) u، v و w به شرطی یک دستگاه مختصات تعریف می‌کنند که محل برخورد سه رویهٔ $u = a$، $v = b$ و $w = c$ (به ازای تمام مقادیر a، b و c مشخص شده برای دستگاه) یک و تنها یک نقطه باشد.

حال ببینیم برای بیان یک بردار در چنین دستگاهی باید چه کنیم. باز بردار $\mathbf{R}$ را در نظر بگیرید که ته آن نقطه P باشد. شکل ۷ نقطهٔ P، خطوط مختصه u، v و w گذرنده از آن نقطه و صفحات $u = a$، $v = b$ و $w = c$ را (که خطوط مختصه محل برخورد دو به دوی آنهاست) نشان می‌دهد. بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{u}}$ برداری به طول واحدست که در نقطه P بر خط مختصه u مماس و در جهت افزایش u است. همینطور بردارهای یکهٔ $\hat{\mathbf{v}}$ و $\hat{\mathbf{w}}$ بردارهایی به طول واحد هستند که در نقطه P به ترتیب بر خطوط مختصهٔ v و w مماس و در جهت افزایش v و w هستند . مولفه‌های u، v و w بردار $\mathbf{E}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} E_u &= \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{u}} \\ E_v &= \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{v}} \qquad (۱۹) \\ E_w &= \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

و بردار $\mathbf{E}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت .

$$\mathbf{E} = E_u\,\hat{\mathbf{u}} + E_v\,\hat{\mathbf{v}} + E_w\,\hat{\mathbf{w}} \qquad (۲۰)$$



شکل ۷ تعریف بردارهای یکه به صورت بردارهای مماس بر خطوط مختصه .

در شکل ۷ بردار یکه $\hat{\mathbf{u}}$ در نقطه Q نیز نشان داده شده است. توجه کنید که این بردار با بردار یکه $\hat{\mathbf{u}}$ تعریف شده در نقطه P تفاوت دارد! دستگاه مختصات قائم دارای این خاصیت منحصر به فردست که بردارهای یکه‌اش [$\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$] در تمام نقاط فضا یکسان هستند. به همین خاطر بردار $\mathbf{E} = ۴\,\hat{\mathbf{x}} - ۳\,\hat{\mathbf{y}} + ۲\,\hat{\mathbf{z}}$ در دستگاه مختصات قائم بردار واحدی را تعریف می‌کند ولی بردار $\mathbf{E} = ۴\,\hat{\mathbf{u}} - ۳\,\hat{\mathbf{v}} + ۲\,\hat{\mathbf{w}}$ بردار مشخصی نیست، مگر این که گفته شود در چه نقطه‌ای تعریف شده است. شاید اکنون متوجه شده باشید که چرا لازم است هر نقطه به عنوان محل برخورد سه رویه تعریف شود و چرا بردارهای یکه را بر اساس خطوط مختصه تعریف کردیم. به علت خاصیت یکی بودن بردارهای یکهٔ دستگاه قائم در تمام نقاط فضا، هیچگاه احتیاج نبوده که بردارهای یکه $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ به صورت فوق تعریف شوند. ولی به یاد داشته باشید که این خاصیت **تنها** در دستگاه مختصات قائم وجود دارد و بردارهای یکه بقیهٔ دستگاهها در نقاط مختلف متفاوت‌اند.

اگر رویه‌های تعریف کننده یک دستگاه مختصات به نحوی باشند که بردارهای یکه در تمام نقاط دو به دو بر هم عمود باشند، آن دستگاه را یک دستگاه مختصات **متعامد** می‌نامیم. دستگاه مختصات قائم یک دستگاه متعامدست و دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی، که به زودی بررسی شان می‌کنیم، نیز متعامدند. دستگاههای متعامد دارای این خاصیت واضح هستند که برای بردارهای یکه‌شان داریم:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{w}} \qquad (۲۱)$$

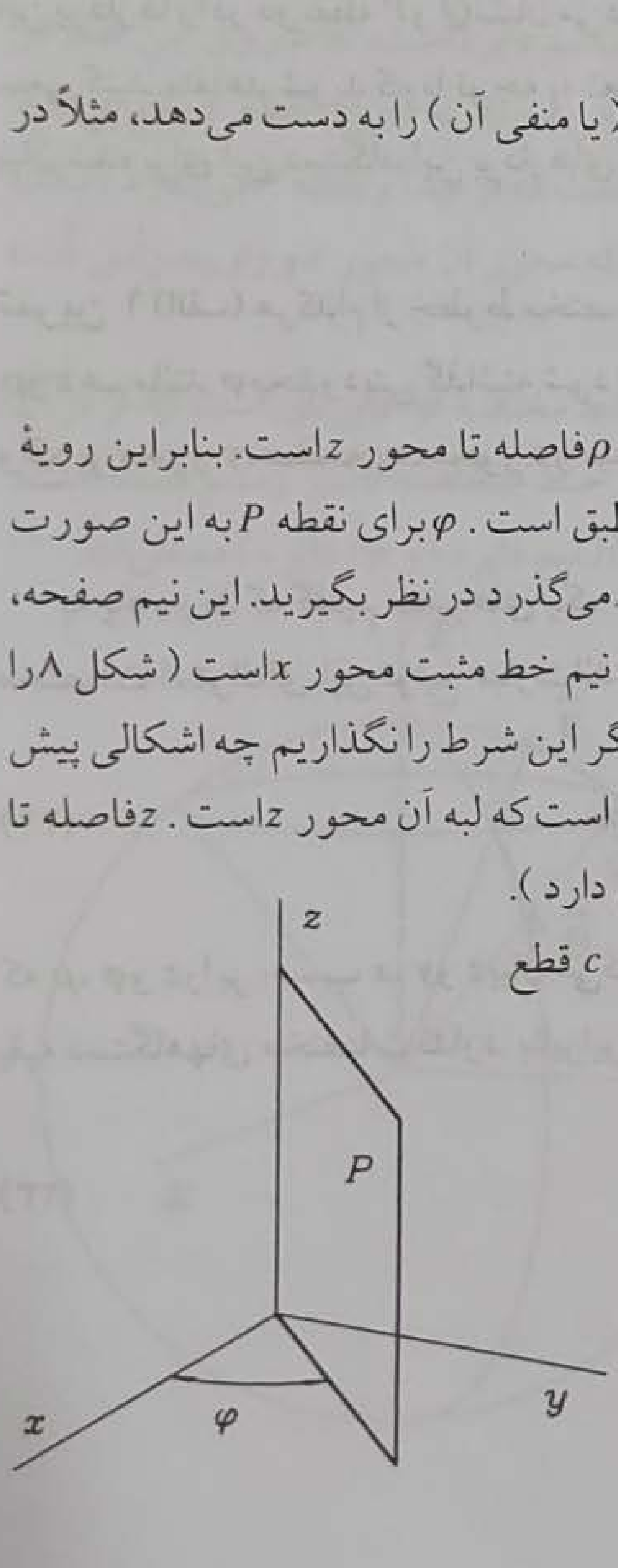
همچنین حاصلضرب خارجی هر دو بردار یکه‌ای، بردار یکه سوم (یا منفی آن) را به دست می‌دهد، مثلاً در دستگاه مختصات قائم:

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\,\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}} \qquad (۲۲)$$

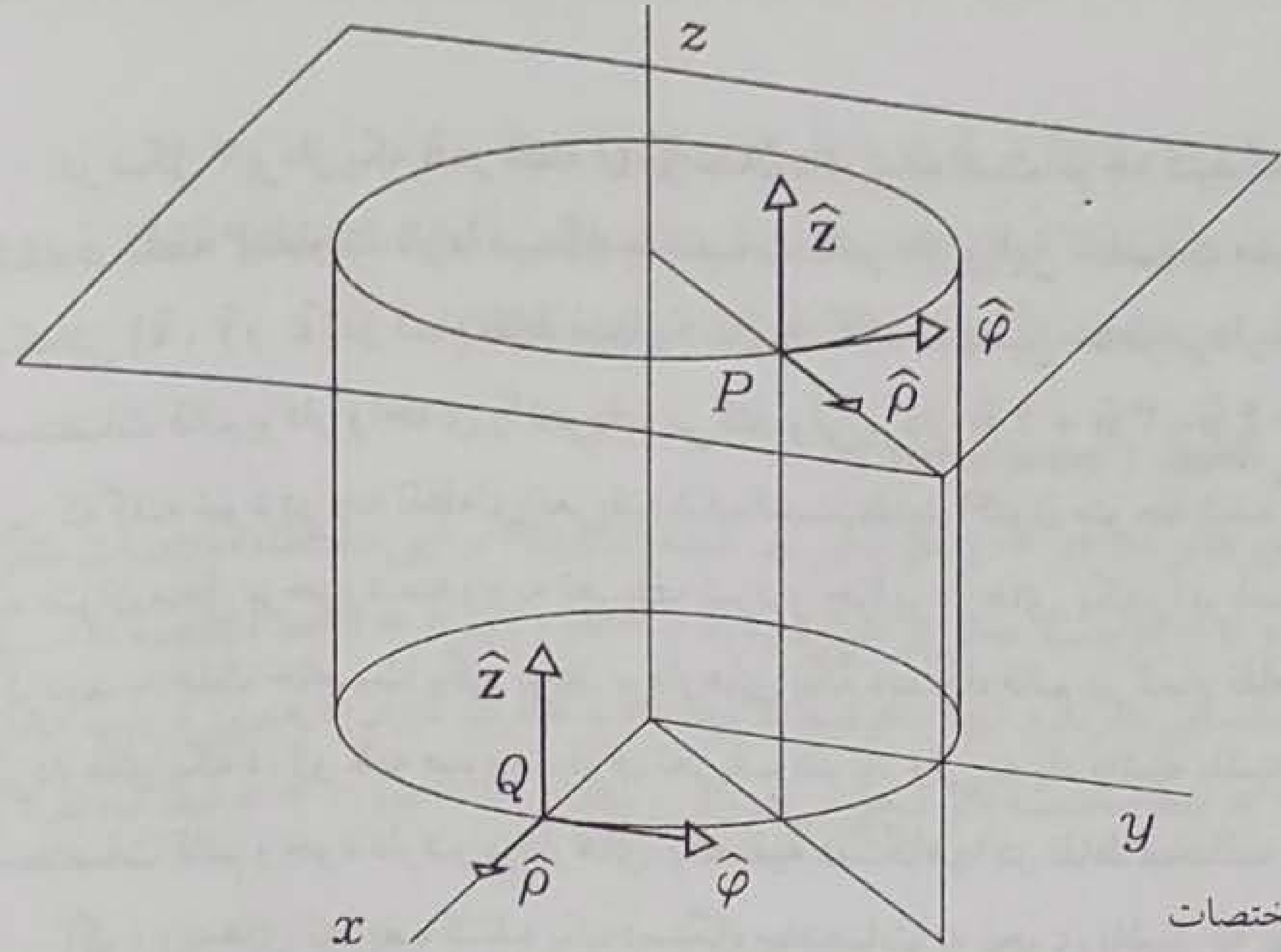
دستگاه مختصات استوانه‌ای

متغیرهای دستگاه مختصات استوانه‌ای به ترتیب ρ، φ و z هستند. ρ فاصله تا محور z است. بنابراین رویهٔ $\rho = a$ استوانه‌ای به شعاع a است که محور آن بر روی محور z منطبق است. φ برای نقطه P به این صورت تعریف می‌شود: نیم صفحه‌ای را که لبه آن محور z است و از نقطه P می‌گذرد در نظر بگیرید. این نیم صفحه، صفحهٔ $z = ۰$ را در یک نیم خط قطع می‌کند. φ زاویه بین این خط و نیم خط مثبت محور x است (شکل ۸ را ببینید). توجه کنید که φ یک زاویهٔ جهتدارست و $۰ \leq \varphi < ۲\pi$. (اگر این شرط را نگذاریم چه اشکالی پیش می‌آید؟) این تعریف φ نشان می‌دهد که رویه $\varphi = b$ نیم صفحه‌ای است که لبه آن محور z است. z فاصله تا صفحهٔ xy است (یعنی همان تعریفی که در دستگاه مختصات قائم دارد).

پس رویهٔ $z = c$ صفحه‌ای عمود بر محور z است که آن را در نقطهٔ c قطع می‌کند.



شکل ۸ رویهٔ $\varphi =$ ثابت دستگاه مختصات استوانه‌ای.



شکل ۹ بردارهای یکهٔ دستگاه مختصات استوانه‌ای در دو نقطهٔ P و Q.

بردارهای یکهٔ $\hat{\boldsymbol{\rho}}$، $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$و $\hat{\mathbf{z}}$به صورتی که قبلاً گفته شد (مماس بر خطوط مختصه) تعریف می‌شوند. شکل ۹ این بردارها را در دو نقطه Pو Qنشان می‌دهد. به تفاوت بردارهای $\hat{\boldsymbol{\rho}}$و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$در این دو نقطه توجه کنید. همچنین سعی کنید متقاعد شوید که با توجه به تعریف بردار یکه و رویه‌های استوانه‌ای، نیم‌صفحه‌ای و صفحه‌ای بیان شده برای این دستگاه، این بردارهای یکه دو به دو برهم عمودند.

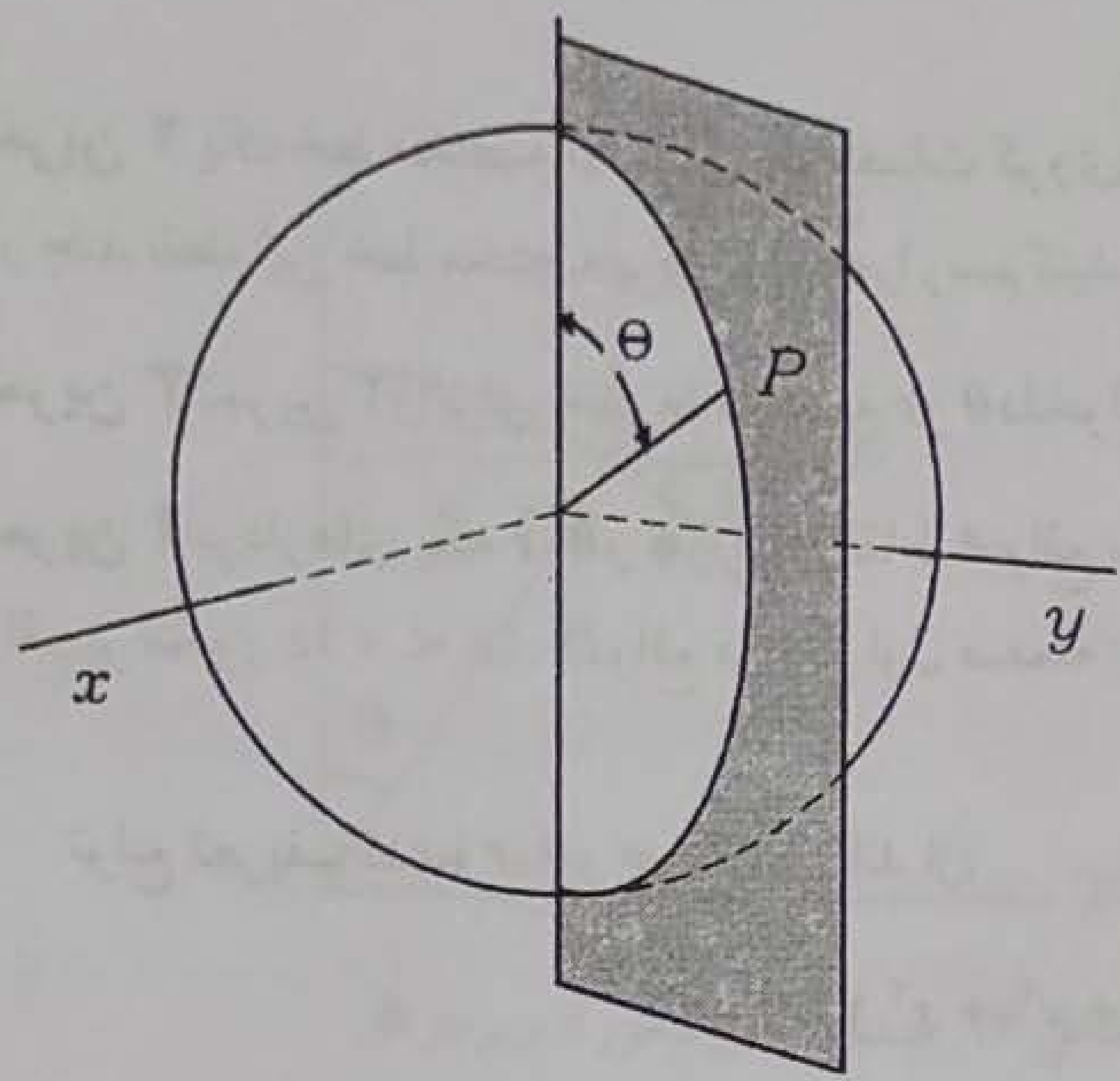
تمرین ۱ (الف) هرکدام از خطوط مختصه ρ، φو zچه شکل هندسی دارند؟ **(ب)** آیا باید بر روی مختصات ρو zهم مانند φمحدودیتی گذاشته شود؟ **(پ)** پس از فهم کامل بردارهای یکه $\hat{\boldsymbol{\rho}}$، $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$و $\hat{\mathbf{z}}$آنها را برای نقطه‌ای واقع بر محور y، صفحه xy، محور zو مبدأ مختصات رسم کنید.

به یاد دارید که گفتیم متغیرهای یک دستگاه مختصات را می‌توان تابع در نظر گرفت. برای دستگاه مختصات استوانه‌ای این توابع عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

که ρ، φو zرا بر حسب x، yو zبیان می‌کنند. دستگاه مختصات قائم به جز سادگی برتری دیگری نسبت به بقیه دستگاههای مختصات ندارد. بنابراین می‌توان x، yو zرا بر حسب توابعی از ρ، φو zدر نظر گرفت:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

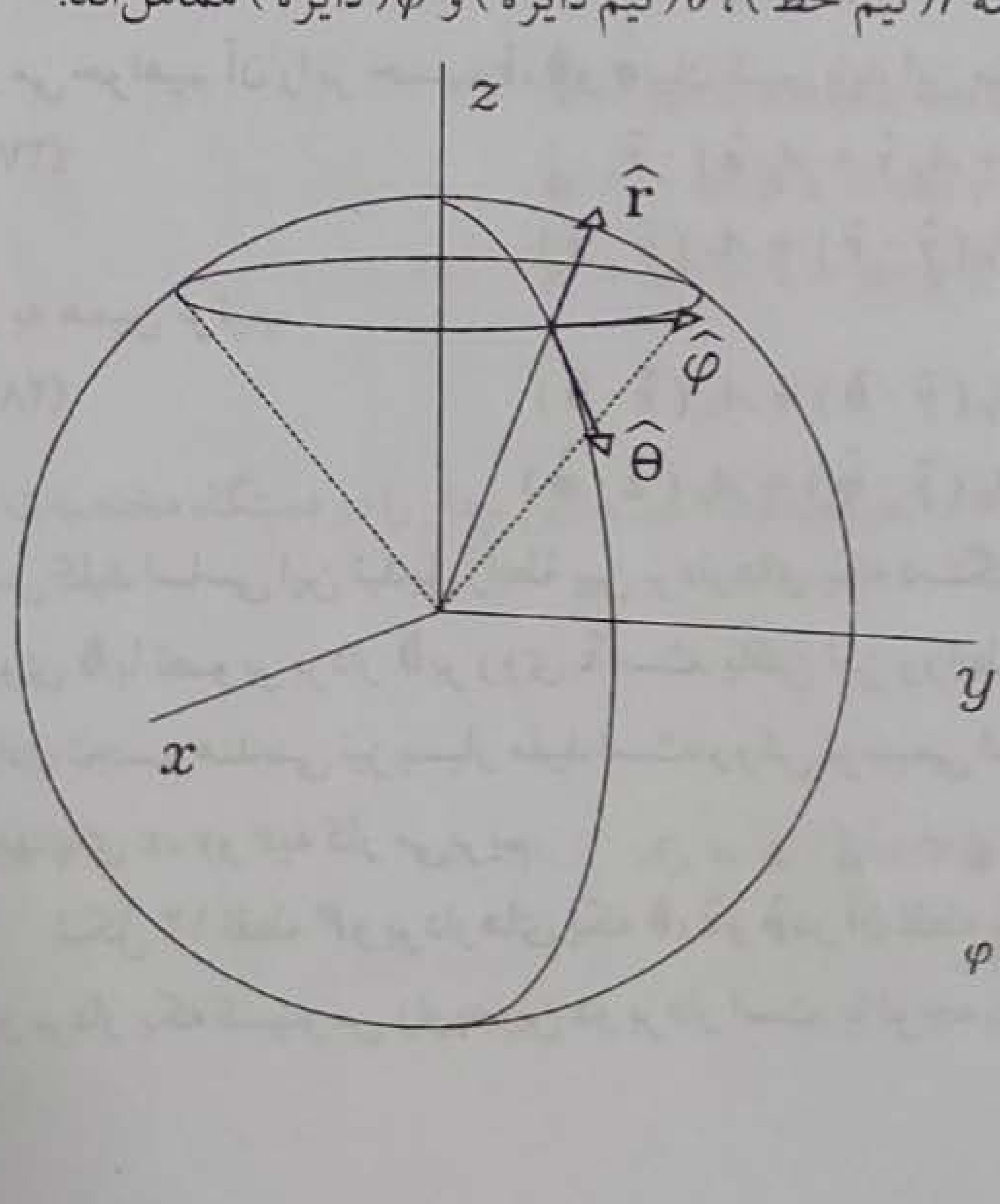


شکل ۱۰ تعریف θ در دستگاه مختصات کروی. رویه‌های $\varphi =$ ثابت و $r =$ ثابت و خط مختصهٔ θ.

دستگاه مختصات کروی

متغیرهای دستگاه مختصات کروی r، θ و φ هستند. r فاصله تا مبدأ مختصات است. بنابراین رویهٔ $r = a$ کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a است. φ همان متغیری است که در دستگاه مختصات استوانه‌ای هم به کاربرده می‌شود. پس رویهٔ $\varphi = b$ یک نیم صفحه است که محور z لبهٔ آن است. شکل ۱۰ محل برخورد این دو رویه را نشان می‌دهد که خط مختصهٔ θ است. این خط مختصه یک نیم دایره است، نقاط روی این خط r و φ یکسانی دارند ولی θ آنها متفاوت است. در این شکل چگونگی تعریف زاویهٔ θ برای نقطه P واقع بر خط مختصه نشان داده شده است. پس θ زاویهٔ بین محور z و نیم خطی است که از مبدأ و نقطه P می‌گذرد. مکان هندسی نقاط دارای $\theta = c$ مخروطی به رأس مبدأ مختصات است که محور آن محور z و زاویه رأس آن c است.

شکل ۱۱ نشان می‌دهد که محل برخورد رویه $r = a$ و $\theta = c$ (خط مختصه φ) دایره‌ای است که مرکز آن روی محور z و صفحه آن به موازات صفحه xy است. در این شکل خط مختصه θ نیز رسم شده است. بردارهای یکه $\hat{\mathbf{r}}$، $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ به ترتیب بر خطوط مختصه r (نیم خط)، θ (نیم دایره) و φ (دایره) مماس‌اند.



شکل ۱۱ رویه‌های $\theta =$ ثابت و $r =$ ثابت و خط مختصهٔ φ؛ بردارهای یکه نیز نشان داده شده‌اند.

تمرین ۲ یک خط مختصه φ دستگاه مختصات کروی رسم و بر روی آن جهت افزایش φ را مشخص کنید. در چند نقطه این خط مختصه بردار یکه $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ را رسم کنید.

تمرین ۳ تمرین ۲ را برای خطوط مختصهٔ r و θ دلخواه تکرار کنید.

تمرین ۴ بردارهای یکه $\hat{\mathbf{r}}$، $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ را برای نقاط A واقع بر محور x $(x > \circ)$، B واقع بر محور y $(y > \circ)$، C واقع بر محور z $(z > \circ)$، D واقع در ربع اول صفحه xy و یک نقطه کلی در فضا رسم کنید.

توابع تعریف کنندهٔ r، θ و φ عبارت‌اند از:

$$r = (x^{2} + y^{2} + x^{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (۲۴)$$

$$\theta = \frac{\cos^{-1} z}{(x^{2} + y^{2} + z^{2})^{1/2}}$$

توابع عکس عبارت‌اند از:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad (۲۵)$$

$$z = r\cos\theta$$

روابط بین بردارهای یکه و تبدیل بردارها

یک بردار را می‌توان در دستگاههای مختصات بیان کرد. به جای تصویرکردن بردار $\mathbf{A}$ بر روی بردارهای یکه $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ می‌توان آن را روی بردارهای $\hat{\boldsymbol{\rho}}$، $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ یا $\hat{\mathbf{r}}$، $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ تصویر کرد. فرض کنید بردار زیر را داریم:

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}} + A_z\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۲۶)$$

و می‌خواهیم آن را بر حسب $\hat{\mathbf{r}}$، $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ بیان کنیم. باید این مؤلفه‌ها را بیابیم

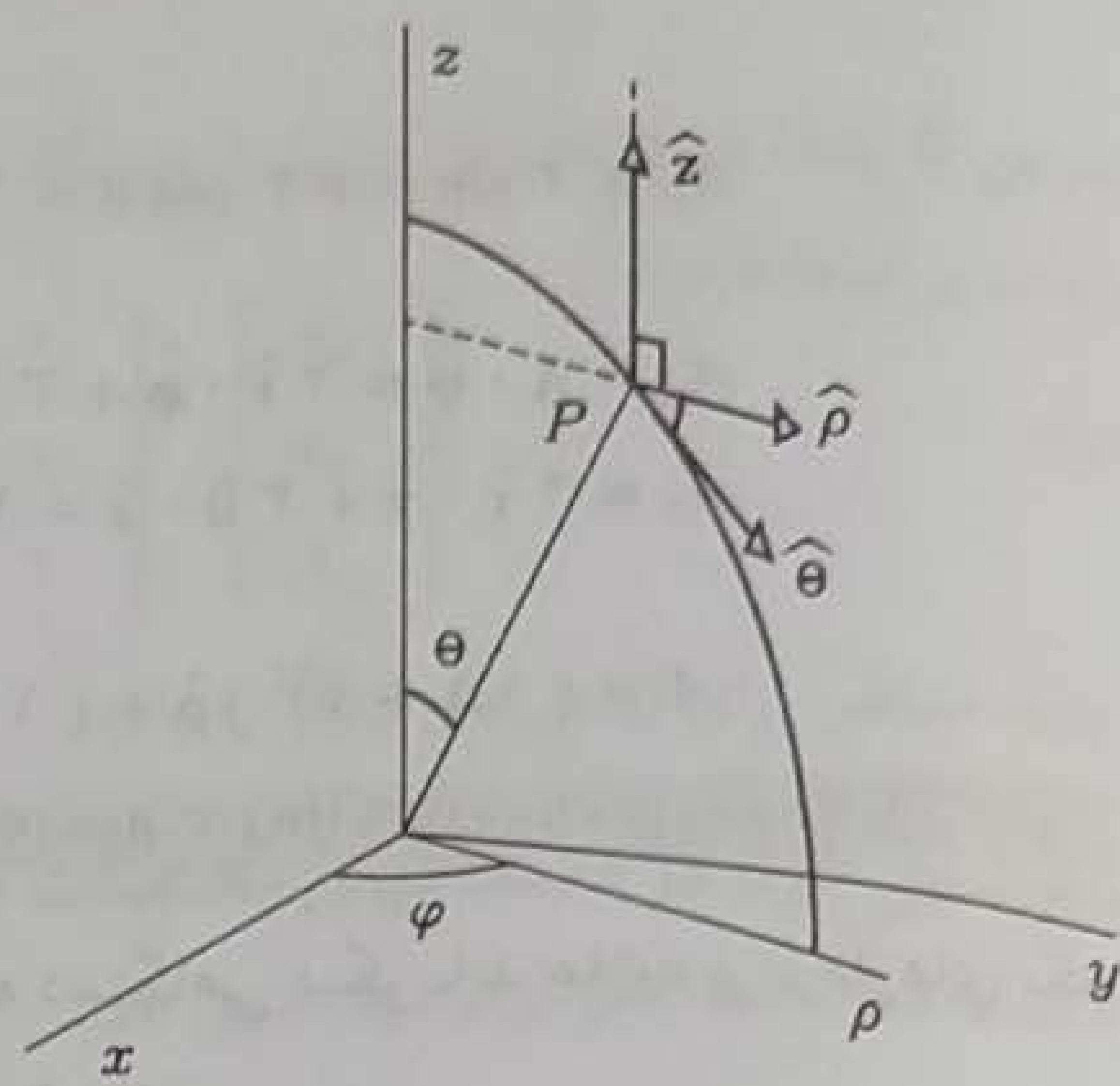
$$A_r = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{r}} = (A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}} + A_z\,\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲۷)$$
$$= A_x(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) + A_y(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) + A_z(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}})$$

و به همین ترتیب

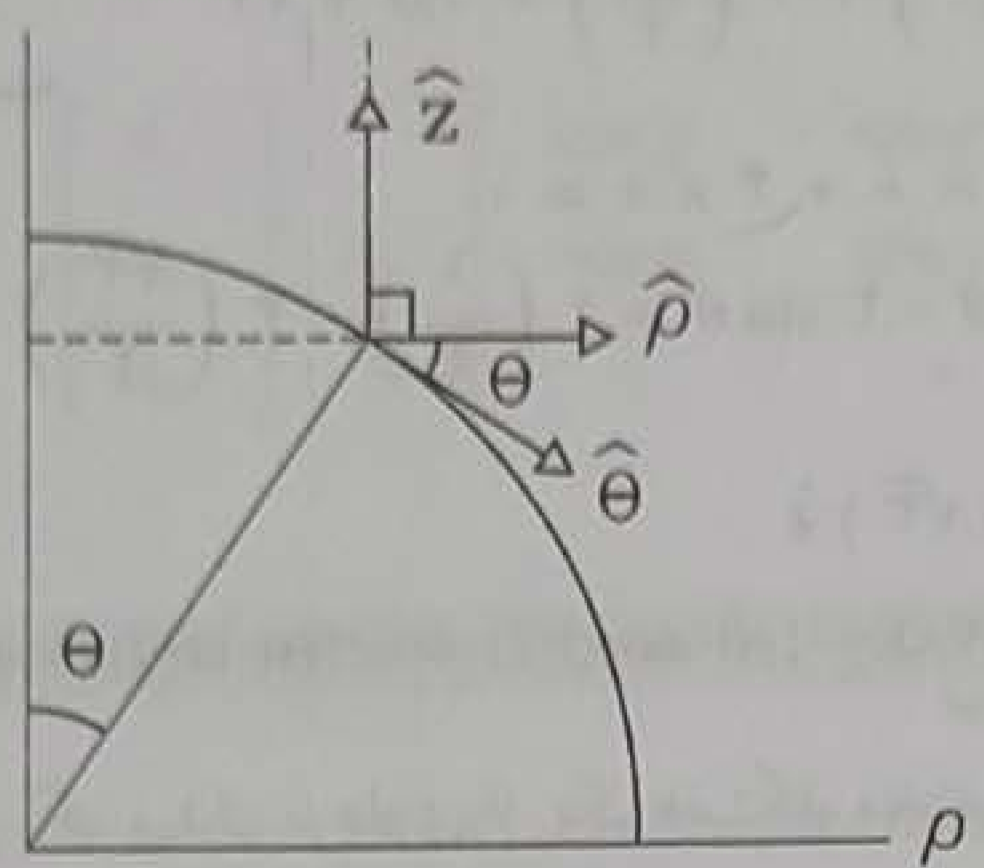
$$A_\theta = A_x(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) + A_y(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) + A_z(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) \qquad (۲۸)$$
$$A_\phi = A_x(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + A_y(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + A_z(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$

پس کلید اساسی این تبدیل رابطهٔ بین بردارهای یکه دستگاههای مختلف است. مثلاً $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}$ تصویر بردار $\hat{\mathbf{x}}$ بر روی $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ یا تصویر بردار $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بر روی $\hat{\mathbf{x}}$ است. یافتن این روابط از چند راه میسر است. ساده‌ترین راه که از لحاظ دادن تجسم هندسی نیز بسیار مفید است، روش ترسیمی است که در اینجا آن را برای یافتن تصویر بردار $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ در جهتهای x، y و z به کار می‌بریم.

