فصل دهم

مواد مغناطیسی، محیطهای مغناطیسی و شرایط مرزی در مغناطیس

۱۰-۱- مواد مغناطیسی: وقتی جسمی در معرض میدان مغناطیسی قرار گیرد ذرات باردار در اتم‌های جسم از خود عکس العمل نشان می‌دهند که بشکل پدید آمدن میدان جدیدی بروز می‌کند ویژگیهای این میدان جدید به خواص مغناطیسی جسم بستگی دارد برای تشریح خواص مغناطیسی اجسام از مدل ساده شده اتم استفاده می‌کنیم.

در هر اتم الکترونها در مدارهای دایره‌ای شکل به دور هسته گردش می‌کنند و در ضمن دور خود می‌چرخند چون حرکت الکترون به مثابه جریان است لذا دو نوع ممان مغناطیسی خواهیم داشت.

الف: ممان مداری که ناشی از حرکت الکترون به دور هسته می‌باشد.

ب: ممان چرخشی که ناشی از حرکت الکترون به دور خودش می‌باشد (electron spin)

محاسبات کوانتم مکانیکی نشان میدهد که ممان چرخشی هر الکترون فقط ممکن است یکی از دو مقدار $\pm ۹/۳ \times ۱۰^{۲۴}\,A.m^{۲}$ داشته باشد (مثبت به معنی هم جهت بودن با میدان خارجی و منفی به معنی غیر هم جهت بودن با میدان خارجی) ولی ممان مداری بستگی به نوع اتم و شعاع مدار الکترون دارد ممان کل برابر است با مجموع ممان مداری و ممان چرخشی البته ممان هسته بعلت سنگین بودن ناچیز است چگونگی ترکیب دو ممان فوق (مداری و چرخشی) خاصیت مغناطیسی جسم را مشخص می‌کند با توجه به آنچه گفته شد سه نوع پدیده مغناطیسی داریم.

۱- دیامگنتیسم که به حرکت مداری الکترونها نسبت داده می‌شود.

۲- پارامگنتیسم که به حرکت چرخشی الکترونها نسبت داده می‌شود.

۳- فرومگنتیسم که به حرکت چرخشی الکترونها مربوط می‌شود.

۱۰-۱-۱- دیامگنتیسم:

در بسیاری اجسام ممان مغناطیسی کل هر اتم در غیاب میدان خارجی برابر صفر است برای اینکه ببینیم اعمال میدان مغناطیسی خارجی چه تاثیری بر اینگونه اجسام می‌گذرد، تغییراتی را که در حرکت مداری بوجود می‌آید مورد بررسی قرار میدهیم. برای این منظور الکترونی را در نظر می‌گیریم که قبل از اعمال میدان خارجی در مداری بشعاع a و با سرعت زاویه‌ای $\omega_{\circ}$ حول هسته اتم خود گردش می‌کند گردش الکترون بدور هسته را میتوان معادل جریان $I = \frac{e\omega_{\circ}}{۲\pi}$ در خلاف جهت حرکت الکترون دانست ممان مغناطیسی ناشی از گردش این الکترون بدور هسته برابر $m_{\circ} = \frac{e\omega_{\circ}}{۲\pi}\pi a^{۲}$ خواهد بود نیرویی که حرکت دورانی الکترون بدور هسته را تامین می‌کند همان نیروی جاذبه کولمبی بین بار منفی الکترون و بار مثبت هسته است حال فرض کنید که یک میدان خارجی با چگالی شار $B_{\circ}$ بر الکترون متحرک نیرو وارد می‌کند بطوریکه پس از اعمال میدان الکترون باید تحت تأثیر دو نیرو یکی نیروی کولمب و دیگری نیروی مغناطیسی ناشی از $B_{\circ}$ به حرکت خود ادامه دهد. بدیهی است که تغییر نیروی کل اعمال شده بر الکترون باید تغییر شعاع مدار یا تغییر سرعت زاویه‌ای آن را بدنبال داشته ولی ضرورتهای کوانتم مکانیکی ایجاب می‌کند که شعاع حرکت الکترون ثابت بماند لذا اعمال میدان $\overline{B}_{\circ}$ منجر به

تغییر سرعت زاویه‌ای الکترون از $\omega_{\circ}$ به ω و در نتیجه تغییر ممان مغناطیسی از $\overline{m}_{\circ}$ به $\overline{m}$ می‌شود میتوان نشان داد که تغییر ممان برابر است با $\overline{\Delta m} = \overline{m} - \overline{m}_{\circ} = \frac{-e^{2}a^{2}B_{\circ}}{4m_{e}}$ بنابراین میتوان نتیجه گرفت که یک اتم حتی وقتی ممان کل آن صفر است پس از اعمال میدان مغناطیسی دارای ممان خالص غیر صفر می‌شود بعبارت دیگر میدان ممانی را در اتم القاء می‌کنند القاء ممان مغناطیسی در یک جسم در حقیقت بمنزله مغناطیسی شدن جسم است زیرا جسم خود بصورت منبع میدان مغناطیسی عمل می‌کند ممانهای القاء شده در اتمها منشاء میدانهای مغناطیسی ثانویه‌ای می‌شوند که در خلاف جهت میدان خارجی (چون $\overline{\Delta m}$ و $\overline{B}_{\circ}$ در خلاف جهت یکدیگرند) ولی بسیار ضعیفتر از آن می‌باشد این پدیده مغناطیس شدن یک جسم در خلاف جهت میدان اعمال شده است نظیر قطبی شدن اجسام عایق تحت تاثیر میدان الکتریکی می‌باشد. با آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که میدان مغناطیسی در اجسام دیامگنتیگ معمولاً بمیزان بسیار ناچیزی از میدان اعمال شده کوچکتر است (میدان مغناطیسی در این اجسام مجموع میدان خارجی و میدان ناشی از ممانهای اتم جسم می‌باشد)

۱۰-۱-۲- پارامگنتیسم

دسته‌های دیگری از اجسام وجود دارند که هر یک از اتمهایشان حتی در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی دارای ممان خالص غیر صفر هستند این ممانهای غیر صفر ناشی از فزونی ممانهای چرخشی بر ممانهای مداری الکترونها است. اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی دو قطبی‌های اتمی را تحت گشتاور میدان قرار داده و آنها را بطور نسبی هم جهت با میدان خارجی می‌کنند بطوریکه میدان کل ناشی از ممانها هم جهت با میدان خارجی ولی بسیار ضعیفتر از آنست بنابراین میدان مغناطیسی در اجسام پارامگنتیگ (مجموع میدان خارجی و میدان ناشی از ممان‌های اتم جسم) بمیزان ناچیزی از میدان خارجی بزرگتر است.

۱۰-۱-۳- فرومگنتیسم

برخی اجسام نظیر آهن، نیکل، کبالت و آلیاژهای آنها تحت تاثیر یک میدان خارجی بمیزان بسیار زیادی در جهت میدان اعمال شده مغناطیسی می‌شوند بطوریکه میدان مغناطیسی در درون اینگونه اجسام بمراتب بزرگتر از میدان اعمال شده به آنها است (تا چندین هزار و حتی چندین صد هزار برابر بزرگتر) این بدان معنی است که اعمال میدان خارجی باعث می‌شود که دو قطبی‌های مغناطیسی داخل اینگونه مواد بسرعت با میدان خارجی هم جهت شوند و میدان ثانویه بزرگی تشکیل دهند به این دسته اجسام فرومگنتیگ می‌گویند.

