# فصل هشتم

# پتانسیل‌های برداری و اسکالر مغناطیسی

تا کنون دو روش جهت محاسبه میدان مغناطیسی معرفی کرده‌ایم یکی قانون بیوساوار و دیگری قانون آمپر در این فصل روش دیگری برای محاسبه میدان بر اساس پتانسیل مغناطیسی معرفی می‌کنیم قبلاً از پرداختن به پتانسیل مغناطیسی کمیت فیزیکی دیگری بنام چگالی شار مغناطیسی را معرفی می‌کنیم که رابطه مستقیمی با میدان مغناطیسی دارد بطوریکه $\overline{B}=\mu_{\circ}\overline{H}$ که $\overline{B}$ همان چگالی شار مغناطیسی و $\mu_{\circ}$ ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی محیط است و مقداریست ثابت و برابر با $4\pi\times 10^{-7}$ جهت بدست آوردن رابطه‌ای برای پتانسیل برداری مغناطیسی از رابطه بیوساوار شروع می‌کنیم اگر رابطه بیوساوار را برای $\overline{B}$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$\overline{B}=\int_{C}\frac{\mu_{\circ}I\,\overline{d\ell}\times\hat{a}_R}{4\pi R^2}\qquad(1-8)$$

که $\overline{R}$ بردار فاصله است اگر مختصات نقطه روی منبع (سیم حامل جریان) که معرف موقعیت عنصر $\overline{d\ell}$ است را $(x',y',z')$ و مختصات نقطه‌ای که میدان و یا $\overline{B}$ در آن نقطه لازم است محاسبه شود $(x,y,z)$ بنامیم در اینصورت داریم:

$$\overline{R}=(x-x')\hat{a}_x+(y-y')\hat{a}_y+(z-z')\hat{a}_z\qquad(2-8)$$

اگر از $\frac{1}{R}$ گرادیان بگیریم خواهیم داشت:

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\nabla\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{(x-x')\hat{a}_x+(y-y')^2\hat{a}_y+(z-z')\hat{a}_z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\hat{a}_R}{R^2}$$

بنابراین رابطه (۸-۱) را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\overline{B}=-\int_{c}\frac{\mu_{\circ}I}{4\pi}\overline{d\ell}\times\left[\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right]\qquad(3-8)$$

اگر از رابطه برداری $\overline{A}\times\nabla v=v\nabla\times\overline{A}-\nabla\times(v\overline{A})$ استفاده کنیم داریم

$$\overline{B}=\frac{-\mu_{\circ}I}{4\pi}\int_{c}\left[\frac{1}{R}\nabla\times\overline{d\ell}-\nabla\times\frac{\overline{d\ell}}{R}\right]\qquad(4-8)$$

اما چون $\overline{d\ell}$ تابع نقطه $x',y',z'$ است و اپراتور $\nabla$ روی $z,y,x$ می‌کند پس حاصل $\nabla\times\overline{d\ell}$ برابر صفر است و چون $\nabla$ روی $z,y,x$ عمل می‌کند و انتگرال‌گیری روی $\overline{d\ell}$ است که بستگی به نقطه $x',y',z'$ دارد میتوان $\nabla$ را از انتگرال بیرون آورد بنابراین رابطه (۸-۴) را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\overline{B}=\nabla\times\int_{c}\frac{\mu_{\circ}I\,\overline{d\ell}}{4\pi R}\qquad(5-8)$$

عبارت انتگرال در معادله (۸-۵) یک بردار است که بنام پتانسیل برداری مغناطیسی ناشی از سیمی حامل جریان I می‌باشد و حاصلضرب خارجی اپراتور $\nabla$ در یک بردار را «کرل» آن بردار می‌نامند. رابطه (۸-۵) را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\overline{B} = \overline{\nabla} \times \overline{A} \qquad (۶-۸)$$

که $\overline{A}$ پتانسیل برداری می‌باشد اگر دقت شود ملاحظه می‌شود که این رابطه شبیه رابطه پتانسیل الکتریکی می‌باشد (رابطه (۳-۸) را ببینید). همانطوریکه قانون بیوساوار را برای توزیع سطحی و حجمی جریان بکار بردیم میتوان پتانسیل ناشی از توزیع سطحی و حجمی جریان را بدست آورد که عبارتند از:

$$\overline{A} = \int_s \frac{\mu_\circ \overline{J}_s \, ds}{۴\pi R} \qquad (۷-۸)$$

$$\overline{A} = \int_v \frac{\mu_\circ \overline{J} \, dv}{۴\pi R} \qquad (۸-۸)$$

نکته بسیار مهم در رابطه بالا اینست که جهت بردار پتانسیل و جریان یکی می‌باشد یعنی اگر جریان مثلاً در جهت $\hat{a}_z$ باشد پتانسیل برداری فقط مولفه $A_z$ دارد.

