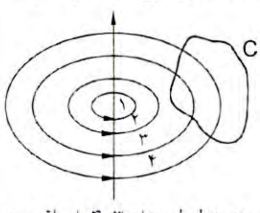
فصل یازدهم

خودالقاء، القاء متقابل،
انرژی مغناطیسی و مدارات مغناطیسی

همانطوریکه گفته شد خطوط میدان مغناطیسی همیشه بصورت منحنی‌های بسته می‌باشند بنابراین اگر مدار بسته‌ای در معرض یک میدان مغناطیسی قرار گیرد دسته‌ای از خطوط میدان از مدار عبور می‌کنند پس هر یک از این خطوط میدان و مدار بسته همانند دو حلقه زنجیر بیکدیگر مرتبط هستند یا این دسته خطوط میدان با مدار بسته پیوند دارند دسته دیگر از خطوط میدان از مدار بسته عبورنکرده و بصورت حلقه هایی جدا از مدار بسته می‌باشند مطابق شکل (۱۱-۱) خطوط شماره ۱و۲ با حلقه بسته پیوند ندارند اما خطوط ۳و۴ با این حلقه پیوند دارند.



شکل (۱۱-۱): پیوند خطوط میدان ۳و۴ با حلقه بسته C

اگر سطح حلقه C را S بنامیم در اینصورت شار مغناطیسی گذرانیده شده از حلقه C عبارتست از:

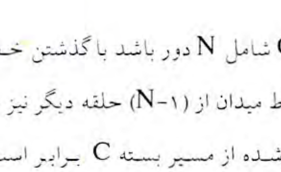
$$\phi = \int_s \overline{B}.\overline{ds} \qquad (۱-۱۱)$$

که B چگالی شار مغناطیسی ناشی از سیم مستقیم است اگر حلقه بسته C شامل N دور باشد با گذشتن خطوط میدان از یک حلقه تنها شار $\phi = \int_s B.ds$ ایجاد می‌شود اما چون همان خطوط میدان از (N-۱) حلقه دیگر نیز عبور می‌کند در هر یک شار به اندازه ϕ ایجاد می‌شود پس مقدارکل شار گذرانیده شده از مسیر بسته C برابر است با $\psi = N\phi$ بعبارت دیگر خطوط میدان از سطحی معادل N برابر سطح یک حلقه که در حقیقت همان سطح مسیر بسته C می‌باشد می‌گذرد لذا شاری به اندازه N برابر شار یک حلقه را بوجود می‌آورد اگر حلقه‌ها یکسان نباشند در اینصورت

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \qquad (۲-۱۱)$$

۱-۱۱- ضریب خودالقاء و القاء متقابل بین دو حلقه

دو حلقه C_1 و C_2 مطابق شکل (۱۱-۲) را در نظر بگیرید فرض کنید حلقه C_1 حامل جریان I_1 باشد در اینصورت جریان I_1 تولید B_1 می‌کند که تماماً با حلقه C_1 ارتباط دارد و مقداری از خطوط B_1 با C_2 ارتباط دارند. در اینحالت اگر Ψ_{11} کل شار گذرانیده شده از C_1 ناشی از جریان I_1 و Ψ_{21} کل شار گذرانیده شده از حلقه C_2 ناشی از جریان I_1 باشد ضریب خودالقاء حلقه C_1 (L_{11}) و ضریب القاء متقابل بین دو حلقه (M_{21}) را با روابط زیر تعریف می‌کنیم.



شکل (۱۱-۲): خطوط میدان ناشی از I_1 تماماً با C_1 ارتباط دارد ولی قسمتی از این خطوط با C_2 ارتباط دارد.

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} \qquad (۳-۱۱)$$

$$M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_1} \qquad (4-11)$$

که Ψ_{11} و Ψ_{21} بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\Psi_{11}=\int_{s_1}\overline{B}_1.\overline{ds}_1 \qquad (5-11)$$

$$\Psi_{21}=\int_{s_2}\overline{B}_1.\overline{ds}_2 \qquad (6-11)$$

حال رابطه (۱۱-۵) را بصورت زیر ساده می‌کنیم.

$$\Psi_{11}=\int_{s_1}\overline{B}_1.\overline{ds}_1=\int_{s_1}\left[\overline{\nabla}\times\overline{A}_1\right].\overline{ds}_1=\oint_{c_1}\overline{A}_1.\overline{d\ell}_1 \qquad (7-11)$$

که $\overline{A}_1$ پتانسیل برداری ناشی از جریان I_1 می‌باشد که عبارتست از:

$$\overline{A}_1=\oint_{C_1}\frac{\mu_0 I_1\overline{d\ell}'_1}{4\pi R} \qquad (8-11)$$

که با جایگزینی $\overline{A}_1$ از (۱۱-۸) در (۱۱-۷) داریم:

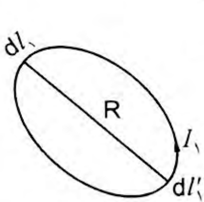
$$\Psi_{11}=\frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{C_1}\left[\oint_{C_1}\frac{\overline{d\ell}'_1}{R}\right].\overline{d\ell}_1 \qquad (9-11)$$

بنابراین

$$L_{11}=\frac{\Psi_{11}}{I_1}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_1}\frac{\overline{d\ell}_1.\overline{d\ell}'_1}{R} \qquad (10-11)$$

که $\overline{d\ell}_1$, $\overline{d\ell}'_1$ در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده‌اند که هر دو هم جهت با I_1 هستند.

همانطوریکه از رابطه (۱۱-۱۰) دیده می‌شود چون $d\ell_1$, $d\ell'_1$ همجهت هستند پس همواره L_{11} یعنی ضریب خودالقاء مثبت است حال با استفاده از تعریف Ψ_{21} میتوان M_{21} را بصورت زیر بدست آورد.



$$\Psi_{21}=\int_{s_1}\overline{B}_1.\overline{ds}_2=\int_{s_2}\left[\overline{\nabla}\times\overline{A}_1\right].\overline{ds}_2=\oint_{C_2}\overline{A}_1.\overline{d\ell}_2 \qquad (11-11)$$

که با جایگزینی $\overline{A}_1$ از (۱۱-۸) در (۱۱-۱۲) داریم:

$$\Psi_{21}=\frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\overline{d\ell}_1.\overline{d\ell}_2}{R_{21}} \qquad (12-11)$$

شکل (۱۱-۳): محاسبه بردار $\overline{A}_1$ ناشی از جریان I_1 روی حلقه C_1

بنابراین

$$M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\overline{d\ell}_1.\overline{d\ell}_2}{R_{21}} \qquad (13-11)$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود M_{21} بستگی به حاصلضرب داخلی $\overline{d\ell}_1$, $\overline{d\ell}_2$ دارد بنابراین با جابجایی $\overline{d\ell}_1$, $\overline{d\ell}_2$ ملاحظه می‌شود که M_{12}=M_{21} خواهد شد برای بدست آوردن M_{12} کافی است جای اندیس‌های ۱و۲ را عوض کنیم اگر جهت $\overline{d\ell}_1$, $\overline{d\ell}_2$ عکس هم باشند در اینصورت M_{21} منفی خواهد شد بنابراین برخلاف L_{11} که همواره مثبت است M_{21} می‌تواند منفی و یا مثبت باشد.

مثال ۱: ضریب خودالقاء یک سیم پیچ بلند به ازای واحد طول چقدر است شعاع سیم پیچ a و تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول n می‌باشد.

حل: قبلاً با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی داخل سیم پیچ را بدست آوردیم که عبارت بود از $H=nI$ *بنابراین چون* $B=\mu_0 \overline{H}$ *در سطح سیم پیچ ثابت است بنابراین*

$$\phi = BS = \mu_0 nI\pi a^2 \rightarrow L = \frac{n\phi}{I} = \mu_0 n^2 \pi a^2 \qquad (۱۴-۱۱)$$

مثال ۲: یک کابل کواکسیال به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای جریان I می‌باشد ضریب خودالقا این کابل بر واحد طول چقدر است؟

حل: ابتدا میدان مغناطیسی در $R<a$ *را با قانون آمپر بدست می‌آوریم.*

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = \frac{I}{\pi a^2}\pi R^2 \rightarrow \overline{H} = \frac{IR}{2\pi a^2}\hat{a}_\phi \qquad R<a$$

$$d\phi_1 = B_1 ds_1 = \frac{\mu_0 IR}{2\pi a^2}.(dR \times 1)$$

اما شار $d\phi_1$ فقط کسری از جریان I را در بر می‌گیرد که اگر این کسر را N بگیریم داریم:

$$N = \frac{\pi R^2}{\pi a^2} = \left[\frac{R}{a}\right]^2$$

یعنی شار $d\phi_1$ به اندازه N بار جریان I را دربر می‌گیرد پس

$$\Psi_1 = \int N d\phi_1 = \int_0^a \left[\frac{R}{a}\right]^2 \frac{\mu_0 IR}{2\pi a^2}(dR \times 1) = \frac{\mu_0}{8\pi} I$$

$$L_{11} = \frac{\Psi_1}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} \qquad (۱۴-۱۱)$$

L_{11} در حقیقت ضریب خودالقای داخلی هادی داخلی کابل است برای محاسبه ضریب خودالقاء خارجی بر واحد طول از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\phi = \int \overline{B}.\overline{ds} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dR \times 1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

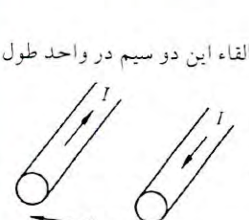
$$L_{ext} = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad (۱۶-۱۱)$$

در حقیقت برای محاسبه ضریب خودالقای داخلی از $\overline{B}$ در خارج سیم بشعاع a استفاده می‌شود ضریب خودالقاء کل کابل در واحد طول عبارتست از:

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad (۱۷-۱۱)$$

در حقیقت همواره ضریب خودالقاء داخل ثابت است و بستگی به ابعاد کابل ندارد و در محاسبات عملی از مقدار آن در مقایسه با ضریب خودالقاء خارجی صرفنظر می‌شود.