۱۰-۱- میدان مغناطیسی در حضور اجسام

اکنون که با چگونگی مغناطیسی شدن اجسام مختلف تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی آشنا شدیم به بررسی کمی مسئله در مقیاس با مایکروسکپی می‌پردازیم یک جسم مغناطیس شده را میتوان بمنزله مجموعه‌ای از دو قطبی‌های مغناطیسی در خلاء تلقی کرد در فصل نهم پتانسیل برداری ناشی از یک دو قطبی مغناطیسی راکه یک حلقه کوچک جریان بود محاسبه کردیم که در رابطه (۸-۲۲) بیان شده است و عبارتست از:

$$\overline{A} = \frac{\mu_{\circ}\,\overline{m} \times \hat{a}_{r}}{4\pi r^{2}} \qquad r \gg a \qquad (1-10)$$

برای بیان میزان مغناطیسی شدگی اجسام مختلف مبادرت به تعریف کمیتی برداری موسوم به بردار «مغناطیسی شدگی» یا بردار پلاریزاسیون مغناطیسی که با حرف $\overline{M}$ نمایش داده می‌شود می‌کنیم این بردار نظیر $\overline{P}$ در مبحث قطبی شدن اجسام در میدان الکتریکی می‌باشد. بردار $\overline{M}$ بصورت چگالی حجمی ممان دو قطبی مغناطیسی تعریف می‌شود و

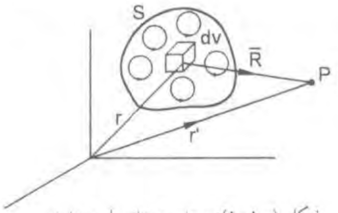
در حالت کلی تابعی از مختصات نقاط جسم است برای تعیین M در نقطه‌ای از جسم، عنصر حجم Δv را حول آن نقطه در نظر می‌گیریم و حاصل جمع ممانهای اتمهای مولکولهای موجود در آن را بدست آورده و تیجه را بر Δv تقسیم می‌کنیم بنابراین اگر N تعداد اتمها یا مولکولها در واحد حجم و $\overline{m}_i$ ممان اتم یا مولکول iام در Δv باشد میتوان نوشت

$$\overline{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{N\Delta V} \overline{m}_i = N\overline{m} \qquad (۲-۱۰)$$

که $\overline{m}$ ممان متوسط به ازاء یک اتم یا یک مولکول است بردار $\overline{M}$ منشاء میدان مغناطیسی ثانویه‌ای در درون و اطراف جسم می‌شود که در خلاف جهت میدان اعمال شده برای اجسام دیامگنتیک و هم جهت با آن برای سایر اجسام می‌باشد میدان کل در هر نقطه از فضا از حاصل جمع میدانهای اولیه و ثانویه بدست می‌آید حال فرض کنید چگالی حجمی ممان دو قطبی مغناطیسی موجود در حجم v از جسم $\overline{M}$ باشد در اینصورت پتانسیل برداری ناشی از ممانهای موجود در حجم dv از جسم طبق رابطه (۱۰-۱) عبارتست از:

$$\overline{dA} = \frac{\mu_0 \overline{M}\, dv \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \qquad (۳-۱۰)$$

که $\overline{R}$ در شکل (۱۰-۱) نشان داده شده است و برابر است با بردار فاصله عنصر حجم dv تا نقطه‌ای است که پتانسیل برداری را می‌خواهیم در آن نقطه حساب کنیم (نقطه P)



شکل (۱۰-۱): محاسبه پتانسیل برداری ناشی از ممان مغناطیسی القاء شده در یک جسم

همانطوریکه قبلاً دیدیم میتوان در رابطه (۱۰-۳) بجای $\frac{\hat{a}_R}{R^2}$ از معادلش یعنی $\overline{\nabla}'\left[\frac{1}{R}\right]$ استفاده کرد بنابراین رابطه (۱۰-۳) به صورت زیر در خواهد آمد.

$$d\overline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \overline{M} \times \overline{\nabla}'\left[\frac{1}{R}\right] dv \qquad (۴-۱۰)$$

حال از رابطه برداری زیر استفاده می‌کنیم.

$$\overline{M} \times \overline{\nabla}'\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{R}\overline{\nabla}' \times \overline{M} - \overline{\nabla}' \times \left[\frac{1}{R}\overline{M}\right] \qquad (۵-۱۰)$$

با جایگزینی رابطه (۱۰-۵) در (۱۰-۴) خواهیم داشت:

$$d\overline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\overline{\nabla}' \times \overline{M}}{R} - \overline{\nabla}' \times \left[\frac{1}{R}\overline{M}\right]\right] dv \qquad (۶-۱۰)$$

پتانسیل برداری ناشی از تمام ممان مغناطیسی جسم با انتگرال گرفتن از رابطه (۱۰-۶) در حجم v بدست می‌آید.

$$\overline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\overline{\nabla}' \times \overline{M}}{R} dv - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \overline{\nabla}' \times \left[\frac{1}{R}\overline{M}\right] dv \qquad (۷-۱۰)$$

اکنون با استفاده از اتحاد برداری $\int_V \left[\overline{\nabla} \times \overline{A}\right] dv = -\oint \overline{A} \times \overline{ds}$ انتگرال دوم در سمت راست رابطه (۱۰-۷) به یک انتگرال سطح تبدیل می‌شود بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\overline{\nabla}' \times \overline{M}}{R} dv + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{\overline{M} \times \hat{a}_n}{R} ds \qquad (۸-۱۰)$$

اگر رابطه (۱۱-۸) را با پتانسیل برداری ناشی از توزیع‌های سطحی و حجمی جریان $\left[\overline{J},\overline{J}_S\right]$ مقایسه می‌کنیم (روابط ۸-۷ و ۸-۸ از فصل هشتم) در خواهیم یافت که پتانسیل برداری حاصل از پلاریزاسیون مغناطیسی $\overline{M}$ را میتوان به دو توزیع جریان منسوب کرد یکی توزیع حجمی جریان $\overline{J}_m = \overline{\nabla}' \times \overline{M}$ در حجم v و دیگری توزیع سطحی جریان $\overline{J}_{ms} = \overline{M} \times \hat{a}_n$ روی سطح S اگرچه این جریانهای مغناطیسی که به جریانهای آمپری نیز موسومند همانند جریانهای سطحی ناشی از بارهای آزاد (که ممکن است آنها را جریانهای آزاد بنامیم) نیستند ولی همانند جریانهای آزاد تولید میدان مغناطیسی می‌کنند این جریانها را میتوان در تشابه با بارهای الکتریکی مقید که ضمن قطبی شدن اجسام عایق تحت تاثیر میدان الکتریکی بوجود می‌آیند جریانهای مقید نامید.

بدین ترتیب برای محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از یک جسم مغناطیس شده با چگالی ممان حجمی $\overline{M}$ میتوان جسم را با جریانهای مغناطیسی معادل در خلاء جایگزین کرد بعنوان مثال اگر بخواهیم از روش بیوساوار استفاده کنیم میتوان نوشت:

$$\overline{H} = \int_v \frac{\overline{J}_m \times \hat{a}_R}{4\pi R^2}\, dv + \oint_s \frac{\overline{J}_{ms} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \qquad (۹-۱۰)$$

حالا فرم دیفرانسیلی قانون آمپر را بصورت زیر می‌نویسیم

$$\overline{\nabla} \times \frac{\overline{B}}{\mu_0} = \overline{J} + \overline{J}_m \qquad (۱۰-۱۰)$$

حال با جایگزینی $\overline{\nabla} \times \overline{M}$ بجای $\overline{J}_m$ خواهیم داشت: $\overline{\nabla} \times \frac{\overline{B}}{\mu_0} = \overline{J} + \overline{\nabla} \times \overline{M}$

و یا

$$\overline{\nabla} \times \left[\frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M}\right] = \overline{J} \qquad (۱۱-۱۰)$$

با توجه به فرم نقطه‌ای (دیفرانسیلی) قانون آمپر $\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M} = \overline{H} \qquad (۱۲-۱۰)$$

در اجسام خطی و همه سو یکسان (isotropic) بردار $\overline{M}$ را میتوان بر حسب H بصورت $\overline{M} = \chi_m \overline{H}$ نوشت که χ_m ضریب حساسیت مغناطیسی نامیده می‌شود بنابراین (۱۰-۱۲) بصورت زیر خواهد شد

$$\overline{B} = \mu_0 \left[\chi_m \overline{H} + \overline{H}\right] = \mu_0 \left(1+\chi_m\right) \overline{H} \qquad (۱۳-۱۰)$$

که $\mu_r = 1 + \chi_m$ ضریب نفوذپذیری نسبی مغناطیسی جسم نامیده می‌شود بنابراین

$$\overline{B} = \mu \overline{H} \qquad (۱۴-۱۰)$$

که $\mu = \mu_0 \mu_r$ ضریب نفوذ مغناطیسی ماده نامیده می‌شود. همانطوریکه قبلاً گفته شد برای اجسام مغناطیسی بطور خلاصه میتوان نوشت