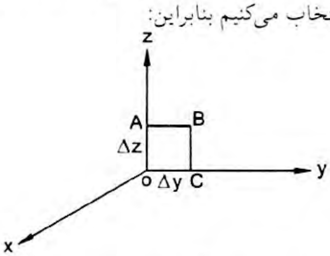
قبل از اینکه بحث پتانسیل برداری را ادامه دهیم به مفهوم ریاضی و فیزیکی «کرل» می‌پردازیم اگر بردار $\overline{A}$ را در نظر بگیریم کرل بردار $A$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\overline{\nabla} \times \overline{A} = \lim_{\Delta s \to \circ} \frac{\oint_C \overline{A}.\overline{d\ell}}{\Delta s} \qquad (۹-۸)$$

که $\Delta s$ سطح تشکیل شده توسط مسیر بسته $C$ می‌باشد اگر برداریکه عمود بر سطح $\Delta s_i$ را $\hat{a}_i$ بنامیم در اینصورت مولفه $i$ ام کرل بردار است با

$$(\nabla \times A)_i = \lim_{\Delta s_i \to \circ} \frac{\oint_C \overline{A}.\overline{d\ell}}{\Delta s_i}$$

مثلاً فرض کنید در دستگاه قائم بخواهیم مولفه $x$ کرل را حساب کنیم در اینصورت $\Delta s$ را طوری می‌گیریم که عمود بر آن در جهت $\hat{a}_x$ باشد بنابراین یک مستطیل در صفحه $zy$ به ابعاد $\Delta y$ و $\Delta z$ انتخاب می‌کنیم بنابراین:




شکل (۸-۱): محاسبه کردن کرل بردار در جهت $\hat{a}_x$

$$(\nabla \times A)_x = \lim_{\substack{\Delta y \to \circ \\ \Delta z \to \circ}} \frac{\oint_c \overline{A}.\overline{d\ell}}{\Delta y \, \Delta z}$$

$$\oint_c \overline{A}.\overline{d\ell} = \int_A^o \overline{A}.\overline{d\ell} + \int_o^C \overline{A}.\overline{d\ell} + \int_C^B \overline{A}.\overline{d\ell} + \int_B^A \overline{A}.\overline{d\ell}$$

$$= \int_A^o -A_z \, dz + \int_o^C A_y \, dy + \int_C^B A_z \, dz + \int_B^A -A_y \, dy$$

$$= \int - \left[ A_{z_\circ} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{۲} \right] dz + \int - \left[ A_{y_\circ} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{۲} \right] dy$$

$$+ \int + \left[ A_{z_\circ} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{۲} \right] dz + \int + \left[ A_{y_\circ} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{۲} \right] dy \rightarrow$$

$$\oint \overline{A}.\overline{d\ell} = \left[-\frac{\partial A_y}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\right]\Delta y\,\Delta z$$

که $A_{y_\circ}$ و $A_{z_\circ}$ و $A_{x_\circ}$ مولفه‌های بردار $\overline{A}$ در مرکز مستطیل OABC می‌باشد و از بسط تیلور جهت محاسبه انتگرال‌ها استفاده شده با جایگزینی $\oint \overline{A}.\overline{d\ell}$ در رابطه بالا خواهیم داشت.

$$(\nabla\times A)_x = \lim_{\substack{\Delta y\to \circ\\ \Delta z\to\circ}} \frac{\left[\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right]\Delta y\,\Delta z}{\Delta y\,\Delta z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

دقت شود که جهت مسیر بسته $\overline{d\ell}$ باید طوری باشد که اگر جهت بسته شدن انگشتان دست راست در آن جهت قرار گیرد جهت انگشت شصت در جهت مولفه $\widehat{a}_x$ باشد به همین ترتیب سایر مولفه‌های کرل $\overline{A}$ به ترتیب زیر خواهد بود

$$(\nabla\times A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(\nabla\times A)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

بنابراین $(\overline{\nabla}\times\overline{A})$ در دستگاه قائم از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\overline{\nabla}\times\overline{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\widehat{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\widehat{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\widehat{a}_x \qquad (۱۰-۸)$$