مثال ۳: دو سیم موازی بلند بشعاع a بفاصله $d \gg a$ از هم قرار دارند ضریب خودالقاء این دو سیم در واحد طول را به دست آورید



حل: میدان H در بین دو سیم عبارتست از مجموع میدانهای ناشی از هر سیم

$$H = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{d-R}\right]$$

$$B=\mu_0 H=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{d-R}\right]$$

$$\phi=\int \overline{B}.\overline{ds}=\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{d-R}\right](dR\times 1)$$

$$\rightarrow \phi=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$

$$L=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a} \qquad (۱۸-۱۱)$$

مثال ۴: دو سیم پیچ بلند بشعاع R_1 و R_2 حامل جریانهای I_1 و I_2 می‌باشند و بصورت هم محور قرار دارند بطوریکه $R_1<R_2$ اگر تعداد دورهای این سیم پیچ بر واحد طول به ترتیب N_1 و N_2 باشند مطلوبست ضریب خودالقاء هر یک و ضریب القاء متقابل بین دو سیم پیچ

حل: قبلاً میدان در سیم پیچ بلند را با قانون آمپر بدست آوردیم که عبارتست از:

$$H_1=\begin{cases}N_1 I_1 & R<R_1\\ 0 & R>R_1\end{cases} \qquad H_2=\begin{cases}N_2 I_2 & R<R_2\\ 0 & R>R_2\end{cases}$$

$$\phi_{11}=\int \overline{B}_1.\overline{ds}_1=\mu_0 N_1 I_1 \pi R_1^2$$

$$\phi_{22}=\int \overline{B}_2.\overline{ds}_2=\mu_0 N_2 I_2 \pi R_2^2$$

$$\phi_{21}=\int \overline{B}_1.\overline{ds}_2=\int_0^{R_1}\int_0^{2\pi}\mu_0 [N_1 I_1]\, R\,dR\,d\phi+\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\mu_0 (0)\, R\,dR\,d\phi=\mu_0 N_1 I_1 \pi R_1^2$$

$$\phi_{12}=\int \overline{B}_2.\overline{ds}_1=B_2 S_1=\mu_0 N_2 I_2 \pi R_1^2$$

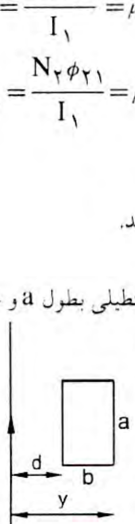
$$L_{11}=\frac{N_1\phi_{11}}{I_1}=\mu_0 N_1^2 \pi R_1^2 \qquad L_{22}=\frac{N_2\phi_{22}}{I_2}=\mu_0 N_2^2 \pi R_2^2$$

$$M_{21}=\frac{N_2\phi_{21}}{I_1}=\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1^2 \qquad M_{12}=\frac{N_1\phi_{12}}{I_2}=\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1^2$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود $M_{12}=M_{21}$

در این مسئله $k=\frac{M_{12}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$ که برابر $\frac{R_1}{R_2}$ است را ضریب کوپلاژ بین دو سیم پیچ می‌نامند.

مثال ۵: از یک سیم بی نهایت طویل منطبق بر محور zها جریان I عبور می‌کند یک حلقه مستطیلی بطول a و عرض b مطابق شکل در مجاورت سیم قرار دارد ضریب القاء متقابل بین سیم و حلقه را بدست آورید.



حل:

$$\phi=\int \overline{B}.\overline{ds}=\int_0^a\int_d^{d+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\,dy\,dz=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}$$

$$M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}$$

۱۱-۲- چگالی حجمی انرژی ذخیره شده

میدانیم که در یک سیم پیچ به ضریب خودالقاء L رابطه جریان و ولتاژ بصورت $V = L\frac{dI}{dt}$ می‌باشد بنابراین انرژی مغناطیسی ذخیره شده عبارتست از:

$$W_m = \int VI\,dt = \int_0^t L\frac{dI}{dt}I\,dt = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

اگر سطح مقطع سیم پیچ را S فرض کنیم چگالی حجمی انرژی مغناطیسی عبارتست از:

$$\rho_{w_m} = \frac{W_m}{Sl} = \frac{\frac{1}{2}\left[\pi a^2\mu_0 N^2\right]I^2}{\pi a^2 l} = \frac{1}{2}\mu_0 (NI)^2$$

$$\rho_{w_m} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \qquad (۱۱-۱۹)$$

یعنی چگالی حجمی انرژی مغناطیسی ذخیره شده برابر است با $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ و یا $\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$ بدیهی است که اگر سیم پیچ دارای یک هسته با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ باشد باید در روابط بالا بجای μ_0 از μ استفاده کرد.

مثال ۶: یک کابل کواکسیال به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b حامل جریان I می‌باشد انرژی ذخیره شده مغناطیسی در واحد طول کابل چقدر است.

حل: قبلاً میدان در $R<a$ *و* $R>a$ ***را با استفاده از قانون آمپر بدست آوردیم که عبارت بود از***

$$H = \begin{cases} \frac{IR}{2\pi a^2}\hat{a}_\phi & R<a \\ \frac{I}{2\pi R}\hat{a}_\phi & R>a \end{cases}$$

$$W_m = \int \frac{1}{2}\mu_0 H^2 dv = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2}\mu_0 \left[\frac{IR}{2\pi a^2}\right]^2 R\,dR\,d\phi\,dz +$$

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2}\mu_0 \left[\frac{I}{2\pi R}\right]^2 R\,dR\,d\phi\,dz = \frac{\mu_0}{16\pi}I^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}I^2 \ln\frac{b}{a}$$

بدیهی است که اگر W_m را مساوی $\frac{1}{2}LI^2$ قرار دهیم ضریب خود القاء بر واحد طول کابل بدست می‌آید.

$$W_m = \frac{\mu_0}{16\pi}I^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}I^2\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{2}LI^2$$

و یا

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad (۱۱-۲۰)$$

که این همان ضریب خودالقاء بر واحد طول کل کابل می‌باشد که در رابطه (۱۱-۱۷) نیز بیان شده است.

مثال ۷: دو سیم پیچ هم محور بشعاع R_1 و R_2 به ترتیب حامل جریان I_1 و I_2 و تعداد سیم پیچ در واحد طول N_1 و N_2 می‌باشند انرژی ذخیره شده در واحد طول این دو سیم پیچ کدام است؟ $(R_1<R_2)$

حل: ***قبلاً میدان‌های ناشی از دو سیم پیچ را در مثالهای قبلی بدست آوردیم حال با استفاده از چگالی حجمی***

انرژی ذخیره شده مغناطیسی میتوان انرژی ذخیره شده مغناطیسی را بدست آورد.

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\int_0^{R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\mu_0\left(N_1 I_1 + N_2 I_2\right)^2 dv + \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\mu_0\left(N_2 I_2\right)^2 dv$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\left(N_1 I_1 + N_2 I_2\right)^2 \pi R_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0\left(N_2 I_2\right)^2 \pi\left[R_2^2 - R_1^2\right]$$

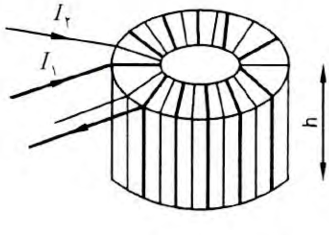
$$\Rightarrow W_m = \frac{1}{2}\mu_0 N_1^2 \pi R_1^2 I_1^2 + \mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2 I_1 I_2 + \frac{1}{2}\mu_0 N_2^2 \pi R_2^2 I_2^2$$

با توجه به روابط L_{11}، L_{22} و $M=M_{12}=M_{21}$ که قبلاً بدست آوردیم خواهیم داشت.

$$W_m = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + MI_1 I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 \qquad (21\text{-}11)$$

رابطه فوق رابطه بسیار مهمی است که نشان دهندهٔ رابطه بین انرژی مغناطیسی ذخیره شده با ضرایب خودالقاء و القاء متقابل و جریانهای الکتریکی سیم پیچ‌ها می‌باشد بعبارت دیگر اگر بتوانیم انرژی ذخیره شده کل سیستم را بر حسب جریانها بدست آوریم ضرایب I_1^2 , $I_1 I_2$, I_2^2 به ترتیب $\frac{1}{2}L_{11}$ و M و $\frac{1}{2}L_{22}$ می‌باشد بدینوسیله ضرایب خودالقاء و القاء متقابل بدست می‌آیند.

مثال ۸: یک هسته به ارتفاع h با سطح مقطع مستطیلی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای دو نوع سیم پیچ می‌باشد سیم پیچ حامل جریان I_1 دارای N_1 دور و سیم پیچ حامل جریان I_2 دارای N_2 دور می‌باشد با استفاده از انرژی مغناطیسی ذخیره شده L_{11}، L_{22} و M را بدست آورید؟



حل: با استفاده از قانون آمپر میدان H را بدست می‌آوریم.