برای اجسام دیامگنتیک	$\chi_m \leq 0$,	$\mu_r \leq 1$
برای اجسام پارامگنتیک	$\chi_m \geq 0$,	$\mu_r \geq 1$
برای اجسام فرومگنتیک	$\chi_m \gg 1$,	$\mu_r \gg 1$

مثال ۱: یک ماده مغناطیسی با ضریب حساسیت ثابت χ_m ناحیه‌ای از فضا را که بین دو صفحه موازی $z=0$ و $z=d$ محصور است پر می‌کند میدان مغناطیسی یکنواخت $\overline{B}_a = B_0\, \hat{a}_x$ به ماده مغناطیسی اعمال می‌شود مطلوبست محاسبه بردارهای شار مغناطیسی $\overline{B}$ و شدت میدان مغناطیسی $\overline{H}$ در درون و بیرون جسم و همچنین چگالی‌های جریانهای مغناطیسی

حل: بدلیل یکنواخت بودن میدان اعمال شده B_a و نیز ثابت بودن ضریب حساسیت مغناطیسی χ_m، چگالی

حجمی ممان دو قطبی القاء شده در جسم یکنواخت میباشد بطوریکه میتوان نوشت:

$$\overline{M} = \overline{M}_\circ \hat{a}_x \qquad (۱۵-۱۰)$$

حال میتوان چگالی جریانهای مغناطیسی را با استفاده از روابط زیر بدست آورد.

$$\overline{J}_{ms} = \overline{M} \times \hat{a}_z = \begin{cases} M_\circ \hat{a}_x \times \hat{a}_z = M_\circ \hat{a}_y & z=\circ \\ M_\circ \hat{a}_x \times \hat{a}_z = -M_\circ \hat{a}_y & z=d \end{cases} \qquad (۱۶-۱۰)$$

$$\overline{J}_m = \overline{\nabla} \times \overline{M} = \circ \qquad (۱۷-۱۰)$$

بنابراین ماده مغناطیسی را میتوان با دو صفحه بی نهایت جریان با چگالی‌های سطحی $M_\circ \hat{a}_y$ روی صفحه $z=\circ$ و $-M_\circ \hat{a}_y$ روی صفحه $z=d$ جایگزین کرد. میدانی که این دو صفحه ایجاد می‌کند همان میدان ثانویه است قبلاً میدان مغناطیسی ناشی از یک صفحه بی نهایت بزرگ با چگالی جریان سطحی J_s را بدست آوردیم که عبارت بود از $B = \frac{1}{2}\mu_\circ \overline{J}_s \times \hat{a}_n$ که $\hat{a}_n$ برداریکه عمود بر صفحه جریان بطرف نقطه مورد نظر می‌باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{B}_s = \begin{cases} \mu_\circ M_\circ \hat{a}_x & \circ<z<d \\ \circ & \text{در جاهای دیگر} \end{cases} \qquad (۱۸-۱۰)$$

میدان کل برابر حاصل جمع میدانهای اولیه و ثانویه است.

$$\overline{B} = \overline{B}_s + \overline{B}_a = \begin{cases} B_\circ \hat{a}_x + \mu_\circ M_\circ \hat{a}_x & \circ<z<d \\ B_\circ \hat{a}_x & \text{در جاهای دیگر} \end{cases} \qquad (۱۹-۱۰)$$

اما از طرف دیگر با استفاده از رابطه $\overline{M} = \chi_m \overline{H}$ میتوان نوشت

$$\overline{M} = M_\circ \hat{a}_x = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \frac{\overline{B}}{\mu_\circ} = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \frac{B_\circ + \mu_\circ M_\circ}{\mu_\circ} \hat{a}_x \qquad (۲۰-۱۰)$$

که از حل (۱۰-۲۰) خواهیم داشت

$$M_\circ = \frac{\chi_m}{\mu_\circ} B_\circ \qquad (۲۱-۱۰)$$

حال با جایگزینی (۱۰-۲۱) در (۱۰-۱۹) خواهیم داشت:

$$\overline{B} = \begin{cases} B_\circ (1+\chi_m) \hat{a}_x & \circ<z<d \\ B_\circ \hat{a}_x & \text{در جاهای دیگر} \end{cases} \qquad (۲۲-۱۰)$$

و

$$\overline{H} = \begin{cases} \dfrac{\overline{B}}{\mu_\circ \mu_r} = \dfrac{B_\circ (1+\chi_m)}{\mu_\circ (1+\chi_m)} B_\circ \hat{a}_x = \dfrac{B_\circ}{\mu_\circ} \hat{a}_x & \circ<z<d \\ \dfrac{\overline{B}}{\mu_\circ} = \dfrac{B_\circ}{\mu_\circ} \hat{a}_x & \text{در جاهای دیگر} \end{cases} \qquad (۲۳-۱۰)$$

ملاحظه می‌شود که میدان $\overline{H}$ در هر جا یکسان است بعبارت دیگر حضورجسم در میدان $\overline{H}$ تغییری ایجاد ننموده است.

مثال ۲: یک پوسته استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b از یک ماده مغناطیسی به ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_r = 1 + \frac{1}{R}$ ساخته شده است سیمی حامل جریان I در روی محور این پوسته قرار دارد مطلوبست چگالی جریانهای مغناطیسی در داخل و روی سطوح این پوسته

حل: با استفاده از قانون آمپر ابتدا میدان مغناطیسی در داخل و خارج پوسته را بدست می‌آوریم.

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = I \rightarrow \overline{H} = \frac{I}{2\pi R}\hat{a}_\phi \qquad (۲۴-۱۰)$$

رابطه فوق برای تمام نقاط فضا (اعم از خارج و داخل پوسته) صادق است حال میتوان بردار پلاریزاسیون $\overline{M}$ در داخل پوسته را مطابق زیر بدست آورید.

$$\overline{M} = \chi_m \overline{H} = (\mu_r - 1)\overline{H} = \left[\frac{1}{R} + 1 - 1\right]\frac{I}{2\pi R}\hat{a}_\phi$$

و یا

$$\overline{M} = \frac{I}{2\pi R^2}\hat{a}_\phi$$

$$J_{ms} = M \times \hat{a}_n = \begin{cases} \overline{M} \times -\hat{a}_R = \dfrac{I}{2\pi a^2}\hat{a}_z & R=a \\ \overline{M} \times \hat{a}_R = \dfrac{-I}{2\pi b^2}\hat{a}_z & R=b \end{cases} \qquad (۲۶-۱۰)$$

$$J_m = \overline{\nabla} \times \overline{M} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R M\phi)\hat{a}_z = -\frac{I}{2\pi R^3}\hat{a}_z$$

حال میتوان جریانهای مغناطیسی را بصورت زیر بدست آورد.

$$I_{s1} = J_{ms}\Big|_{R=a} \times 2\pi a = \frac{I}{a}$$

$$I_{s2} = J_{ms}\Big|_{R=b} \times 2\pi b = -\frac{I}{b}$$

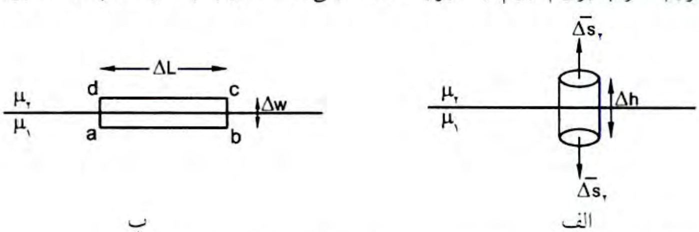
$$I_m = \iint J_m\, ds = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{-I}{2\pi R^3} R\, dR\, d\phi = I\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

$$I_{\text{کل}} = I_{s1} + I_{s2} + I_m = 0$$

همانطوریه ملاحظه می‌شود کل جریان مغناطیسی صفر است و این نظیر حالت بارهای پلاریزه در ماده دی الکتریک می‌باشد که همانطوریکه قبلاً دیده بودیم مجموع بارهای پلاریزه صفر بود.