شکل ۱۲ نقطه P و بردارهای یکه $\hat{\boldsymbol{\theta}}$، $\hat{\mathbf{z}}$ و $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ در آن نقطه را نشان می‌دهد. می‌دانیم که حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار یکه کسینوس زاویه بین دو بردار است. با توجه به شکل کمکی ۱۳ داریم



شکل ۱۲ روش ترسیمی یافتن مولفه‌های $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\hat{\boldsymbol{\rho}}$.



شکل ۱۳ صفحهٔ شامل محور z و بردار $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos\left(\frac{\pi}{۲} + \theta\right) = -\sin\theta \tag{۲۹}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\theta \tag{۳۰}$$

پس

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{۳۱}$$

از طرفی با توجه به همان شکل ۱۲ داریم

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos\varphi \tag{۳۲}$$
$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \varphi\right) = \sin\varphi \tag{۳۳}$$

پس

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \cos\theta\,(\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}) \\ &= \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}\end{aligned} \tag{۳۴}$$

به همین ترتیب می‌توانیم به دست آوریم :

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \tag{۳۵}$$
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}} \tag{۳۶}$$
$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} \tag{۳۷}$$

مثال ۴

بردار $\mathbf{A} = ۳\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + ۲\,\hat{\mathbf{r}}$ در نقطه $\left(r = ۳, \theta = \frac{\pi}{۳}, \varphi = \frac{\pi}{۴}\right)$ تعریف شده است. این بردار را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

حل

باید مولفه‌های ρ، φ و z را بیابیم

$$A_\rho = \mathbf{A} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = ۳\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} + ۲\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

با توجه به معادلات ۳۵ و ۳۷ و ۳۰ به دست می‌آوریم

$$A_\rho = 2\sin\theta + 3\cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5 + \sqrt{3}$$

به همین ترتیب

$$A_\phi = \mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 2\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} + 3\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0 + 3\times 0 = 0$$

$$A_z = 2\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}} + 3\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 2\cos\theta - 3\sin\theta = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

و سرانجام

$$A = (1.5 + \sqrt{3})\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + (1 - 1.5\sqrt{3})\,\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

در تبدیل یک میدان برداری از یک دستگاه مختصات به دستگاهی دیگر باید علاوه بر بردارهای یکه، متغیرها نیز به کمک روابط (۲۲)، (۲۳)، (۲۵) و (۲۶) تبدیل شوند.

مثال ۵

میدان برداری $\mathbf{B} = y\,\hat{\mathbf{x}} - x\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

حل

$$B_\rho = y(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}) - x(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}) + z(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}})$$
$$= y\cos\varphi - x\sin\varphi + 0 = \rho\sin\varphi\cos\varphi - \rho\cos\varphi\sin\varphi = 0$$
$$B_\phi = y(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}) - x(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + z(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$
$$= -y\sin\varphi - x\cos\varphi + 0 = -\rho\sin\varphi\sin\varphi - \rho\cos\varphi\cos\varphi = -\rho$$
$$B_z = y(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}}) - x(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}}) + z(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}) = 0 - 0 + z = z$$

پس

$$\mathbf{B} = -\rho\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

مثال ۶

میدان برداری $\mathbf{G} = \left(\frac{xz}{y}\right)\hat{\mathbf{x}}$ را در دستگاه مختصات کروی بیان کنید.

حل

$$G_r = \left(\frac{xz}{y}\right)\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \frac{(r\sin\theta\cos\varphi)(r\cos\theta)}{r\sin\theta\sin\varphi}\sin\theta\cos\varphi$$
$$= \frac{r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$$
$$G_\theta = \left(\frac{xz}{y}\right)\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{(r\sin\theta\cos\varphi)(r\cos\theta)}{r\sin\theta\sin\varphi}\cos\theta\cos\varphi$$
$$= \frac{r\cos^2\theta\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$$
$$G_\phi = \left(\frac{xz}{y}\right)\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$
$$= \frac{(r\sin\theta\cos\varphi)(r\cos\theta)}{r\sin\theta\sin\varphi}(-\sin\varphi) = -r\cos\theta\cos\varphi$$

تمرین ۵ نشان دهید که برای تبدیل از دستگاه مختصات استوانه‌ای به دستگاه مختصات قائم می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & ۰ \\ \sin\varphi & \cos\varphi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (۳۸)$$

روابط متناظر، برای تبدیل‌های دیگر را بیابید.

دیفرانسیل طول در دستگاههای مختصات مختلف

به کمک معادله (۱۵) می‌توان دیفرانسیل طول را در دستگاه مختصات کلی u، v و w به دست آورد

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w}\,dw \quad (۳۹)$$

مشتقهای جزیی این معادله، مثلاً $\partial\mathbf{R} / \partial u$ را در نظر بگیرید. این مشتق جزیی طبق معمول به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = \underset{\Delta t \to ۰}{\text{حد}} \frac{\mathbf{R}(u+\Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u} \quad (۴۰)$$

شکل ۳ و معادله (۹) را دوباره بررسی کنید. $\partial\mathbf{R} / \partial u$ باید برداری مماس بر مسیر جابجایی بردار مکان $\mathbf{R}$ باشد. ولی این مسیر چیست؟ توجه کنید که u و w تغییر نکرده و تنها u تغییر کرده است. پس مسیر حرکت خط مختصهٔ u است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = h_u\,\hat{\mathbf{u}} \quad (۴۱)$$

زیرا جهت مماس بر خط مختصهٔ u با بردار یکه $\hat{\mathbf{u}}$ مشخص می‌شود. h_u اندازه بردار $\partial\mathbf{R} / \partial u$ است و **ضریب مقیاس** نام دارد. بنابراین معادله ۳۹ را می‌توان به شکل زیر نوشت

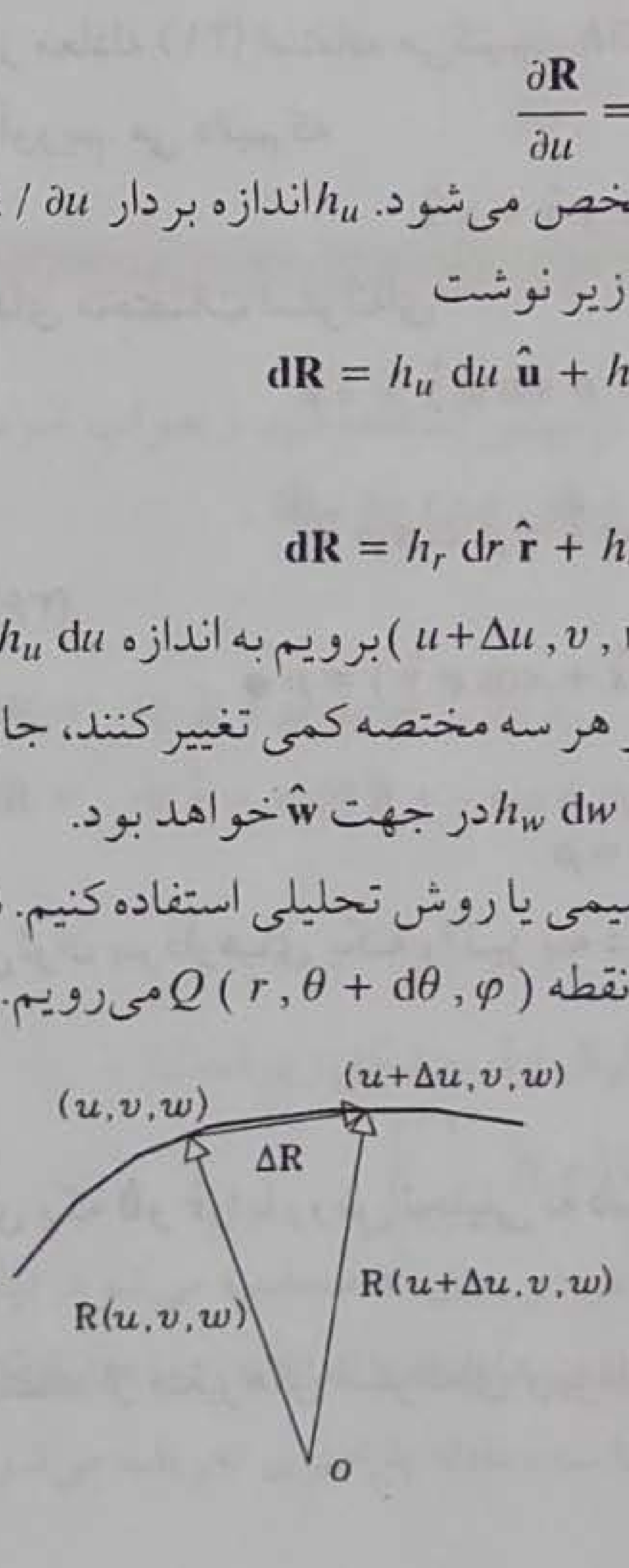
$$d\mathbf{R} = h_u\,du\,\hat{\mathbf{u}} + h_v\,dv\,\hat{\mathbf{v}} + h_w\,dw\,\hat{\mathbf{w}} \quad (۴۲)$$

مثلاً در مختصات کروی داریم

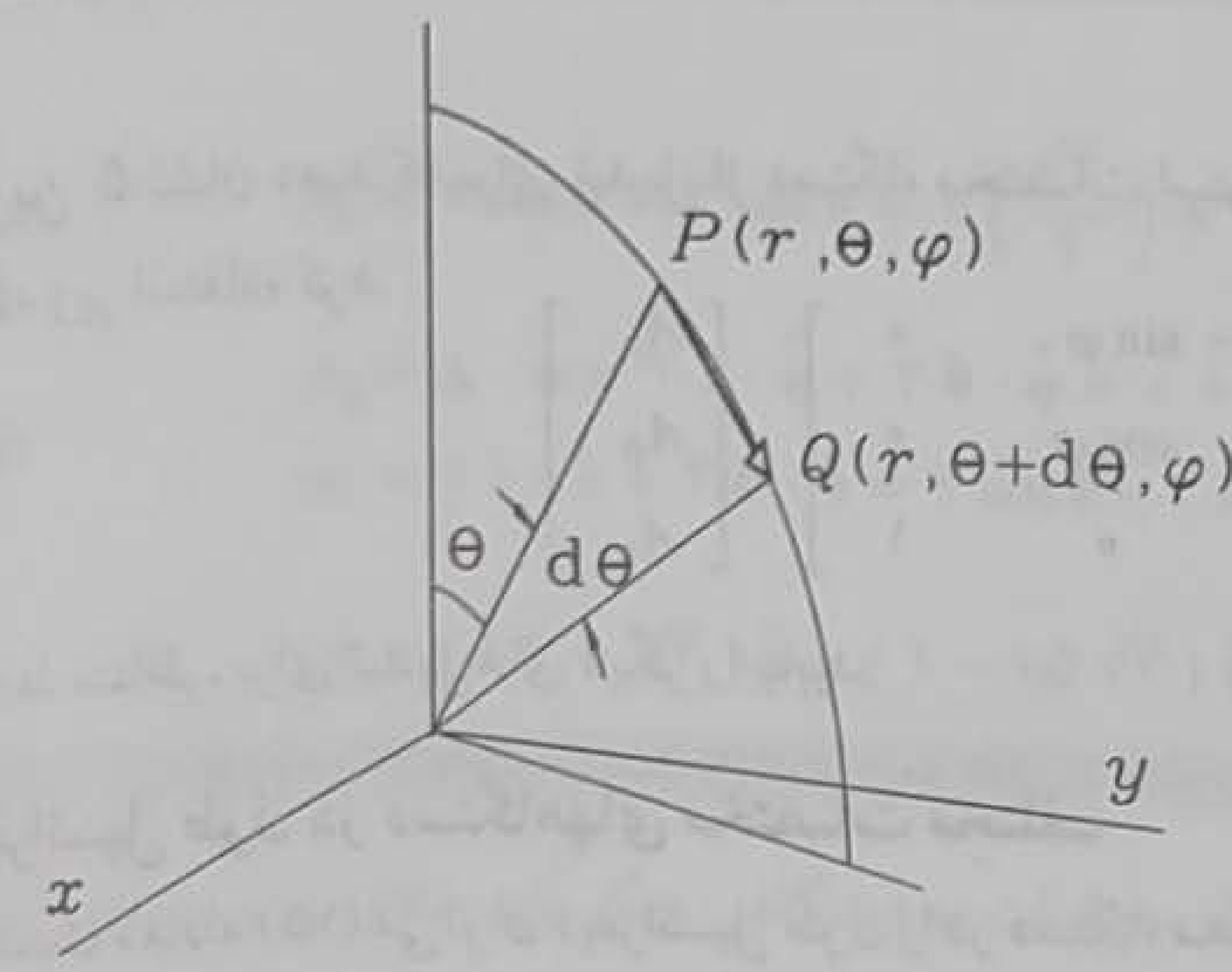
$$d\mathbf{R} = h_r\,dr\,\hat{\mathbf{r}} + h_\theta\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + h_\phi\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (۴۳)$$

معادله ۴۱ می‌گوید اگر از نقطه (u, v, w) به نقطه $(u+\Delta u, v, w)$ برویم به اندازه $h_u\,du$ در جهت $\hat{\mathbf{u}}$ جابجا می‌شویم (شکل ۱۴ را ببینید). معادلهٔ ۴۲ می‌گوید اگر هر سه مختصه کمی تغییر کنند، جابجایی به اندازه $h_u\,du$ در جهت $\hat{\mathbf{u}}$، به اندازه $h_v\,dv$ در جهت $\hat{\mathbf{v}}$ و به اندازه $h_w\,dw$ در جهت $\hat{\mathbf{w}}$ خواهد بود.

برای یافتن ضرایب مقیاس می‌توانیم از روش ترسیمی یا روش تحلیلی استفاده کنیم. شکل ۱۵ را در نظر بگیرید. روی خط مختصه θ از نقطه $P(r, \theta, \varphi)$ به نقطه $Q(r, \theta + d\theta, \varphi)$ می‌رویم. طبق معادلهٔ ۴۰



شکل ۱۴ دیفرانسیل طول در امتداد خط مختصهٔ u.



شکل ۱۵ یافتن h_θ به روش ترسیمی.

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حد}} \frac{PQ}{d\theta} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حد}} \frac{r\, d\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۴۳)$$

زیرا $|PQ| = r\theta$ و جهت آن در جهت $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است. پس

$$h_\theta = r \qquad (۴۴)$$

تمرین ۶ h_r و h_ϕ را به روش ترسیمی بیابید.

در روش تحلیلی از معادله (۴۱) استفاده می‌کنیم. h_u اندازهٔ بردار $\partial \mathbf{R} / \partial u$ است. به عنوان مثال h_ϕ را به این روش به دست می‌آوریم. می دانیم که

$$\mathbf{R} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$$

با استفاده از متغیرهای مختصات استوانه‌ای

$$\mathbf{R} = \rho\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \rho\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۴۵)$$

پس

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \rho\cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$$

و به کمک معادله (۳۶)

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = \rho\,(-\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}) = \rho\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (۴۶)$$

بنابراین

$$h_\phi = \rho \qquad (۴۷)$$

با این روش می‌توان بردارهای یکه را نیز به دست آورد. $\hat{\mathbf{u}}$ حاصل تقسیم $\partial \mathbf{R} / \partial u$ بر h_u است و $h_u = |\partial \mathbf{R} / \partial u|$.

تمرین ۷ بردارهای یکه $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\hat{\mathbf{r}}$ را با روش تحلیلی به دست آورید.

معادله (۴۵) را بااستفاده از متغیرهای استوانه‌ای و بردارهای یکه قائم نوشتیم. علت این است که $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$

بردارهای ثابتی هستند و مشتق آنها صفرست، ولی مثلاً $\partial \hat{\mathbf{r}} / \partial \theta$ صفر نیست. به همین دلیل توصیه می‌کنیم هر وقت می‌خواهید از برداری مشتق (یا انتگرال) بگیرید آن را در دستگاه مختصات قائم بیان کنید. برای توضیح بیشتر مثال زیر را ببینید.

مثال ۷

ضریب مقیاس h_φرا با کار در دستگاه مختصات استوانه‌ای بنویسید.

حل

در دستگاه مختصات استوانه‌ای بردار مکان عبارت است از

$$\mathbf{R} = \rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + z\, \hat{\mathbf{z}} \qquad (۴۸)$$

(بردار مکان در دستگاه مختصات کروی را بنویسید.) حال باید $\partial \mathbf{R} / \partial \varphi$ را بیابیم. عدم توجه به اینکه $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ تابعی از φاست جواب غلط $\partial \mathbf{R} / \partial \varphi = 0$ را به دست می‌دهد. رابطه درست چنین است

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\, \hat{\mathbf{z}} + z\, \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial \varphi}$$

از میان این مشتقها تنها $\partial \hat{\boldsymbol{\rho}} / \partial \varphi$ صفر نیست. برای یافتن این مشتق از معادلهٔ (۳۷) استفاده می‌کنیم

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\, \hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\, \hat{\mathbf{y}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

پس

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = \rho\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

که نتیجهٔ درست $h_\varphi = \rho$ را به دست می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

تمرین ۸ مشتقهای زیر را به دست آورید. از روش ترسیمی استفاده کنید و جواب خود را با روش تحلیلی امتحان کنید. **(الف)** $\partial \hat{\mathbf{r}} / \partial \theta$، **(ب)** $\partial \hat{\mathbf{r}} / \partial \varphi$، **(پ)** $\partial \hat{\boldsymbol{\theta}} / \partial \theta$، **(ت)** $\partial \hat{\boldsymbol{\theta}} / \partial \varphi$.

تمرین ۹ نشان دهید که

$$\mathbf{dR} = d\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\, d\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\, \hat{\mathbf{z}} \qquad \text{(دستگاه مختصات استوانه‌ای)} \qquad (۴۹)$$

$$\mathbf{dR} = dr\, \hat{\mathbf{r}} + r\, d\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta\, d\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \text{(دستگاه مختصات کروی)} \qquad (۵۰)$$

انتگرال مسیر

در اینجا سه نوع انتگرال مسیر در نظر می‌گیریم. انتگرال اول به شکل زیر است:

$$\int_{C,\, P_1}^{P_2} f(\mathbf{r})\, dt \qquad (۵۱)$$

Cخمی است که انتگرال روی آن، از نقطه P_1 تا P_2، هر دو روی C، محاسبه می‌شود. tپارامتری است که خم بر اساس آن تعریف شده است ولی می‌تواند یکی از متغیرهای فضا (مثلاً x، r یا φ) یا یک متغیر چهارم باشد. در صورت اول خم با دو معادله و در صورت سوم با سه معادله پارامتری تعریف می‌شود.

مثال ۸

فرض کنید $f(x,y,z) = 2x + y + z^2$ و منحنی C با $y = 2x$، $z = x$، تعریف شده است. انتگرالهای $f(\mathbf{r})\,dx$ و $f(\mathbf{r})\,dz$ را روی C از نقطهٔ $P_1(0,0,0)$ تا $P_2(2,4,2)$ حساب کنید.

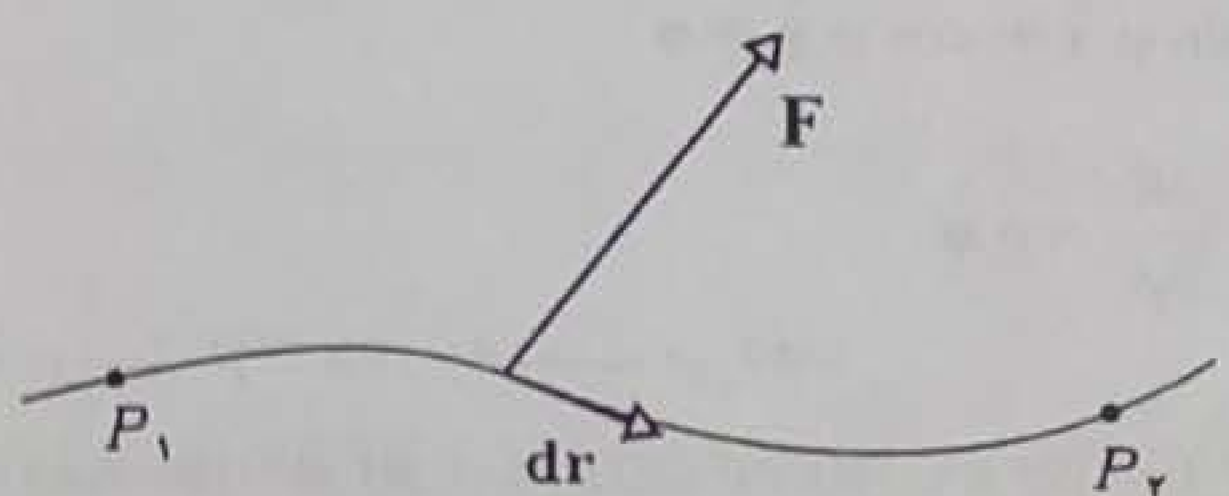
حل

$$\int f(\mathbf{r})\,dx = \int_0^2 (2x + y + z^2)\,dx = \int_0^2 (2x + 2x + x^2)\,dx = \frac{32}{3}$$
$$\int f(\mathbf{r})\,dz = \int_0^2 (2z + z + z^2)\,dz = \frac{32}{3}$$

نقش مسیر تعیین رابطه بین متغیرهای فضا در تابع است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

دومین انتگرال مسیر، انتگرالی به صورت $\int_{C,P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ است. مسیر انتگرال بین نقطه P_1 و P_2 به عناصر کوچک $d\mathbf{r}$ تقسیم می‌شود. در هر نقطه $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ محاسبه می‌شود و حاصل این ضربهای داخلی با هم جمع می‌شود (شکل ۱۶ را ببینید). در حد $d\mathbf{r} \longrightarrow 0$ این جمع برابر یک انتگرال است. چون در حد $d\mathbf{r}$ مماس بر مسیر می‌شود، این انتگرال در واقع مولفه‌های مماس بر مسیر میدان برداری $\mathbf{F}$ را به حساب می‌آورد.



شکل ۱۶ انتگرال مسیر.

مثال ۹

انتگرال $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ میدان برداری $\mathbf{F} = 5xy\,\hat{\mathbf{x}} + 6y^2\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$ را روی مسیر تعریف شده در مثال ۲ از P_1 تا P_2 نشان داده شده در شکل ۲ به دست آورید.

حل

در دستگاه قائم طبق معادله (۱۶)

$$d\mathbf{r} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 5xy\,dx + 6y^2\,dy + 2yz\,dz$$

اکنون سه انتگرال مسیر نوع اول داریم و

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_2^0 5xy\,dx + \int_4^0 6y^2\,dy + \int_0^1 2yz\,dz$$

با توجه به معادلات مسیر

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_2^0 5x^3\,dx + \int_4^0 6y^2\,dy + \int_0^1 8z(1-z)\,dz$$
$$= -20 - 128 + \frac{4}{3} = -146.66$$

به دو نکته توجه کنید. تا قبل از این عنصر طول (دیفرانسیل طول) را با **dR** نشان می‌دادیم، عمدتاً به خاطر اینکه با متغیر دستگاه مختصات کروی r اشتباه نشود، ولی از این پس روش معمول در کتابهای الکترومغناطیس را پی گرفته آن را با **dr** یا **dl** نشان می‌دهیم. دوم اینکه در تعریف انتگرال مسیر **dl** بردار دیفرانسیل مماس بر مسیر بود، یعنی برای یافتن آن باید از معادله (۹) استفاده می‌کردیم. ولی ما به جای این کار مستقیماً سراغ عنصر دیفرانسیل طول رفتیم، بدون اینکه به مسیر توجهی داشته باشیم! آیا اشتباه شده است؟ نه؛ مسیر در این معادله دو نقش بازی می‌کند، یکی تعیین روابط بین متغیرهای فضا در میدان برداری، و یکی قرار دادن **dr** به نحو مطلوب، یعنی مماس بر مسیر. توجه کنید که **dr** مقدار جابجایی در رفتن از نقطه (u, v, w) به نقطه $(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v, w + \mathrm{d}w)$ است. [جملات پایین معادله ۴۳ را ببینید] مثلا $\mathbf{dr} = \mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}}$ می‌گوید اگر از نقطه‌ای که هستید به یک نقطه نزدیک بروید به نحوی که مختصات x، y و z شما به ترتیب به اندازه‌های $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ و $\mathrm{d}z$ تغییر کند، جابجایی شما **dr** خواهد بود. این معادله هیچ محدودیتی روی $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ و $\mathrm{d}z$ نمی‌گذارد. اگر مسیر شما به نحوی باشد که مختصه x تغییر نکند، $\mathrm{d}x$ صفر است و در جهت $\hat{\mathbf{x}}$ جابجایی نداریم. پس این مسیرست که جابجایی‌های شما را تعیین می‌کند و در نتیجه **dr** را در جهت صحیح قرار می‌دهد. به عبارت دیگر نسبت عناصر دیفرانسیل dx، dy، و dz توسط معادلهٔ مسیر تعیین می‌شود و مثلاً اگر $y = ۲x$، آنگاه $dy = ۲\,dx$.

مثال ۱۰

مسئلهٔ مثال ۸ را با یافتن یک **dr** مماس بر مسیر دوباره حل کنید.