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

$$H = \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi r}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^h \mu_0\left[\frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi r}\right]^2 r\,dr\,d\phi\,dz$$

$$W_m = \frac{1}{2}\left[\frac{\mu_0}{2\pi}hN_1^2\ln\frac{b}{a}\right]I_1^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\mu_0}{2\pi}hN_2^2\ln\frac{b}{a}\right]I_2^2 + \left[\frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{\pi}\ln\frac{b}{a}\right]I_1 I_2$$

با مقایسه W_m با رابطه (۱۱-۲۱) ضرایب L_{11}، L_{22} و M بدست می‌آیند.

$$L_{11} = \frac{\mu_0 h N_1^2}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L_{22} = \frac{\mu_0 h N_2^2}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$M = \frac{\mu_0 h N_1 N_2}{\pi}\ln\frac{b}{a}$$

بطور کلی ضریب خودالقاء و القاء متقابل را میتوان از دو روش حل بدست آورد یکی روش شار و دیگری روش انرژی ذخیره شده مغناطیسی و از روابط زیر استفاده می‌شود.

$$L=\frac{N\phi}{I} \quad \text{روش شار}$$
$$L=\frac{۲W_m}{I^۲} \quad \text{روش انرژی} \qquad (۱۱-۲۲)$$

۱۱-۳- محاسبه نیروی وارد بر یک جسم با استفاده از تغییر انرژی ذخیره شده

همانطوریکه در میدان الکتریکی هم بحث شد میتوان نیروی وارد بر یک جسم را با استفاده از تغییر مکان جزئی آن جسم به اندازه dl و محاسبه dW یعنی تغییر انرژی ناشی از این تغییر مکان و با استفاده از رابطه $F=\frac{dW}{dl}$ بدست آورد. در حالت میدان الکتریکی این تغییر مکان تحت حالت بار ثابت و پتانسیل ثابت انجام می‌شد در حالت میدان مغناطیسی تغییر مکان تحت حالت جریان ثابت و شار مغناطیسی ثابت انجام می‌گیرد.

اگر فرض کنیم که بدلیل جابجایی دیفرانسیلی مجازی dl در یکی از مدارهای حامل جریان تغییری در شار روی ندهد (جابجایی تحت شار ثابت) نیروی محرکه القایی وجود نخواهد داشت و منابع هیچ انرژی به سیستم تحویل نخواهند داد. کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم $\overline{F}_\phi \cdot \overline{d\ell}$ به هزینه کاهش انرژی مغناطیسی ذخیره شده است که در آن F_ϕ نیرو تحت شرایط شار ثابت می‌باشد از این رو

$$\overline{F}_\phi \cdot \overline{d\ell} = dW_m = -(\nabla W_m) \cdot \overline{d\ell}$$

به عبارت دیگر

$$\overline{F}_\phi = -\nabla W_m$$

حال فرض کنید جابجایی تحت جریان ثابت صورت گیرد در این حالت مدار به منابع جریانی وصل شده‌اند که با نیروی محرکه القایی نتیجه شده از تغییرات شار ناشی از جابجایی مجازی dl مخالفت می‌کنند کار انجام شده یا انرژی تحویلی توسط منابع برابر است با:

$$dW_s = \sum_k I_k \, d\phi_k$$

این انرژی باید برابر مجموع کار مکانیکی انجام شده توسط سیستم $dW=\overline{F}_I \cdot \overline{d\ell}$ که در آن F_I نمایشگر نیروی وارد بر مدار جابجا شده تحت شرایط جریان ثابت است و افزایش در انرژی مغناطیسی ذخیره شده dW_m می‌باشد، یعنی

$$dW_s = dW + dW_m$$

که $dW_m=\frac{۱}{۲}\sum I_k \, d\phi_k = \frac{۱}{۲}W_s$ بنابراین خواهیم داشت:

$$dW=\overline{F}_I \cdot \overline{d\ell} = dW_m = (\nabla W_m) \cdot \overline{d\ell}$$

در نتیجه

$$F_I = \nabla W_m$$

بنابراین با آنچه گفته شد میتوان نتیجه گرفت که:

$$\overline{F}=\begin{cases} \nabla W_m & \text{تحت جریان ثابت} \\ -\nabla W_m & \text{تحت شار ثابت} \end{cases} \qquad (۱۱-۲۳)$$

مثال ۹: یک سیم پیچ شامل N دور حامل جریان I می‌باشد یک میله با سطح مقطع s از جنس یک ماده مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی نسبی μ_r مطابق شکل در دهانه سیم پیچ قرار داده می‌شود نیروی وارد بر میله را بدست آورید؟

حل: اگر جزء dx در طول سیم پیچ را در نظر بگیریم قبل از قرار دادن میله چون در این قسمت هوا بوده انرژی ذخیره شده در این جزء عبارتست از

$$W_1 = \frac{1}{2}\mu_0 \left(NI\right)^2 s\,dx$$

حال با قرار گرفتن میله در جزء dx انرژی ذخیره شده برابر خواهد بود با:

$$W_2 = \frac{1}{2}\mu \left(NI\right)^2 s\,dx$$

در اینصورت تغییر انرژی ناشی از جابجایی میله در داخل سیم پیچ عبارتند از:

$$dW = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}\left(\mu - \mu_0\right)(NI)^2 s dx$$

در اینصورت نیرو در جهت x عبارتست از:

$$F_x = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2}\left(\mu - \mu_0\right) N^2 I^2 S = \frac{1}{2}\mu_0 \left(\mu_r - 1\right) N^2 I^2 s$$

لازم به ذکر است که با استفاده از تغییرات انرژی در اثر تغییر زاویه جسم (چرخش) میتوان گشتاور وارد بر جسم را نیز بدست آورد بعبارت دیگر

$$T = \begin{cases} \dfrac{-\partial W_m}{\partial \theta} & \text{تحت شار ثابت} \\[2ex] \dfrac{\partial W_m}{\partial \theta} & \text{تحت جریان ثابت} \end{cases} \qquad (۲۴-۱۱)$$

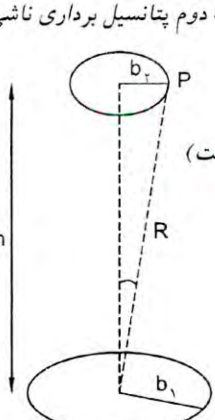
البته چون انرژی ذخیره شده را طبق رابطه (۱۱-۲۱) میتوان برحسب ضرایب خودالقاء و ضریب القاء متقابل نوشت میتوان نیرو و گشتاور را تحت جریان ثابت از روابط زیر نیز بدست آورد.

$$\overline{F}_I = I_1 I_2 \left[\nabla M\right]$$

$$\overline{T}_I = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \theta} \qquad (۲۵-۱۱)$$

مثال ۱۰: نیروی بین دو سیم پیچ مدور هم محور به شعاعهای b_1 و b_2 که به فاصله h از یکدیگر قرار دارند را تعیین کنید سیم پیچ‌ها به ترتیب شامل N_1 و N_2 دور سیم فشرده و حامل جریان I_1 و I_2 هستند. $\left[h \gg b_2 \,,\, h \gg b_1\right]$

حل: ابتدا ضریب القاء متقابل بین دو حلقه را به دست می‌آوریم در نقطه P روی حلقه دوم پتانسیل برداری ناشی از جریان I_1 عبارتست از:



$$A_{12} = \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2}{4R^2}\sin\theta$$

(این در حقیقت پتانسیل برداری ناشی از یک دو قطبی مغناطیسی در فواصل دور است)

$$\phi_{12} = \oint_{c_2} \overline{A}_{12} \cdot \overline{d\ell}_2 = \int_0^{2\pi} A_{12} b_2 \, d\phi$$

$$\phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 I_1 b_1^2 b_2^2 \pi}{2\left[z^2 + h^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

بنابراین

$$M=\frac{N_2\,\phi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi b_1^2 b_2^2}{2\left[z^2+h^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{F}_{12}=I_1 I_2(\nabla M)\Big|_{z=h}=-\hat{a}_z I_1 I_2\frac{3\mu_0 N_1 N_2 b_1^2 b_2^2 h\pi}{2\left[h^2+b_2^2\right]^{\frac{5}{2}}}$$

چون $h \gg b_2$ است بنابراین

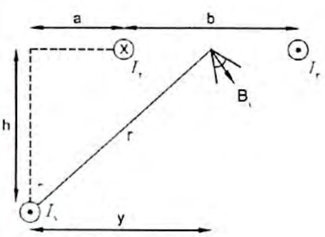
$$\overline{F}_{12}=-\hat{a}_z\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi h^4}$$

که m_1 و m_2 به ترتیب اندازه گشتاورهای مغناطیسی سیم پیچهای ۱و۲ هستند یعنی

$$m_1=N_1 I_1 \pi b_1^2 \quad , \quad m_2=N_2 I_2 \pi b_2^2$$

$\overline{F}_{12}$ نیروی وارد بر حلقه دوم از طرف حلقه اول است علامت منفی بخاطر این است که اگر جریانها هم جهت باشند نیرو جاذبه است.

مثال ۱۱: یک رشته سیم مستقیم بی نهایت طویل حامل جریان I_1 در پایین، سمت چپ و موازی با یک خط تلفن دو سیمی که جریان I_2 از آن می‌گذرد قرار دارد مطلوبست ضریب القاء متقابل بین سیم حامل جریان I_1 و خط تلفن در واحد طول و نیروی وارد بر واحد طول سیم تلفن از طرف سیم مستقیم در جهت z



حل: ابتدا شار مغناطیسی عبوری از خط تلفن را بدست می‌آوریم.

$$\overline{B}_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{a}_\phi$$

$$d\phi_{21}=\overline{B}_1.\overline{ds}_2=B_1\,dy\,dx\cos\alpha$$

$$d\phi_{21}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}dy\,dx\times\frac{y}{r}=\frac{\mu_0 I_1\,dy\,dxy}{2\pi\left(y^2+z^2\right)}$$

$$\phi_{21}=\int_0^1\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I_1\,dx\,dy\,y}{2\pi\left(y^2+z^2\right)}=\frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\ln\frac{z^2+(a+b)^2}{z^2+a^2}$$

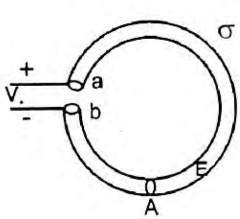
$$M=\frac{\phi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0}{4\pi}\ln\frac{z^2+(a+b)^2}{z^2+a^2}\Big|_{z=h}=\frac{\mu_0}{4\pi}\ln\frac{h^2+(a+b)^2}{h^2+a^2}$$

$$F_{12}=I_1 I_2\left[\overline{\nabla M}\right]\Big|_{z=h}=\frac{-\mu_0 h}{2\pi}\frac{\left[b^2+2ab\right]I_1 I_2}{\left[h^2+a^2\right]\left[h^2+(a+b)^2\right]}\hat{a}_z$$