۱۰-۳- شرایط مرزی در الکترو مغناطیس

برای بررسی منشاء میدان مغناطیسی در مرز مشترک دو ناحیه با ضرایب نفوذپذیری مغناطیسی متفاوت از روش مشابه آنچه در مورد میدان الکتریکی بکار رفت استفاده می‌کنیم برای تعیین رابطه بین مولفه‌های مماسی میدان مغناطیسی در مرز مشترک دوناحیه با ضرایب نفوذپذیری μ_1 و μ_2 مسیر بسته مستطیلی abcda را با ابعاد و ΔL , Δw مطابق شکل (۱۰-۲) در نظر می‌گیریم



شکل (۱۰-۲): تعیین رابطه بین مولفه‌های مرزی مماسی (الف) و عمودی (ب) میدانها

حال قانون آمپر را برای مسیر بسته مستطیلی فوق می‌نویسیم

$$\oint_{abcda} \overline{H}.\overline{d\ell} = I = \int_{abcd\ \text{سطح}} \overline{J}.\overline{ds} \qquad (۲۸-۱۰)$$

اکنون حد هر یک از طرفهای رابطه (۱۰-۲۸) را وقتی Δw بسمت صفر میل می‌کند را بدست می‌آوریم برای این منظور ابتدا انتگرال سمت چپ رابطه (۱۰-۲۸) را به چهار انتگرال روی اضلاع مستطیل $abcd$ تجزیه می‌کنیم واضح است که مقدار انتگرال روی اضلاع bc و ad وقتی $\Delta w \rightarrow 0$ بسیار کوچک گشته و در حد بسمت صفر میل می‌کند در نتیجه انتگرال سمت چپ رابطه (۱۰-۲۸) بسمت $\left[\overline{H}_1 - \overline{H}_2\right].\overline{\Delta L}$ میل می‌کند که $\overline{\Delta L}$ برداری است در جهت a به b حال ببینیم که حد سمت راست وقتی $\Delta w \rightarrow 0$ چیست تردیدی نیست که وقتی $\Delta w \rightarrow 0$ سطح مستطیل $abcd$ بسمت صفر میل می‌کند و چنانچه در اطراف مرز مشترک دو محیط فقط یک جریان حجمی وجود داشته باشد مقدار انتگرال سمت راست رابطه (۱۰-۲۸) بعبارت دیگر جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته $abcda$ صفر خواهد شد اما در صورتیکه جریان سطحی با چگالی $\overline{J}_S$ در مرز مشترک دو ناحیه وجود داشته این انتگرال مقداری غیر صفر و برابر $\left[\overline{J}_S \times \hat{a}_n\right] \Delta L$ خواهد بود که $\hat{a}_n$ برداریکه عمود بر سطح مستطیل $abcd$ است بنابراین رابطه (۱۰-۲۸) در حد وقتی $\Delta w \rightarrow 0$ رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$\left[\overline{H}_1 - \overline{H}_2\right].\overline{\Delta L} = \overline{J}_S \times \hat{a}_n\ \Delta L \qquad (۲۹-۱۰)$$

رابطه (۱۰-۲۹) با چند عملیات ساده برداری به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$\hat{a}_n \times \left[H_1 - H_2\right] = \overline{J}_S \qquad (۳۰-۱۰)$$

سمت چپ رابطه (۱۰-۳۰) همان تفاضل مولفه‌های مماسی H در طرفین مرز مشترک است و برداریکه $\hat{a}_n$ بردار عمود بر سطح مرز مشترک و بسمت محیط ۱ می‌باشد لازم به ذکر است که اگر $\hat{a}_n$ را بطرف محیط ۲ بگیریم در اینصورت باید جای اندیس‌های ۱ و ۲ را در رابطه (۱۰-۳۰) عوض کنیم. اگر J_S در امتداد محور عمود بر مولفه‌های مماسی $\overline{H}_1$ و $\overline{H}_2$ باشد در اینصورت رابطه (۱۰-۳۰) بصورت زیر درخواهد آمد.

$$H_{t_1} - H_{t_2} = J_S \qquad (۳۱-۱۰)$$

که H_{t_1} و H_{t_2} به ترتیب مولفه‌های مماسی $\overline{H}_1$ و $\overline{H}_2$ هستند. واضح است که اگر $J_S=0$ باشد مولفه مماسی میدان در مرز دو محیط پیوسته است.

برای تعیین رابطه بین مولفه‌های عمودی میدانها در مرز مشترک دو محیط یک سطح استوانه‌ای به ارتفاع Δh و مساحت Δs مطابق شکل (۱۰-۲- ب) در نظر گرفته و از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\oint_S \overline{B}.\overline{ds} = 0 \qquad (۳۲-۱۰)$$

رابطه فوق وقتی $\Delta h \rightarrow 0$ به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$\overline{B}_2.\overline{\Delta s}_2 - \overline{B}_1.\overline{\Delta s}_1 = 0$$

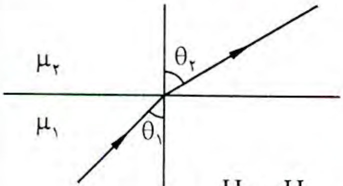
و یا

$$B_{n_2} = B_{n_1} \qquad (۳۳-۱۰)$$

که بدین معنی است که مولفه‌های عمودی چگالی شار مغناطیسی در دو طرف مرز پیوسته است.

مثال ۳: دو محیط مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1, μ_2 داده شده‌اند اگر میدان در محیط ۱ مطابق شکل با خط عمود بر مرز مشترک دو محیط θ_1 بسازد مطلوبست میدان در ناحیه ۲ و زاویه آن با خط عمود بر مرز مشترک دو محیط

حل: ***بفرض اینکه در مرز مشترک دو محیط جریان الکتریکی آزاد وجود ندارد میتوان نتیجه گرفت مولفه‌های مماسی H و عمودی B در دو طرف مرز پیوسته هستند یعنی:***



$$H_{t_2} = H_{t_1} \qquad (۱۰-۳۴- \text{الف})$$
$$B_{n_2} = B_{n_1} \qquad (۱۰-۳۴- \text{ب})$$

رابطه فوق را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{matrix} H_{t_2}=H_{t_1} \\ B_{n_2}=B_{n_1} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H_2 \sin\theta_2 = H_1 \sin\theta_1 & (۱۰-۳۵- \text{الف}) \\ \mu_2 H_2 \cos\theta_2 = \mu_1 H_1 \cos\theta_1 & (۱۰-۳۵- \text{ب}) \end{matrix}$$

با تقسیم روابط فوق بر همدیگر خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\mu_2} \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1}{\mu_1} \operatorname{tg}\theta_1 \qquad (۱۰-۳۶)$$

بعبارت دیگر

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg}\theta_1 \qquad (۱۰-۳۷)$$

با استفاده از روابط (۱۰-۳۵- الف) و (۱۰-۳۵- ب) خواهیم داشت:

$$H_2 = H_1 \left[\sin^2\theta_1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \cos^2\theta_1 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۰-۳۸)$$

بنابراین با استفاده از (۱۰-۳۷) و (۱۰-۳۸) زاویه H_2 با خط عمود و اندازه میدان H_2 بدست می‌آید.

مثال ۴: ثابت کنید میدان بر مرز مشترک هوا با یک محیط با ضریب نفوذ مغناطیسی نسبی بسیار بالا عمود است؟

حل: ***در اینحالت $\mu_2 = \mu_\circ$ و $\mu_1 = \mu_\circ \mu_r$ بطوریکه $\mu_r \gg 1$ در اینصورت با جایگزینی در رابطه (۱۰-۳۷) خواهیم داشت.***

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1}{\mu_r} \operatorname{tg}\theta_1 \qquad (۱۰-۳۹)$$

چون $\mu_r \gg 1$ در اینصورت $\theta_2 = 0$ بنابراین H_2 بر مرز مشترک دو محیط عمود است.