حل

برای یافتن **dr** مماس بر مسیر از معادلات پارامتری مسیر که در مثال ۲ به دست آمد استفاده می‌کنیم. بردار مکان مسیر عبارت است از

$$\mathbf{r} = t\,\hat{\mathbf{x}} + t^{۲}\,\hat{\mathbf{y}} + \left(۱ - \frac{t}{۴} \right)^{۲} \hat{\mathbf{z}}$$

طبق معادله (۱۴)

$$\mathbf{dr} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \left(\hat{\mathbf{x}} + ۲\,t\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{۱}{۲}\,t\,\hat{\mathbf{z}} \right) \mathrm{d}t$$

حال $\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ را به دست می‌آوریم (و به جای x، y و z با توجه به معادلات پارامتری مسیر مقدار می‌گذاریم)

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \left[۵\,t^{۳}\,\hat{\mathbf{x}} + ۶\,t^{۴}\,\hat{\mathbf{y}} + \left(۲\,t^{۲} - \frac{t^{۴}}{۲} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \cdot \mathbf{dr}$$

$$= \left(۵\,t^{۳} + ۱۲\,t^{۵} - t^{۳} + \frac{t^{۵}}{۴} \right) \mathrm{d}t$$

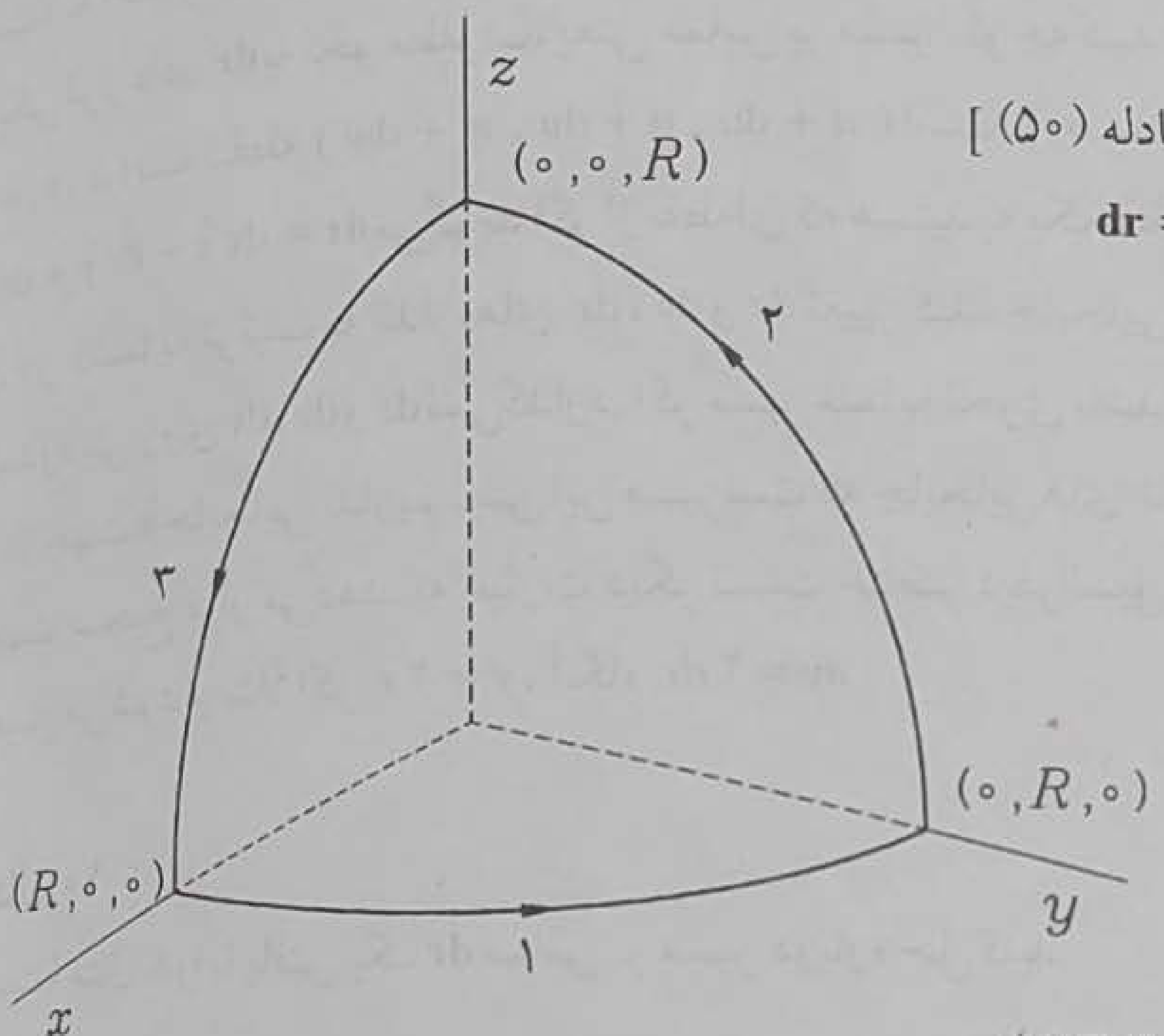
برای رفتن از $P_۱$ به $P_۲$ باید t از ۲ تا ۰ تغییر کند

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{۲}^{۰} \left(۵\,t^{۳} + ۱۲\,t^{۵} - t^{۳} + \frac{t^{۵}}{۴} \right) \mathrm{d}t = - ۱۴۶{,}۶۶$$

می بینید که جوابها یکی است. پس لازم نیست روش طولانی مثال ۹ را به کار برید. در هر دستگاه مختصات از دیفرانسیل طول آن دستگاه استفاده کنید. مسیر خود به خود آن $\mathbf{dr}$ را به موازات مسیر شما قرار می‌دهد.

مثال ۱۱

مسیر C نشان داده شده در شکل ۱۷ از سه ربع دایره تشکیل شده است. $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ را روی این مسیر به ازای $\mathbf{F} = k\, r^{۲}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ به دست آورید.



شکل ۱۷ مثال ۱۰.

حل

در دستگاه مختصات کروی داریم [معادله (۵۰)]

$$\mathbf{dr} = \mathrm{d}r\,\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

پس

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = k\,r^{۳}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

برای بخش ۱ مسیر: $r = R$، $\theta = \frac{\pi}{۲}$ و $\varphi = \varphi$؛ پس

$$\int k\,r^{۳}\sin\theta\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_{۰}^{\pi/۲} k\,R^{۳}\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right)\mathrm{d}\varphi = k\,R^{۳}\,\frac{\pi}{۲}$$

برای بخش ۲ مسیر: $r = R$، $\theta = \theta$ و $\varphi = \frac{\pi}{۲}$؛ پس

$$\int_{\pi/۲}^{\pi/۲} k\,r^{۳}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi = ۰$$

برای بخش ۳ مسیر: $r = R$، $\theta = \theta$ و $\varphi = ۰$؛ پس

$$\int_{۰}^{۰} k\,r^{۳}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi = ۰$$

و سرانجام

$$\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = k\,R^{۳}\,\frac{\pi}{۲}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=۰$

آخرین انتگرال مسیری که بررسی می‌کنیم، انتگرالی به شکل $\int_C \mathbf{F}\,\mathrm{d}r$ است. در این حالت انتگرالده یک تابع برداری و $\mathrm{d}r = |\mathbf{dr}|$ دیفرانسیل اسکالر طول است. به علت اینکه انتگرالده بردار است باید توجه خاصی به این انتگرال مبذول کنیم. می‌دانید که هر انتگرالی در واقع حد یک جمع است؛ حاصلضرب انتگرالده و دیفرانسیل انتگرالگیری را برای تمام بخشهای فاصله انتگرالگیری به دست آورده، آنها را با هم جمع می‌کنیم، مثلاً $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ می‌گوید فاصله $[a, b]$ را باید به بخشهای به طول $\mathrm{d}x$ تقسیم کنیم؛ در هر فاصله

حاصلضرب $f(x)\,dx$ را بیابیم و آنها را با هم جمع کنیم. انتگرال فوق حد این جمع به ازای $dx \to 0$ است.

وقتی انتگرالده بردار (تابع برداری) است باید توجه کنیم که انتگرال بیان کننده یک جمع برداری است؛ و این باید مطابق قوانین جمع برداری محاسبه شود؛ یعنی علاوه براندازه‌ها باید جهت نیز در نظر گرفته شود. انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_a^b x^2\,\hat{\mathbf{y}}\,dx = \hat{\mathbf{y}}\int_a^b x^2\,dx$$

در اینجا باید بردارهایی که را با هم جمع کنیم که همگی در جهت $\hat{\mathbf{y}}$ هستند؛ می‌دانید که برای این منظور می‌توانید اندازه بردارها [یعنی $x^2\,dx$] را با هم جمع کنید زیرا همگی در یک جهت‌اند. ولی رابطه انتگرالی زیر اشتباه است

$$\int \rho\, z\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\,d\varphi \overset{!}{=} \hat{\boldsymbol{\rho}}\int \rho\, z\, d\varphi$$

زیرا ما می‌خواهیم بردارهایی در جهت $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ را با هم جمع کنیم. متغیر انتگرالگیری φ است، یعنی به ازای φهای مختلف باید مقادیر $\rho\, z\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\,d\varphi$ را باهم جمع کنیم. ولی به ازای φهای مختلف بردارهای $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ با هم تفاوت دارند و اگر اندازه بردارها را با هم جمع کنیم نتیجه صحیح به دست نمی‌آید. پس برای محاسبه انتگرال فوق باید چه کار کنیم؟ جواب را قبلا به طور ضمنی گفته‌ایم؛ تبدیل بردار به دستگاه مختصات قائم. جایی که بردارهای یکه $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ همیشه ثابت‌اند، بنابراین می‌توان آنها را از زیر انتگرال خارج کرد و به این ترتیب انتگرالی غیربرداری به دست آورد.

مثال ۱۲

انتگرال زیر را روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۵ واقع در صفحه xy حساب کنید

$$\mathbf{I} = \int \rho \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,dl$$

حل

برای دایره مسیر داریم $dl = ۵\,d\varphi$ پس با استفاده از معادله (۳۶)

$$\mathbf{I} = \int \rho \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,dl = \int_{۰}^{۲\pi} ۵\sin\varphi\,(-\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}})\,۵\,d\varphi$$

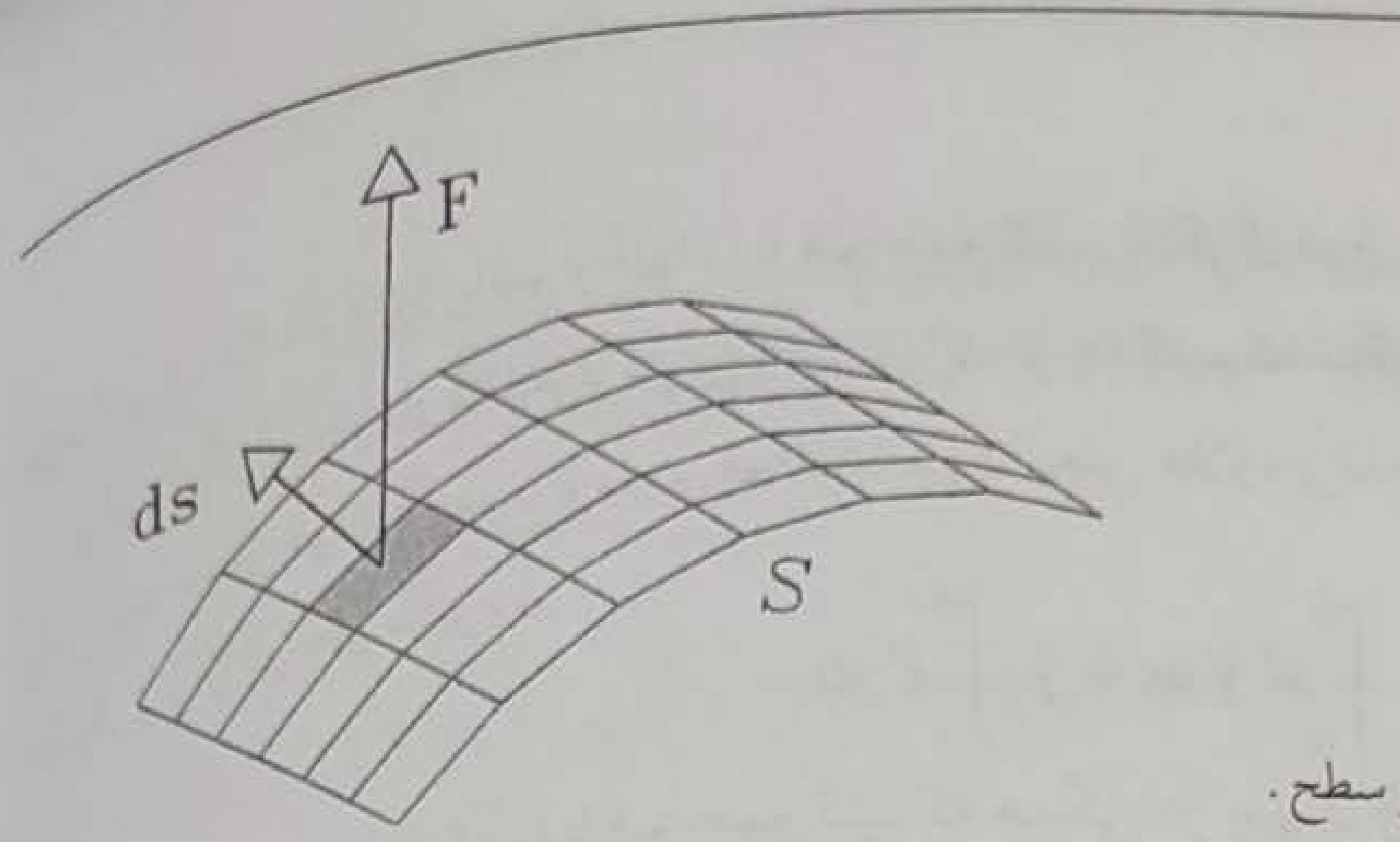
زیرا روی مسیر مورد نظر $\rho = ۵$ و φ بین ۰ تا ۲π تغییر می‌کند

$$\mathbf{I} = \hat{\mathbf{x}}\int_{۰}^{۲\pi} -۲۵\sin^2\varphi\,d\varphi + \hat{\mathbf{y}}\int_{۰}^{۲\pi} ۲۵\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$
$$= \hat{\mathbf{x}}(-۲۵\pi) + \hat{\mathbf{y}}(۰) = -۲۵\pi\,\hat{\mathbf{x}}$$

انتگرال سطح

در الکترومغناطیس با سه نوع انتگرال سطح سر و کار داریم:

$$\mathbf{I}_1 = \int_S f\cdot d\mathbf{s} \qquad I_2 = \int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad \mathbf{I}_3 = \int_S \mathbf{F}\cdot ds$$



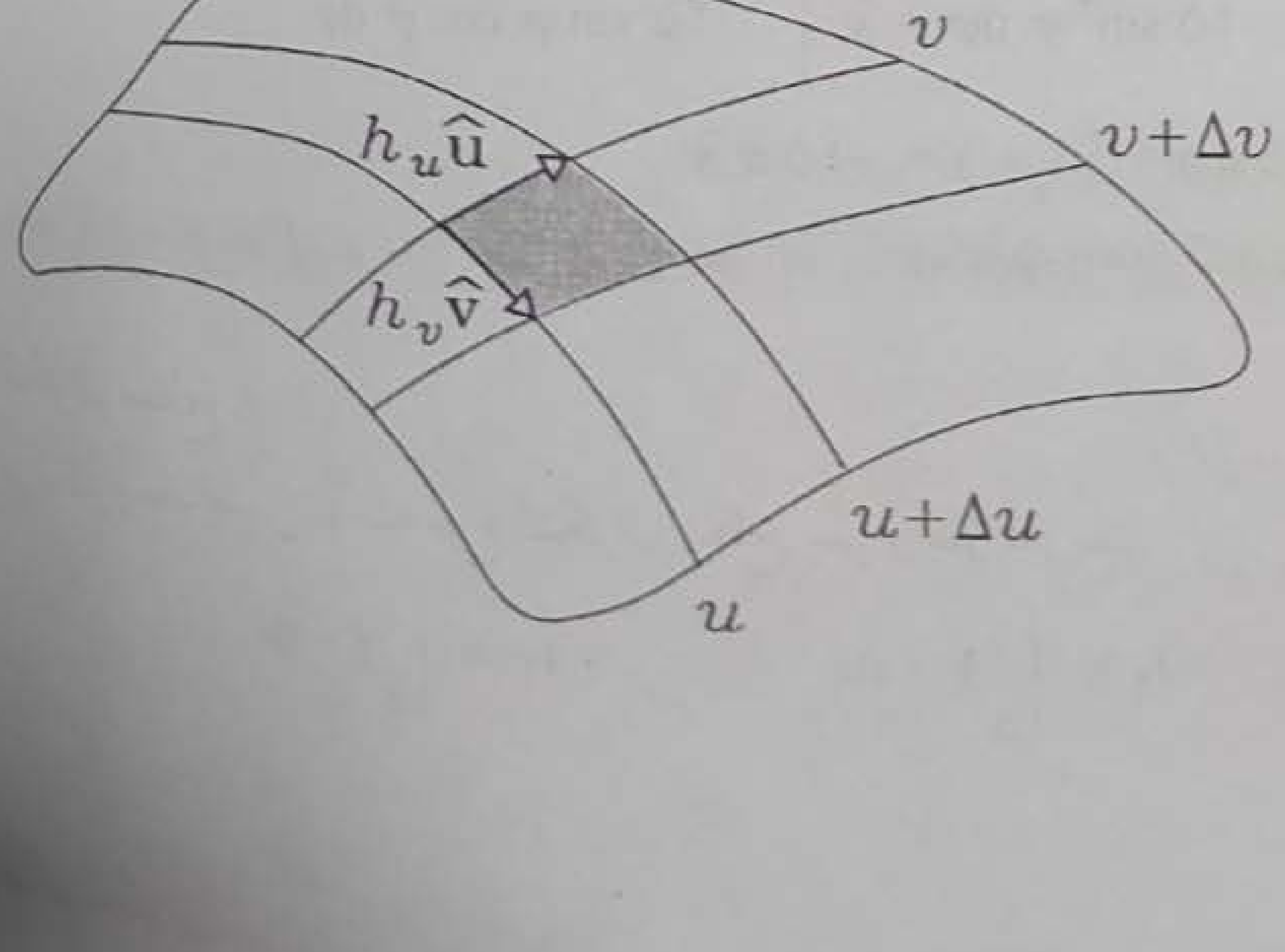
شکل ۱۸ تعریف انتگرال سطح و عنصر سطح.

دو انتگرال آخر نیز نهایتاً برای محاسبه به انتگرال نوع اول تبدیل می‌شوند. برای دادن یک توضیح کلی در مورد این انتگرالها I_2 را بر می‌گزینیم، زیرا این نوع انتگرال مفهوم فیزیکی خاصی نیز دارد.

همانند تمام انتگرالها ناحیه انتگرالگیری را، که در اینجا سطح است، باید به بخشهاش کوچکی تقسیم کنیم (شکل ۱۸ را ببینید)؛ انتگرالده را روی هر بخش حساب کرده، مقادیر به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. انتگرال حد این جمع است وقتی $ds \to 0$. در انتگرال دوم انتگرالده $\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$ است. $\mathbf{ds}$ برداری است که اندازه آن برابر سطح بخشهای کوچک (ds) و امتداد آن عمود بر سطح است و جهت آن توسط مسئله تعیین می‌شود. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$ را می‌توان به شکل $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,ds$ نوشت، که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر سطح است. $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ مولفه عمود بر سطح میدان برداری $\mathbf{F}$ است. پس $\mathbf{I}_2$ در واقع به انتگرالی از نوع I_1 تبدیل می‌شود که در آن f مولفه عمود بر سطح $\mathbf{F}$ است. حاصل انتگرال I_2 را شار میدان $\mathbf{F}$ می‌نامند.

برای محاسبه I_3 همانند محاسبه انتگرال مسیر $\int \mathbf{F}\,dr$ باید توجه کنیم که انتگرالده بردارست و جمع متضمن در انتگرال یک جمع برداری است. باز هم مانند محاسبه انتگرال مسیر باید بردار داخل انتگرال را به صورتی در آوریم که جهت بردارهایی که با هم جمع می‌شدند با تغییر متغیر انتگرالگیری تغییر نکند. در این صورت می‌توانیم اندازه بردارها را باهم جمع کنیم، که یک انتگرال اسکالر می‌شود. این کار معمولا با بیان بردار در دستگاه مختصات قائم انجام می‌شود.

شکل ۱۹ چگونگی تعیین ds را برای سطوحی که بر رویه‌های تعریف شده توسط متغیرهای دستگاه مختصات منطبق‌اند نشان می‌دهد. رویه ثابت = w را در نظر بگیرید. دو خط مختصه u که تفاوت مختصه u آنها du و دو خط مختصه v که تفاوت مختصه v آنها dv است رسم شده‌اند و فصل مشترکشان متوازی



شکل ۱۹ رویه w = ثابت و عنصر سطح روی آن.

الاضلاع کوچکی تشکیل داده است. طول اضلاع این متوازی الاضلاع، بنا به مطالبی که در مورد ضرایب مقیاس در زیر معادله ۴۱ گفتیم، عبارت‌اند از $h_u\, du$ و $h_v\, dv$. مساحت این متوازی الاضلاع $h_v\, h_u\, du\, dv$ است و $\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}$ بردار یکه عمود بر سطح را می‌دهد. پس

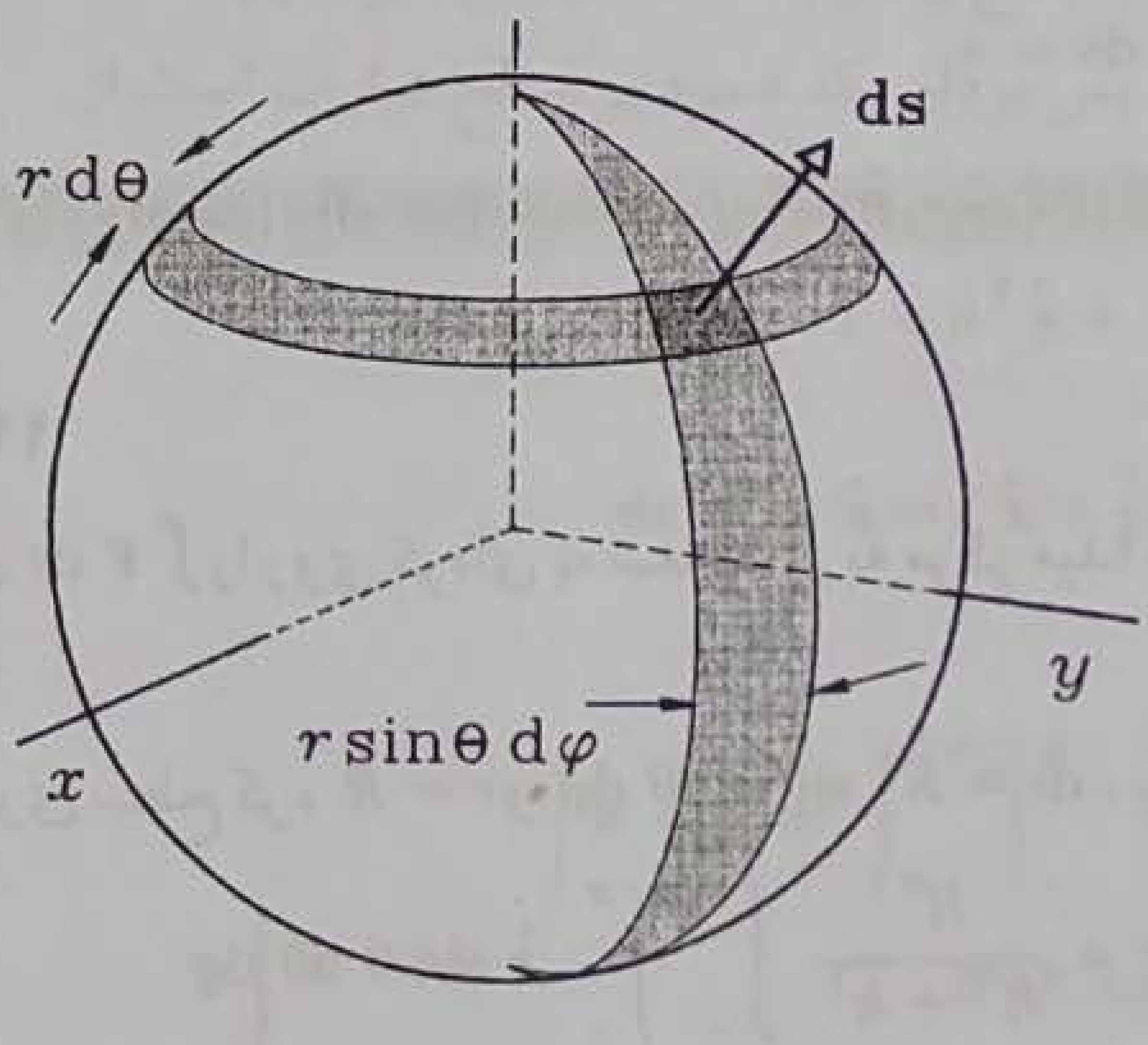
$$\mathbf{ds} = h_u\, h_v\, du\, dv\, (\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}) \qquad (۵۲)$$

اگر دستگاه مختصات متعامد باشد $\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{w}}$ و

$$\mathbf{ds} = h_u\, h_v\, du\, dv\, \hat{\mathbf{w}} \qquad (۵۳)$$

برای مثال سطح r = ثابت دستگاه مختصات کروی در شکل ۲۰ نشان داده شده است. طول اضلاع متوازی الاضلاع حاصل از برخورد دو خط مختصه θ و در خط مختصه φ نزدیک هم عبارت اند از $r \sin\varphi\, d\varphi$ و $r\, d\theta$. جهت بردار $\mathbf{ds}$ عمود بر سطح کره و $\hat{\mathbf{r}}$ است، پس

$$\mathbf{ds} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{\mathbf{r}} \qquad (۵۴)$$



شکل ۲۰ عنصر سطح روی کره.

تمرین ۱۰ سطوح φ = ثابت، θ = ثابت (دستگاه مختصات کروی)، ρ = ثابت و φ = ثابت و z = ثابت (دستگاه مختصات استوانه‌ای) را رسم کنید. روی هر یک از آنها عنصر دیفرانسیل را رسم کرده، مقدار آن را تعیین کنید.

مثال ۱۳

شکل ۲۱ بخشی از یک استوانه به شعاع a، ارتفاع l و هم محور با محور z ها را نشان می‌دهد که در فضای $x > 0$، $y > 0$ و $z > 0$ فضا قرار دارد. بر روی سطوح S_1 و S_2 مشخص شده در شکل $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds}$ را حساب کنید. داریم $\mathbf{A} = \rho \cos\varphi\, \hat{\boldsymbol{\rho}} - \rho \sin\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

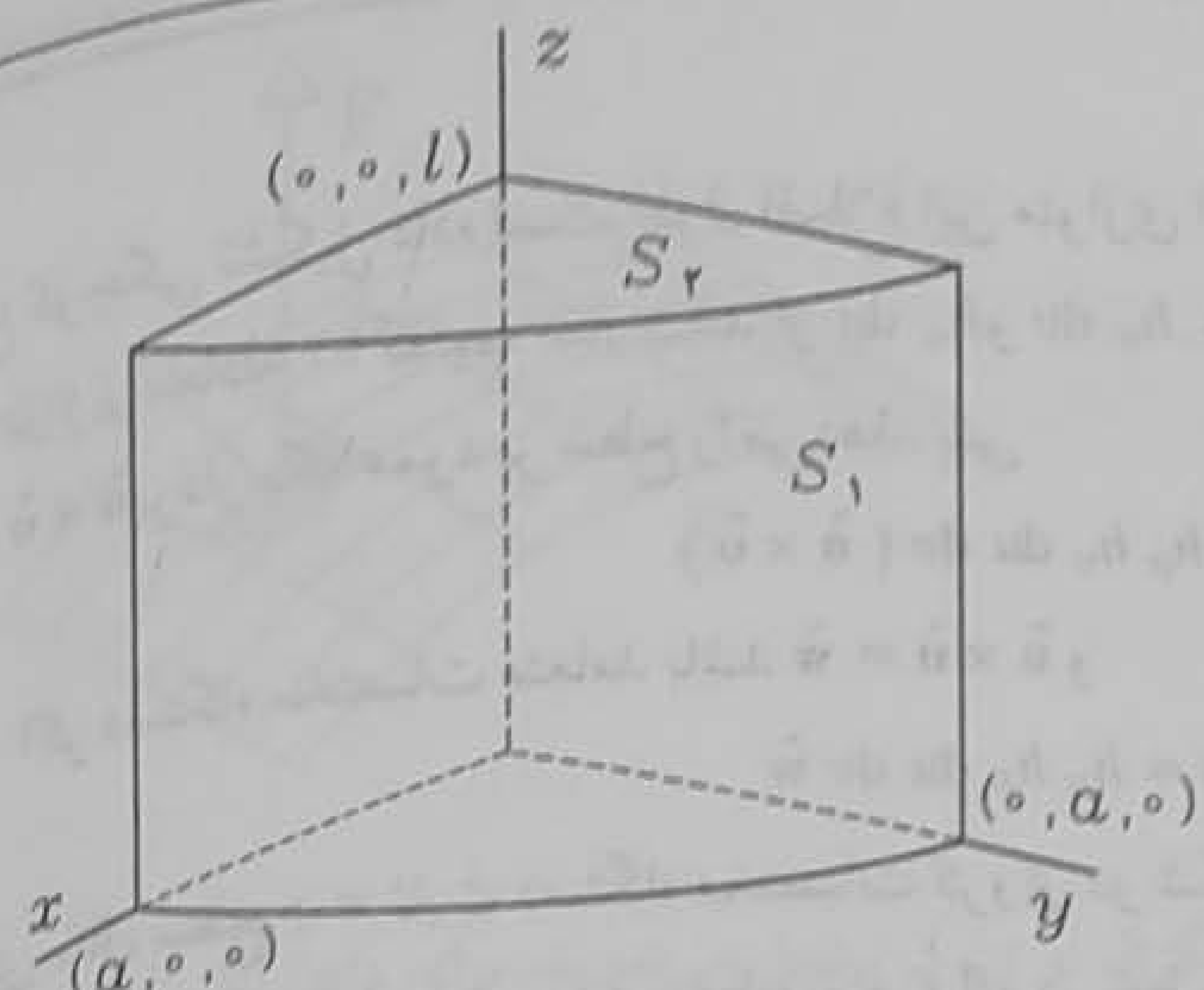
حل روی سطح S_1 داریم

$$\mathbf{ds}_1 = a\, d\varphi\, dz\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

پس

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = \int_0^l \int_0^{\pi/2} a^2 \cos\varphi\, d\varphi\, dz = a^2\, l$$

که در آن از $\rho = a$ (روی سطح S_1) استفاده شده است. در روی S_2



شکل ۲۱ مثال ۱۳.

$$\mathbf{ds}_{۲} = \rho\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\rho\ \hat{\mathbf{z}}$$

و چون $\mathbf{A} \cdot \mathbf{ds}_{۲} = \circ$

$$\int_{S_{۲}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = \circ$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=\circ \mid \oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=\circ \mid \oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=\circ$

مثال ۱۴

انتگرال $\int \mathbf{F}\ \mathrm{d}s$ را روی کره‌ای به شعاع R و به مرکز مبدأ مختصات برای تابع $\mathbf{F} = r\,\hat{\mathbf{r}} / (r^{۲} + h^{۲})$ به دست آورید:

حل روی سطح کره $r = R$ و $\mathrm{d}s = R^{۲} \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$، پس

$$\int \mathbf{F}\ \mathrm{d}s = \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi} \frac{R^{۳} \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}r}{R^{۲} + h^{۲}}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{R^{۳}}{R^{۲} + h^{۲}} \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi} \hat{\mathbf{r}} \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$$

چون با تغییر θ و φ بردار $\hat{\mathbf{r}}$ هم تغییر می‌کند، نمی‌توان $\hat{\mathbf{r}}$ را از انتگرال خارج کرد. به کمک معادله (۳۵) می‌نویسیم

$$\int \mathbf{F}\ \mathrm{d}s = \frac{R^{۳}}{R^{۲} + h^{۲}} \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi} \sin\theta\,(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}})\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$$

حال سه انتگرال اسکالر داریم. مولفه‌های x و y انتگرال صفر می‌شوند، زیرا انتگرال $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ از $\circ$ تا ۲π صفر می‌شود. پس

$$\mathbf{F}\ \mathrm{d}s = \frac{R^{۳}}{R^{۲} + h^{۲}}\,\hat{\mathbf{z}} \int_{\circ}^{۲\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\circ}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\ \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{R^{۳}}{R^{۲} + h^{۲}}\,\hat{\mathbf{z}}\,(۲\pi)(\circ) = \circ$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=\circ \mid \oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=\circ \mid \oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=\circ$

اگر سطح به صورت $z = f(x, y)$ داده شده باشد، داریم

$$\mathrm{d}s = \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{۲}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad (۵۵)$$

برای دیدن اثبات رابطه بالا به کتاب ریاضی مقدماتی خود، و برای دیدن رابطه ds برای سطوحی که از سطوح ذکر شده در فوق نیستند به یک کتاب حساب برداری مراجعه کنید.