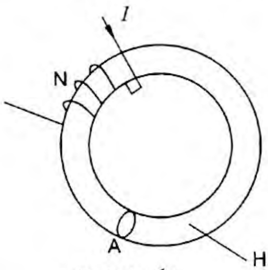
۱۱-۴- مدارهای مغناطیسی

یکی از مسائل مهم در الکترومغناطیس عبارت است از محاسبه شار مغناطیسی ایجاد شده توسط یک یا چند سیم پیچ جریان که به دور هسته آهنی قرار گرفته‌اند بصورت یک مدار بسته می‌باشد چنین مسئله‌ای در ترانسفورماتورها، ماشینهای الکتریکی، کلیدهای برقی و بسیاری از ادوات الکتریکی دیگر که بر اساس میدان الکترومغناطیس کار می‌کنند اتفاق می‌افتد اینگونه سیستمها بدلیل تشابهی که با مدارهای الکتریکی (مقاومتی) دارند مدارهای مغناطیسی نامیده می‌شوند و با روشهایی کاملاً مشابه روشهای حل مدارهای الکتریکی مورد بررسی قرار می‌گیرند. جهت نشان دادن تشابه

بین مدارات الکتریکی و مغناطیسی شکل‌های (۱۱-۴- الف) و (۱۱-۴- ب) را در نظر بگیرید در شکل (۱۱-۴- الف) یک حلقه هادی با ضریب هدایت الکتریکی σ و سطح مقطع A نشان داده شده است که اختلاف پتانسیل $V_{\circ}$ از طریق شکاف بسیار کوچک ab به آن اعمال شده است این اختلاف پتانسیل میدان الکتریکی $\overline{E}$ را در درون هادی بوجود می‌آورد که چگالی جریان هدایتی $\overline{J}_c = \sigma\overline{E}$ از آن ناشی می‌شود. مدار شکل (۱۱-۴-ب) نیز از یک حلقه با ابعادی برابر ابعاد حلقه شکل (۱۱-۴- الف) تشکیل شده که از جنس یک ماده مغناطیس با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ می‌باشد بدور این حلقه سیم پیچی با N دور تعبیه شده و از آن جریان I عبور می‌کند سیم پیچ جریان میدان مغناطیسی $\overline{H}$ را پدید می‌آورد که از آن چگالی شار $\overline{B}=\mu\overline{H}$ حاصل می‌شود در مدار الکتریکی (۱۱-۴- الف) جریان هدایتی نمی‌تواند در اطراف هادی نشت کند و تماماً در درون هادی محصور است ولی در مدار مغناطیسی (۱۱-۴- ب) میدان مغناطیسی می‌تواند به فضای اطراف هسته نفوذ کند معهذا وقتی $\mu \gg \mu_{\circ}$ باشد یعنی ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هسته بسیار بزرگتر از ضرایب نفوذپذیری مغناطیسی فضای اطراف که عموماً هوا است باشد شار نشتی در فضا بسیار ناچیز است.



شکل (۱۱-۴): الف



شکل (۱۱-۴): ب

شکل (۱۱-۴): تشابه بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی

برای مدار الکتریکی (۱۱-۴ -الف) داریم:

$$\overline{\nabla}\times\overline{E}=0$$

$$V_{\circ}=\int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell}$$

$$\overline{J}_c=\sigma\overline{E}$$

$$I_c=\int_A \overline{J}_c.\overline{ds}$$

و برای مدار مغناطیسی (۱۱-۴- ب) داریم:

$$\overline{\nabla}\times\overline{H}=0$$

$$NI=\oint_c \overline{H}.\overline{d\ell}$$

$$\overline{B}=\mu\overline{H}$$

$$\phi=\int_A \overline{B}.\overline{ds}$$

مقایسه روابط فوق وجود تشابه زیر را بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی آشکار می‌سازد.

$$\overline{E}\leftrightarrow\overline{H}$$

$$V_{\circ}\leftrightarrow NI$$

$$\overline{J}_c\leftrightarrow\overline{B}$$

$$I_c\leftrightarrow\phi$$

$$\sigma\leftrightarrow\mu$$

در مدار الکتریکی نسبت $V_\circ$ به I_c را مقاومت الکتریکی می‌نامیم که با آن آشنایی کافی داریم و بسادگی میتوان نشان داد که مقدارآن عبارتست از:

$$R = \frac{V_\circ}{I_c} = \frac{l}{\sigma A}$$

کمیت مشابه مقاومت در مدار مغناطیسی از نسبت NI به ϕ بدست می‌آید که آنرا رلوکتانس و یا مقاومت مغناطیسی نام نهاده و با علامت $\Re$ نشان می‌دهند بنابراین

$$\Re = \frac{NI}{\phi}$$

که با جایگزینی NI و ϕ خواهیم داشت:

$$\Re = \frac{\oint H.d\ell}{\int_A B.ds} = \frac{Hl}{\mu HA} = \frac{l}{\mu A}$$

یعنی رلوکتانس نیز تابعی از جنس هسته (μ) و ابعاد فیزیکی حلقه می‌باشد.

مشابه رابطه $\overline{E} = -\overline{\nabla} V$ که در آن V پتانسیل الکتریکی است میتوان $\overline{H} = -\overline{\nabla} V_m$ تعریف کرد که V_m پتانسیل اسکالر مغناطیسی است که همانطوریکه در فصول قبل دیدیم وقتی معتبر است که $\overline{\nabla} \times \overline{H} = \circ$ باشد که البته در مدارهای مغناطیسی بعلت صفر بودن چگالی جریان هدایتی کرل شدت میدان مغناطیسی همواره صفر است اختلاف پتانسیل مغناطیسی بین دو نقطه عبارتست از:

$$V_{mab} = -\int_a^b \overline{H}.\overline{d\ell}$$

حال میتوان همان قوانین ولتاژ و جریان کیرشوف راکه برای مدارات الکتریکی بکار می‌بریم برای مدارات مشابه مغناطیسی بکار برد این قوانین بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\sum_i \phi_i = \circ$$

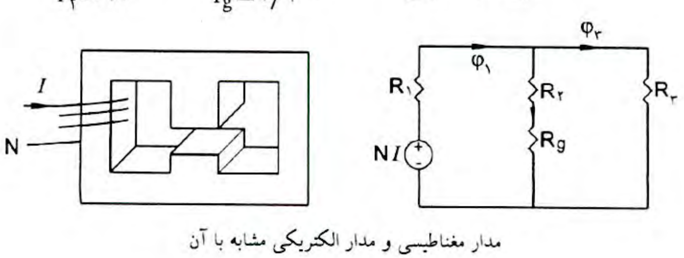
$$\sum_i V_{mi} = \sum_j (NI)_j = \sum_i H_i l_i$$

که $\sum_J (NI)_j$ مجموع جبری نیروهای محرکه مغناطیسی در مسیر بسته بوده و میدان مغناطیسی در هر شاخه یکنواخت فرض شده است رابطه مشابه $V=RI$ در حالت مغناطیسی $V_m = \Re\phi$ می‌باشد.

مثال ۱۲: شکل زیر یک مدار مغناطیسی را نشان میدهد که از سه شاخه با یک شکاف هوایی در شاخه مرکزی تشکیل شده است سیم پیچ تعبیه شده بدور شاخه سمت چپ نیروی محرکه‌ای بمیزان ۱۰۰۰ آمپر دور را تامین میکند مطلوبست رسم مدار الکتریکی مشابه و سپس محاسبه چگالی شار مغناطیسی در شکاف هوایی ضریب نفوذپذیری نسبی هسته $\mu_r = ۱۰۰۰$ می‌باشد ابعاد هسته بشرح زیر است.

$A_۱ = A_۳ = ۸^{cm^۲}$ $\quad A_۲ = ۱۰^{cm^۲}$ $\quad A_g = ۱۰/۷^{cm^۲}$ سطح مقطع شکاف هوایی

$l_۱ = l_۳ = ۲۰^{cm}$ $\quad l_۲ = ۱۰^{cm}$ $\quad l_g = ۰/۱^{cm}$ طول شکاف هوایی



مدار مغناطیسی و مدار الکتریکی مشابه با آن

$$\Re_1=\Re_3=\frac{l_1}{\mu A_1}=\frac{20\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}\times1000\times8\times10^{-4}}=20\times10^{4}$$

$$\Re_2=\frac{l_2}{\mu A_2}=\frac{10\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}\times1000\times10\times10^{-4}}=8\times10^{4}$$

$$\Re_g=\frac{l_g}{\mu_0 A_g}=\frac{0.1\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}\times10.7\times10^{-4}}=74\times10^{4}$$

حالا روابط کیرشوف را در مدار معادل الکتریکی آن می‌نویسیم.

$$\begin{cases}\phi_1=\phi_2+\phi_3\\ \Re_1\phi_1+\left[\Re_2+\Re_g\right]\phi_2=1000\\ \Re_3\phi_3=\left[\Re_2+\Re_g\right]\phi_2\end{cases}$$

با حل سه معادله سه مجهولی بالا داریم:

$$\phi_2=\frac{1000}{\Re_1+2\Re_2+2\Re_g}=\frac{1}{1840}\mathrm{wb}$$

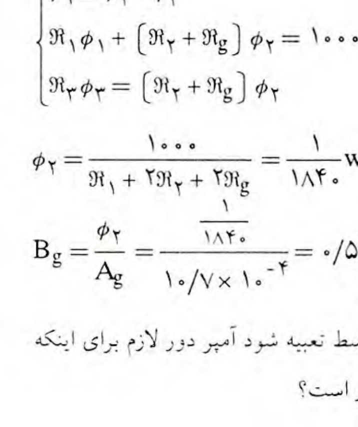
$$B_g=\frac{\phi_2}{A_g}=\frac{\frac{1}{1840}}{10.7\times10^{-4}}=0.5\frac{\mathrm{wb}}{\mathrm{m}^2}$$