مثال ۵: فضای $z>0$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_1 = 4\mu_\circ$ و فضای $z<0$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری $\mu_2 = 2\mu_\circ$ پوشانده شده است اگر روی مرز مشترک دو محیط جریان الکتریکی با چگالی $\overline{J}_s = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y$ جاری باشد و میدان در $z>0$ برابر $H_1 = -\hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$ باشد مطلوبست میدان و چگالی شار مغناطیسی در $z<0$

حل: ***شرایط مرزی را بصورت زیر می‌نویسیم***

$$\hat{a}_z \times \left[\overline{H}_2 - \overline{H}_1\right] = \overline{J}_s$$
$$B_{z_2} = B_{z_1}$$

که میتوان بصورت زیر نوشت

$$\hat{a}_z \times \left[\left(H_{x_2} - H_{x_1}\right) \hat{a}_x + \left(H_{y_2} - H_{y_1}\right) \hat{a}_y + \left(H_{z_2} - H_{z_1}\right) \hat{a}_z \right] = \overline{J}_s$$
$$4\mu_\circ H_{z_2} = 2\mu_\circ H_{z_1}$$

با جایگزینی مولفه‌های H_1 در روابط بالا خواهیم داشت:

$$H_{x_2} - H_{x_1} = J_{sy} = -3$$
$$H_{y_2} - H_{y_1} = -J_{sx} = -2$$
$$4 H_{z_2} = 2 H_{z_1}$$

و یا

$$H_{x_2}+1=-3 \qquad H_{x_2}=-4$$
$$H_{y_2}+3=2 \quad \Rightarrow \quad H_{y_2}=-5$$
$$4H_{z_2}=4 \qquad H_{z_2}=1$$

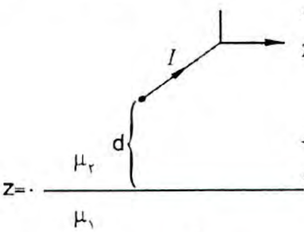
در نتیجه

$$\overline{H}_2=-4\hat{a}_x-5\hat{a}_y+\hat{a}_z$$

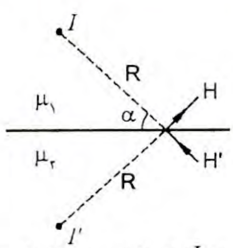
حال میتوان چگالی فلوی مغناطیسی در محیط $0>z$ را بدست آورد.

$$B_2=\mu_2 H_2=4\mu_\circ H_2=\left(-16\hat{a}_x-20\hat{a}_y+4\hat{a}_z\right)\mu_\circ$$

مثال ۶: سیمی منطبق بر محور x به موازات صفحه $z=0$ و به فاصله d از آن قرار دارد حامل جریان I می‌باشد منطقه $0<z$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 و منطقه $0>z$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_2 پرشانده شده است مطلوبست میدان مغناطیسی در $0<z$ و $0>z$



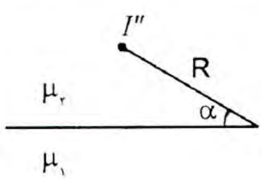
حل: برای محاسبه میدان در $0<z$ میتوان فرض کرد که همه فضا از μ_1 پر شده و جریان I' نیز به فاصله d زیر صفحه $z=0$ قرار دارد در اینصورت میتوان مولفه‌های مماسی H و عمودی B را در مرز $z=0$ بصورت زیر نوشت



$$H_{t_1}=\frac{I}{2\pi R}\cos\alpha-\frac{I'}{2\pi R}\sin\alpha$$

$$B_{n_1}=\frac{\mu_1 I}{2\pi R}\cos\alpha+\frac{\mu_1 I'}{2\pi R}\cos\alpha$$

برای محاسبه میدان در $0>z$ میتوان فرض کرد که بجای I جریان I'' در محل جریان I قرار داشته و همه فضا از μ_2 پر شده است.



$$H_{t_2}=\frac{I''}{2\pi R}\sin\alpha$$

$$B_{n_2}=\frac{\mu_2 I''}{2\pi R}\cos\alpha$$

حال پیوستگی مولفه‌های میدان را بصورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{matrix} H_{t_1}=H_{t_2} \\ B_{n_1}=B_{n_2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{I}{2\pi R}\sin\alpha-\dfrac{I'}{2\pi R}\sin\alpha=\dfrac{I''}{2\pi R}\sin\alpha \\ \dfrac{\mu_1 I}{2\pi R}\cos\alpha+\dfrac{\mu_1 I'}{2\pi R}\cos\alpha=\dfrac{\mu_2 I''}{2\pi R}\cos\alpha \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} I-I'=I'' \\ \mu_1(I+I')=\mu_2 I'' \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} I-I'=I'' \\ I+I'=\dfrac{\mu_2}{\mu_1}I'' \end{matrix}$$

$$I''=\frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I \qquad I'=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I$$

بنابراین برای محاسبه در $0<z$ فرض می‌کنیم جریان I و I' در $z=d$ و $z=-d$ وجود دارد و همه فضا از μ_1 پر شده

است و برای محاسبه میدان در $z>0$ فرض می‌کنیم فقط جریان I'' در $z=d$ وجود دارد و همه فضا از μ_2 پر شده است.

مثال ۷: کره‌ای بشعاع a که دارای ضریب نفوذپذیری مغناطیسی نسبی μ_r بوده در محیطی که میدان یکنواخت $H = H_\circ \hat{a}_z$ وجود دارد قرار داده می‌شود مطلوبست میدان در داخل و خارج کره

حل: در حالت کلی پاسخ معادله لاپلاس در داخل و خارج کره همانطوریکه قبلاً دیدیم برای پتانسیل اسکالر مغناطیسی عبارتست از:

$$V_m^i = \sum \left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta) \qquad r<a$$

$$V_m^o = \sum \left[A'_n r^n + B'_n r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta) \qquad r>a$$

حال شرایط زیر را اعمال می‌کنیم.

$$\overline{H} = H_\circ \hat{a}_z = -\nabla V_m = \frac{-\partial V_m}{\partial z}\hat{a}_z \rightarrow V_m = -H_\circ z \Rightarrow$$

$$V_m = -H_\circ r\cos\theta$$

$$\lim_{r\to\infty} V_m^o = -H.r\cos\theta \rightarrow \sum A'_n r^n P_n(\cos\theta) = -H_\circ r\cos\theta$$

$$\rightarrow n=1 \qquad A'_1 = -H_\circ$$

$$\rightarrow V_m^o = \left[A'_1 r + \frac{B'_1}{r^2}\right]\cos\theta \qquad r<a$$

$$V_m^o \Big|_{r=a} = V_m^i \Big|_{r=a} \rightarrow n=1 \rightarrow V_m^i = \left[A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right]\cos\theta$$

$$r\rightarrow 0 \rightarrow V_m^i = \text{محدود} \rightarrow B_1 = 0 \rightarrow V_m^i = A_1 r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m^i = A_1 r\cos\theta \\ V_m^o = \left[-H_\circ r + \dfrac{B'_1}{r^2}\right]\cos\theta \end{cases} \rightarrow V_m^i = \Big|_{r=a} = V_m^o \Big|_{r=a} \Rightarrow$$

$$A_1 a = -H_\circ a + \frac{B'_1}{a^2} \quad (1) \qquad B_r^i = B_r^o \Rightarrow \mu_r \frac{\partial V'_m}{\partial r}\Big|_{r=a} = \frac{\partial V_m^\circ}{\partial r}\Big|_{r=a}$$

$$\Rightarrow \mu_r A_1 = -H_\circ - \frac{2B'_1}{a^3} \Rightarrow (2) \qquad (1,2) \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{-3}{2+\mu_r} H_\circ \\ B'_1 = \dfrac{\mu_r - 1}{2+\mu_r} a^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H^i = -\nabla V_m^i = \frac{3}{2+\mu_r} H_\circ \hat{a}_z \qquad r<a$$

$$H^o = -\nabla V_m^o = H_\circ \hat{a}_z + \frac{\mu_r - 1}{2+\mu_r}\frac{a^3}{r^3} H_\circ \left[2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right] \qquad r>a$$

ملاحظه می‌شود میدان در داخل کره ثابت و موازی میدان اولیه است دقت شود اگر برای کره $\mu_r = 1$ بود و فضای اطراف آن از μ_r پر شده بود باید بجای μ_r از $\frac{1}{\mu_r}$ در روابط بالا استفاده شود. (مثلاً یک فضای پوشانیده شده از ماده مغناطیسی با ضریب نفوذ مغناطیسی μ_r که در آن یک حفره کروی ایجاد شده است.)