مثال ۱۵

انتگرال $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$ را برای سطح مثلثی شکل ۲۲ و تابع $\mathbf{F} = ۲\,\hat{\mathbf{x}}$ به دست آورید.

حل

بخشی اصلی این مسئله تعیین $\mathbf{ds}$ است. سطح مورد نظر را می‌توان با رابطه $z = a - x - \frac{y}{۲}$ بیان کرد. پس به کمک معادله (۵۵) می‌توانیم بنویسیم

$$ds = \sqrt{۱ + ۱ + \frac{۱}{۴}}\ dx\,dy = \frac{۳}{۲}\,dx\,dy \tag{۵۶}$$

ولی چون $\mathbf{ds}$ را می‌خواهیم باید بردار یکه عمود بر سطح را نیز به دست آوریم. می‌دانیم که حاصلضرب خارجی بردارهای $\mathbf{AC}$ و $\mathbf{CB}$ بر این سطح عمودند. پس بردار یکه عمود بر سطح عبارت است از

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\,۲\,a\,\hat{\mathbf{y}} - a\,\hat{\mathbf{x}}\,) \times (\,-۲\,a\,\hat{\mathbf{y}} + a\,\hat{\mathbf{z}}\,)$$
$$= ۲\,a^۲\,\hat{\mathbf{x}} + a^۲\,\hat{\mathbf{y}} + ۲\,a^۲\,\hat{\mathbf{z}}$$

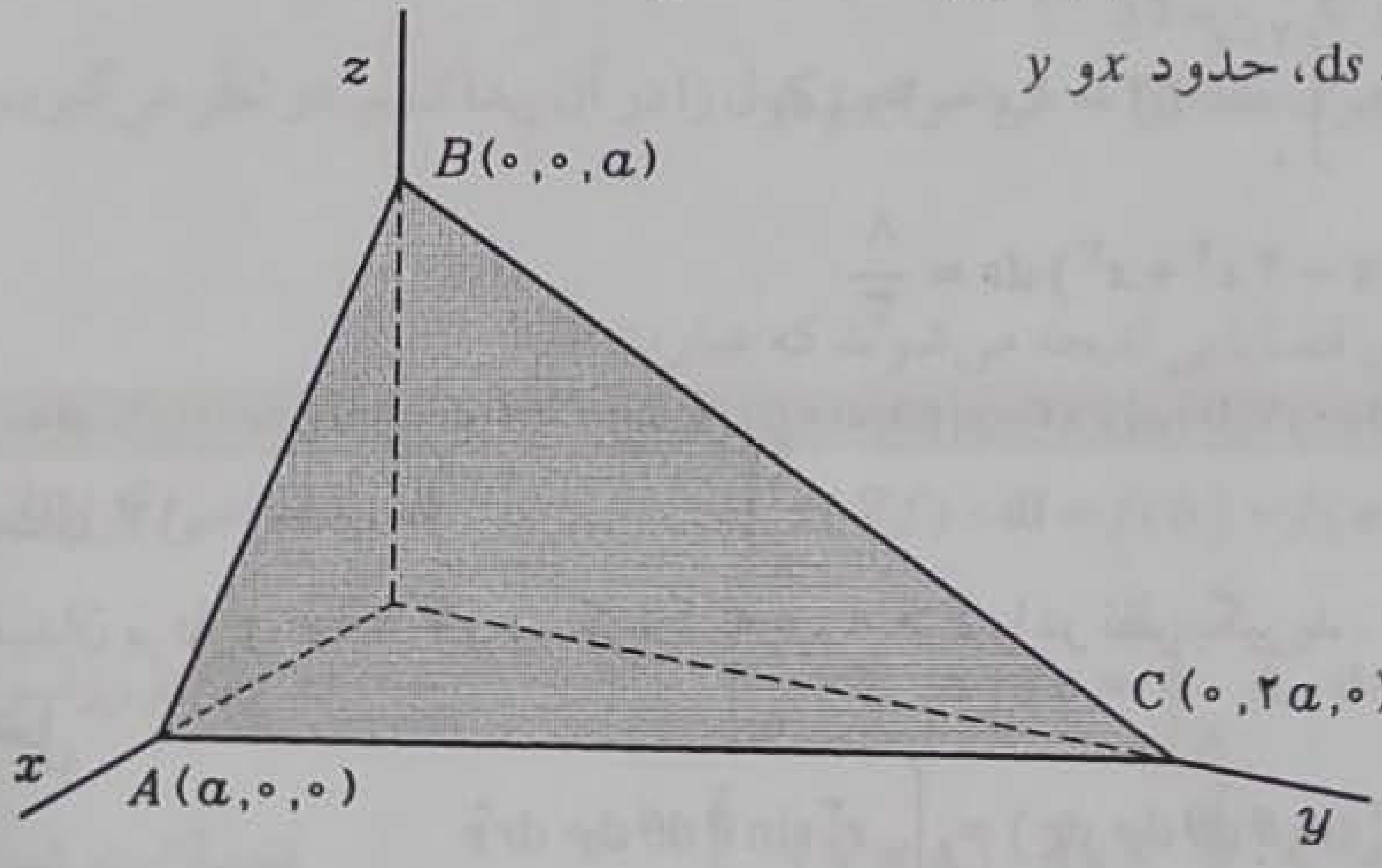
و سرانجام

$$\mathbf{ds} = ds\,\hat{\mathbf{n}} = (\,\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{۱}{۲}\,\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\,)\,dx\,dy$$

حال به سراغ انتگرال می‌رویم

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_{۰}^{۲a} \int_{۰}^{a - \frac{a}{۲}} ۲\,dx\,dy = ۲\,a^۲$$

توجه کنید که برای پوشاندن سطح توسط ds، حدود x و y باید به چه صورتی باشد.



شکل ۲۲ مثال ۱۵.

انتگرال حجم

انتگرال حجم انتگرال سه‌گانه‌ای به شکل $\int f\,dv$ یا $\int \mathbf{F}\,dv$ است. در مورد انتگرال دومی باید با در نظر گرفتن همان نکاتی که درمورد انتگرالهای برداری خط و سطح گفتیم انتگرال را به انتگرال (یاانتگرالهای) اسکالر تجزیه کنیم. تنها دو نکته را در مورد این انتگرالها توضیح می‌دهیم.

۱ـ عنصر دیفرانسیلی حجم dv، در یک دستگاه مختصات منحنی الخط با حاصلضرب سه ضریب مقیاس (h_u , h_v , h_w) برابرست، پس

$$dv = dx\, dy\, dz \qquad (۵۷)$$ مختصات قائم

$$dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \qquad (۵۸)$$ مختصات استوانه‌ای

$$dv = r^{2} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \qquad (۵۹)$$ مختصات کروی

۲ـ بسته به حجم مورد نظر باید دستگاه مختصات مناسبی برگزیده شود و حدود انتگرالها به نحوی مشخص شود که dv تمام حجم را پوشش دهد.

مثال ۱۶

در ناحیهٔ محدود به سطوح $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$ و $2x + 2y + z = 4$. چگالی بار الکتریکی $\rho = 2x$ است. بار الکتریکی داخل این ناحیه را بیابید.

حل

شکل ۲۲ را با $A(2,0,0)$، $B(0,0,4)$، و $C(0,2,0)$ در نظر بگیرید. فضای زیر این سطح مثلثی حجم مورد نظر را نشان می‌دهد. باید $\int \rho\, dv$ را در این حجم حساب کنیم. عنصر حجم $dx\, dy\, dz$ است. تنها نکته قرار دادنِ درست حدود انتگرال است، به نحوی که این حجم به صورت زیر پوشیده شود.

$$\begin{aligned}
Q &= \int \rho\, dv = \iiint 2x\, dx\, dy\, dz \\
&= 2\int_0^2 x\, dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{4-2x-2y} dz \\
&= 2\int_0^2 x\, dx \int_0^{2-x} (4 - 2x - 2y)\, dy \\
&= 2\int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3)\, dx = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

مثال ۱۷

میدان برداری $\mathbf{V} = r\hat{\mathbf{r}}$ و نیمکرهٔ $r < 1$، $z > 0$ را در نظر بگیرید. $\int \mathbf{V}\, dv$ را حساب کنید.

حل

$$\int \mathbf{V}\, dv = \int r\hat{\mathbf{r}}\,(r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr) = \int r^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr\, \hat{\mathbf{r}}$$

برای پوشاندن حجم مورد نظر r از ۰ تا ۱، φ از ۰ تا 2π، و θ از ۰ تا $\pi/2$ تغییر کند. ولی قبل از محاسبه باید بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{r}}$ را در دستگاه مختصات قائم بیان کنیم، زیرا انتگرالده بردارست و چون جهت آن تغییر می‌کند، نمی‌توان تنها اندازهٔ بردارها را با هم جمع کرد

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\int \mathbf{V}\, dv = \int (r^3 \sin^2\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + r^3\sin^2\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + r^3\sin\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}})\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

چون انتگرال $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ در فاصلهٔ ۰ تا ۲ π صفر است، مولفه‌های x و y این انتگرال صفر است

$$\int \mathbf{V}\, dv = \hat{\mathbf{z}} \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \mid \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \mid \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \mid \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \mid \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \mid \nabla \times \mathbf{E} = 0 \mid \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \mid \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \mid \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \mid \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \mid \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

مشتق میدانها

در مورد میدانهای الکترومغناطیسی با پنج نوع مشتقگیری سروکارداریم:

۱ **گرادیان** که روی میدانهای اسکالر عمل کرده یک بردار به دست می‌دهد. در دستگاه مختصات قائم

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \qquad (۶۰)$$

۲ **دیورژانس** که روی میدانهای برداری عمل کرده، یک اسکالر به دست می‌دهد. دیورژانس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \underset{\Delta v \to 0}{\text{حد}} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\nabla v} \qquad (۶۱)$$

Δv حجم کوچکی حول نقطه‌ای است که می‌خواهیم دیورژانس را در آن پیدا کنیم و S سطح در برگیرنده آن حجم است.

۳ **کرل** که روی میدانهای برداری عمل کرده و یک بردار به دست می‌دهد مولفه برداری کرل در جهت $\hat{\mathbf{a}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \underset{\Delta S \to 0}{\text{حد}} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\nabla s} \qquad (۶۲)$$

s سطح کوچکی عمود بر $\hat{\mathbf{a}}$ است که آن را حول نقطه‌ای که می‌خواهیم کرل را در آن پیدا کنیم. در نظر می‌گیریم و C منحنی حول این سطح است.

از تعریف این عملگرهای مشتقگیری قضایایی نتیجه می‌شوند که عبارت اند از

$$\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(b) - f(a) \qquad (۶۳)$$
قضیهٔ اساسی گرادیان

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \qquad (۶۴)$$
قضیهٔ دیورژانس

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \qquad (۶۵)$$
قضیهٔ استوکس

قضایای بالا در الکترومغناطیس بسیار به کار می‌آیند. در معادلهٔ ۶۴ S سطح بستهٔ در بردارندهٔ حجم V، و در معادلهٔ ۶۵ C مسیر حول سطح S است.

۴ **لاپلاسین اسکالر** که روی میدانهای اسکالر عمل می‌کند و یک میدان اسکالر به دست می‌دهد، به صورت دیورژانس گرادیان تعریف می‌شود

$$\nabla^{۲} V = \nabla \cdot (\nabla V) \tag{۶۶}$$

۴ لاپلاسین برداری عملگری است که روی میدانهای برداری عمل می‌کند و میدانی برداری به دست می‌دهد. این عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nabla^{۲} \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{۶۷}$$

مثال ۱۸

انتگرال مثال ۱۱ را به کمک قضیهٔ استوکس حساب کنید.

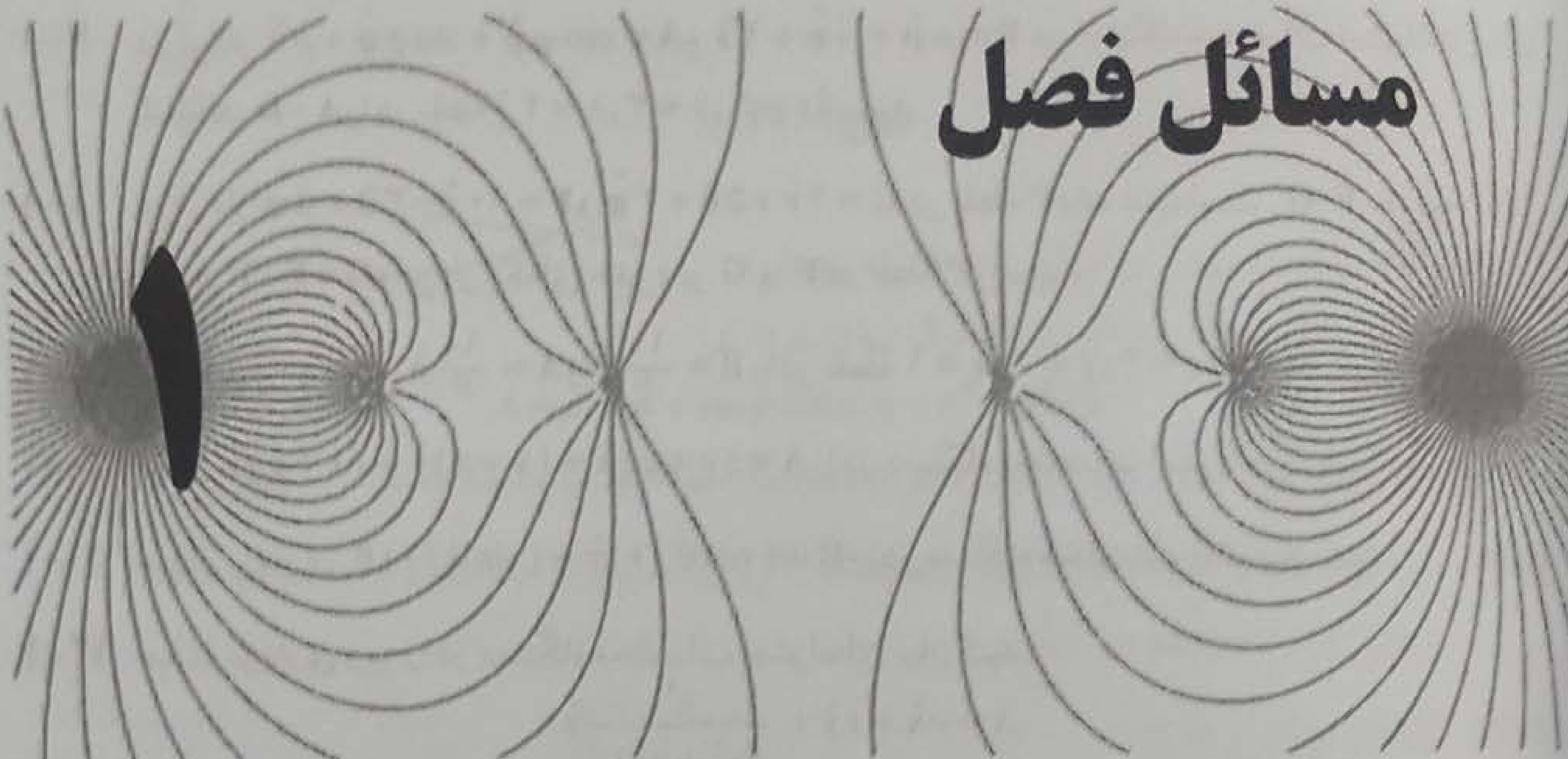
حل

با توجه به قضیهٔ استوکس به جای محاسبهٔ انتگرال مسیر می‌توانیم انتگرال $\nabla \times \mathbf{F}$ را روی سطح کروی که ربع دایره محیط آن را تشکیل می‌دهند، حساب کنیم. ابتدا $\nabla \times \mathbf{F}$ را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{۱}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_{\varphi})\hat{\mathbf{r}} - \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_{\varphi})\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= kr\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\mathbf{r}} - ۳r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

عنصر سطح $\mathbf{ds} = R^{۲} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{\mathbf{r}}$ است. پس

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int k R^{۳} \cos\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi k R^{۳}}{۲}$$



مسائل فصل ۱

۱-۱ سه بردار $A = -2\hat{x} + 3\hat{y} + 5\hat{z}$، $D = \hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z}$، و $C = 4\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z}$ داده شده است. اندازهٔ $A + 3D$، بردار یکه ای در جهت $C - D$، مولفهٔ C در امتداد D، و زاویهٔ بین A و C را بیابید.

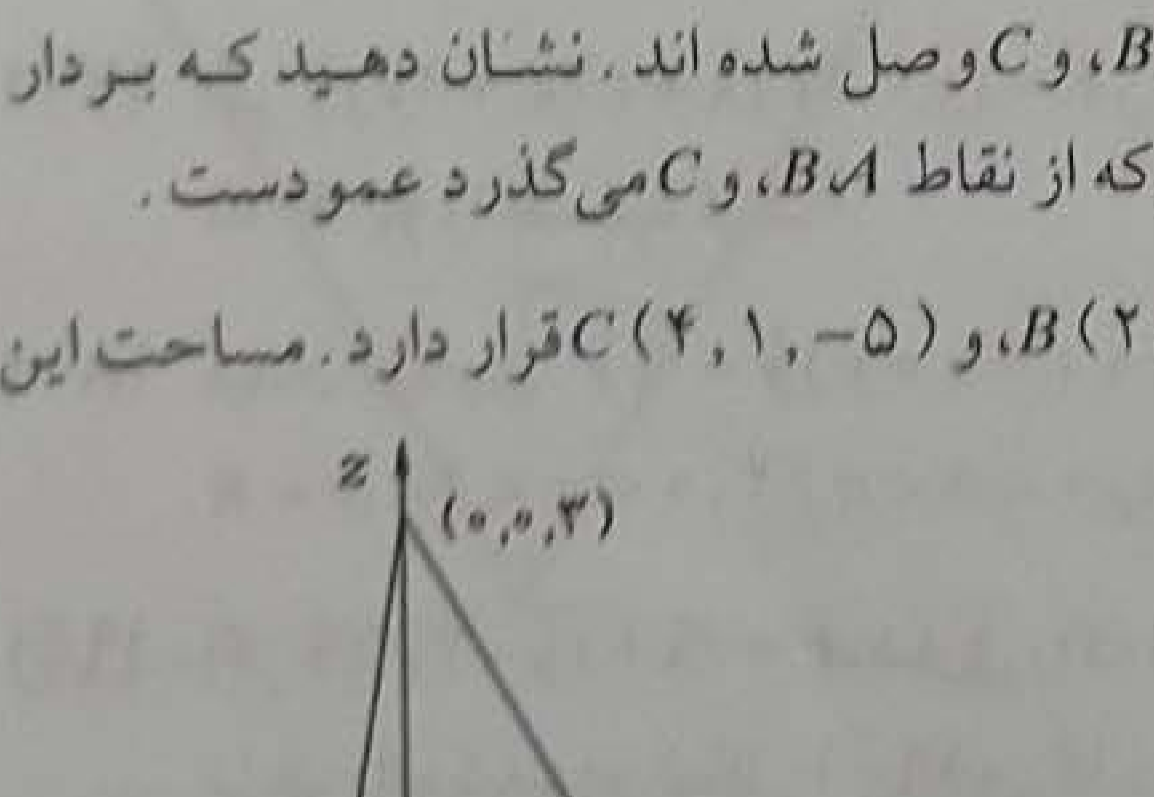
۲-۱ به ازای بردار های داده شده در مسئلهٔ ۱-۱، $A \times D$، $(A \times D) \cdot C$، $A \cdot (D \times C)$ و بردار یکه ای عمود بر D و C را بیابید.

۳-۱ A، B، و C سه بردار ی هستند که از مبدأ به نقاط A، B، و C وصل شده اند. نشان دهید که بردار $D = (A \times B) + (B \times C) + (C \times A)$ بر صفحه‌ای که از نقاط A، B، و C می گذرد عمود است.

۴-۱ رئوس یک مثلث در نقاط $A(-1, 6, 2)$، $B(2, 4, -3)$، و $C(4, 1, -5)$ قرار دارد. مساحت این مثلث را بیابید.

۵-۱ نشان دهید که اگر $A \cdot B = A \cdot C$، $A \times B = A \times C$ و A برداری غیر صفر باشد، آنگاه $B = C$.

۶-۱ بردار یکهٔ عمود بر سطح مثلثی نشان داده شده در شکل ۱-۶ را بیابید.



شکل ۱-۶

۱-۷ دو بردار $\mathbf{A} = \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \rho\,\hat{\mathbf{z}}$ و $\mathbf{B} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + ۲\,\hat{\mathbf{z}}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ را در نقطهٔ $(x=۲, y=۳, z=۴)$ بیابید.

۱-۸ دو بردار $\mathbf{F} = ۱۰\,\hat{\mathbf{r}} - ۳\hat{\boldsymbol{\theta}} + ۵\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و $\mathbf{G} = ۲\,\hat{\mathbf{r}} + ۵\hat{\boldsymbol{\theta}} + ۳\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ در نقطهٔ P داده شده است. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$، مولفهٔ $\mathbf{G}$ در امتداد $\mathbf{F}$، $\mathbf{G}\times\mathbf{F}$ و بردار یکه‌ای عمود بر $\mathbf{G}$ و $\mathbf{F}$ در نقطهٔ P را بیابید.

۱-۹ زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{A} = \frac{۱۰}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و $\mathbf{B} = \frac{۱۰}{r}\hat{\mathbf{r}}$ را در نقطهٔ $x=۱$، $y=۲$، $z=۳$ بیابید.

۱-۱۰ بردار $\mathbf{A} = (y+z)\,\hat{\mathbf{x}} + (x+z)\,\hat{\mathbf{y}} + (x+y)\,\hat{\mathbf{z}}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

۱-۱۱ میدان برداری $\mathbf{E} = (\cos\theta/r)\,\hat{\mathbf{r}} + (\sin\theta/r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ را در دستگاه مختصات قائم بیان کنید.

۱-۱۲ میدان برداری زیر را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

$$\mathbf{A} = y\,\hat{\mathbf{x}} + x\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{x^۲}{(x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\hat{\mathbf{z}}$$

۱-۱۳ میدان برداری $\mathbf{A} = x\,\hat{\mathbf{y}}$ را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بیان کنید.

۱-۱۴ میدان برداری زیر را در دستگاه مختصات قائم بیان کنید.

$$\mathbf{A} = z\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho^۲\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + ۱۶\,\rho\,\hat{\mathbf{z}}$$

۱-۱۵ مشتق $\partial\hat{\mathbf{r}}/\partial\varphi$ را به روش ترسیمی بیابید و جوابتان را به روش تحلیلی امتحان کنید. برای یادآوری

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = \underset{\Delta\varphi\to ۰}{\text{حد}}\frac{[\hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi+\Delta\varphi) - \hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi)]}{\Delta\varphi}$$

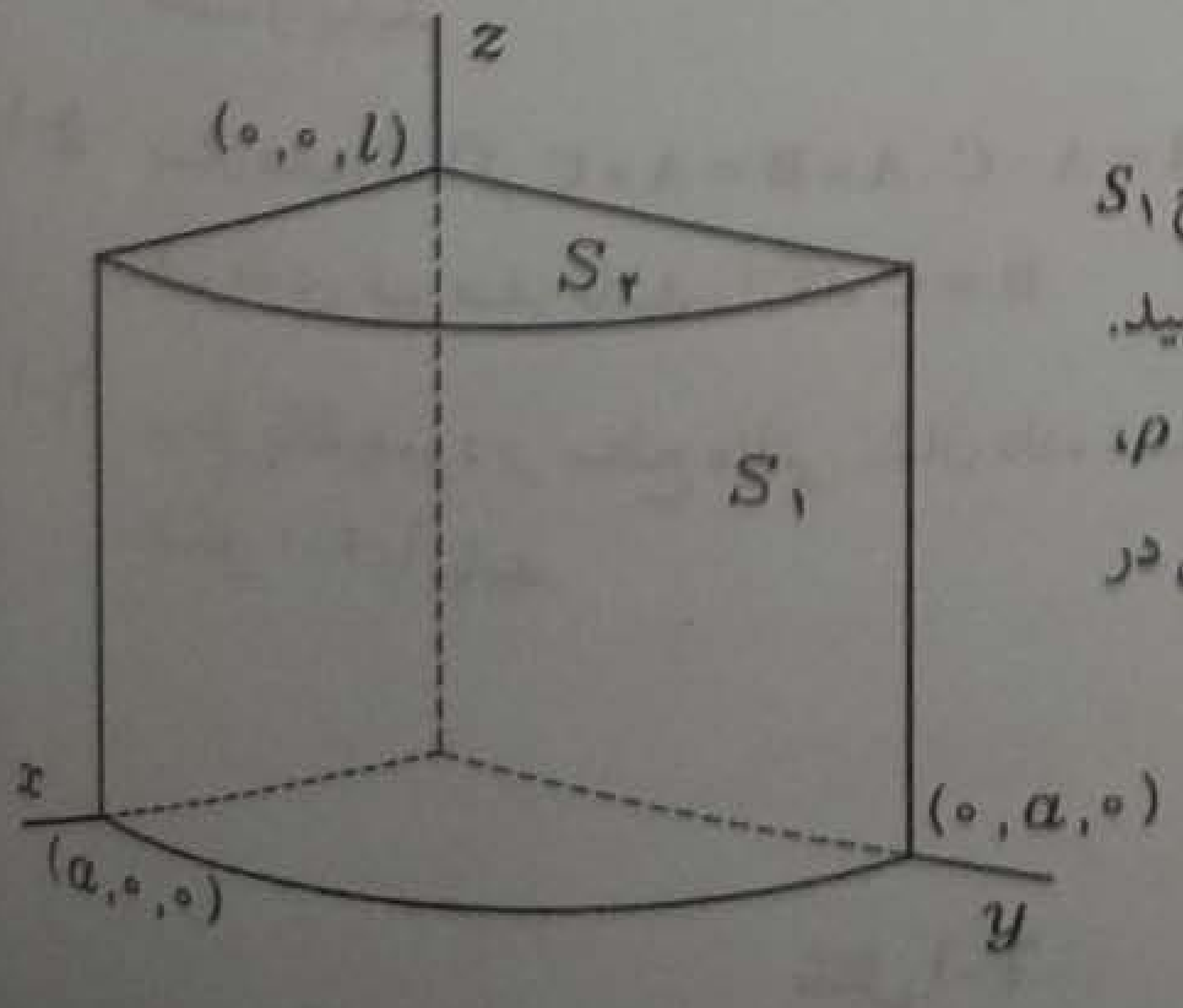
۱-۱۶ مشتق $\partial\hat{\mathbf{r}}/\partial\theta$ را به روش ترسیمی بیابید و جوابتان را به روش تحلیلی امتحان کنید. برای یادآوری

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\theta} = \underset{\Delta\theta\to ۰}{\text{حد}}\frac{[\hat{\mathbf{r}}(r,\theta+\Delta\theta,\varphi) - \hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi)]}{\Delta\theta}$$

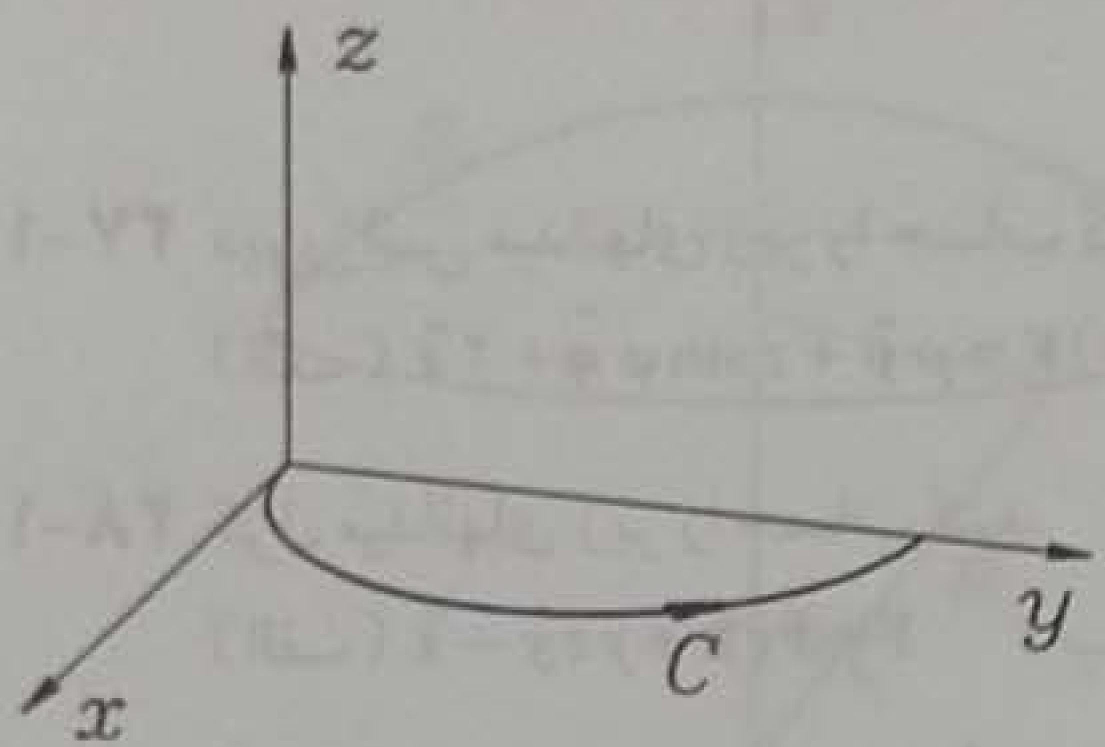
۱-۱۷ اگر $\mathbf{F} = (y-۲x)\,\hat{\mathbf{x}} + (۳x+۲y)\,\hat{\mathbf{y}}$ و C دایره‌ای به مرکز مبدا و به شعاع ۲ (در صفحهٔ xy) باشد، $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$ را حساب کنید.