مثال ۱۳: اگر در مدار مغناطیسی مثال قبل سیم پیچ جریان بدور شاخه وسط تعبیه شود آمپر دور لازم برای اینکه همان چگالی شار مغناطیسی یعنی $0.5\frac{\mathrm{wb}}{\mathrm{m}^2}$ در شکاف هوایی ایجاد شود چقدر است؟

حل: در اینحالت نیروی محرکه در شاخه وسطی قرار می‌گیرد.

$$NI=\phi_2\left[\Re_2+\Re_g+\Re_1\|\Re_3\right]=0.5\times10.7\times10^{-4}\left[8+74+10\right]\times10^{4}$$

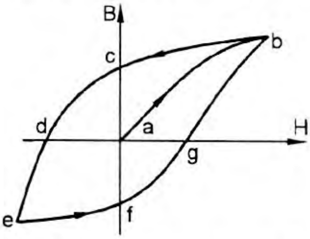
$NI=492.2$ *آمپر دور*



۱۱-۵- هیسترزیس

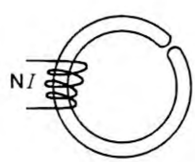
در قسمت قبل ضمن مطالعه میدان مغناطیسی در اجسام گفته شد که ضریب نفوذپذیری مغناطیسی مواد فرومگنتیگ تابعی از میدان بوده و مقدار ثابتی ندارد. در حقیقت رابطه بین میدانهای $\overline{B}$, $\overline{H}$ در اینگونه اجسام غیر خطی و توام با هیسترزیس است از اینرو رابطهٔ بین $\overline{B}$, $\overline{H}$ عموماً بطریق ترسیمی بیان می‌شود شکل (۱۱-۵) یک منحنی $\overline{B}$ - $\overline{H}$ نوعی را برای اجسام فرومگنتیگ نشان میدهد این منحنی هیسترزیس نامیده می‌شود بمنظور تشریح منحنی هیسترزیس با نمونه‌ای از یک جسم فرومگنتیگ مغناطیسی شروع می‌کنیم در شروع $\overline{B}$, $\overline{H}$ هر در صفر هستند. این حالت متناظر با نقطه a روی منحنی است. با افزایش $\overline{H}$، مغناطیس شدن جسم آغاز گشته و رو به افزایش می‌نهد و در نتیجه $\overline{B}$ افزایش می‌یابد تا اینکه سرانجام به نقطه اشباع می‌رسد و افزایش H موجب افزایش B نمی‌شود و جسم تا حد اشباع مغناطیس شده است حال اگر H از مقدارش در نقطه b کاهش یابد و به صفر برسد B نیز کاهش می‌یابد ولی کاهش یافتن B منحنی ab را در جهت عکس نمی‌پیماید بلکه منحنی دیگری مانند bc را دنبال می‌کند و این به مفهوم باقی ماندن

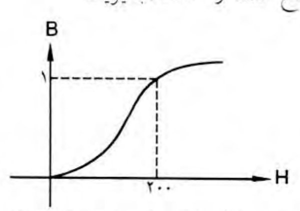
مقداری از میدان مغناطیسی القاء شده در جسم حتی پس از برداشتن میدان خارجی است در حقیقت همانطوریکه قسمت cd منحنی هیسترزیس نشان میدهد یک شدت میدان مغناطیسی در جهت عکس باید به جسم اعمال گردد تا B به صفر کاهش یابد مقدار B در نقطه c را پس ماند جسم و مقدار H در نقطه d را نیروی بازگرداننده می‌نامند. افزایش بیشتر H در جهت جدید منجر به افزایش یافتن B در این جهت و سرانجام اشباع آن در نقطه e می‌گردد که قرینه نقطه b نسبت به مبدأ است با لاخره اگر H راز مقداریکه در نقطه e دارد به صفر کاهش داده سپس جهت آنرا معکوس نموده و افزایش دهیم، تغییرات بوجود آمده در B منحنی efgb را دنبال می‌کند و بدین ترتیب سیکل هیستروزیس کامل می‌شود. اکنون بخوبی آشکار است که اگر یک جسم فرومگنتیگ در اختیار داشته باشیم وضعیت مغناطیس کنونی آن به تاریخچه گذشته است بستگی دارد. بدین معنی که قبلاً تحت تاثیر چه میدانی و به چه نحو قرار داشته است لازم به ذکر است که در اینحالت چون رابطه B برحسب H یک رابطه خطی نیست بنابراین نمی‌توان دراین شرایط برای هسته رلوکتانس تعریف کرد.



شکل (۱۱-۵): منحنی هیتروزیس یک ماده مغناطیسی

مثال ۱۴: یک هسته بشکل حلقه به شعاع متوسط $R=15^{cm}$ درآورده شده است و شامل یک فاصله هوایی ۱mm می‌باشد اگر بخواهیم B در شکاف هوایی ۱T باشد و منحنی B-H هسته بشکل زیر باشد مقدار آمپر دور سیم پیچ چقدر باید باشد سطح مقطع هسته را $6cm^2$ بگیرید.





حل: چون رابطه بین B و H خطی نیست لذا برای هسته نمیتوان رلوکتانس تعریف کرد و مدار معادل الکتریکی برای سیستم رسم کرد بنابراین از قانون آمپر استفاده می‌کنیم.

$$NI = H_m l_m + H_\circ l_\circ$$

که H_m و $H_\circ$ به ترتیب میدان داخل هسته و داخل شکاف هوایی و l_m، $l_\circ$ طول هسته و شکاف هوایی می‌باشد از روی منحنی B-H مشخص است که به ازای B=۱ داریم $H_m=200$ حال باید $H_\circ l_\circ$ را حساب کنیم

$$H_\circ l_\circ = \frac{B_\circ}{\mu_\circ} \times l_\circ = \frac{\phi}{S\mu_\circ} l_\circ = \frac{l_\circ}{S\mu_\circ}\phi = \Re_\circ \phi$$

که $\Re_\circ$ رلوکتانس شکاف هوایی و ϕ شار در هسته (و شکاف هوایی زیرا ϕ در دو مسیر یکی می‌باشد) است.

$$\phi = B.S = 1\times 6\times 10^{-4} = 6\times 10^{-4}$$

$$\Re_\circ = \frac{l_\circ}{S\mu_\circ} = \frac{10^{-3}}{6\times 10^{-4}\times 4\pi\times 10^{-7}} = \frac{10^{8}}{24\pi}$$

$$\Rightarrow NI = 200\times(2\pi\times 0/15) + \frac{10^{8}}{24\pi}\times 10^{-3} \Rightarrow NI = 1515\,A.t$$

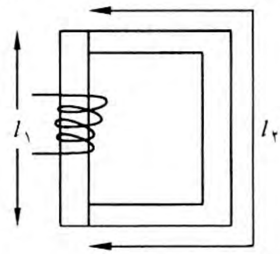
مثال ۱۵: دو هسته فرومگنتیگ به طولهای l_1 , l_2 و سطح مقطع‌های S_1 و S_2 مطابق شکل به هم متصل شده و یک سیم پیچ ۱۰۰ دور با جریان 20^A بدور هسته اولی پیچیده شده است اگر رابطه B-H هسته اول بصورت $B_1 = \frac{2H_1}{400+H_1}$ و رابطه B-H هسته دوم بصورت $B_2 = \frac{10H_2}{500+H_2}$ باشد میدان و چگالی شار مغناطیسی در درون هر هسته را بدست آورید؟

$l_1 = 10^{cm}$

$l_2 = 25^{cm}$

$S_1 = 8^{cm^2}$

$S_2 = 6^{cm^2}$



حل: چون برای هسته‌ها رابطه B-H خطی نیست لذا نمی‌توان مدار معادل الکتریکی برای هسته‌ها رسم کرد اما شار در دو هسته یکسان است یعنی:

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow B_1S_1 = B_2S_2 \rightarrow 8B_1 = 6B_2 \rightarrow \quad B_1 = \frac{3}{4}B_2$$

از قانون آمپر داریم:

$$\begin{cases} H_1l_1 + H_2l_2 = NI \\ B_1 = \frac{3}{4}B_2 \Rightarrow \frac{20H_1}{H_1+400} = \frac{3}{4}\frac{10H_2}{H_2+500} \end{cases}$$

$$0/1H_1 + 0/25H_2 = 2000 \rightarrow H_1 = 20000 - 2/5H_2$$

$$\frac{20H_1}{H_1+400} = \frac{3}{4}\frac{10H_2}{H_2+500} \rightarrow \quad \frac{20(20000-2/5H_2)}{20000-2/5H_2+400} = \frac{3}{4}\frac{10H_2}{H_2+500}$$

$$\Rightarrow \frac{400000-50H_2}{20400-2/5H_2} = \frac{30H_2}{4H_2+2000} \Rightarrow$$

$$612000H_2 - 75H_2^2 = 1600000H_2 - 200H_2^2 + 800000000 - 10000H_2$$

$$\Rightarrow 125H_2^2 - 888000H_2 - 800000000 = 0 \Rightarrow H_2^2 - 7104H_2 - 64\times10^5 = 0$$

$$\rightarrow H_2 = 7912/8 \rightarrow H_1 = 20000 - 2/5H_2 = 218$$

$$B_1 = \frac{20H_1}{H_1+400} = 7/05^T \qquad B = \frac{10H_2}{H_2+500} = 9/4 \qquad \left[B_1 = \frac{3}{4}B_2\right]$$