سوالهای مواد مغناطیسی و شرایط مرزی در مغناطیس

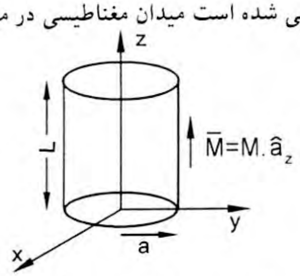
۱. میدان مغناطیسی در ناحیه $x>0$ برابر $H_1 = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y + 3\hat{a}_z$ و در ناحیه $x<0$ برابر است با $H_2 = \hat{a}_x - 3a_y + \hat{a}_z$ در اینصورت چگالی سطحی جریان در $x=0$ کدام است؟

۱) $2\hat{a}_z - 2\hat{a}_y$ ۲) $3\hat{a}_z - \hat{a}_y$ ۳) $2\hat{a}_z + \hat{a}_y$ ۴) صفر

۲. در مسئله بالا اگر ضریب نفوذپذیری نسبی مغناطیسی در ناحیه $x>0$ برابر ۳ باشد ضریب نفوذپذیری نسبی مغناطیسی در ناحیه $x<0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۵

۳. در شکل زیر یک استوانه بطور دائم با بردار $M = M_0\,\hat{a}_z$ مغناطیسی شده است میدان مغناطیسی در مرکز قاعده بالایی استوانه کدام است؟



۱) صفر ۲) $\dfrac{M_0 a}{2\sqrt{a^2+L^2}}$ ۳) $\dfrac{M_0 L}{2\sqrt{a^2+L^2}}$ ۴) $\dfrac{M_0 a}{2\pi\sqrt{a^2+L^2}}$

۴. فضای بین دو استوانه هادی هم محور ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_r پر کرده است اگر از هادی داخلی جریان I عبور کند و چگالی شار مغناطیسی بین دو هادی $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$ باشد (a شعاع داخلی است) چگالی سطحی جریانهای مغناطیسی در سطح $r=a$ کدام است (شعاع هادی خارجی b است)

۱) $\dfrac{I}{2\pi a}\hat{a}_z$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{I}{2\pi}\left[\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right]$ ۴) $\dfrac{-I}{2\pi a}\hat{a}_z$

۵. فضای بین $a>z>0$ را ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu = \mu_0\left(1+\dfrac{z}{a}\right)^2$ اشغال کرده است چگالی شار مغناطیسی $\bar{B} = B_0\,\hat{a}_y$ در فضا وجود دارد چگالی حجمی جریانهای مغناطیسی کدام است؟

۱) $J_m = 0$ ۲) $J_m = \dfrac{2z}{a}\,\dfrac{B_0}{\mu_0}\hat{a}_x$ ۳) $\left[\dfrac{2z}{a^2}+\dfrac{2}{a}\right]\dfrac{B_0}{\mu_0}\hat{a}_x$ ۴) $-\left[\dfrac{2z}{a^2}+\dfrac{2}{a}\right]\dfrac{B_0}{\mu_0}\hat{a}_x$

۶. یک پوسته کروی از جنس یک ماده مغناطیسی با $\mu_r = 5$ به شعاع داخلی $a = 0/1^{cm}$ و خارجی $b = 3^{cm}$ در فضایی که میدان مغناطیسی $\bar{H} = 154\,\hat{a}_z$ است قرار داده می‌شود میدان مغناطیسی در $r < 0/1^{cm}$ کدام است؟

۱) $90\,\hat{a}_z$ ۲) $45\,\hat{a}_z$ ۳) $30\,\hat{a}_z$ ۴) $50\,\hat{a}_z$

۷. یک دیسک بضخامت h از ماده مغناطیسی با بردار $\overline{M} = M_\circ\, \hat{a}_z$ ($M_\circ$ عدد ثابتی است) مغناطیس شده است بردار پتانسیل برداری در نقطه‌ای بسیار دور از این دیسک کدام است مساحت دیسک را S بگیرید؟

۱) $\frac{\mu_\circ}{4\pi r} M_\circ \sin\theta \hat{a}_\phi$ ۲) $\frac{\mu_\circ}{4\pi r^2} M_\circ \sin\theta \hat{a}_\phi$

۳) $\frac{\mu_\circ}{4\pi r^2} M_\circ\, Sh \sin\theta \hat{a}_\phi$ ۴) $\frac{\mu_\circ M_\circ}{4\pi r^2} M_\circ\, Sh \sin\theta \hat{a}_\phi$

۸. میدان مغناطیسی در داخل یک کره بشعاع a و چگالی حجمی ممان دو قطبی $M.\hat{a}_z$ برابر H است چگالی بار سطحی یک پوسته کروی به شعاع a که بار سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω حول محور z می‌چرخد و همان میدان H را داخل کره ایجاد می‌کند چقدر است؟

۱) $\omega a M_\circ$ ۲) $\frac{M_\circ}{\omega a}$ ۳) $\omega a M_\circ \sin\theta$ ۴) $\frac{M_\circ \sin\theta}{\omega a}$

۹. ضریب نفوذپذیری بین دو صفحه z=۰ و z=۲ بطور خطی از $\mu_\circ$ در z=۰ به $3\mu_\circ$ تا z=۲ تغییر می‌کند اگر میدان $H = H_\circ\, \hat{a}_x$ در بیرون دو صفحه برقرار باشد چگالی سطحی جریان مغناطیسی در صفحه z=۲ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3} H_\circ \hat{a}_y$ ۲) $\frac{2}{3} H_\circ \hat{a}_y$ ۳) $-2 H_\circ \hat{a}_y$ ۴) $\frac{3}{4} H_\circ \hat{a}_y$

۱۰. محور zها حامل جریان I می‌باشد ناحیه x>۰ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_1 = 5\mu_\circ$ و ناحیه x<۰ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_2 = 3\mu_\circ$ پر شده است میدان مغناطیسی در ناحیه x>۰ کدام است؟

۱) $\frac{I}{3\pi R} \hat{a}_\phi$ ۲) $\frac{3I}{8\pi R} \hat{a}_\phi$ ۳) $\frac{5I}{8\pi R} \hat{a}_\phi$ ۴) $\frac{3I}{5\pi R} \hat{a}_\phi$

۱۱. یک پوسته استوانه‌ای از ماده‌ای مغناطیسی با $\mu_r = \frac{1}{R}$ تشکیل شده است سیمی به جریان I در محور این پوسته قرار دارد شعاع داخلی این پوسته a و شعاع خارجی b می‌باشد چگالی سطحی جریانهای مغناطیسی در R=a و R=b و چگالی حجمی جریان مغناطیسی در داخل پوسته کدام است؟

۱)
$$\overline{J}_{ms_1} = \left[\frac{1}{a} - 1\right] \frac{I}{2\pi a} \hat{a}_z$$
$$\overline{J}_{ms_2} = \left[\frac{1}{b} - 1\right] \frac{I}{2\pi b} \hat{a}_z$$
$$\overline{J}_m = \frac{-I}{2\pi R^2} \hat{a}_z$$

۲)
$$\overline{J}_{ms_1} = \left[1 - \frac{1}{a}\right] \frac{I}{2\pi a} \hat{a}_z$$
$$\overline{J}_{ms_2} = \left[1 - \frac{1}{b}\right] \frac{I}{2\pi b} \hat{a}_z$$
$$\overline{J}_m = 0$$

۳)
$$\overline{J}_{ms_1} = \left[1 - \frac{1}{a}\right] \frac{I}{2\pi a} \hat{a}_z$$
$$\overline{J}_{ms_2} = \left[\frac{1}{b} - 1\right] \frac{I}{2\pi b} \hat{a}_z$$
$$\overline{J}_m = \frac{I}{2\pi R^3}$$

۴)
$$\overline{J}_{ms_1} = \left[\frac{1}{a} - 1\right] \frac{I}{2\pi a} \hat{a}_z$$
$$\overline{J}_{ms_2} = \left[1 - \frac{1}{b}\right] \frac{I}{2\pi b} \hat{a}_z$$
$$\overline{J}_m = -\frac{I}{2\pi R^3} \hat{a}_z$$

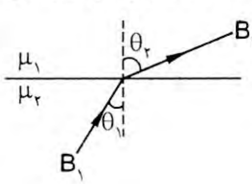
۱۲. یک کره بشعاع a بطور دائم با بردار مغناطیس شوندگی $\overline{M} = M_0\, \hat{a}_z$ مغناطیس شده است میدان مغناطیسی در مرکز کدام است (M_0 ثابت است)

۱) $\frac{1}{2} M_0\, \hat{a}_z$ ۲) $\frac{2}{3} M_0\, \hat{a}_z$ ۳) $M_0\, \hat{a}_z$ ۴) صفر