۱-۱۸ میدان برداری $\mathbf{F} = (x+y)\,\hat{\mathbf{x}} + (-x+y)\,\hat{\mathbf{y}} - ۲z\,\hat{\mathbf{z}}$ را در نظر گرفته، $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ را روی نیمکرهٔ $r=R$، $۰<\varphi<۲\pi$، $۰<\theta<\pi/۲$ بیابید.

۱-۱۹ اگر $\mathbf{F} = z\,\hat{\mathbf{x}} + x\,\hat{\mathbf{y}} - ۳y^۲z\,\hat{\mathbf{z}}$، شاری را که از سطح $S_۱$ نشان داده شده در شکل ۱-۱۹ می‌گذرد را بیابید. S بخشی از یک استوانه است که با روابط $\rho=۴$، $۰\le\varphi\le\frac{\pi}{۲}$، $۰\le z\le ۵$ تعریف می‌شود. یعنی در شکل ۱-۱۹، $a=۴$ و $l=۵$.



شکل ۱-۱۹



شکل ۱-۲۰

۱-۲۰ مسیر نشان داده‌شده در شکل ۱-۲۰ یک نیمدایره به شعاع یک و مرکز (۰, ۱, ۰) است. انتگرال میدان برداری

$$\mathbf{A} = \rho^2 z\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\varphi\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \rho^2\cos^2\varphi\,\hat{\mathbf{z}}$$

را بر روی این مسیر بیابید. میدان $\mathbf{A}$ در مختصات استوانه‌ای بیان شده است.

۱-۲۱ اگر $\mathbf{F} = 3x^2\hat{\mathbf{x}} + 4xy\,\hat{\mathbf{y}}$، انتگرال خط $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$ را روی مسیری با معادلات پارامتری $x = 2\cos t$، $y = 3\sin t$ ($0 \le t \le \pi$) بیابید.

۱-۲۲ انتگرال میدان برداری

$$\mathbf{F} = 10x\,\hat{\mathbf{x}} - 5x^2y\,\hat{\mathbf{y}} + 3yz^2\,\hat{\mathbf{z}}$$

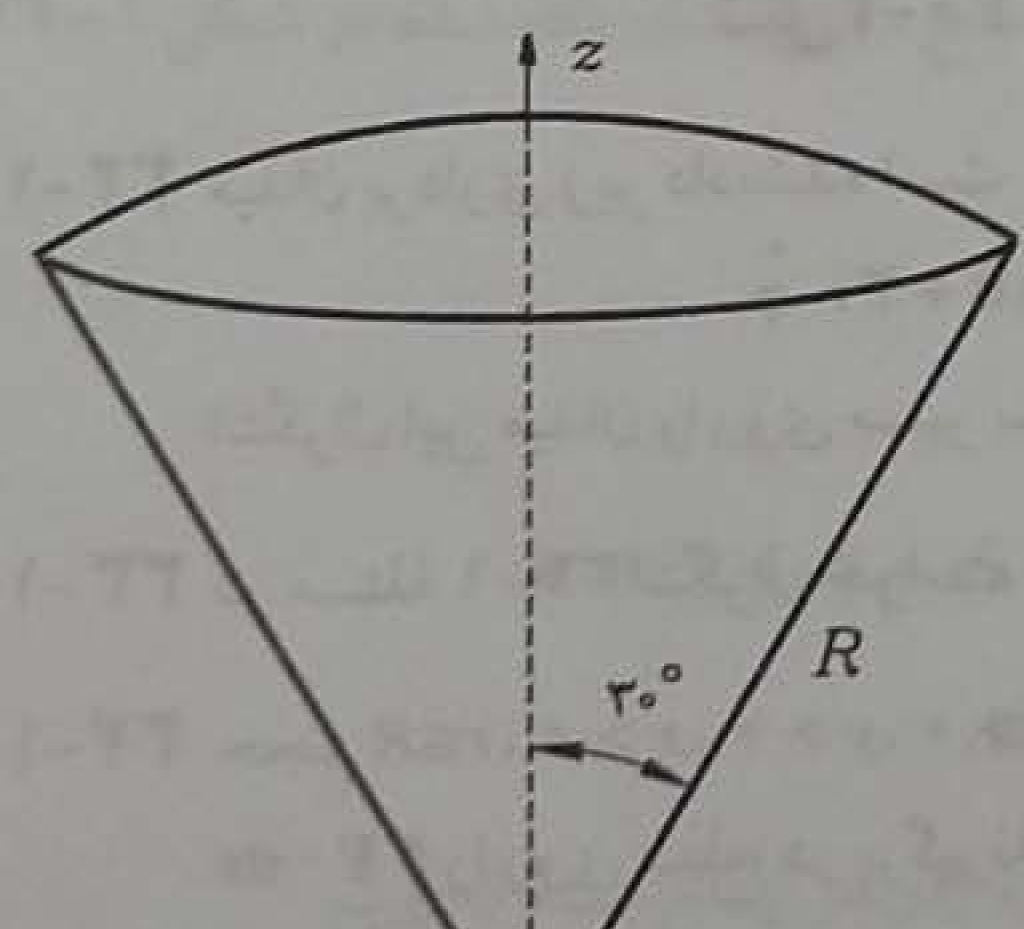
را روی مسیری که از برخورد سطوح $y=x^2$ و $z = 1$ به دست می‌آید، از نقطهٔ $P_1(0, 0, 1)$ تا نقطهٔ $P_2(2, 4, 1)$ محاسبه کنید.

۱-۲۳ در کره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدا مختصات باری با چگالی غیر ثابت $\rho = k(a-z)$ $\mathrm{C/m^3}$ توزیع شده‌است. کل بار داخل کره را بیابید.

۱-۲۴ حجم نشان داده شده در شکل ۱-۲۴ حجم تعریف شده به صورت $r \le R$، $0 < \varphi \le 2\pi$، $0 < \theta \le \pi/6$ است. این حجم شبیه یک بستنی قیفی است که یک استاد ریاضی آن را به دقت پر کرده باشد! تابع برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{F} = r^2\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + 4r^2\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\tan\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ را روی سطح بستهٔ در بر دارندهٔ حجم بیان شده در بالا بیابید.



شکل ۱-۲۴

۱-۲۵ سطح S بخشی از استوانه‌ای به شعاع ۲ و ارتفاع ۲ است، که قاعدهٔ آن در صفحهٔ xy قرار دارد و محور آن روی محور z واقع است. $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ را به ازای میدان برداری زیر حساب کنید.

$$\mathbf{F} = xy\,\hat{\mathbf{x}} - yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$$

۱-۲۶ گرادیان میدانهای زیر را حساب کنید.

(الف) $f = 5x + 10xz - xy + 6$ (ب) $g = 2r\cos\theta - 5\varphi + 2$ (کروی)

(ج) $h = 2\sin\varphi - \rho z + 4$ (استوانه‌ای)

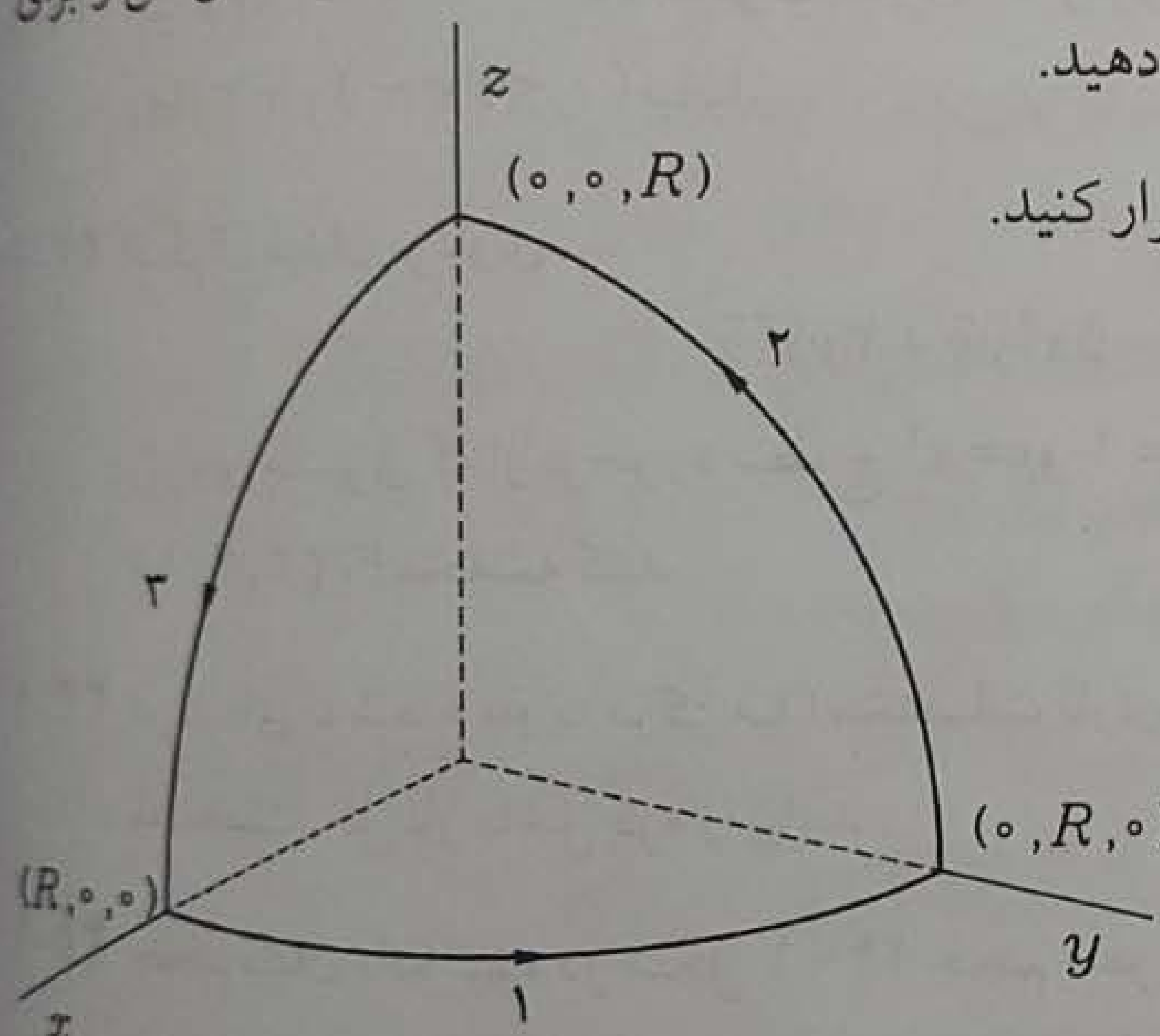
۱-۲۷ دیورژانس میدانهای زیر را حساب کنید.
(الف) $\mathbf{F}=\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+z\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}+2\hat{\mathbf{z}}$ (استوانه‌ای) (ب) $\mathbf{G}=2\hat{\mathbf{r}}+r\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ (کروی)

۱-۲۸ کرل میدانهای زیر را حساب کنید.
(الف) $\mathbf{F}=xy\hat{\mathbf{x}}+yz\hat{\mathbf{y}}-\hat{\mathbf{z}}$ (ب) $\mathbf{G}=2\hat{\boldsymbol{\rho}}+\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}-z\hat{\mathbf{z}}$ (استوانه‌ای)

۱-۲۹ کرل تابع برداری $\mathbf{A}=5e^{-\rho}\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}-5\cos\varphi\,\hat{\mathbf{z}}$ را روی صفحهٔ xz بیابید.

۱-۳۰ سطح نشان داده شده در شکل ۱-۳۰ یک هشتم کره‌ای به شعاع R واقع در فضای $x\geq 0$، $y\geq 0$، $z\geq 0$ است. جهت لبهٔ این سطح را به صورت نشان داده شده برگزینید و صحت قضیهٔ استوکس را برای این سطح و تابع برداری $\mathbf{F}=2r^2\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ نشان دهید.

۱-۳۱ مسئلهٔ ۱-۳۰ را با تابع $\mathbf{F}=\hat{\mathbf{r}}+\hat{\boldsymbol{\theta}}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ تکرار کنید.



شکل ۱-۳۰

۱-۳۲ میدان برداری زیر داده‌شده است

$$\mathbf{F}=(r\cos^2\theta)\,\hat{\mathbf{r}}-(r\sin\theta\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+3r\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

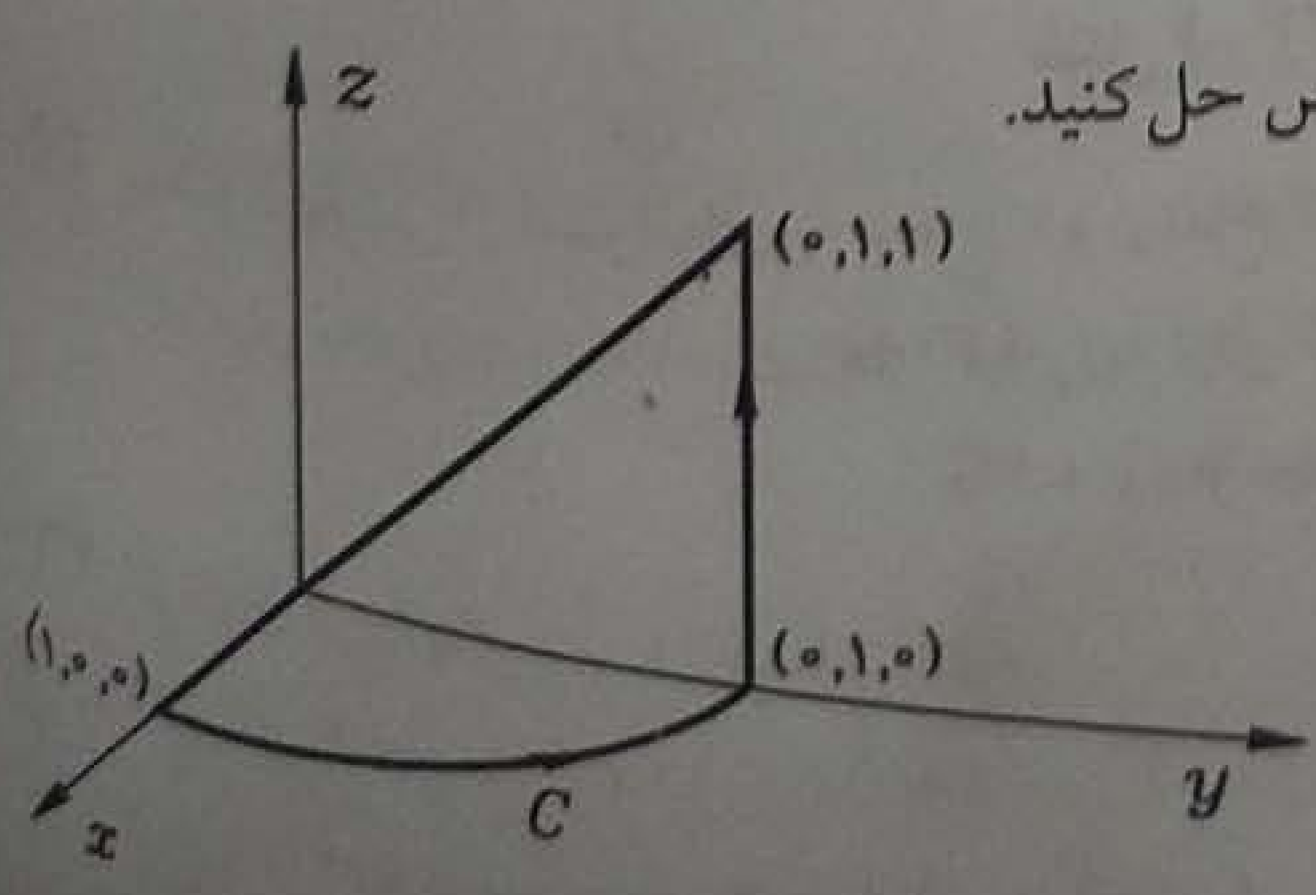
انتگرال این میدان را روی مسیر بستهٔ مشخص شده در شکل ۱-۳۲ بیابید.

۱-۳۳ در مسئلهٔ ۱-۳۲ انتگرال خواسته شده را با استفاده از قضیهٔ استوکس بیابید.

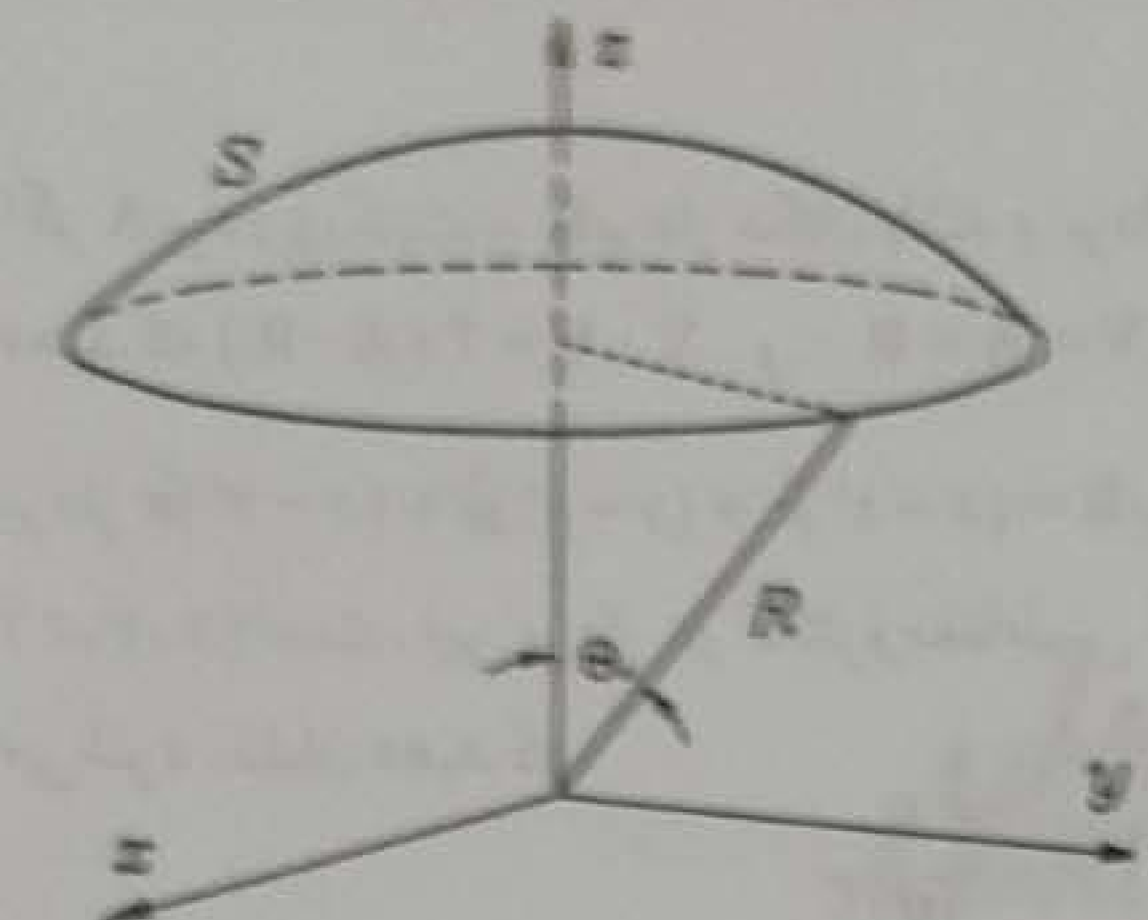
۱-۳۴ حجم $r\leq R$، $x>0$، $y>0$، $z>0$ یک هشتم کره‌ای به شعاع R است (شکل ۱-۳۰ را ببینید). $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ را روی سطح در برگیرندهٔ این حجم به دست آورید. $\mathbf{F}$ به صورت زیر است

$$\mathbf{F}=r^2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}+r^2\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}-r^2\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

۱-۳۵ مسئلهٔ ۱-۳۴ را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس حل کنید.



شکل ۱-۳۲



شکل ۱-۳۸

۱-۳۶ میدان برداری $\mathbf{A} = -2\hat{\mathbf{x}} - 2xz\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ و سطح مخروطی $\theta = \pi/4$، $0 < r < 2\sqrt{2}$ را در نظر گرفته، $\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$ را روی این سطح حساب کنید.

۱-۳۷ صحت قضیهٔ استوکس را در مورد میدان برداری $\mathbf{A} = x\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}} + 2xy\hat{\mathbf{z}}$ بر روی سطح نیمکرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$، $z \ge 0$ نشان دهید.

۱-۳۸ سطح بستهٔ S نشان داده شده در شکل ۱-۳۸ بخشی از کره‌ای به شعاع R، که برای آن $0 \le \theta \le \theta_0$، و یک دایره به شعاع $R\sin\theta_0$ است. میدان برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{D} = \frac{K_1}{r}\hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{K_2}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}$ را بیابید.

۱-۳۹ صحت قضیهٔ استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{A} = y\hat{\mathbf{z}}$ و سطح مثلثی نشان داده شده در شکل ۱-۳۹ نشان دهید.

۱-۴۰ ثابت کنید که برای هر سطح بستهٔ S داریم

$$\oint d\mathbf{s} = 0$$

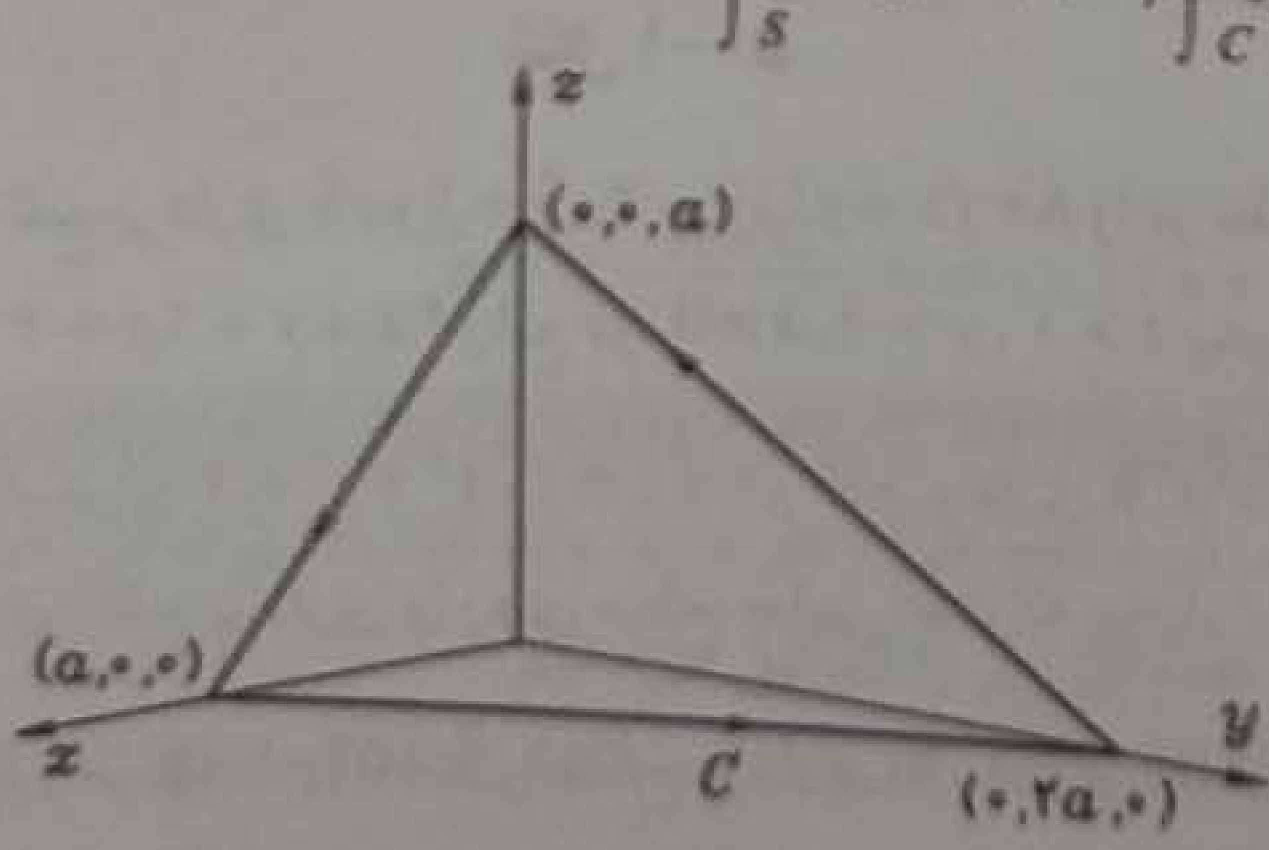
۱-۴۱ اگر $\mathbf{A}$ برداری ثابت باشد نشان دهید که $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}) = \mathbf{A}$. $\mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$.

۱-۴۲ نشان دهید که $\nabla\cdot\mathbf{R} = 3$ و $\nabla\times\mathbf{R} = 0$. $\mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$.

۱-۴۳ اگر $\mathbf{r}$ بردار مکان باشد، نشان دهید که برای هر مسیر بستهٔ C و هر سطح بستهٔ S داریم

$$\oint_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \oint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{s} = 3V$$

که V حجم داخل سطح بستهٔ S است.



شکل ۱-۳۹

۱-۴۴ اگر $\mathbf{A}$ برداری ثابت و $\mathbf{R}$ بردار مکان باشد و بردار $\mathbf{V}$ به صورت $\mathbf{V}=\mathbf{R}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})$ تعریف شود، نشان دهید که $\nabla\cdot\mathbf{V}=4(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})$ و $\nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{A}\times\mathbf{R}$.

۱-۴۵ بردار $\mathbf{R}=(x-x')\hat{\mathbf{x}}+(y-y')\hat{\mathbf{y}}+(z-z')\hat{\mathbf{z}}$ برداری است که ته آن نقطهٔ (x',y',z') و سر آن نقطهٔ (x,y,z) است. این بردار در الکترومغناطیس کاربرد زیادی دارد و در بسیاری از روابط ظاهر می‌شود. نشان دهید که

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{R}|}\right)=-\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^{3}}$$

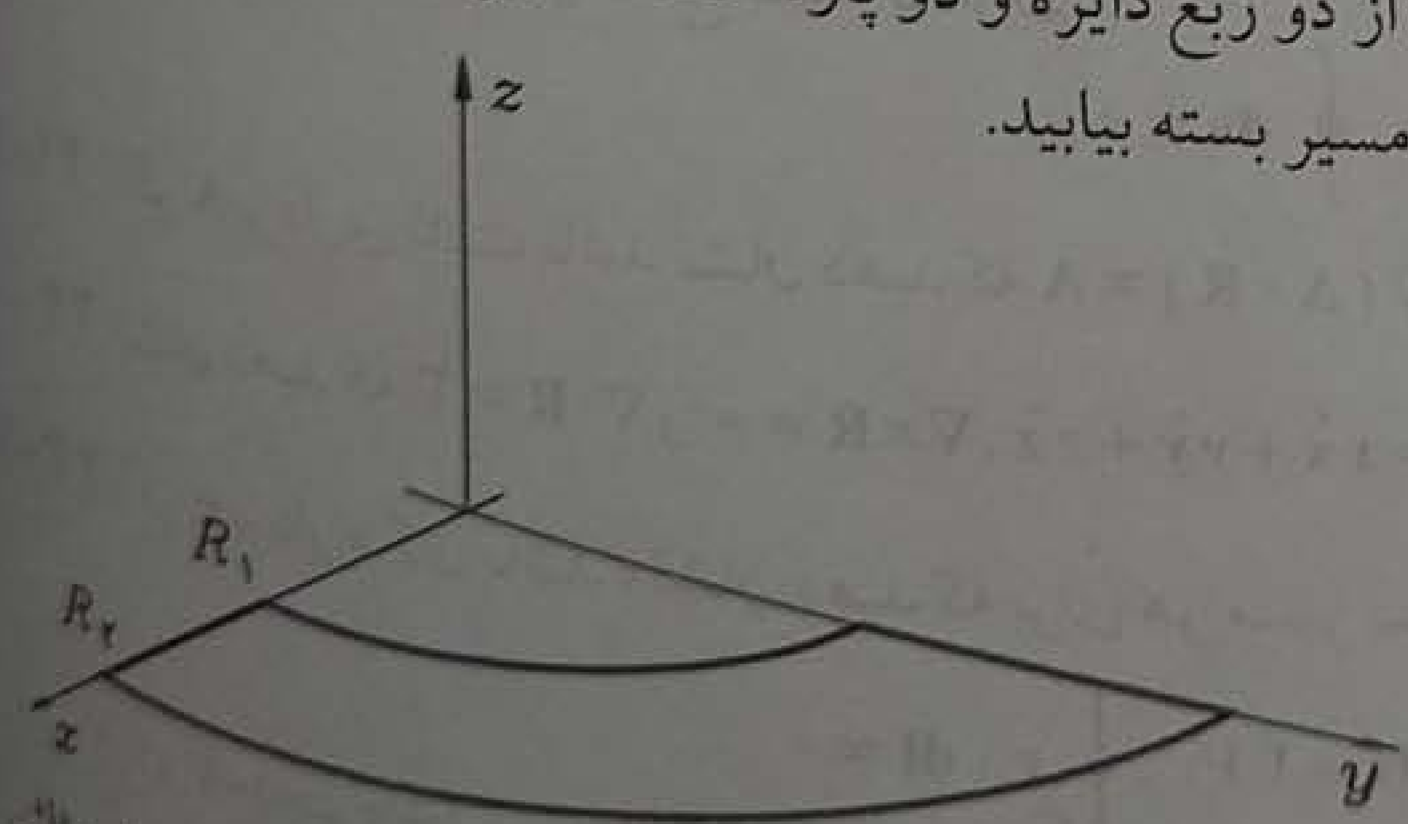
۱-۴۶ میدان برداری $\mathbf{F}=\rho^{-\frac{3}{2}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و دایرهٔ $\rho\le 1$، $z=0$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است. نشان دهید که قضیهٔ استوکس برای این میدان برداری و این سطح برقرار نیست.