مثال ۱۶: یک هسته آهن بطول ۱۰cm دارای ضریب نفوذ مغناطیسی می‌باشد که بطور خطی از $1000\mu_0$ به $15000\mu_0$ بطور خطی از یک انتها به انتهای آن تغییر می‌کند اگر هزار دور سیم پیچ با جریان ۳ آمپر بدور هسته تعبیه شود و سطح مقطع هسته $5cm^2$ باشد چگالی شار مغناطیسی داخل هسته را بدست آوردید؟

حل: ابتدا معادله μ را بر حسب طول هسته بدست می‌آوریم.

$$\mu = \alpha Z + \beta \qquad\qquad \mu(Z=0) = \beta = 1000\mu_0$$

$$\mu(z=0/1) = 0/1\alpha+\beta = 1500\mu_0 \rightarrow \alpha = 5000\mu_0$$

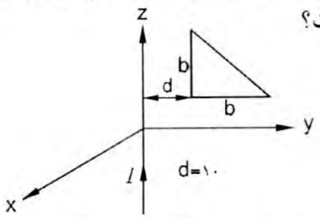
$$\mu = 1000\mu_0\,(50z+1) \rightarrow \Re = \int \frac{dz}{\mu s} = \int_0^{0/1} \frac{dz}{1000\mu_0\,(50z+1)\,s}$$?

$$= \frac{1}{1000\mu_0} \times \frac{1}{50} \ln\,(50z+1)\,\Big]_0^{0/1} = \frac{\ln 6}{50000\mu_0 s} \rightarrow \phi = \frac{NI}{\Re} = \frac{3000}{\frac{\ln 6}{50000\mu_0 s}}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{3000 \times 50000\mu_0 s}{\ln 6} \rightarrow B = \frac{\phi}{s} = 105/2\,T$$

سوالهای ضریب خودالقاء، القاء متقابل، انرژی مغناطیسی و مدارات مغناطیسی

۱. جریان I از یک سیم بلند منطبق بر محور z می‌گذرد سیمی به شکل یک حلقه مثلث مطابق شکل در مجاور سیم بلند قرار دارد و ضریب القاء متقابل بین سیم و حلقه کدام است؟



b=۱۷cm

d=۱۰cm

۱) ۱۰nH
۲) ۲۰nH
۳) ۱۵nH
۴) ۲۵nH

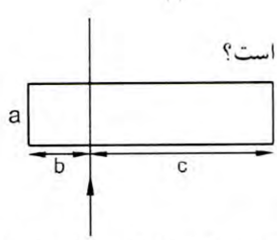
۲. یک شش ضلعی منتظم به ضلع a=۲m حامل جریان I می‌باشد یک دایره بشعاع ۱cm در مرکز این شش ضلعی طوری قرار گرفته بطوری با شش ضلعی هم مرکز است ضریب القاء متقابل بین شش ضلعی و دایره کدام است؟

۱) ۱۰۹pH
۲) ۱۲۵pH
۳) ۱۱۹pH
۴) ۲۱۷pH

۳. دو صفحه حامل جریان سطحی با چگالی‌های $J_{s_\circ}\hat{a}_z$ و $-J_{s_\circ}\hat{a}_z$ به ترتیب y=۰ و y=d توسط دو ماده مغناطیسی $\mu_۱$ در ۰<y<a و $\mu_۲$ در a<y<d از یکدیگر مجزا شده‌اند اگر $\mu_۲ = ۵\mu_۱$ باشد مطلوبست محاسبه $\frac{a}{d}$ بطوریکه فقط ۳۰٪ از شار مغناطیسی کل در ناحیه ۰<y<a وجود داشته باشد؟

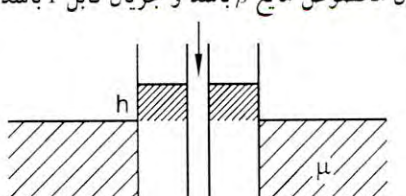
۱) $\frac{۴}{۷}$
۲) $\frac{۱۸}{۲۳}$
۳) $\frac{۱۴}{۲۵}$
۴) $\frac{۱۵}{۲۲}$

۴. ضریب القاء متقابل بین یک سیم و حلقه مستطیل مطابق شکل زیر کدام است؟



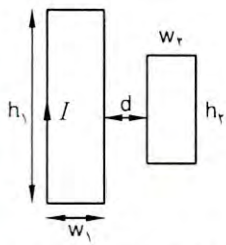
۱) $\frac{\mu_\circ b}{۲\pi}\ln\frac{c}{b}$
۲) $\frac{\mu_\circ a}{۲\pi}\ln\frac{c-b}{a}$
۳) $\frac{\mu_\circ a}{۲\pi}\ln\frac{c}{b}$
۴) $\frac{\mu_\circ a}{۲\pi}\ln\frac{c}{c-b}$

۵. کابل هم محوری بشعاع داخلی a و خارجی b را در داخل مایع قابل مغناطیس شدن با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ بطور عمود مطابق شکل وارد می‌کنیم اگر وزن مخصوص مایع ρ باشد و جریان کابل I باشد ارتفاع h را که مایع بالا می‌آید بدست آورید



۱) $\frac{(\mu-\mu_\circ)I^۲}{۴\pi^۲(b^۲-a^۲)\rho g}\ \ln\frac{b}{a}$
۲) $\frac{(\mu-\mu_\circ)I^۲}{۲\pi^۲ab\rho}\ln\frac{b}{a}$
۳) $\frac{(\mu-\mu_\circ)I^۲\ln\frac{b}{a}}{۲\pi^۲(b^۲-a^۲)\rho g}$
۴) $\frac{(\mu-\mu_\circ)I^۲}{۲\pi(b^۲-a^۲)\rho g}\ln\frac{b}{a}$

۶. ضریب القاء متقابل بین دو حلقه مستطیل هم صفحه با اضلاع موازی مطابق شکل زیر چقدر است؟ $h_2 > w_2 > d, h_1 \gg h_2$



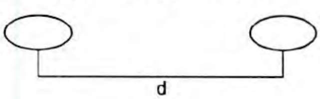
۱) $\frac{\mu_0 h_1}{2\pi} \ln \frac{w_1+d}{w_2+d}$ ۲) $\frac{\mu_0 h_1 h_2}{2\pi d} \ln \frac{w_1+w_2+d}{d+h_1}$

۳) $\frac{\mu_0 h_1}{2\pi d} \ln \frac{w_1+w_2 d}{w_2+d}$ ۴) $\frac{\mu_0 h_2}{2\pi} \ln \frac{d(w_1+w_2+d)}{(w_1+d)(w_2+d)}$

۷. یک سیم به شعاع a حامل جریان با چگالی غیریکنواخت $J = J_0 \frac{R}{a}$ میباشد انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول این سیم چقدر است؟

۱) $\frac{\pi\mu_0 j_0^2 a^4}{108}$ ۲) $\frac{\mu_0 j_0^2 a^4}{54\pi}$ ۳) $\frac{\pi\mu_0 j_0^2 a^4}{54}$ ۴) $\frac{\mu_0 j_0^2 a^4}{45}$

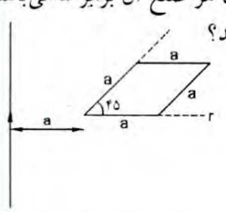
۸. دو حلقه بسیار کوچک حامل جریان I و به شعاع a در یک صفحه بفاصله d از همه قرار دارند ضریب القاء متقابل بین دو حلقه کدام است $(d \gg a)$ برای یک دو قطبی مغناطیسی:



$$\left[B = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)\right]$$

۱) $\frac{\mu_0 \pi a^4}{2d^3}$ ۲) $\frac{\mu_0 \pi a^4}{3d^3}$ ۳) $\frac{\mu_0 \pi a^2}{3d^3}$ ۴) $\frac{\mu_0 \pi a^4}{4d^3}$

۹. جریان I روی محور zها و حلقه سیم نازکی به شکل متوازی الاضلاع که طول هر ضلع آن برابر a می‌باشد مطابق شکل در فضای آزاد مفروض هستند ضریب القاء متقابل را بدست آورید؟



۱) $\frac{0/2\mu_0 a}{\pi}$ ۲) $\frac{0/3\mu_0 a}{\pi}$

۳) $\frac{0/5\mu_0 a}{\pi}$ ۴) $\frac{0/1\mu_0 a}{\pi}$

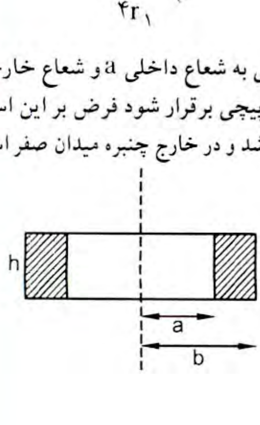
۱۰. دو دایره بشعاع r_1 و r_2 $(r_2 \ll r_1)$ بطور هم مرکز قرار دارند ضریب القاء متقابل بین دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{\mu_0 \pi r_2^2}{r_1}$ ۲) $\frac{\mu_0 \pi r_2^2}{2r_1}$ ۳) $\frac{\mu_0 \pi r_1 r_2}{2}$ ۴) $\frac{\mu_0 \pi r_2^2}{4r_1}$

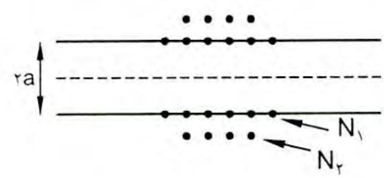
۱۱. چه مقدار انرژی باید مصرف کنیم تا جریان I در یک چنبره با هسته هوایی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با سطح مقطع مستطیل به ابعاد (b-a) و h مطابق شکل با N دور سیم پیچی برقرار شود فرض بر این است که سیم پیچی منظم باشد آنچنانکه تنها مولفه B_ϕ داخل هسته حضور داشته باشد و در خارج چنبره میدان صفر است

۱) $\frac{\mu_0}{4\pi} N^2 I^2 h \ln \frac{b-a}{a}$ ۲) $\frac{\mu_0}{2} N^2 I^2 h^2 \ln \frac{b-a}{a}$