۱۳. کابل هم محوری به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b حامل جریان در هادی داخلی به چگالی $J = J_0 \frac{R}{a}\, \hat{a}_z$ می‌باشد و فضای بین دو رسانا از ماده‌ای مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری نسبی $\mu_r = 1 + \frac{1}{R}$ پر شده است چگالی جریان سطحی مغناطیسی در سطح $R=b$ کدام است؟

۱) $-\frac{J_0\, a^2}{6b^2}\hat{a}_z$ ۲) $\frac{J_0\, a^2}{3b^2}\hat{a}_z$ ۳) $-\frac{J_0\, a^2}{2b^2}\hat{a}_z$ ۴) صفر

۱۴. چگالی شار مغناطیسی در مرز مشترک دو ماده مغناطیسی طبق شکل با رابطه زیر داده شده است در اینصورت چگالی سطحی جریان در مرز مشترک دو محیط کدام است؟



$$B_2 = \left[\mu_2 \cos\theta_2\, \mathrm{tg}\,\theta_1 - \mu_1 \sin\theta_2\right]^{-1}$$

۱) $J_s = \frac{-1}{\mu_1 \mu_2}$ ۲) $J_s = 0$

۳) $J_s = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ ۴) $J_s = \sqrt{\mu_1 \mu_2}$

۱۵. یک ماده فرومگنتیگ به شکل یک پوسته استوانه‌ای بشعاع داخلی a و شعاع خارجی b طوری مغناطیس شده است که بردار چگالی ممان دو قطبی مغناطیسی در $a<R<b$ برابر $\overline{M} = \frac{A}{R}\, \hat{a}_\phi$ می‌باشد میدان $\overline{H}$ و چگالی شار مغناطیسی $\overline{B}$ در $a<R<b$ کدام است؟

۱) $\overline{H} = 0$ ، $\overline{B} = \mu_0 \frac{A}{a}\, \hat{a}_\phi$

۲) $\overline{H} = \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right] A\hat{a}_\phi$ ، $\overline{B} = \mu_0 \frac{A}{b}\, \hat{a}_\phi$

۳) $\overline{H} = 0$ ، $\overline{B} = \frac{\mu_0 A}{R}\, \hat{a}_\phi$

۴) $\overline{H} = \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right] A\hat{a}_\phi$ ، $\overline{B} = \frac{\mu_0 A}{a}\, \hat{a}_\phi$

پاسخ سوالهای مواد مغناطیسی و شرایط مرزی در مغناطیس

۱. گزینهٔ ۱) *از شرط مرزی (۱۰-۳۰) استفاده می‌کنیم.*

$$\hat{a}_x \times (H_1 - H_2)=\bar{J}_s$$
$$\hat{a}_x \times \left(\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 2\hat{a}_z\right) = 2\hat{a}_z - 2\hat{a}_y$$

۲. گزینهٔ ۳) *از شرط مرزی (۱۰-۳۳) استفاده می‌کنیم.*

$$B_{x_2} = B_{x_1}$$
$$\mu_0 \mu_{r_2} H_{x_2} = \mu_0 \times 3H_{x_1} \Rightarrow$$
$$\mu_{r_2} \times 1 = 3 \times 2 \Rightarrow \mu_{r_2} = 6$$

۳. گزینهٔ ۳) *ابتدا چگالی‌های جریانهای مغناطیسی را بدست می‌آوریم*

$$\bar{J}_m = \bar{\nabla} \times \overline{M} = 0$$

$$\bar{J}_{ms} = \overline{M} \times \hat{a}_n = \begin{cases} 0 & \text{روی قاعده بالا و پایین} \\ M_0 \hat{a}_\phi & \text{روی سطح جانبی} \end{cases}$$

با استفاده از میدان ناشی از یک حلقه جریان که برابر است با $H = \dfrac{I a^2}{2\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ *خواهیم داشت*

$$H = \int_0^L \frac{M_0\, dz\, a^2}{2\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_0 z}{2\sqrt{a^2+z^2}} \Bigg|_0^L = \frac{M_0 L}{2\sqrt{a^2+L^2}}$$

۴. گزینهٔ ۲) *با استفاده از رابطه* $\mu = \dfrac{B}{H}$ *داریم (از قانون آمپر* $\overline{H} = \dfrac{I}{2\pi R}\hat{a}_\phi$ *می‌باشد)*

$$\mu = \frac{\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}{\frac{I}{2\pi R}} = \mu_0 \frac{r}{a} \rightarrow \mu_r = \frac{R}{a}$$

$$\overline{M} = (\mu_r - 1)\overline{H} = \left(\frac{R}{a} - 1\right)\frac{I}{2\pi R}\hat{a}_\phi$$

$$\bar{J}_{ms} = \overline{M} \times \left(-\hat{a}_R\right) \Big|_{R=a} = \left(\frac{R}{a} - 1\right)\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\phi \times -\hat{a}_R \Big|_{R=a} = 0$$

۵. گزینهٔ ۴) *پیوستگی مولفه مماسی* H

$$\mu_r = \left(1+\frac{z}{a}\right)^2 \qquad H_{y_2} = H_{y_1}$$

$$H_{y_2} = \frac{B_0}{\mu_0} \rightarrow \overline{M} = (\mu_r - 1)\frac{B_0}{\mu_0}\hat{a}_y = \left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{2z}{a}\right)\frac{B_0}{\mu_0}\hat{a}_y$$

$$\overline{J}_m = \overline{\nabla}\times\overline{M} = \frac{-\partial M_y}{\partial z}\hat{a}_x = -\left[\frac{2z}{a^2}+\frac{2}{a}\right]\frac{B_\circ}{\mu_\circ}\hat{a}_x$$

۶. گزینهٔ ۱) همانطوریکه دیدیم اگر میدان خارج یک کره مغناطیسی بصورت $H = H_\circ\,\hat{a}_z$ باشد میدان در داخل کره بصورت $H_1 = \frac{3}{2+\mu_r}H_\circ\,\hat{a}_z$ می‌باشد و اگر اطراف کره ماده مغناطیسی باشد و کره توخالی باشد میدان در آن عبارتست از $H_2 = \frac{3}{2+\frac{1}{\mu_r}}H_1\,\hat{a}_z$ که H_1 میدان در خارج کره است با توجه به آنچه گفته شده اگر میدان در خارج پوسته $H.\hat{a}_z$ باشد میدان در $r<a$ عبارتست از:

$$H = \frac{3\mu_r}{2\mu_r+1}\,\frac{3}{2+\mu_r}H_\circ\,\hat{a}_z = \frac{9\mu_r}{2\mu_r^2+5\mu_r+2}H_\circ\,\hat{a}_z$$

$$H = \frac{9\times5}{2(5)^2+5(5)+2}\,154\,\hat{a}_z = \frac{45}{77}\times154\,\hat{a}_z = 90\,\hat{a}_z$$

۷. گزینهٔ ۳) چگالی سطحی جریان مغناطیسی معادل عبارتست از:

$$\overline{J}_{sm} = \overline{M}\times\hat{a}_R = M_\circ\,\hat{a}_z\times\hat{a}_R = M_\circ\,\hat{a}_\phi$$

$$\text{جریان معادل دیسک} = J_{sm}\times h = M_\circ h \;\rightarrow\; m = SI = SM_\circ h$$

$$A = \frac{\mu_\circ m}{4\pi r^2}\sin\theta\,\hat{a}_\phi = \frac{\mu_\circ SM_\circ h}{4\pi r^2}\sin\theta\,\hat{a}_\phi$$

۸. گزینهٔ ۲) اگر بار سطحی ρ_s با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد چگالی جریان سطحی معادل آن عبارتست از $\rho_s\, a\sin\theta\,\omega\,\hat{a}_\phi$ که باید با چگالی سطحی جریان مغناطیسی برابر است.