حالا با تبدیل مختصات و بردار یکه از قائم به دستگاه استوانه و کروی میتوان کرل را در دستگاه استوانه‌ای و کروی بصورت زیر نوشت

$$\overline{\nabla}\times\overline{A} = \left[\frac{۱}{R}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\widehat{a}_R + \left[\frac{\partial A_R}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial R}\right]\widehat{a}_\phi + \frac{۱}{R}\left[\frac{\partial(R A_\phi)}{\partial R}-\frac{\partial A_R}{\partial\phi}\right]\widehat{a}_z \qquad (۱۱-۸)$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{A} = \frac{۱}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\widehat{a}_r + \frac{۱}{r}\left[\frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\widehat{a}_\theta + \frac{۱}{r}\left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\widehat{a}_\phi \qquad (۱۲-۸)$$

بطور کلی میتوان حاصلضرب برداری $\overline{\nabla}$ و $\overline{A}$ را بصورت دترمینان نوشت مثلاً در دستگاه کارتزین کرل را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\overline{\nabla}\times\overline{A} = \begin{vmatrix} \widehat{a}_x & \widehat{a}_y & \widehat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (۱۳-۸)$$

در دستگاه استوانه‌ای و کروی دترمینان بصورت زیر خواهد بود.

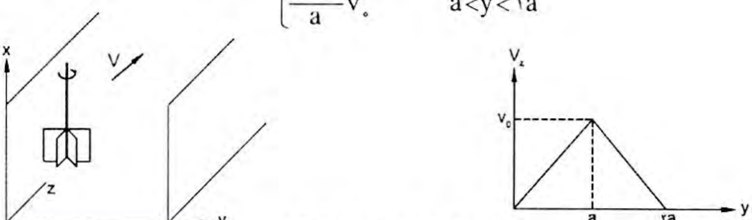
$$\overline{\nabla}\times\overline{A} = \frac{۱}{R}\begin{vmatrix} \widehat{a}_R & R\widehat{a}_\phi & \widehat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_R & RA_\phi & A_z \end{vmatrix} \qquad (۱۴-۸)$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\,\hat{a}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & r\,A_\theta & r\sin\theta\,A_\phi\end{vmatrix}\qquad (۱۵-۸)$$

## ۸-۱- تعریف کرل

برای فهم فیزیکی کرل فرض کنید چرخ پره داری را بطور قائم در یک جوی آب فرو کنیم و سرعت آب را مطابق شکل در جهت $z$ فرض کنید می‌دانیم سرعت در کنارهای جوی صفر و در وسط جوی حداکثر است اگر عرض جوی را در جهت $y$ و عمق جوی را در جهت $x$ در نظر بگیریم معادله سرعت آب جوی را میتوان به صورت زیر نوشت

$$v_z=\begin{cases}\frac{v_0}{a}\,y & 0<y<a\\ \frac{2a-y}{a}\,v_0 & a<y<2a\end{cases}\qquad (۱۶-۸)$$

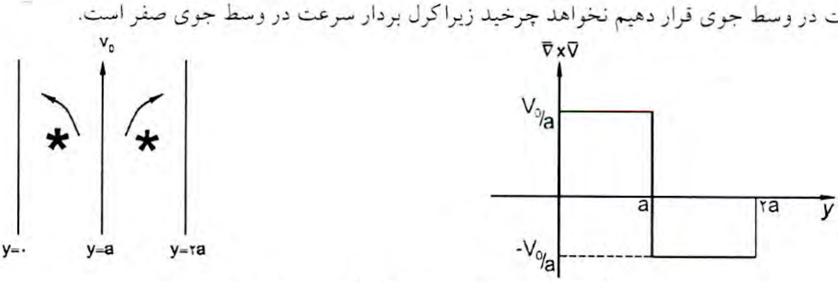



شکل (۸-۲): مفهوم فیزیکی کرل

با توجه به پروفایل سرعت آب اگر چرخ را در نیمه اول جوی (که عرض آن $2a$ است) قرار دهیم چرخ در جهت مثلثاتی می‌چرخد و اگر در نیمه دوم جوی قرار دهیم (در فاصله $a$ تا $2a$) در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد و مسلم است که چرخ حول محور $x$ می‌چرخد حال اگر کرل بردار $\overline{v}$ را حساب کنیم داریم

$$\overline{\nabla}\times\overline{v}=\frac{\partial v_z}{\partial y}\,\hat{a}_x=\begin{cases}\frac{v_0}{a}\,\hat{a}_x & 0<y<a\\ \frac{-v_0}{a}\,\hat{a}_x & a<y<2a\end{cases}\qquad (۱۷-۸)$$

در حقیقت بردار کرل در جهت $\hat{a}_x$ که همان محور چرخش چرخ است و اندازه کرل یعنی $\frac{v_0}{a}$ همان میزان چرخش چرخ می‌باشد بعبارت دیگر کرل یک بردار میزان چرخشی است که آن بردار ایجاد می‌کند واضح است که اگر چرخ را درست در وسط جوی قرار دهیم نخواهد چرخید زیرا کرل بردار سرعت در وسط جوی صفر است.