۳) $\frac{\mu_0}{4\pi} N^2 I^2 h \ln \frac{b}{a}$ ۴) $\frac{\mu_0}{2} N^2 I^2 h \ln \frac{b}{a}$



۱۲. پیچک استوانه‌ای بلند دارای دو سیم پیچی با جریانهای I_1 و I_2 می‌باشد بطوریکه تعداد سیم پیچی‌ها در واحد طول به ترتیب N_1 و N_2 می‌باشد و شعاع استوانه a می‌باشد سیم پیچ‌ها خیلی نزدیک بهم هستند بطوریکه میتوان جریان را بمثابه یک جریان سطحی فرض کرد ضریب القاء متقابل در واحد طول پیچک کدام است؟



۱) $M=\mu_0 (N_1 N_2)^2 \pi a^2$

۲) $M=\frac{1}{8}\mu_0 N_1 N_2 (\pi a^2)^2$

۳) $M=\mu_0 N_1 N_2 \pi a^2$

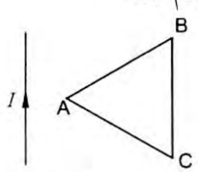
۴) $M=\frac{1}{8}\mu_0 N_1 N_2 \pi a^2$

۱۳. دو پیچک با تعداد دورهای N_1 و N_2 با شعاع تقریباً مساوی a مفروضند اگر پیچک اولی بتواند در داخل پیچک دومی بلغزد نیروی متقابل بین دو پیچک را بدست آورید؟

۱) $\mu_0 N_1 N_2 \pi^2 a^4 I_1 I_2$ ۲) $\mu_0 N_1 N_2 \pi a^2 I_1 I_2$

۳) $\mu_0 N_1 N_2 I_1^2 I_2^2 \pi a^2$ ۴) $\mu_0 (N_1 N_2)^2 I_1 I_2 \pi a^2$

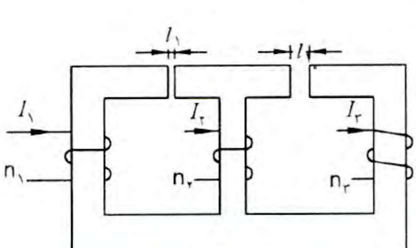
۱۴. یک حلقه مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a=2\sqrt{3}$ مفروض است سیمی حامل جریان I در صفحه مثلث قرار داشته و از نقطه‌ای بفاصله $1/5^{cm}$ از رأس A می‌گذرد ضریب القاء متقابل بین سیم و مثلث کدام است؟



۱) 312^{nH} ۲) 415^{nH}

۳) 502^{nH} ۴) 284^{nH}

۱۵. اگر هسته شکل زیر دارای μ_r بسیار بالا و سطح مقطع s باشد ضریب القاء متقابل بین سیم پیچها کدام است؟



۱) $L_{12}=0$, $L_{13}=\frac{n_1 n_3 \mu_0 s}{l_1}$, $L_{23}=\frac{n_2 n_3 \mu_0 s}{l_2}$

۲) $L_{12}=\frac{\mu_0 s n_1 n_2}{l_1}$, $L_{13}=\frac{\mu_0 s n_1 n_3}{l_2}$, $L_{23}=0$

۳) $L_{12}=\frac{-\mu_0 s n_1 n_2}{l_1}$, $L_{13}=\frac{\mu_0 s n_1 n_3}{l_2}$, $L_{23}=\frac{\mu_0 s n_2 n_3}{l_2}$

۴) $L_{12}=\frac{-\mu_0 s n_1 n_2}{l_1}$, $L_{13}=0$, $L_{23}=\frac{\mu_0 s n_2 n_3}{l_2}$

پاسخ‌های ضریب خودالقاء، القاء متقابل، انرژی مغناطیسی و مدارات مغناطیسی

۱. گزینهٔ ۲) چگالی فلوی مغناطیسی در فاصله y از محور z عبارتست از: $B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi y}$

بنابراین فلوی عبوری از حلقه مثلثی عبارتست از

$$\phi=\int \overline{B}\,.\,\overline{ds}=\int \frac{\mu_\circ I}{۲\pi y}\,z\,dy=\int_{d}^{d+b}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi y}\,(d+b-y)\,dy$$

$$\phi=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\left[(d+b)\ln\frac{d+b}{d}-b\right]=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\,(۰/۲۷\ln ۲/۷-۰/۱۷)=\frac{۰/۱\mu_\circ}{۲\pi}I$$

$$M=\frac{\phi}{I}=\frac{۰/۱\mu_\circ}{۲\pi}=۰/۱\times ۲\times ۱۰^{-۷}=۲۰nH$$

۲. گزینهٔ ۱) میدان در مرکز شش ضلعی را قبلاً بدست آوردیم این میدان از رابطه کلی میدان در مرکز یک N ضلعی منتظم $\left[H=\frac{NI}{۲\pi a}tg\frac{\pi}{N}\right]$ و با قرار دادن N=۶ بدست می‌آید

$$H=\frac{۶I}{۲\pi\times ۲}tg\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}I}{۲\pi}$$

چون شعاع دایره خیلی کوچکتر از ضلع شش ضلعی است پس میدان را میتوان درسر تا سر آن ثابت و برابر H گرفت پس

$$\phi=BS=\mu_\circ\times\frac{\sqrt{۳}I}{۲\pi}\times\pi(۰/۰۱)^{۲}\Rightarrow \phi=\frac{\mu_\circ}{۲}\sqrt{۳}\times ۱۰^{-۴}I\rightarrow M=\frac{\phi}{I}=۱۰۹pH$$

۳. گزینهٔ ۴) میدان در خارج یک صفحه بسیار بزرگ قبلاً حساب شد که برابر است با $\overline{H}=\frac{۱}{۲}\overline{J}_s\times\hat{a}_n$ که $\hat{a}_n$ بردارِیکه عمود بر صفحه و بطرف نقطه مورد نظر است پس در فاصله $d>y>۰$ داریم:

$$H=\frac{۱}{۲}J_{s_\circ}\hat{a}_z\times\hat{a}_y+\frac{۱}{۲}(-J_{s_\circ}\hat{a}_z)\times(-\hat{a}_y)=-J_{s_\circ}\hat{a}_x$$

$$\phi_{\text{کل}}=\mu_۱J_{s_\circ}ah+\mu_۲J_{s_\circ}(d-a)h=(\mu_۱-\mu_۲)J_{s_\circ}ah+\mu_۲J_{s_\circ}dh$$

$$\phi_۱=\mu_۱J_{s_\circ}\times ah=۰/۳\{(\mu_۱-\mu_۲)J_{s_\circ}ah+\mu_۲J_{s_\circ}dh\}$$

$$\Rightarrow J_{s_\circ}\mu_۱a=۰/۳\{(\mu_۱-\mu_۲)J_{s_\circ}a+\mu_۲J_{s_\circ}d\}\Rightarrow$$

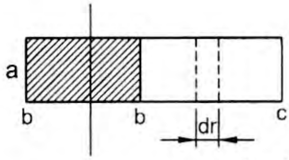
$$\mu_۱a=۰/۳[-۴\mu_۱a+۵\mu_۱d]\Rightarrow a=-۱/۲a+۱/۵d$$

$$\Rightarrow ۲/۲a=۱/۵d\rightarrow\frac{a}{d}=\frac{۱۵}{۲۲}$$

h ارتفاع صفحات می‌باشد.

۴. گزینهٔ ۳) میدان ناشی از سیم مستقیم در فاصله r عبارتست از $H=\frac{I}{۲\pi r}$ از طرفی شار عبوری از قسمت

هاشور خورده صفر است پس

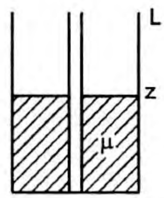


$$\phi=\int_{b}^{c}\frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\,a\,dr=\frac{\mu_\circ Ia}{2\pi}\ln\frac{c}{b}\ \rightarrow\ M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_\circ a}{2\pi}\ln\frac{c}{b}$$

۵. گزینه ۱) اگر طول کل کابل را L بگیریم و مطابق شکل ارتفاع مایع z باشد داریم

$$\oint\overline{H}.\overline{d\ell}=I\rightarrow\ \overline{H}\ =\frac{I}{2\pi r}\ \hat{a}_\phi$$

حال انرژی کل ذخیره شده در طول L را حساب کنید.



$$W_m=\frac{1}{2}\ \int_{a}^{b}\mu H^2\ 2\pi rzdr+\frac{1}{2}\ \int_{a}^{b}\mu_\circ H^2\ 2\pi r\,(L-z)\,dr$$

$$W_m=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\mu\,\frac{I^2}{2\pi}+\frac{1}{2}\ \int_{a}^{b}\mu_\circ\ \frac{I^2dr}{2\pi r}\ (L-z)$$

$$W_m=\frac{1}{2}\ \frac{\mu}{2\pi}\ \ I^2z\ \ \ln\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\ \frac{\mu_\circ}{2\pi}\ \ I^2\,(L-z)\ln\frac{b}{a}$$

$$W_m=\frac{z}{4\pi}\,I^2\ (\mu-\mu_\circ)\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_\circ}{4\pi}\ LI^2\ln\frac{b}{a}$$

$$F_z=\frac{dW_m}{dz}\ =\frac{(\mu-\mu_\circ)I^2}{4\pi}\ \ln\frac{b}{a}=\qquad \text{وزن مایع جابجا شده}\ =\pi(b^2-a^2)\,h\rho g$$

$$\Rightarrow h=\frac{(\mu-\mu_\circ)I^2}{4\pi^2\,(b^2-a^2)\rho g}\ \ \ln\frac{b}{a}$$