۱-۴۷ میدان برداری $\mathbf{F}=\cot g\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ داده‌شده است. نیمکرهٔ $r=a$، $0\le\varphi\le 2\pi$، $0\le\theta\le\pi/2$ را در نظر بگیرید. لبهٔ این نیمکره دایره‌ای به شعاع a، به مرکز مبدا و واقع در صفحهٔ $z=0$ است. آیا برای این سطح و این میدان قضیهٔ استوکس برقرارست؟

۱-۴۸ سطح استوانه‌ای $\rho=2$، $z=1$، و $z=5$، و میدان $\mathbf{B}=10\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+3\rho\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}-2z\rho\,\hat{\mathbf{z}}$ را در نظر بگیرید. انتگرال $\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ را روی این سطح حساب کنید.

۱-۴۹ سطح $\rho=2$، $\pi/4\le\varphi\le\pi/2$، $1\le z\le 1/5$ را رسم کنید. میدان $\mathbf{F}=2\rho^{2}(z+1)\sin^{2}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ را در نظر گرفته، $\int(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{s}$ را به دست آورید. درستی جواب را به کمک قضیهٔ استوکس بررسی کنید.

۱-۵۰ مسیر نشان داده شده در شکل ۱-۵۰ از دو ربع دایره و دو پاره خط تشکیل شده است. انتگرال تابع برداری $\mathbf{V}=(1/\rho)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ را روی این مسیر بسته بیابید.



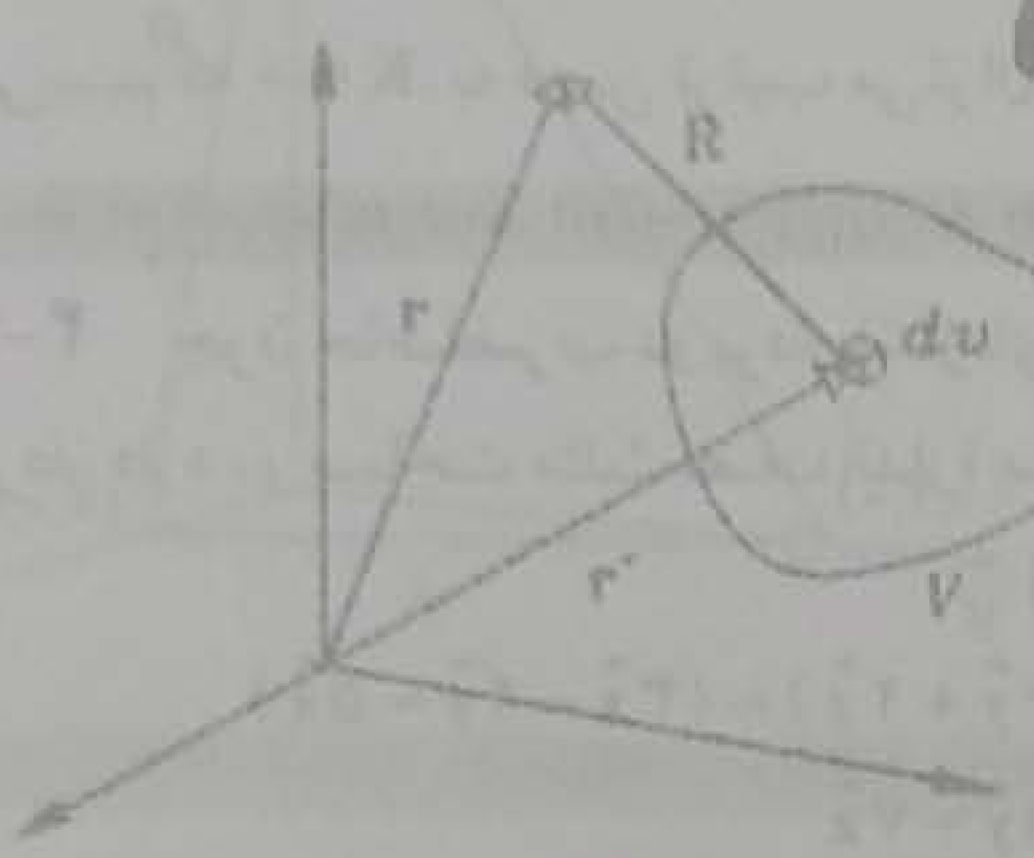
شکل ۱-۵۰

۱-۵۱ تابع برداری $\mathbf{A}=(x+y^{2})\hat{\mathbf{x}}-2x\hat{\mathbf{y}}+2yz\hat{\mathbf{z}}$ را در نظر بگیرید. انتگرال این تابع را روی سطح مثلثی $2x+y+2z=6$ واقع در $x>0$، $y>0$، $z>0$ بیابید.

۱-۵۲ استوانهٔ $x^{2}+y^{2}=4$، $0\le z\le 3$ و تابع برداری $\mathbf{F}=4x\hat{\mathbf{x}}-2y^{2}\hat{\mathbf{y}}+z^{2}x^{2}\hat{\mathbf{z}}$ را در نظر بگیرید. انتگرال این تابع برداری را روی سطح جانبی استوانه بیابید.

۱-۵۳ در مسئلهٔ ۱-۵۲ انتگرال تابع برداری $\mathbf{F}$ را روی قاعدهٔ بالایی استوانه بیابید.

حل مسایل فصل ۱



۱-۱ داریم $A + ۳D = \hat{x} + ۱۲\hat{y} - ۷\hat{z}$ ، $D - C = -۳\hat{x} + ۵\hat{y} - ۵\hat{z}$ و $|D - C| = ۷٫۶۸$. بردار یکه مطلوب عبارت است از

$$\frac{D - C}{|D - C|} = -۰٫۳۹\hat{x} + ۰٫۶۵\hat{y} - ۰٫۶۵\hat{z}$$

مولفهٔ C در امتداد D عبارت است از

$$(C \cdot \hat{d})\hat{d} = \frac{C \cdot D}{|D|}\hat{d} = \frac{(C \cdot D)D}{D^۲} = \frac{-۶D}{۲۶} = -۰٫۲۳\hat{x} - ۰٫۶۹\hat{y} + ۰٫۹۲\hat{z}$$

زاویهٔ بین A و C برابرست با

$$\cos^{-۱} = \frac{A \cdot C}{|A||C|} = \cos^{-۱}\frac{-۹}{\sqrt{۳۸}\sqrt{۲۱}} = \cos^{-۱}(-۰٫۳۱۸) = ۱۰۸٫۶$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 | \nabla\times B=\mu J | \nabla\times H=J | \nabla\cdot B=0 | \nabla\cdot D=\rho | \nabla\times E=0 | \oint D\cdot ds=Q | \int J\cdot ds=I | \oint H\cdot dl=I | \oint B\cdot ds=0 | \oint E\cdot dl=0$

۲-۱ به ترتیب به دست می‌آوریم $A \times D = -۲۷\hat{x} - ۳\hat{y} - ۹\hat{z}$ ، $(A \times D) \cdot C = -۱۱۱$ ، و $A \cdot (D \times C) = -۱۱۱$.

$D \times C$ بر D و C عمودست. پس

$$\hat{n} = \pm\frac{D \times C}{|D \times C|} = \pm(۰٫۲۲\hat{x} + ۰٫۷۵\hat{y} + ۰٫۶۲\hat{z})$$

$\nabla\cdot\nabla\times A=0 | \nabla\times B=\mu J | \nabla\times H=J | \nabla\cdot B=0 | \nabla\cdot D=\rho | \nabla\times E=0 | \oint D\cdot ds=Q | \int J\cdot ds=I | \oint H\cdot dl=I | \oint B\cdot ds=0 | \oint E\cdot dl=0$

۳-۱ $A - B$ و $B - C$ دو بردار متفاوت واقع در صفحهٔ مورد نظرست. باید ثابت کنیم که این دو بردار بر بردار مورد نظر عمودند. به این منظور ضرب نقطه ای زیر را تشکیل می‌دهیم

$$K = D \cdot (A - B) = [(A \times B) + (B \times C) + (C \times A)] \cdot (A - B)$$
$$= (A \times B) \cdot A + (B \times C) \cdot A + (C \times A) \cdot A$$

$$-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{B}-(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{B}-(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$$

چون $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمودست، جملات اول و چهارم صفرند، همچنین $\mathbf{C}\times\mathbf{A}$ بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ بر $\mathbf{B}$ عمودست، پس جملات سوم و پنجم نیز صفرند و

$$K=(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}-(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$$

با توجه به اتحاد زیر

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

می‌بینیم که $K=0$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $\mathbf{B}-\mathbf{C}$ نیز بر بردار $\mathbf{D}$ عمودست.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۴-۱ چون حاصلضرب دو بردار اندازه‌ای برابر اندازهٔ مساحت متوازی الاضلاع تشکیل شده توسط دو بردار دارد، و مساحت مثلث نصف اندازهٔ مساحت متوازی الاضلاع است

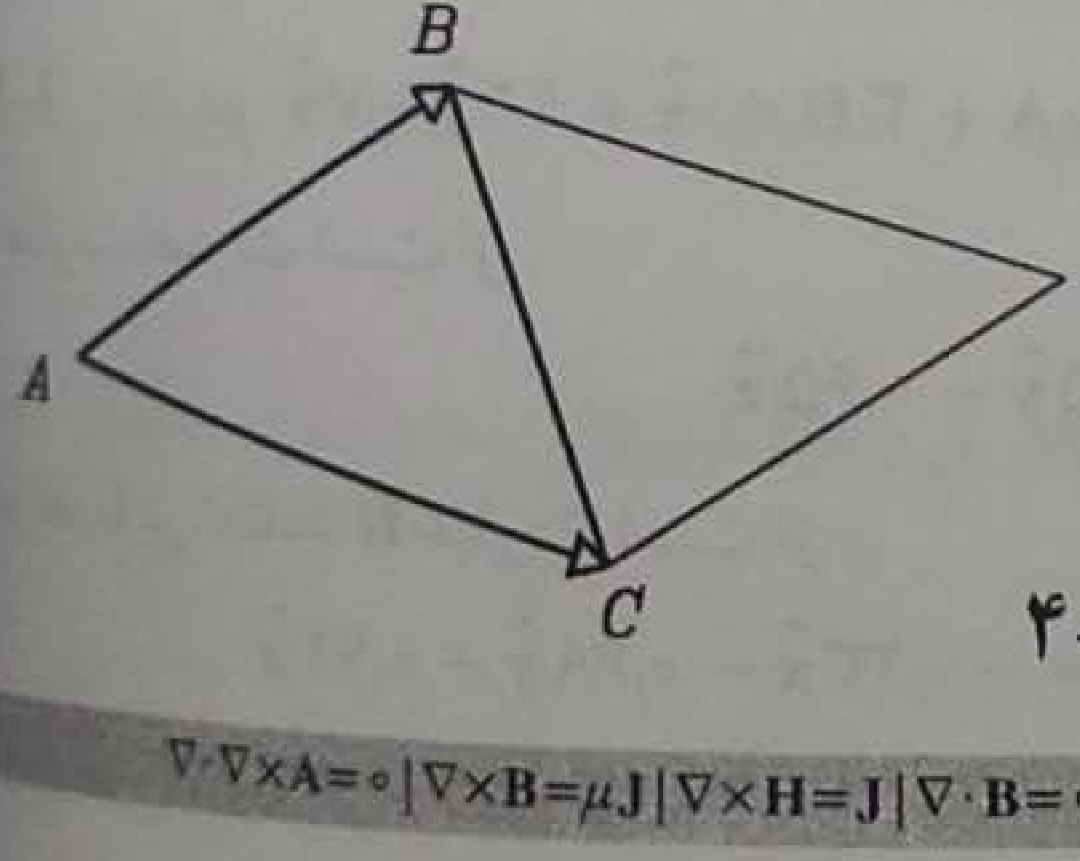
$$S=\frac{1}{2}\,|AB\times AC|$$

$$AB=OB-OA=(2\hat{\mathbf{x}}+4\hat{\mathbf{y}}-3\hat{\mathbf{z}})-(-\hat{\mathbf{x}}+6\hat{\mathbf{y}}+2\hat{\mathbf{z}})=(3\hat{\mathbf{x}}-2\hat{\mathbf{y}}-5\hat{\mathbf{z}})$$

$$AC=OC-OA=5\hat{\mathbf{x}}-5\hat{\mathbf{y}}-7\hat{\mathbf{z}}$$

$$AB\times AC=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ 3 & -2 & -5\\ 5 & -5 & -7\end{vmatrix}=-11\hat{\mathbf{x}}-4\hat{\mathbf{y}}-5\hat{\mathbf{z}}$$

$$S=\frac{1}{2}(12/73)=6/36$$



شکل ح ۱-۴

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۵-۱ دو طرف معادلهٔ اول را از طرف راست در $\mathbf{C}$ ضرب خارجی می‌کنیم

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\times\mathbf{C}$$

با استفاده از اتحاد

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

دو طرف را بسط می‌دهیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$$

طرف راست برابر صفرست، پس

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=0$$

چون $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$، داریم $\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{B}-\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=0$، پس $\mathbf{B}-\mathbf{C}=0$ که برابری $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را نتیجه می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times A=0\,|\,\nabla\times B=\mu J\,|\,\nabla\times H=J\,|\,\nabla\cdot B=0\,|\,\nabla\cdot D=\rho\,|\,\nabla\times E=0\,|\,\oint D\cdot ds=Q\,|\,\int J\cdot ds=I\,|\,\oint H\cdot dl=I\,|\,\oint B\cdot ds=0\,|\,\oint E\cdot dl=0$

۱-۶ دو بردار نشان داده شده در شکل ح ۱-۶ را به دست می‌آوریم

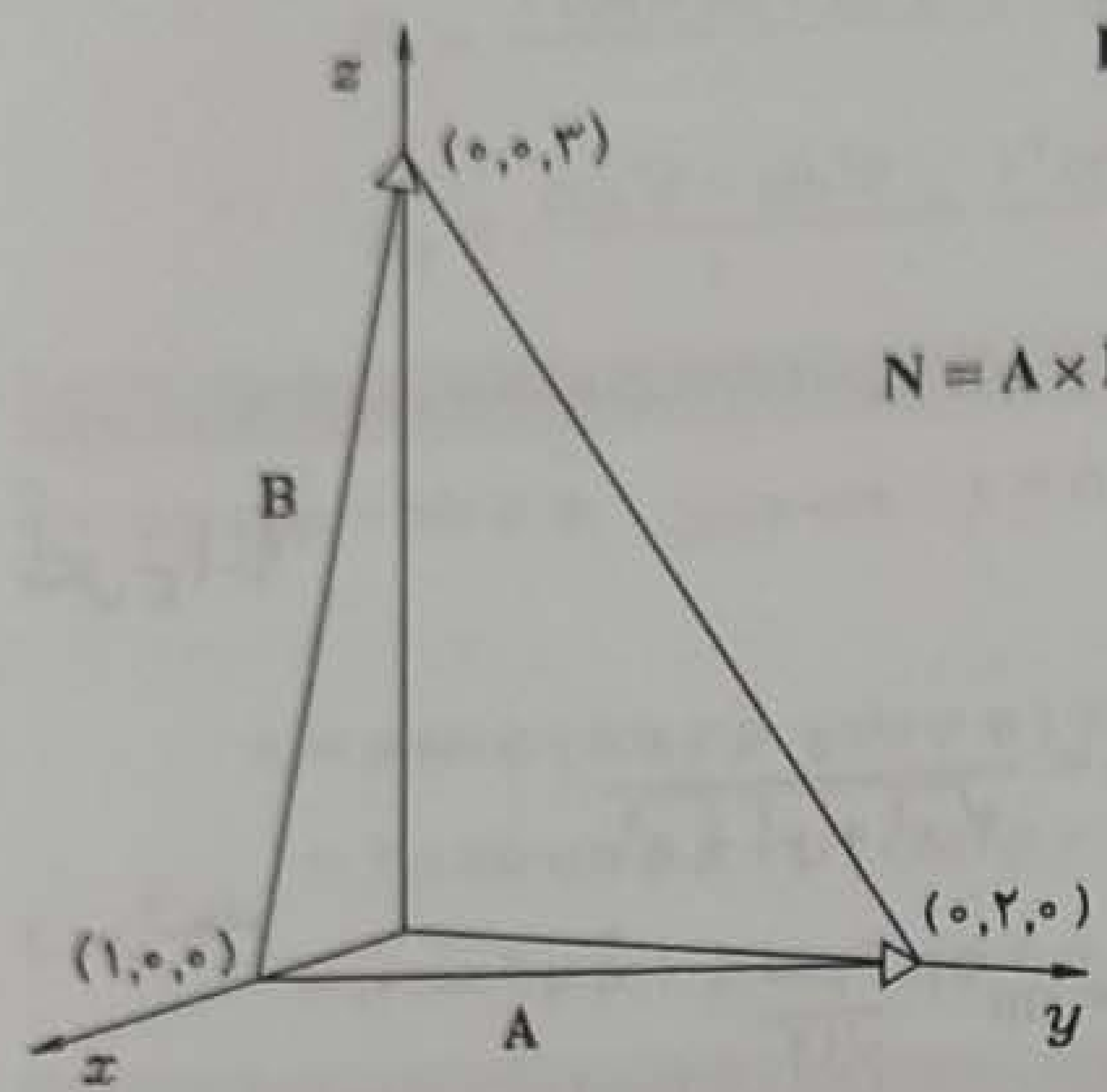
$$\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}$$
$$\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{z}}$$

بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر سطح مثلثی شکل عمود است

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{6\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6}{7}\hat{\mathbf{x}} + \frac{3}{7}\hat{\mathbf{y}} + \frac{2}{7}\hat{\mathbf{z}}$$



شکل ح ۱-۷

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۷ داریم $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + 2\rho$. در نقطهٔ مورد نظر

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{13}$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$
$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

پس

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sqrt{13}\times\frac{2}{\sqrt{13}} + \sqrt{13}\times\frac{3}{\sqrt{13}} + 2\sqrt{13} = 5 + 2\sqrt{13}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۸ داریم $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G} = 20 - 15 + 15 = 20$،

$$\mathbf{G}_F = (\mathbf{G}\cdot\hat{\mathbf{f}})\hat{\mathbf{f}} = \frac{(\mathbf{G}\cdot\mathbf{F})\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|^2} = \frac{20\,\mathbf{F}}{134} = 1.49\,\hat{\mathbf{r}} - 0.45\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + 0.75\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

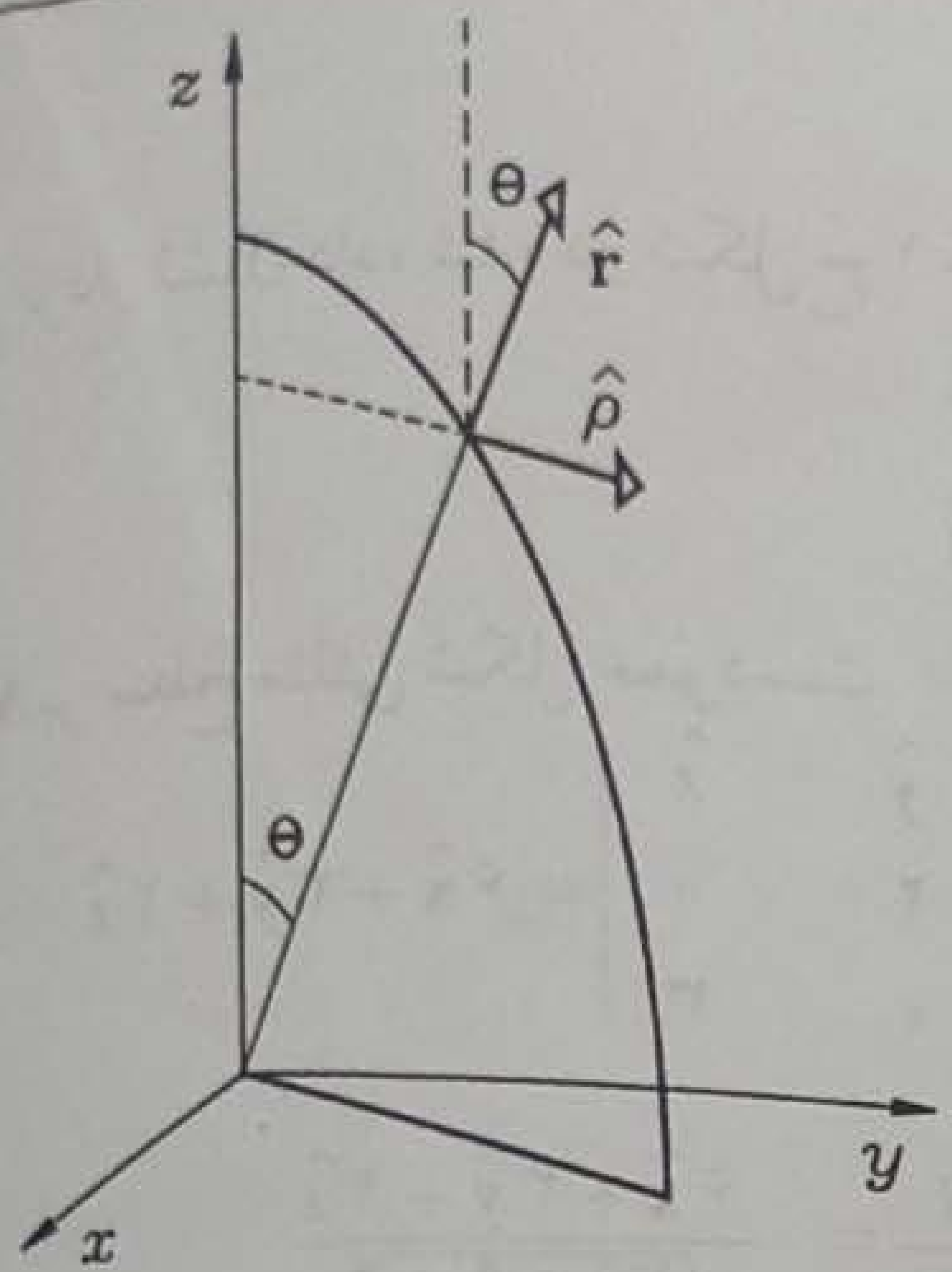
$$\mathbf{G}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ 2 & 5 & 3 \\ 10 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 34\,\hat{\mathbf{r}} + 20\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - 56\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{\mathbf{G}\times\mathbf{F}}{|\mathbf{G}\times\mathbf{F}|} = \pm\frac{34\,\hat{\mathbf{r}} + 20\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - 56\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{68.5} = (0.496\,\hat{\mathbf{r}} + 0.292\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - 0.818\,\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$

توجه کنید که درستی روش به کار رفته بر این نکته مبتنی است که $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ در یک نقطه تعریف شده‌اند.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۹ یک روش حل این مسئلهٔ استفاده از ضرب نقطه‌ای است، ولی راه ساده‌تر حل این مسئله توجه به این نکته است که بردار $\mathbf{A}$ در جهت $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و بردار $\mathbf{B}$ در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ است و کافی است زاویهٔ بین این دو بردار را بیابیم. با توجه به شکل ح ۱-۹ می‌بینیم که زاویهٔ بین دو بردار $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و $\hat{\mathbf{r}}$ برابر $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ است. پس



شکل ح ۱-۹

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}}$$

و سرانجام

$$\alpha = \sin^{-۱}\frac{z}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}} = \sin^{-۱}\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=\circ \mid \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \mid \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱-۱۰ داریم $x = \rho\cos\varphi$، $y = \rho\sin\varphi$ و $z = z$. با استفاده از ماتریس تبدیل به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \circ \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho\sin\varphi + z \\ \rho\cos\varphi + z \\ \rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rho\sin\varphi\cos\varphi + z\cos\varphi + \rho\sin\varphi\cos\varphi + z\sin\varphi \\ -\rho\sin^{۲}\varphi - z\sin\varphi + \rho\cos^{۲}\varphi + z\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi \end{bmatrix}$$

پس

$$A_\rho = \rho\sin ۲\varphi + z(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$A_\phi = \rho\cos ۲\varphi - z(\sin\varphi - \cos\varphi)$$

$$A_z = \rho(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=\circ \mid \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \mid \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱-۱۱ ابتدا مولفهٔ ها را در مختصات قائم بیان می‌کنیم

$$\mathbf{E} = \frac{\cos\theta}{r}(\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}) + \frac{\sin\theta}{r}(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}})$$

حال هر مولفهٔ را به مختصات قائم می‌بریم

$$E_x = \frac{2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{r} = \frac{2(r\cos\theta)(r\sin\theta\cos\varphi)}{r^3} = \frac{2zx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_y = \frac{2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi}{r} = \frac{2(r\cos\theta)(r\sin\theta\sin\varphi)}{r^3} = \frac{2zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_z = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r} = \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^3} = \frac{z^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

۱-۱۲ داریم $(x^2+y^2)=\rho^2$ ، $x=\rho\cos\varphi$ و $y=\rho\sin\varphi$. همچنین $\hat{\mathbf{x}}=\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}-\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و $\hat{\mathbf{y}}=\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. پس

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \rho\sin\varphi(\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}-\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}})+\rho\cos\varphi(\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}})+\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\rho}\hat{\mathbf{z}}\\ &= 2\rho\sin\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\rho\cos^2\varphi\,\hat{\mathbf{z}}\\ &= \rho\sin 2\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho\cos 2\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\rho\cos^2\varphi\,\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

۱-۱۳ در مختصات استوانه‌ای $x=\rho\cos\varphi$ و $\hat{\mathbf{y}}=\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. پس

$$\mathbf{A}=\rho\cos\varphi\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho\cos^2\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

در مختصات کروی $x=r\sin\theta\cos\varphi$ و $\hat{\mathbf{y}}=\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{r}}+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}\\ &= r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\hat{\mathbf{r}}+r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta\cos^2\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}$$

۱-۱۴ باتوجه به این نکته که $\hat{\boldsymbol{\rho}}=\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}}+\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}=-\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}}+\cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}$ داریم

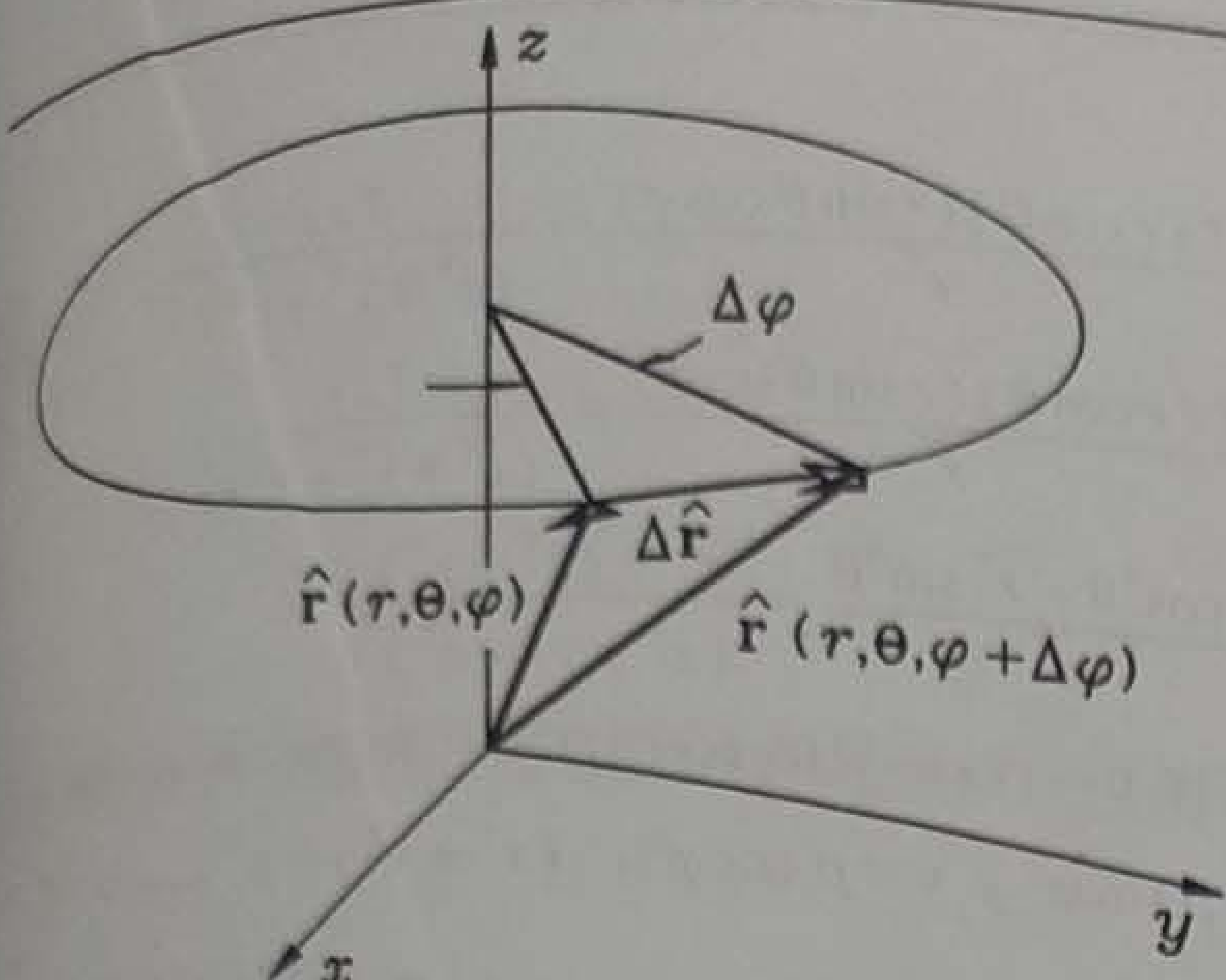
$$\mathbf{A}=z\cos\varphi(\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}}+\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}})+\rho^2\sin\varphi(-\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}}+\cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}})+16\rho\hat{\mathbf{z}}$$

$$\begin{aligned}A_x &= z\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi = z\frac{x^2}{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\frac{y^2}{x^2+y^2}\\ &= \frac{zx^2}{x^2+y^2}-y^2\\ A_y &= z\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin\varphi\cos\varphi=(z+\rho^2)\sin\varphi\cos\varphi\\ &= (z+x^2+y^2)\frac{xy}{x^2+y^2}\\ A_z &= 16\rho = 16\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