$$\overline{J}_{ms} = \hat{M}\times\hat{a}_r = M_\circ\,\hat{a}_z\times\hat{a}_r = M_\circ\sin\theta\,\hat{a}_\phi = \rho_s\, a\sin\theta\,\omega\,\hat{a}_\phi$$

$$\Rightarrow \rho_s = \frac{M_\circ}{a\omega}$$

۹. گزینهٔ ۳)

$$\mu = az+b \qquad \begin{matrix} z=0 & \mu=\mu_\circ \\ z=2 & \mu=3\mu_\circ \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} a=\mu_\circ \\ b=\mu_\circ \end{matrix} \;\rightarrow\; \mu=\mu_\circ(z+1)=\mu_\circ\mu_r$$

$$H_{x_2} = H_{x_1} \Rightarrow \overline{H}_2 = H_\circ\,\hat{a}_x$$

$$\overline{M} = (\mu_r-1)\,\overline{H}_2 = zH_\circ\,\hat{a}_x$$

$$\overline{J}_{ms}\Big|_{z=2} = \overline{M}\times\hat{a}_z\Big|_{z=2} = -2H_\circ\,\hat{a}_y$$

۱۰. گزینهٔ ۲) اگر مسیر آمپر را یک دایره‌ای که محور آن z است در نظر بگیریم در اینصورت میدان مغناطیسی در جهت $\hat{a}_\phi$ بوده و بر مرز مشترک دو ناحیه عمود است پس پیوستگی مولفه B برقرار است.

$$\begin{matrix} \oint \overline{H}.\overline{d\ell} = I \\ \mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} (H_1+H_2)\,\pi R = I \\ \mu_1 H = \mu_2 H_2 \end{matrix} \;\rightarrow\; H_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,\frac{I}{\pi R}\,\hat{a}_\phi \qquad x>0$$

$$H_1=\frac{3\mu_0}{8\mu_0}\,\frac{I}{\pi R}=\frac{3I}{8\pi R}$$

۱۱. گزینهٔ ۴) با استفاده از قانون آمپر داریم:

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell}=I \;\rightarrow\; \overline{H}=\frac{I}{2\pi R}\hat{a}_\phi$$

$$\overline{M}=(\mu_r-1)\,\overline{H}=\left[\frac{1}{R}-1\right]\frac{I}{2\pi R}\hat{a}_\phi$$

$$\overline{J}_{ms}\Big|_{R=a}=\overline{M}\times-\hat{a}_R\Big|_{R=a}=\left[\frac{1}{a}-1\right]\frac{I}{2\pi a}\hat{a}_z$$

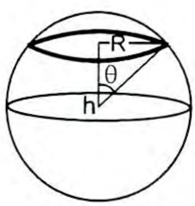
$$\overline{J}_{ms}\Big|_{R=b}=\overline{M}\times\hat{a}_R\Big|_{R=b}=\left[1-\frac{1}{b}\right]\frac{I}{2\pi b}\hat{a}_z$$

$$\overline{J}_m=\overline{\nabla}\times M=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RM_\phi)\,\hat{a}_z=-\frac{I}{2\pi R^3}\hat{a}_z$$

۱۲. گزینهٔ ۲) چگالی حجمی جریان مغناطیسی صفر است زیرا $\overline{\nabla}\times\overline{M}=0$ اما چگالی سطحی جریان عبارتست از:

$$\overline{J}_{ms}=\overline{M}\times\hat{a}_r=M_0\,\hat{a}_z\times\hat{a}_r=M_0\sin\theta\,\hat{a}_\phi$$

اگر نوار دایره‌ای بشعاع r و بفاصله h از مرکز کره در نظر بگیریم میدان ناشی از آن عبارتست از:



$$d\overline{H}=\frac{dI\,r^2\,\hat{a}_z}{2\left[r^2+h^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{(M.\sin\theta)\,(ad\theta)\,(a^2\sin^2\theta)}{2a^3}\hat{a}_z$$

$$d\overline{H}=\frac{M_0\sin^3\theta\,d\theta}{2}\hat{a}_z \;\rightarrow\; \overline{H}=\int_0^\pi\frac{M_0}{2}\sin^3\theta\,d\theta\,\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow\overline{H}=\frac{M_0}{2}\hat{a}_z\left[\frac{1}{4}\int_0^\pi(3\sin\theta-\sin3\theta)\,d\theta\right]=\frac{M_0}{2}\hat{a}_z\left[2\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right]\right]=\frac{2}{3}M_0\,\hat{a}_z$$

۱۳. گزینهٔ ۱) از قانون آمپر جهت محاسبه میدان H در فاصله $a<R<b$ استفاده می‌کنیم.

$$\oint\overline{H}.\overline{d\ell}=I=\int J\,ds\rightarrow\int\overline{H}.\overline{d\ell}=\int_0^{2\pi}\int_0^a J_0\frac{R}{a}R\,dR\,d\phi$$

$$H(2\pi R)=\frac{J_0}{a}\,2\pi\frac{1}{3}a^3\quad\rightarrow\overline{H}=\frac{J_0a^2}{6R}\hat{a}_\phi$$

$$\overline{M}=\chi_m\overline{H}=\left[1+\frac{1}{R}-1\right]\frac{J_0a^2}{6R}\hat{a}_\phi=\frac{J_0a^2}{6R^2}\hat{a}_\phi$$

$$\overline{J}_{ms}=\overline{M}\times\hat{a}_R\Big|_{R=b}=\frac{J_0a^2}{6R^2}\hat{a}_\phi\times\hat{a}_R=\frac{-J_0a^2}{6b^2}\hat{a}_z$$

۱۴. گزینهٔ ۱)

$$B_1\cos\theta_1=B_2\cos\theta_2$$

$$\frac{B_2}{\mu_2}\sin\theta_2-\frac{B_1}{\mu_1}\sin\theta_1=J_s$$

$$B_1 = \frac{B_2}{1}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{1}{\mu_2\cos\theta_2\,tg\theta_1 - \mu_1\sin\theta_2}\,\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

$$\Rightarrow\ B_1 = \frac{1}{\mu_2\cos\theta_1\,tg\theta_1 - \mu_1\cos\theta_1\,tg\theta_2} = \frac{1}{\mu_2\sin\theta_1 - \mu_1\cos\theta_1\,tg\theta_2}$$

$$\frac{B_2\sin\theta_2}{\mu_2} - \frac{B_1\sin\theta_1}{\mu_1} = \frac{\mu_1 B_2\sin\theta_2 - B_1\mu_2\sin\theta_1}{\mu_1\mu_2}$$

$$\mu_1 B_2\sin\theta_2 - B_1\mu_2\sin\theta_1 = \mu_1\frac{\sin\theta_2}{\mu_2\cos\theta_2\,tg\theta_1 - \mu_1\sin\theta_2} - \frac{\mu_2\sin\theta_1}{\mu_2\sin\theta_1 - \mu_1\cos\theta_1\,tg\theta_2}$$

$$= \frac{\mu_1}{\mu_2\cot g\theta_2\,tg\theta_1 - \mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1\cot g\theta_1\,tg\theta_2}$$

$$= \frac{\mu_1\left(\mu_2 - \mu_1\cot g\theta_1\,tg\theta_2\right) - \mu_2\left(\mu_2\cot g\theta_2\,tg\theta_1 - \mu_1\right)}{\left(\mu_2\cot g\theta_2\,tg\theta_2 - \mu_1\right)\left(\mu_2 - \mu_1\cot g\theta_1\,tg\theta_2\right)}$$

$$= \frac{-\left[\mu_1^2\cot g\theta_1\,tg\theta_2 + \mu_2^2\cot g\theta_2\,tg\theta_1 - 2\mu_1\mu_2\right]}{\mu_2^2\cot g\theta_2\,tg\theta_1 + \mu_1^2\cot g\theta_1\,tg\theta_2 - 2\mu_1\mu_2} = -1$$

$$\rightarrow\ J_s = \frac{-1}{\mu_1\mu_2}$$

۱۵. گزینهٔ ۳)

$$\bar{J}_m = \bar{\nabla}\times\overline{M} = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RM\phi\right)\hat{a}_z = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R\frac{A}{R}\right]\hat{a}_z = 0$$

$$\bar{J}_{ms_1} = \overline{M}\times\left(-\hat{a}_R\right)\Big|_{R=a} = \frac{A}{a}\hat{a}_z \quad\rightarrow\quad I_m = \frac{A}{a}\times 2\pi a = 2\pi A$$

$$\frac{I_m}{2\pi R} = \frac{B}{\mu_0}\ \Rightarrow\ B = \mu_0\frac{A}{R} \qquad H = \frac{B}{\mu_0} - M = \frac{A}{R} - \frac{A}{R} = 0$$