۶. گزینه ۴) میدان ناشی از مستطیل بزرگ در فاصله r از ضلع سمت چپ عبارتست از:

$$H=(\frac{I}{2\pi r}\ \ -\frac{I}{2\pi(r-w_1)})$$

$$\phi=\int\overline{B}.\overline{ds}=\int_{r=w_1+d}^{w_1+d+w_2}\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\ \ (\frac{1}{r}\ \ -\frac{1}{r-w_1})\ h_2dr$$

$$\phi=\frac{\mu_\circ I\ \ h_2}{2\pi}\ \ln\ \ \frac{r}{r-w_1}\ \Big]_{w_1+d}^{w_1+d+w_2}=\frac{\mu_\circ Ih_2}{2\pi}\ \ \ln\frac{w_1+d+w_2}{w_2+d}\ \ .\frac{d}{w_1+d}$$

$$M=\frac{\phi}{I}\ \ =\frac{\mu_\circ h_2}{2\pi}\ \ \ \ln\ \ \frac{d(w_1+w_2+d)}{(w_2+d)\ (w_1+d)}$$

۷. گزینه ۳) با استفاده از قانون آمپر میدان در R<a را بدست می‌آوریم.

$$\oint\overline{H}.\overline{d\ell}=I=\int Jds\ \Rightarrow H(2\pi R)=\int_{0}^{R}J.\frac{R}{a}\ \ 2\pi RdR$$

$$\rightarrow H(2\pi R) = \frac{J_\circ}{a} \times 2\pi \times \frac{1}{3} R^3 \Rightarrow \overline{H} = \frac{J_\circ R^2}{3a}\,\hat{a}_\phi$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mu . H^2 dv = \frac{1}{2}\int_\circ^a \int_\circ^{2\pi} \int_\circ^1 \mu_\circ \left[\frac{J_\circ R^2}{3a}\right]^2 R dR d\phi dz$$

$$W_m = \frac{1}{2}\,\mu_\circ \frac{J_\circ^2}{9a^2} \times \frac{1}{6}\,a^6 \times 2\pi = \frac{\pi\mu_\circ J_\circ^2 a^4}{54}$$

۸. گزینه ۴) میدان در حلقه سمت راست با قرار دادن $\theta = 90^\circ$ در رابطه B بدست می‌آید.

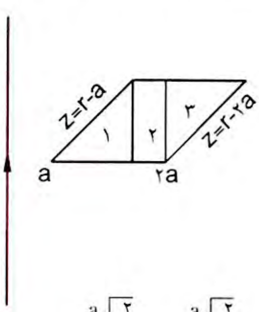
$$B = \frac{\mu_\circ m}{4\pi d^3}\,(2\cos 90\,\hat{a}_r + \sin 90\,\hat{a}_\theta) = \frac{\mu_\circ m}{4\pi d^3}\hat{a}_\theta$$

چون $d \gg a$ پس میتوان میدان را در داخل حلقه سمت راست ثابت فرض کرد.

$$\phi = Bs = \frac{\mu_\circ m}{4\pi d^3} \times \pi a^2 = \frac{\mu_\circ(\pi a^2 I)}{4\pi d^3}\,\pi a^2 = \frac{\mu_\circ \pi a^4}{4d^3}\,I$$

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_\circ \pi a^4}{4d^3}$$

۹. گزینهٔ ۱) با تقسیم سطح متوازی الاضلاع به سه ناحیه (۱) و (۲) و (۳) و با توجه به معادله خطوط دو طرف متوازی الاضلاع z=r-a و z=r-2a داریم:



$$\Psi_1 = \int_{r=a}^{a+a\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{z=\circ}^{r-a} \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\,dz\,dr = \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\left[\frac{a\sqrt{2}}{2} - a\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\Psi_2 = \int_{r=a+\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{2a} \int_{z=\circ}^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\,dz\,dr = \frac{\mu_\circ I}{4\pi}\,a\sqrt{2}\ln\frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

$$\Psi_3 = \int_{2a}^{2a+\frac{a\sqrt{2}}{2}} \int_{z=r-2a}^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\,dz\,dr = \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\left[\left(2a+\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\ln\frac{4+\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\Psi_{21} = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \quad \rightarrow \quad M_{21} = \frac{\Psi}{I}$$

$$\rightarrow M_{21} = \frac{\mu_\circ a}{2\pi}\left[\frac{4+\sqrt{2}}{2}\ln\left(4+\sqrt{2}\right) - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\ln\left(2+\sqrt{2}\right) - 3\ln 2\right]$$

$$M_{21} = \frac{0/2\,\mu_\circ a}{\pi}$$

۱۰. گزینهٔ ۲) میدان در مرکز دایره بشعاع r_1 عبارتست از $H = \frac{I}{2r_1}$ چون $r_1 \gg r_2$ میتوان فرض کرد که میدان در سرتاسر دایره بشعاع r_2 ثابت است پس داریم

$$\phi = BS = \mu_0 \frac{I}{2r_1} \times \pi r_2^2 \ \rightarrow\ M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi r_2^2}{2r_1}$$

۱۱. گزینهٔ ۳) کل انرژی برابر است با $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ پس کافیست L را بدست آوریم.

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = NI \ \rightarrow\ H = \frac{NI}{2\pi r} \ \rightarrow\ \phi = \int \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h\,dr$$

$$\phi = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \ \rightarrow\ L = \frac{N\phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{4\pi} \mu_0 N^2 I^2 h \ln\frac{b}{a}$$

۱۲. گزینه ۳) میدان مغناطیسی ناشی از سیم پیچ اول عبارتست از:

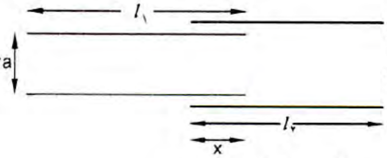
$$H_1 = \begin{cases} N_1 I_1 & R<a \\ 0 & R>a \end{cases}$$

بنابراین شار مغناطیسی عبوری از سیم پیچ ۲ عبارتست از:

$$\phi_{21} = B_1 S_2 = \mu_0 N_1 I_1 \pi a^2$$

$$M = \frac{N_2 \phi_{21}}{I_1} = \mu_0 N_1 N_2 \pi a^2$$

۱۳. گزینه ۲) فرض کنید طول پیچک ها مطابق شکل l_1, l_2 باشد.
حال انرژی مغناطیسی ذخیره شده را در کل سیستم بدست می‌آوریم.



$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0 \left[N_1 I_1\right]^2 \left[l_1 - x\right] \pi a^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \left[N_1 I_1 + N_2 I_2\right]^2 x \pi a^2$$

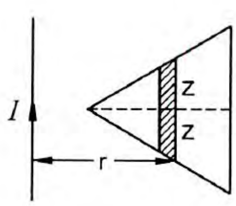
$$+ \frac{1}{2}\mu_0 \left[N_2 I_2\right]^2 \left[l_2 - x\right] \pi a^2 \ \Rightarrow\ F_x = \frac{dW_m}{dx}\Big|_{I=\text{ثابت}} = -\frac{1}{2}\mu_0 I_1^2 \pi a^2 N_1^2$$

$$+ \frac{1}{2}\mu_0 \left[N_1 I_1 + N_2 I_2\right]^2 \pi a^2 - \frac{1}{2}\mu_0 N_2^2 I_2^2 \pi a^2 = \mu_0 N_1 N_2 I_1 I_2 \pi a^2$$

۱۴. گزینه ۱)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad ds = 2z\,dr$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} (r - 1/5)$$

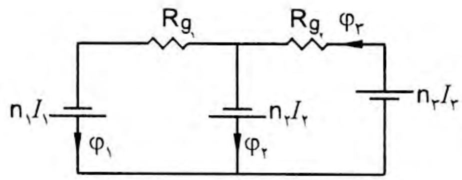


$$\phi = \int \overline{B}.\overline{ds} = \int_{1/5}^{4/5} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{2}{\sqrt{3}} (r - 1/5)\,dr = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi} (3 - 1/5 \ln 3)$$

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{\sqrt{3}\pi} (3 - 1/5 \ln 3) = 312^{nH}$$

۱۵. گزینه ۴) *مدار مغناطیسی معادل هسته را رسم می‌کنیم*

$$\begin{cases} \Re g_1 \phi_1 - n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0 \\ \Re g_2 \phi_3 - n_2 I_2 - n_3 I_3 = 0 \\ \phi_3 = \phi_1 + \phi_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \phi_1 = \dfrac{n_1}{\Re g_1} I_1 - \dfrac{n_2}{\Re g_1} I_2 + 0 I_3 \\ \phi_2 = \dfrac{-n_1 I_1}{\Re g_1} + n_2 \left[\dfrac{1}{\Re g_1} + \dfrac{1}{\Re g_2}\right] + \dfrac{n_3}{\Re g_2} I_3 \\ \phi_3 = 0 I_1 + \dfrac{n_2}{\Re g_2} I_2 + \dfrac{n_3}{\Re g_2} I_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Psi_1 = n_1 \phi_1 = \dfrac{n_1^2}{\Re g_1} I_1 - \dfrac{n_1 n_2}{\Re g_1} I_2 + 0 I_3 \\ \Psi_2 = \dfrac{-n_1 n_2}{\Re g_1} I_1 + n_2^2 \left[\dfrac{1}{\Re g_1} + \dfrac{1}{\Re g_2}\right] + \dfrac{n_2 n_3}{\Re g_2} I_3 \\ \Psi_3 = 0 I_1 + \dfrac{n_2 n_3^2}{\Re g_2} I_2 + \dfrac{n_2}{\Re g_2} I_3 \end{cases}$$

با در نظر داشتن ضرایب I_1 و I_2 و I_3 در Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 داریم:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{-n_1 n_2}{\Re g_1} = \frac{-n_1 n_2}{\frac{l_1}{\mu_0 s}} = \frac{-\mu_0 s n_1 n_2}{l_1}$$

$$L_{13} = L_{31} = 0 \quad L_{23} = L_{32} = \frac{n_2 n_3}{\Re g_2} = \frac{n_2 n_3}{\frac{l_2}{\mu_0 s}} = \frac{\mu_0 s n_2 n_3}{l_2}$$