۱-۱۵ شکل ح ۱-۱۵ دو بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi)$ و $\hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi+\Delta\varphi)$ را نشان می‌دهد. این دو بردار روی یک مخروط قرار می‌گیرند و بردار

$$\Delta\hat{\mathbf{r}}=\hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi+\Delta\varphi)-\hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi)$$

به صورت نشان داده شده در شکل از راس بردار $\hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi)$ به راس بردار $\hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi+\Delta\varphi)$ وصل شده است. جهت این بردار $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و طول آن برابر حاصل ضرب $\Delta\varphi$ در شعاع دایرهٔ قاعدهٔ مخروط است. چون یال مخروط دارای طول واحد است (بردار یکه طولی برابر واحد دارد) این شعاع برابر $\sin\theta$ است و



شکل ح ۱-۱۵

پس $\Delta\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\,\Delta\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = \sin\theta\;\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

برای یافتن مشتق به روش تحلیلی می‌نویسیم

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = -\sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + 0$$

$$= \sin\theta\,(-\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{y}}) = \sin\theta\;\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۱۶ شکل ح ۱-۱۶ دو بردار $\hat{\mathbf{r}}$، یکی در نقطهٔ (r,θ,φ) و یکی در نقطهٔ $(r,\theta+\Delta\theta,\varphi)$ را نشان می‌دهد. تفاضل این دو بردار نیز در شکل مشخص شده‌است. به راحتی پیداست که طول بردار تفاضل $\Delta\theta\times 1$ و جهت آن $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است. توجه کنید که چون طول بردارهای یکه برابر واحدست، شعاع ربع دایرهٔ رسم شده در شکل یک است. پس

$$\hat{\mathbf{r}}(r,\theta+\Delta\theta,\varphi) - \hat{\mathbf{r}}(r,\theta,\varphi) = \Delta\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

بنابراین

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

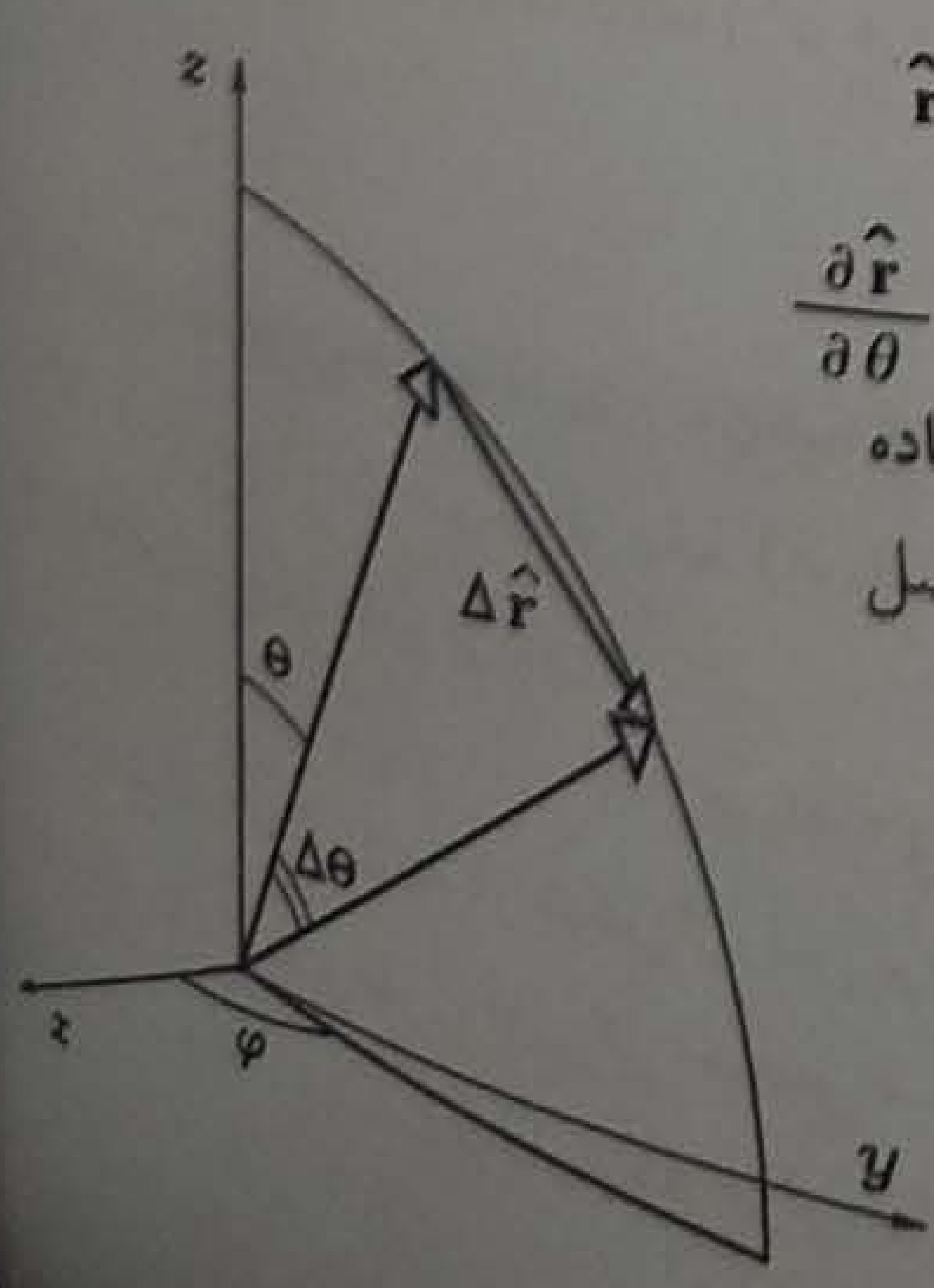
برای یافتن مشتق مورد نظر به صورت تحلیلی می‌نویسیم

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

در این مشتقگیری از $\partial\hat{\mathbf{x}}/\partial\theta = \partial\hat{\mathbf{y}}/\partial\theta = \partial\hat{\mathbf{z}}/\partial\theta = 0$ استفاده کرده‌ایم، زیرا $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ بردارهای ثابتی هستند. می‌بینیم که حاصل مشتقگیری همان بردار یکهٔ $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است.



شکل ح ۱-۱۶

۱۷-۱ حل مسئله در مختصات استوانه‌ای ساده‌تر است. در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\mathbf{dl} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\, d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

روی مسیر داده شده تنها φ تغییر می‌کند و $\rho = ۲$، پس $\mathbf{dl} = ۲\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = ۲\,d\varphi\,(y - ۲\,x)(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + ۲\,d\varphi\,(۳\,x + ۲\,y)(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$

چون $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi$ ، $\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \cos\varphi$ ، $x = ۲\cos\varphi$ و $y = ۲\sin\varphi$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = ۲\,d\varphi\,[\,(۲\sin\varphi - ۴\cos\varphi)(-\sin\varphi) + (۶\cos\varphi + ۴\sin\varphi)(\cos\varphi)\,]$$

$$= (-۴\sin^۲\varphi + ۱۶\sin\varphi\cos\varphi + ۱۲\cos^۲\varphi)\,d\varphi$$

و سرانجام

$$\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = -۴\int_۰^{۲\pi}\sin^۲\varphi\,d\varphi + ۱۶\int_۰^{۲\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi + ۱۲\int_۰^{۲\pi}\cos^۲\varphi\,d\varphi$$

$$= -۴\pi + ۰ + ۱۲\pi = ۸\pi$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=۰$

۱۸-۱ عنصر سطح عبارت است از

$$\mathbf{ds} = R^۲\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{\mathbf{r}}$$

حال باید $\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$ را حساب کنیم. چون $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\varphi$ ، $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\varphi$ ، $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta$ ، $x = r\sin\theta\cos\varphi$ ، $y = r\sin\theta\sin\varphi$ و $z = r\cos\theta$ ، با کمی عملیات جبری به دست می‌آوریم

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = R^۳(\sin^۳\theta - ۲\cos^۲\theta\sin\theta)\,d\theta\,d\varphi$$

$$\int\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = R^۳\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi/۲}(\sin^۳\theta - ۲\cos^۲\theta\sin\theta)\,d\theta\,d\varphi$$

$$= ۲\pi R^۳\left\{\int_۰^{\pi/۲}\sin^۳\theta\,d\theta - \int_۰^{\pi/۲}۲\cos^۲\theta\sin\theta\,d\theta\right\}$$

$$= ۲\pi R^۳\left(\frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳}\right) = ۰$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=۰$

۱۹-۱ در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\mathbf{ds} = \rho\,d\varphi\,dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = ۴\,d\varphi\,dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = ds\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}} = z(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}) + x(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}) - ۳y^۲z(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}})$$

$$= z\cos\varphi + x\sin\varphi - ۰$$

$$= z\cos\varphi + ۴\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\int\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \int\mathbf{F}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}\,ds = \int_۰^{۵}\int_۰^{\pi/۲}۴(z\cos\varphi + ۴\cos\varphi\sin\varphi)\,dz\,d\varphi$$

$$= ۴\int_۰^{۵}z\,dz\int_۰^{\pi/۲}\cos\varphi\,d\varphi + ۱۶\int_۰^{۵}dz\int_۰^{\pi/۲}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= ۴\times\frac{۲۵}{۲}\times ۱ + ۱۶\times ۵\times\frac{۱}{۲} = ۹۰$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=۰$

۱-۲۰ عنصر طول در مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$\mathbf{dl} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\, d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

پس

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} = \rho^2 z\, d\rho + \sin\varphi\cos\varphi\,\rho\, d\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\, dz$$

معادلهٔ مسیر در مختصات استوانه‌ای $\rho = 2\sin\varphi$ است. همچنین بر روی این مسیر $z = 0$، پس

$$\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,\cos\varphi\rho\, d\varphi + \int_0^0 \rho^2\cos^2\varphi\, dz$$

انتگرال دومی صفرست. در انتگرال اولی به جای ρ مقدار آن یعنی $2\sin\varphi$ را می‌گذاریم، پس

$$\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۲۱ داریم

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = 3x^2\, dx + 4xy\, dy = 12\cos^2 t\, dx + 24\cos t\sin t\, dy$$

$$dx = -2\sin t\, dt \quad , \quad dy = 3\cos t\, dt$$

پس

$$\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \int_0^{\pi} 48\cos^2 t\sin t\, dt$$

$$= -16\cos^3 t \Big|_0^{\pi} = 32$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۲۲ مسئله را در دستگاه مختصات قائم حل می‌کنیم

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = 10x\, dx - 5x^2 y\, dy + 3yz^2\, dz$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \int_0^2 10x\, dx - \int_0^4 5x^2 y\, dy + \int_1^1 3yz^2\, dz$$

در محاسبهٔ انتگرال دوم از این مطلب که $y = x^2$ استفاده می‌کنیم

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = 5x^2 \Big|_0^2 - \frac{5}{3}y^3 \Big|_0^4 + 0 = 20 - 106{,}7 = -86{,}7$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۲۳ مسئله را در دستگاه مختصات کروی حل می‌کنیم

$$Q = \int \rho\, dv = \int k(a-z)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= k\iiint (a - r\cos\theta)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= ۲\pi k \int_۰^a r^۲ \int_۰^\pi (a - r\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, dr$$

$$= ۲\pi k \int_۰^a r^۲ \left(-a\cos\theta + \frac{۱}{۴} r\cos ۲\theta\right)\Big|_۰^\pi dr$$

$$= ۴\pi a k \int_۰^a r^۲ dr = \frac{۴}{۳}\pi k a^۴$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱-۲۴ روی بخش کروی سطح $\mathbf{ds}_۱ = R^۲\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{\mathbf{r}}$ و

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}_۱ = R^۲\sin\theta\, r^۲\, d\theta\, d\varphi$$

که در آن باید بگذاریم $r = R$. پس

$$\int_{S_۱} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}_۱ = R^۴ \int_۰^{\pi/۶} \sin^۲\theta\, d\theta \int_۰^{۲\pi} d\varphi$$

$$= R^۴ \times ۲\pi \times \left(\frac{۱}{۲}\theta - \frac{\sin ۲\theta}{۴}\right)\Big|_۰^{\pi/۶}$$

$$= \pi R^۴ \left(\frac{\pi}{۶} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

روی بخش مخروطی، $\mathbf{ds}_۲ = r\sin\theta\, dr\, d\varphi\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}_۲ = ۴R^۳\cos\theta\sin\theta\, dr\, d\varphi$$

که در آن داریم $\theta = \pi/۶$. پس

$$\int_{S_۲} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}_۲ = ۴\cos\frac{\pi}{۶}\sin\frac{\pi}{۶} \int_۰^{۲\pi} d\varphi \int_۰^R r^۳\, dr$$

$$= ۴\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times ۲\pi\frac{R^۴}{۴} = \frac{\sqrt{۳}\pi R^۴}{۲}$$

سرانجام

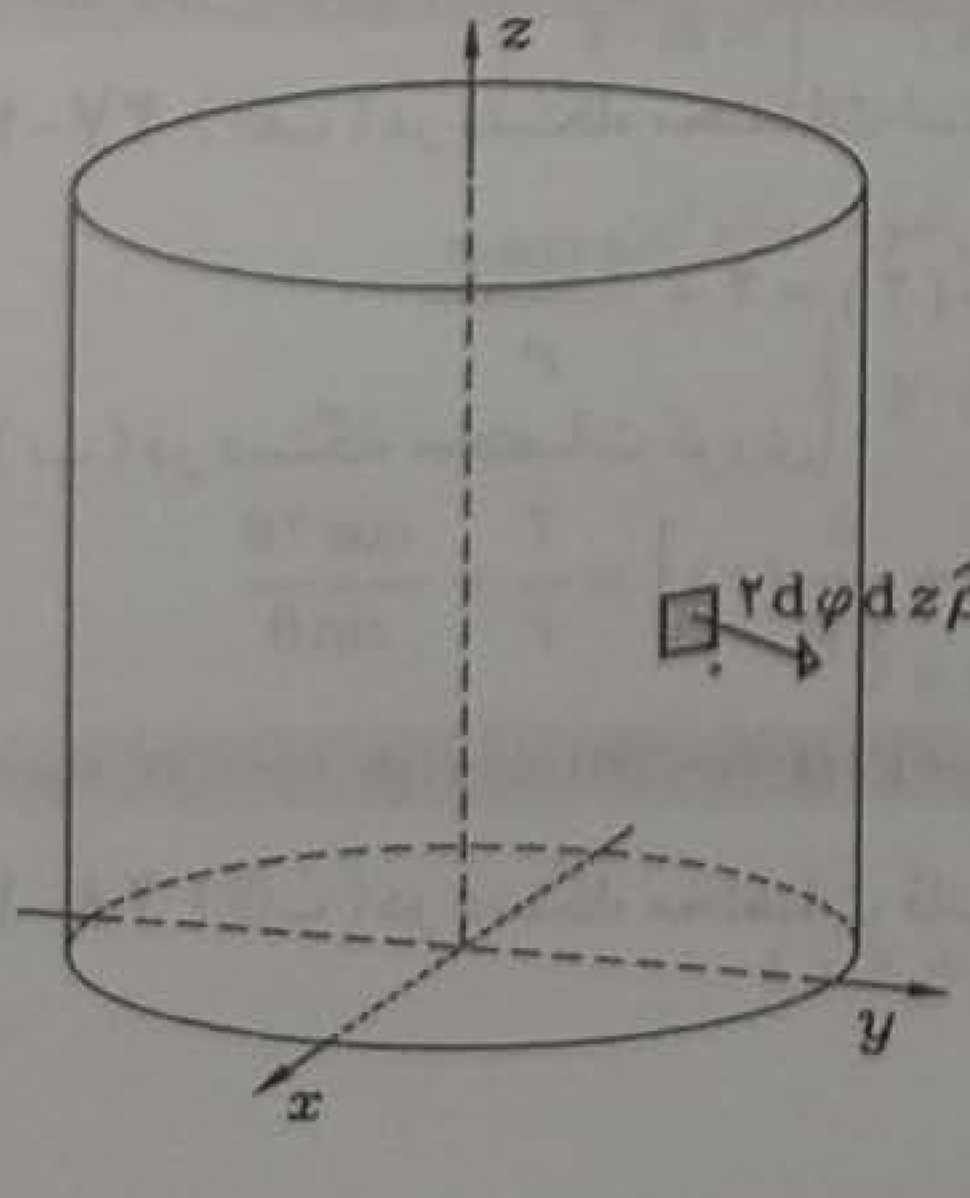
$$\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \pi R^۴\left(\frac{\pi}{۶} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱-۲۵ روی سطح جانبی داریم $\mathbf{ds}_۱ = ۲\, d\varphi\, dz\, \hat{\rho}$ و

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}_۱ = [xy(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}) - yz(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}) + ۳(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}})]\, ۲\, d\varphi\, dz$$

$$= (xy\cos\varphi - yz\sin\varphi)\, ۲\, d\varphi\, dz$$



شکل ح ۱-۲۵

$x = ۲\cos\varphi$ و $y = ۲\sin\varphi$، پس

روی این سطح $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۱ = (۸\sin\varphi\cos^۲\varphi - ۴z\sin^۲\varphi)\,d\varphi\,dz$

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۱ = ۴\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}(۲\sin\varphi\cos^۲\varphi - z\sin^۲\varphi)\,dz\,d\varphi$$

انتگرال جملهٔ اول صفرست، پس

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۱ = -۴\int_۰^{۲\pi}\sin^۲\varphi\,d\varphi\int_۰^{۲} z\,dz = -۴\times\pi\times۲ = -۸\pi$$

روی سطح بالایی $d\mathbf{s}_۲ = \rho\,d\rho\,d\varphi\,\hat{\mathbf{z}}$ و $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۲ = ۳\rho\,d\rho\,d\varphi$

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۲ = ۳\int_۰^{۲}\rho\,d\rho\int_۰^{۲\pi}d\varphi = ۱۲\pi$$

روی سطح پایینی $d\mathbf{s}_۳ = -\rho\,d\rho\,d\varphi\,\hat{\mathbf{z}}$، پس روی این سطح انتگرال مقدار منفی انتگرال روی سطح پایینی، یعنی -۱۲π، است. سرانجام

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -۸\pi + ۱۲\pi - ۱۲\pi = -۸\pi$$

۱-۲۶ (الف) در دستگاه مختصات قائم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} = (۵ + ۱۰z - y)\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}} + ۱۰x\hat{\mathbf{z}}$$

(ب) در دستگاه مختصات کروی

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{۱}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$
$$= ۲\cos\theta\,\hat{r} - ۲\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{۵}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

(ج) در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial h}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial h}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$
$$= -z\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{۲}{\rho}\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \rho\hat{\mathbf{z}}$$

۱-۲۷ (الف) در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{۱}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^۲) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(z\sin\varphi)\right] + \frac{\partial}{\partial z}(۲) = ۲ + \frac{z\cos\varphi}{\rho}$$

(ب) در دستگاه مختصات کروی

$$\nabla\cdot\mathbf{G} = \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(۲r^۲) + \frac{۱}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r)\right] = \frac{۴}{r} + \frac{\cos ۲\theta}{\sin\theta}$$

۱-۲۸ (الف) در دستگاه مختصات قائم

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & -۱\end{vmatrix}=-y\hat{\mathbf{x}}-x\hat{\mathbf{z}}$$

(ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\dfrac{۱}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\boldsymbol{\varphi}} & \dfrac{۱}{\rho}\hat{\mathbf{z}}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ ۲ & \rho\sin\varphi & -z\end{vmatrix}=\frac{۱}{\rho}\sin\varphi\,\hat{\mathbf{z}}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱-۲۹ در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{۱}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}}+\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\frac{۱}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$
$$=\frac{۵\sin\varphi}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}-\frac{۵e^{-\rho}\sin\varphi}{\rho}\hat{\mathbf{z}}$$

چون در صفحهٔ xz، $\varphi=۰$ پس $\nabla\times\mathbf{A}=۰$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱-۳۰ باید نشان دهیم که انتگرال $\mathbf{F}$ روی مسیر بستهٔ C با انتگرال $\nabla\times\mathbf{F}$ روی سطح برابر است. مسیر C را به سه بخش تجزیه کرده، انتگرال $\mathbf{F}$ را روی هر یک به دست می‌آوریم. $C_۱$ ربع دایرهٔ واقع در صفحهٔ $z=۰$، $C_۲$ ربع دایرهٔ واقع در صفحهٔ $y=۰$، و $C_۳$ ربع دایرهٔ واقع در صفحهٔ $x=۰$ است. در دستگاه مختصات کروی داریم

$$d\mathbf{l}=dr\,\hat{\mathbf{r}}+r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

پس

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=۲r^۳\sin\theta\,d\varphi$$

روی $C_۱$ داریم $r=R$ و $\theta=\dfrac{\pi}{۲}$ پس

$$\int_{C_۱}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\int_۰^{\pi/۲}۲R^۳\sin\frac{\pi}{۲}\,d\varphi=۲R^۳\int_۰^{\pi/۲}d\varphi=\pi R^۳$$

روی $C_۲$ و $C_۳$ چون φ تغییر نمی‌کند انتگرال نسبت به φ صفر می‌شود. بنابراین

$$\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\pi R^۳+۰+۰=\pi R^۳$$

با استفاده از رابطهٔ کرل در مختصات کروی به دست می‌آوریم

$$\nabla\times\mathbf{A}=۲r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\mathbf{r}}-۶r\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

روی سطح S، $d\mathbf{s}=r^۲\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{\mathbf{r}}$ و $r=R$، پس

$$(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s}=۲R^۳\cos\theta\,d\theta\,d\varphi$$

و سرانجام

$$\oint (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} 2R^3\cos\theta\, d\theta\, d\varphi = \pi R^3$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=0 \mid \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \mid \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۳۱ اکنون داریم

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = dr + r\,d\theta + r\sin\theta\, d\varphi$$

C_1، C_2 و C_3 را به صورت بیان شده در حل مسئلهٔ ۱-۳۰ برمی‌گزینیم. روی C_1 داریم $r=R$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ پس

$$\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_R^R dr + \int_{\pi/2}^{\pi/2} R\,d\theta + \int_0^{\pi/2} R\sin\frac{\pi}{2}\,d\varphi$$
$$= 0 + 0 + R\frac{\pi}{2}$$

روی C_2 داریم $r=R$ و $\varphi=\frac{\pi}{2}$ پس

$$\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_R^R dr + \int_{\pi/2}^{0} R\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi/2} R\sin\frac{\pi}{2}\,d\varphi$$
$$= 0 + \left(-R\frac{\pi}{2}\right) + 0 = -R\frac{\pi}{2}$$

روی C_3 داریم $r=R$ و $\varphi=0$ پس

$$\int_{C_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_R^R dr + \int_0^{\pi/2} R\,d\theta + \int_0^{0} R\sin\frac{\pi}{2}\,d\varphi$$
$$= 0 + R\frac{\pi}{2} + 0 = R\frac{\pi}{2}$$

و سرانجام

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = R\frac{\pi}{2} - R\frac{\pi}{2} + R\frac{\pi}{2} = R\frac{\pi}{2}$$

چون روی سطح S بردار $d\mathbf{s}$ در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ است، تنها مولفهٔ r کرل $\mathbf{F}$ را نیاز داریم

$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{r}} = \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}$$

پس

$$\oint (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$= R\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = R\frac{\pi}{2}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=0 \mid \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0 \mid \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۳۲ مسیر بسته از چهار بخش تشکیل شده‌است؛ بخش اول پاره خط روی محور x و بخش دوم روی ربع دایرهٔ واقع در صفحهٔ $z=0$؛ روی این دو بخش $\theta=90^\circ$ و مولفهٔ های r و θ میدان صفرست. پس بر روی این دو بخش

$$\mathbf{f}\cdot d\mathbf{l} = 3r\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 3r^2\, d\varphi$$

بر روی بخش اول φ از ۰ تا ۰ تغییر می‌کند، پس حاصل انتگرال صفرست. بر روی بخش دوم (ربع دایره) $r = ۱$ و

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{dl} = \int_{\circ}^{\pi/۲} ۳\, d\varphi = \frac{۳\pi}{۲}$$

بخش سوم مسیر خط عمودی واقع در صفحهٔ $x = \circ$ است. بر روی این بخش $\mathbf{dl} = dz\, \hat{\mathbf{z}}$. پس

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} \cdot \mathbf{dl} &= (r\cos^۲\theta)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}})\, dz - (r\sin\theta\cos\theta)(\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{z}})\, dz + ۳r(\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \hat{\mathbf{z}})\, dz \\
&= r\cos^۲\theta(\cos\theta)\, dz - (r\sin\theta\cos\theta)(-\sin\theta)\, dz + ۳r(\circ)\, dz \\
&= r\cos\theta(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta)\, dz = z\, dz
\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{dl} = \int_{\circ}^{۱} z\, dz = \frac{۱}{۲}$$

در بخش چهارم مسیر $\theta = \frac{\pi}{۴}$، و

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{dl} = r\left(\frac{۱}{۲}\right) dr - r\left(\frac{۱}{۲}\right) r\, d\theta + ۳r^۲ \sin\theta\, d\varphi$$

چون روی این مسیر θ و φ تغییر نمی‌کنند، حاصل انتگرال جملات دوم و سوم صفرست و

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{dl} = \frac{۱}{۲} \int_{\sqrt{۲}}^{\circ} r\, dr = -\frac{۱}{۲}$$

و سرانجام

$$\oint \mathbf{f} \cdot \mathbf{dl} = \circ + \frac{۳\pi}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۳\pi}{۲}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱-۳۳ ابتدا کرل $\mathbf{F}$ را به دست می‌آوریم

$$\nabla\times\mathbf{F} = ۳\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\mathbf{r}} - ۶\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

بر روی بخش ربع دایره‌ای واقع در صفحهٔ $z = \circ$

$$\mathbf{ds}_۱ = r\, dr\, d\varphi(-\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_۱} (\nabla\times\mathbf{F}) \cdot \mathbf{ds}_۱ &= ۶\iint r\, dr\, d\varphi \\
&= ۶\int_{\circ}^{۱} r\, dr \int_{\circ}^{\pi/۲} d\varphi = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۲}
\end{aligned}$$

عنصر سطح بر روی بخش مثلثی واقع در صفحهٔ $x = \circ$ عبارت است از

$$\mathbf{ds}_۲ = r\, d\theta\, dr(-\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$

پس $(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{ds}_۲$ صفر می‌شود و حاصل انتگرال همان مقدار $۳\pi / ۲$ است که با نتیجهٔ به دست آمده در مسئلهٔ ۱-۳۲ منطبق است. توجه کنید که جهت عناصر سطح با توجه به جهت مسیر تعیین شده است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=\circ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=\circ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\circ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\circ$

۱-۳۴ سطوح در بر گیرندهٔ حجم مورد نظر عبارت‌اند از: $S_۱$، یک هشتم سطح کرهٔ $r = R$؛ $S_۲$، ربع دایرهٔ واقع

در صفحهٔ $z = ۰$؛ $S_۳$ ربع دایرهٔ واقع در صفحهٔ $y = ۰$؛ و $S_۴$ ربع دایرهٔ واقع در صفحهٔ $x = ۰$. روی سطح $S_۱$ داریم

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۱ = \mathbf{F}\cdot R^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{\mathbf{r}} = R^۴ \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۱ = R^۴ \int_۰^{\pi/۲} d\varphi \int_۰^{\pi/۲} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = R^۴ \times \frac{\pi}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{\pi R^۴}{۴}$$

روی سطح $S_۲$ داریم

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۲ = \mathbf{F}\cdot r\,dr\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = r^۳ \cos\varphi\, dr\, d\varphi$$

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۲ = \int_۰^{R} r^۳ dr \int_۰^{\pi/۲} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{R^۴}{۴}\times ۱ = \frac{R^۴}{۴}$$

و روی سطح $S_۳$ داریم

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۳ = \mathbf{F}\cdot r\,dr\,d\theta\,(-\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = r^۳\cos\theta\sin\varphi\, dr\, d\theta = ۰$$

زیرا روی این سطح $\varphi = ۰$. روی سطح $S_۴$

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۴ = \mathbf{F}\cdot r\,dr\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -r^۳\cos\theta\sin\varphi\, dr\, d\theta$$

روی این سطح $\varphi = \frac{\pi}{۲}$ و $\sin\varphi = ۱$، پس

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}_۴ = -\int_۰^{R} r^۳ dr \int_۰^{\pi/۲} \cos\theta\, d\theta = -\frac{R^۴}{۴}\times ۱ = -\frac{R^۴}{۴}$$

و سرانجام

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\pi R^۴}{۴} + \frac{R^۴}{۴} + ۰ - \frac{R^۴}{۴} = \frac{\pi R^۴}{۴}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱-۳۵ ابتدا $\nabla\cdot\mathbf{F}$ را می‌یابیم

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲ F_r) + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= ۴r\cos\theta + r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi - r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi = ۴r\cos\theta$$

حال

$$\int(\nabla\cdot\mathbf{F})\,dv = \iiint ۴r\cos\theta\, r^۲\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= ۴\int_۰^{R} r^۳ dr \int_۰^{\pi/۲} d\varphi \int_۰^{\pi/۲} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = ۴\times\frac{R^۴}{۴}\times\frac{\pi}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{\pi R^۴}{۴}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰ \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=۰ \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=۰ \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=۰ \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=۰$

۱-۳۶ بر روی سطح مخروطی $d\mathbf{s}$ عبارت است از

$$d\mathbf{s} = r\sin\theta\, dr\, d\varphi\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

همچنین $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\varphi$، $\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\sin\varphi$ و $\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta$. پس

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = r\sin\theta(-۲\cos\theta\cos\varphi - ۲x\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta)\,dr\,d\varphi$$

چون $x = r\sin\theta\cos\varphi$ و $\theta = \pi/۴$، داریم

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = r\frac{۱}{۲}(-۲\cos\varphi - \sqrt{۲}\,r\sin\varphi\cos\varphi - ۱)\,dr\,d\varphi$$

پس
$$\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = -\iint r\cos\varphi\, dr\, d\varphi - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\iint r\sin\varphi\cos\varphi\, dr\, d\varphi - \frac{۱}{۲}\iint r\, dr\, d\varphi$$

در این انتگرالها r از ۰ تا $۲\sqrt{۲}$ تغییر می‌کند. حاصل دو انتگرال اول صفرست زیرا
$$\int_{۰}^{۲\pi}\cos\varphi\, d\varphi = ۰ \quad , \quad \int_{۰}^{۲\pi}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = ۰$$

سرانجام خواهیم داشت
$$\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\sqrt{۲}} r\, dr \int_{۰}^{۲\pi} d\varphi = -\frac{۱}{۲}(۲\pi)(۴) = -۴\pi$$

۳۷-۱ لبهٔ این سطح دایره‌ای به شعاع ۲ در صفحهٔ xy است. در دستگاه مختصات استوانه‌ای
$$d\mathbf{l} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\, d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$

روی این مسیر $\rho = ۲$ و در جهتهای ρ و z تغییری وجود ندارد. پس $d\mathbf{l} = ۲\, d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و
$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = ۲\, d\varphi\,(-x\sin\varphi + x\cos\varphi + ۰)$$

و چون $x = ۲\cos\varphi$
$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = ۴\, d\varphi\,(-\cos\varphi\sin\varphi + \cos^{۲}\varphi)$$
$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_{۲\pi}^{۰} ۴(-\cos\varphi\sin\varphi + \cos^{۲}\varphi)\, d\varphi = -۴\pi$$

حال کرل میدان برداری را می‌یابیم
$$\nabla\times\mathbf{F} = ۲x\hat{\mathbf{x}} - ۲y\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$$

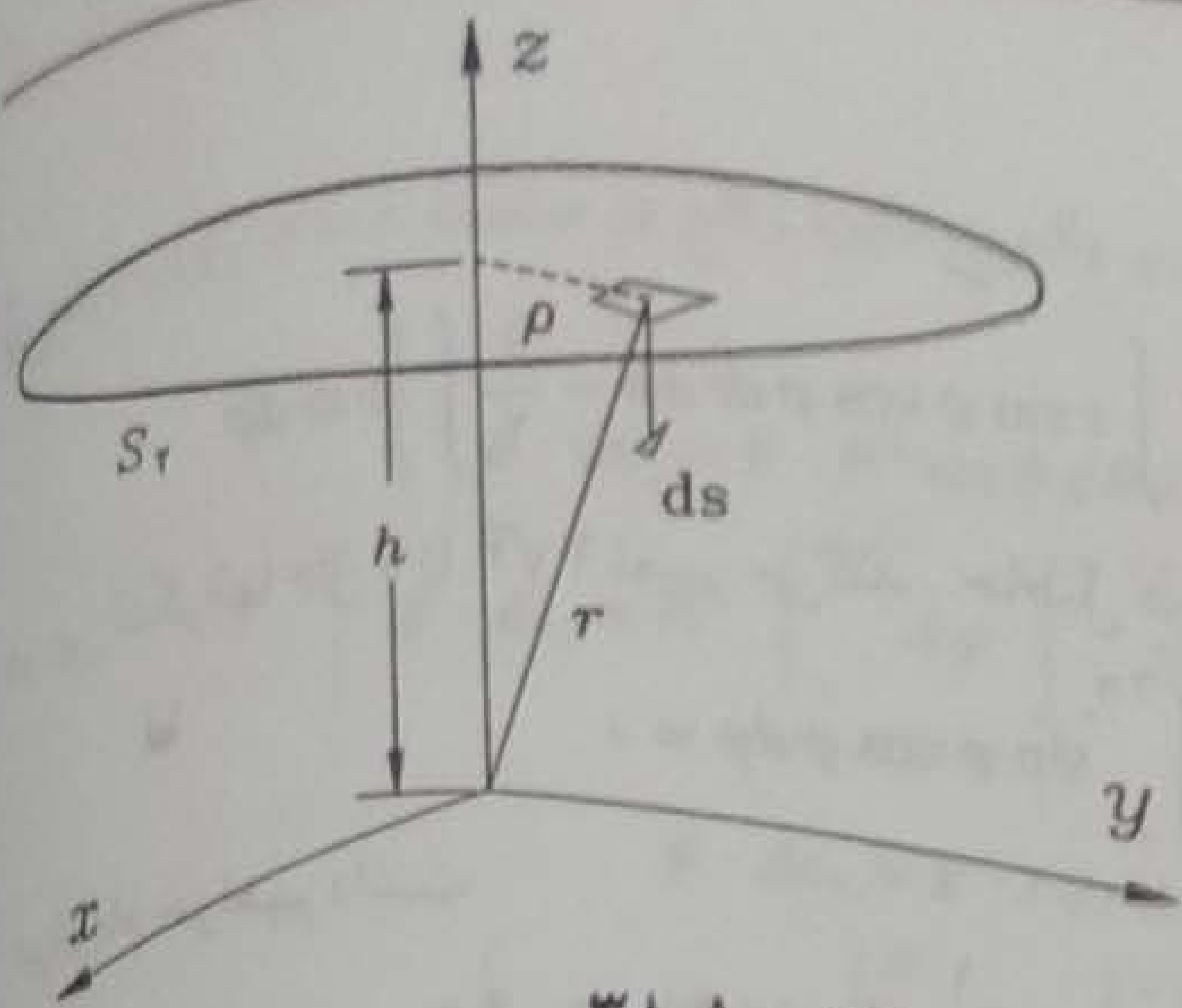
بردار عمود بر سطح کره $\hat{\mathbf{r}}$ است که در دستگاه مختصات قائم می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد
$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{۱}{r}(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{۱}{۲}(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})$$
$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{r}} = x^{۲} - y^{۲} + \frac{۱}{۲}z$$

چون روی سطح نیمکره $r = ۲$. روی این سطح $x = ۲\sin\theta\cos\varphi$، $y = ۲\sin\theta\sin\varphi$ و $z = ۲\cos\theta$. پس
$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{r}} = ۴\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\varphi - ۴\sin^{۲}\theta\sin^{۲}\varphi + \cos\theta$$

همچنین $ds = ۴\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$، پس
$$\int (\nabla\times\mathbf{F})\cdot ds\,\hat{\mathbf{r}} = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{\pi/۲}^{\pi}(۱۶\sin^{۳}\theta\cos ۲\varphi + ۲\sin ۲\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

چون انتگرال $\cos ۲\varphi$ روی یک دورهٔ تناوب صفرست، انتگرال جملهٔ اول صفر می‌شود. سرانجام
$$\int (\nabla\times\mathbf{F})\cdot ds\,\hat{\mathbf{r}} = \int_{۰}^{۲\pi} d\varphi \int_{\pi/۲}^{\pi} ۲\sin ۲\theta\, d\theta = ۲\times ۲\pi\times(-۱) = -۴\pi$$

به ارتباط جهت سطح و جهت لبه توجه کنید.



شکل ح ۱-۳۸

۱-۳۸ بخش کروی سطح S را S_1 و بخش مسطح آن را S_2 می‌نامیم. روی بخش S_1 داریم

$$\mathbf{ds}_1 = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{\mathbf{r}}$$

پس $\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}_1 = 0$ و انتگرال روی سطح S_1 صفر است.

روی سطح S_2

$$\mathbf{ds}_2 = -\rho\, d\rho\, d\varphi\, \hat{\mathbf{z}}$$

$\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$ و $\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta$. پس

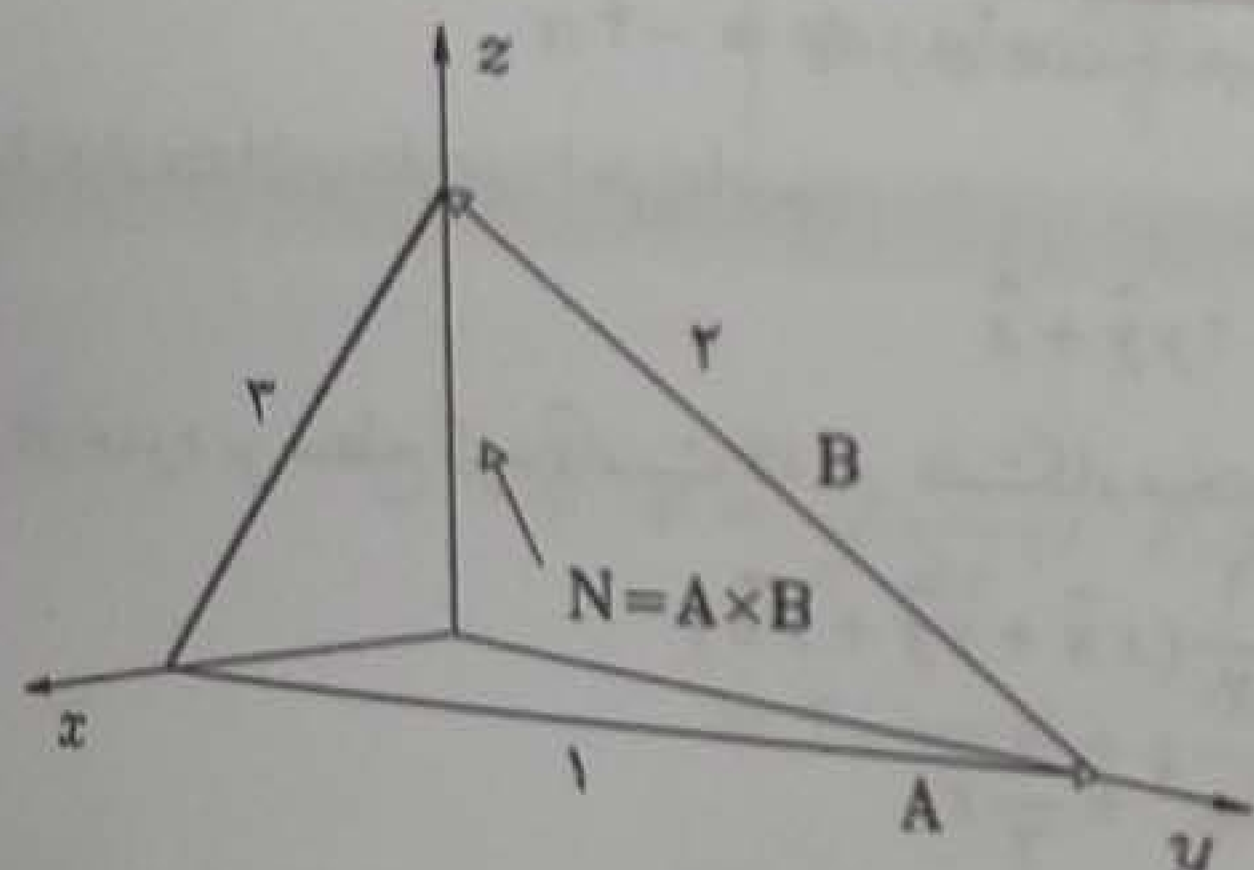
$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}_2 = \frac{K_2 \rho\, d\rho\, d\varphi}{r\sin\theta}(-\sin\theta) = \frac{-K_2\rho\, d\rho\, d\varphi}{r}$$

با توجه به شکل ح ۱-۳۸ می‌بینیم که $h = R\cos\theta_0$ و روی سطح S_2 داریم $r = (h^2+\rho^2)^{0/5}$. بنابراین

$$\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}_2 = -K_2 \iint \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{(h^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} = -K_2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sin\theta_0} \frac{\rho\, d\rho}{(h^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -2\pi K_2 (h^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{R\sin\theta_0} = -2\pi K_2 R\cos\theta_0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \,|\, \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \,|\, \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \,|\, \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \,|\, \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \,|\, \nabla\times\mathbf{E}=0 \,|\, \oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q \,|\, \int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I \,|\, \oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I \,|\, \oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=0 \,|\, \oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=0$



شکل ح ۱-۳۹

۱-۳۹ C را به سه بخش تقسیم می‌کنیم. معادلهٔ بخشهای مختلف به صورت زیر است:

$$1: y = 2a - x$$

$$2: y = 2a - 2z$$

$$3: z = a - x$$

و $\mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} = y\,dz$ پس

$$\oint \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} = \int_1 y\,dz + \int_2 y\,dz + \int_3 y\,dz$$

$$= \int_0^0 y\,dz + \int_0^a (2a-2z)\,dz + \int 0\,dz$$

$$= 0 + 2az - z^2\Big|_0^a + 0 = a^2$$

حاصلضرب دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در جهت عمود بر سطح مثلثی است

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = (2a\hat{\mathbf{y}} - a\hat{\mathbf{x}})\times(-2a\hat{\mathbf{y}} + a\hat{\mathbf{z}}) = 2a^2\hat{\mathbf{x}} + a^2\hat{\mathbf{y}} + 2a^2\hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{\mathbf{N}}{3a^2} = \frac{2}{3}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{y}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{z}}$$

معادلهٔ سطح مثلثی عبارت است از $2x + y + 2z - 2a = 0$. از درس ریاضی به یاد دارید که عنصر سطح رویهٔ

$z=f(x,y)$ برابر است با

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{۲} + ۱}\ dx\,dy$$

پس

$$\mathbf{ds} = \sqrt{۱ + ۰{,}۲۵ + ۱}\ dx\,dy\,\hat{\mathbf{n}} = ۱{,}۵\,dx\,dy\,\hat{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{x}} + \frac{۱}{۲}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})\,dx\,dy$$

همچنین داریم $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}$ و سرانجام

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{ds} = \int_{۰}^{۲a} \int_{۰}^{a-y/۲} dx\,dy = \int_{۰}^{۲a} \left(a - \frac{y}{۲}\right) = ۲a^{۲}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=۰\,|\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=۰$

۱-۴۰ $\mathbf{A}$ را برداری ثابت فرض کنید. انتگرال این بردار روی سطح بستهٔ S را در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیهٔ دیورژانس داریم

$$\oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A})\,dv$$

چون $\mathbf{A}$ برداری ثابت است، دیورژانس آن صفرست. پس

$$\oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = ۰$$

$\mathbf{A}$ برداری ثابت است، پس می‌توان آن را از داخل انتگرال بیرون آورد

$$\mathbf{A} \cdot \oint \mathbf{ds} = ۰$$

چون $\mathbf{A}$ می‌تواند هر برداری باشد، باید $\oint \mathbf{ds}$ برابر صفر باشد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=۰\,|\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=۰$

۱-۴۱ داریم $\mathbf{A}\cdot\mathbf{R} = xA_x\hat{\mathbf{x}} + yA_y\hat{\mathbf{y}} + zA_z\hat{\mathbf{z}}$ که در آن A_x، A_y و A_z مقادیر ثابتی هستند

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}) = \frac{\partial}{\partial x}(xA_x\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial}{\partial y}(yA_y\hat{\mathbf{y}}) + \frac{\partial}{\partial z}(zA_z\hat{\mathbf{z}})$$
$$= A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{A}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=۰\,|\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=۰$

۱-۴۲ به سادگی به دست می‌آوریم

$$\nabla\cdot\mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$\nabla\times\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = ۰$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=۰\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=۰\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=۰\,|\oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q\,|\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I\,|\oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I\,|\oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=۰\,|\oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=۰$

۱-۴۳ طبق قضیهٔ استوکس داریم

$$\oint_C \mathbf{r}\cdot\mathbf{dl} = \int_S (\nabla\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{ds}$$

در مسئلهٔ ۱-۴۲ دیدیم که $\nabla \times \mathbf{R} = 0$، پس انتگرال فوق هم صفر می‌شود. طبق قضیهٔ دیورژانس

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{r})\, dv$$

در مسئلهٔ ۱-۴۲ دیدیم که $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$، پس

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = 3\int_V dv = 3V$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۴۴ با توجه به اتحاد $\nabla \cdot (\Phi \mathbf{E}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla\Phi$ داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})(\nabla\cdot\mathbf{R}) + \mathbf{R}\cdot\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})$$

در مسئلهٔ ۱-۴۲ دیدیم که $\nabla\cdot\mathbf{R} = 3$، همچنین در مسئلهٔ ۱-۴۱ دیدیم که $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}) = \mathbf{A}$. پس

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 3\mathbf{A}\cdot\mathbf{R} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{A} = 4\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}$$

با توجه به اتحاد $\nabla \times (\Phi \mathbf{M}) = \Phi \nabla \times \mathbf{M} + \nabla\Phi \times \mathbf{M}$ داریم

$$\nabla \times [(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})\mathbf{R}] = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})\nabla\times\mathbf{R} + \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})\times\mathbf{R}$$

در مسئلهٔ ۱-۴۲ دیدیم که $\nabla\times\mathbf{R} = 0$، پس $\nabla\times\mathbf{V} = \mathbf{A}\times\mathbf{R}$.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۴۵ تابع $1/|\mathbf{R}|$ عبارت است از

$$\frac{1}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

داریم

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\mathbf{R}|}\right) = \frac{-(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(x-x')}{|\mathbf{R}|^3}$$

با توجه به یکسان بودن روابط برای y و z داریم

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{R}|}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\mathbf{R}|}\right)\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\mathbf{R}|}\right)\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|\mathbf{R}|}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$= \frac{-(x-x')\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{R}|^3} + \frac{-(y-y')\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{R}|^3} + \frac{-(z-z')\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{R}|^3} = -\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۴۶ ابتدا $\nabla\times\mathbf{F}$ را می‌یابیم

$$\nabla\times\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\rho^{-\frac{5}{2}}\,\hat{\mathbf{z}}$$

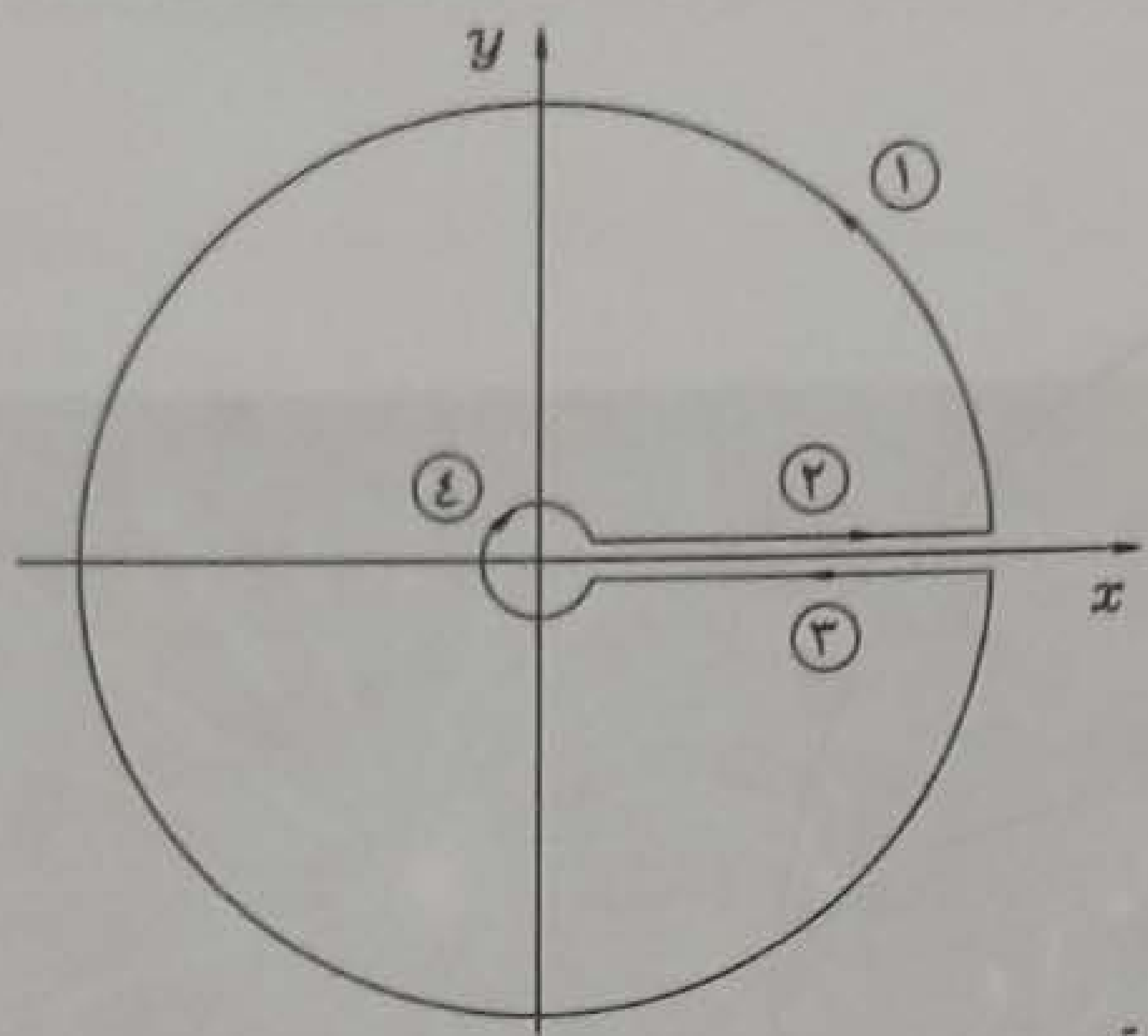
$$\int(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{s} = \int -\frac{1}{2}\rho^{-\frac{5}{2}}\,\hat{\mathbf{z}}\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1}\rho^{-\frac{3}{2}}\, d\rho = -\pi\left(-2\rho^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^1 = \infty$$

حال آن که

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\rho\, d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

اشکال از وجود نقطهٔ تکین در $\rho = 0$ است. اگر مسیر و سطح را به صورت شکل ح ۱-۴۶ در نظر بگیریم، که



شکل ح ۱-۴۶

در آن شعاع دایرهٔ کوچک ε است و $\varepsilon \to 0$، خواهیم داشت

$$\int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{ds} = -\pi(-2\rho^{-\frac{1}{2}}) \Big|_{\varepsilon}^{1} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

انتگرال مسیر باید روی چهار مسیر مشخص شده در شکل ح ۱-۴۶ حساب شود

$$\int_{1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = 2\pi$$

$$\int_{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int \mathbf{F} \cdot d\rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0$$

$$\int_{3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int_{2\pi}^{0} \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \varepsilon\, d\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{2\pi}^{0} d\varphi = -2\pi \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\int_{4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = 0$$

پس $\int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{ds}$ که با $\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = 2\pi(1 - 1/\sqrt{\varepsilon})$ برابرست.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0 \mid \nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J} \mid \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \mid \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \mid \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \mid \nabla\times\mathbf{E}=0 \mid \oint\mathbf{D}\cdot\mathbf{ds}=Q \mid \int\mathbf{J}\cdot\mathbf{ds}=I \mid \oint\mathbf{H}\cdot\mathbf{dl}=I \mid \oint\mathbf{B}\cdot\mathbf{ds}=0 \mid \oint\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}=0$

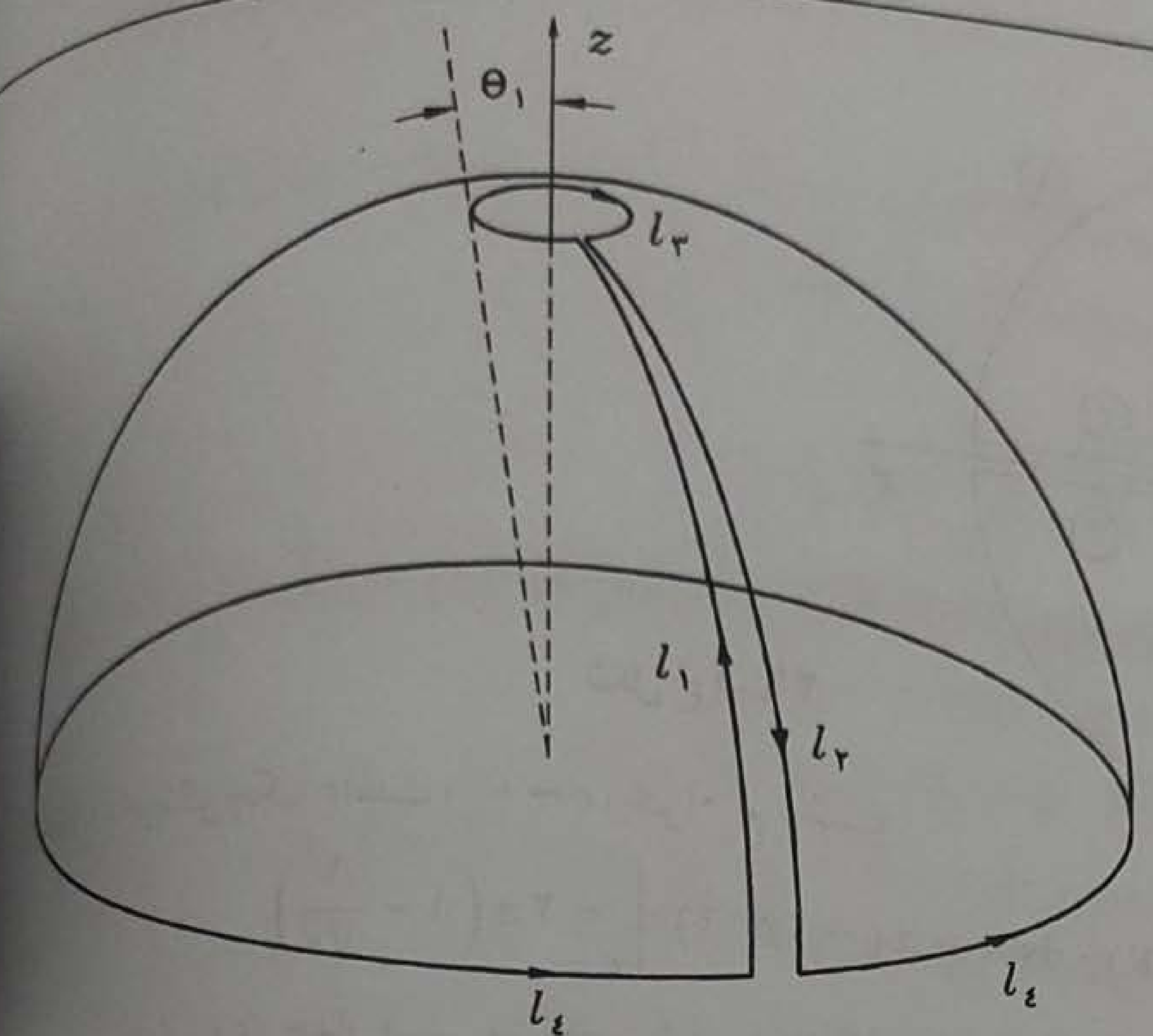
۱-۴۷ ابتدا انتگرال کرل **F** را روی سطح S حساب می‌کنیم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \operatorname{cotg}\theta)\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}(r\operatorname{cotg}\theta)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{-\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{cotg}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}$$

چون برای این سطح $\mathbf{ds} = a^{2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{\mathbf{r}}$ و روی سطح $r = a$، داریم

$$\int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{ds} = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}(-a\sin\theta\, d\theta\, d\varphi) = -2\pi a \tag{1}$$

چون لبهٔ این سطح در $\theta = \pi/2$ قرار دارد، و $\operatorname{cotg}\pi/2 = 0$ انتگرال روی لبهٔ **F** صفرست، و ظاهراً قضیهٔ استوکس برقرار نیست. اشکال از وجود نقطهٔ تکین در $\theta = 0$ است. برای رفع این اشکال بخش بسیار کوچکی از سطح S را حذف می‌کنیم. این سطح یک عرقچین کوچک از بخش بالای نیمکره است که لبهٔ آن در $\theta = \theta_1$ قرار دارد. به این ترتیب لبهٔ سطح به صورت نشان داده‌شده در شکل ح ۱-۴۷ از چهار قسمت تشکیل خواهد شد. روی l_4 میدان صفر و انتگرال آن نیز صفرست. چون مسیرهای l_1 و l_2 بسیار نزدیک هم



شکل ح ۱-۴۷

قرار دارند و جهتشان مخالف هم است

$$\int_{l_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{l_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$$

به این ترتیب جمع انتگرالها روی مسیرهای l_1 و l_2 صفرست. روی مسیر l_3 داریم $r=a$ و $\theta=\theta_1$، پس $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + a\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + a\sin\theta_1\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ و

$$\int_{l_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\theta_1\, a\sin\theta_1\, d\varphi = -2\pi a\cos\theta_1$$

برای یافتن انتگرال $\nabla\times\mathbf{F}$ روی سطح جدید کافی است حدود انتگرال معادلهٔ (۱) را از $\theta=0$ تا $\theta=\pi/2$ به $\theta=\theta_1$ تا $\theta=\pi/2$ تبدیل کنیم. به این ترتیب حاصل انتگرال $-2\pi a\cos\theta_1$ خواهد شد، که برقراری قضیهٔ استوکس را برای میدانهایی که در سطح مورد نظر نقطهٔ تکین ندارند، نشان می‌دهد.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۴۸ $352\pi/3$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۴۹ $-\pi-2$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۵۰ $\mathbf{V}\cdot d\mathbf{l} = d\varphi$. پس

$$\oint \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^0 d\varphi + \int_0^{\pi/2} d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi/2} d\varphi + \int_{\pi/2}^{0} d\varphi = 0 + \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۵۱ همانند مثال ۱۵ حل می‌شود و جواب ۸۱است.

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۵۲ 48π

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0\,|\,\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}\,|\,\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\,|\,\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,|\,\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho\,|\,\nabla\times\mathbf{E}=0\,|\,\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}=Q\,|\,\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}=I\,|\,\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I\,|\,\oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0\,|\,\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$

۱-۵۳ 36π