شکل (۸-۳): جهت و اندازه چرخش که همان بردار سرعت است

علامت کرل در نیمه اول جوی مثبت (چرخش چرخ در جهت مثلثاتی) و در نیمه دوم جوی منفی (چرخش چرخ در جهت عقربه‌های ساعت) می‌باشد ثابت بودن کرل بردار در هر دو نیمه جوی به این معنی است که اگر چرخ را در جهت عرض جوی (جهت $y$) حرکت دهیم سرعت چرخش آن فرقی نمی‌کند (این بعلت خطی بودن سرعت نسبت به عرض

جوی است دقت کنید که چون محور چرخش در جهت x است اگر چرخ را طوری قرار دهیم که محور آن موازی محور z و یا موازی محور y قرار گیرد چرخ نمی‌چرخد زیرا کرل بردار سرعت در جهت $\hat{a}_x$ است و بردار سرعت در جهات افقی و عرضی دارای کرل صفر است.

## ۸-۲- قضیه استوکس

سطح S را که به منحنی بسته C محدود می‌شود مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم اگر این سطح را به عناصر بی‌نهایت کوچک تقسیم کنیم در اینصورت برای هر عنصر سطح می‌توان نوشت

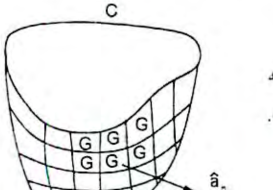
$$\oint_{C_i} \overline{A}.\overline{d\ell} = (\nabla \times \overline{A}).\overline{ds_i}$$

که این رابطه از تعریف کرل بردار $\overline{A}$ بدست آمده است اگر این رابطه را برای هر مسیر بسته نوشته و سپس همه روابط را با هم جمع کنیم خواهیم داشت

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i}}_{C_i \text{ تمام عناصر}} \overline{A}.\overline{d\ell} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}}_{\text{تمام عنصرهای سطح}} (\overline{\nabla} \times \overline{A}).\overline{ds_i}$$

حال اگر تعداد مسیرهای بسته را به سمت بی نهایت میل دهیم سمت راست رابطه بالا به $\int_s (\overline{\nabla} \times \overline{A}).\overline{ds}$ تبدیل می‌شود اما برای عبارت سمت چپ رابطه بالاکلیه اضلاع عناصر سطح بجز آنهایی که محدود به منحنی بسته C می‌شوند دوبار در مجموعه $\sum \oint_{C_i} \overline{A}.\overline{ds}$ ظاهر می‌شوند و سهم هر ضلع در مجموعه صفر است زیرا در امتداد هر ضلع دوبار و در جهت مختلف انتگرال‌گیری می‌شود به این ترتیب نتیجه زیر را که همان قضیه استوکس است بدست می‌آوریم.

$$\oint_C \overline{A}.\overline{d\ell} = \int_s (\overline{\nabla} \times \overline{A}).\overline{ds} \qquad (۸-۱۸)$$




شکل سطح S محدود به منحنی بسته C

با استفاده از قضیه استوکس میتوان به فرم دیگری از قانون آمپر رسید اگر رابطه آمپر را با استفاده از قانون استوکس بفرم انتگرال روی سطح بنویسیم خواهیم داشت.

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = \int_s (\overline{\nabla} \times \overline{H}).\overline{ds} = I$$

حال اگر I را بصورت $\int_s \overline{J}.\overline{ds}$ بنویسیم در اینصورت خواهیم داشت

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J} \qquad (۸-۱۹)$$

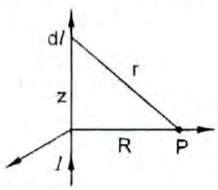
رابطه (۸-۱۹) در حقیقت فرم دیفرانسیلی قانون آمپر است.

حالا که مفهوم کرل را توضیح دادیم به ادامه مبحث پتانسیل برداری می‌پردازیم همانطوریکه گفتیم بردار چگالی شار مغناطیسی از کرل بردار $\overline{A}$ (پتانسیل برداری مغناطیسی) بدست می‌آید و چون دیورژانس کرل هر بردار صفر است پس

$$\overline{\nabla}.\overline{B} = ۰ \qquad (۸-۲۰)$$

رابطه (۸-۲۰) از روابط مهم در مغناطیس است و دلالت بر این دارد که همواره دیورژانس میدان مغناطیسی در تمام فضا صفر است. محاسبه میدان مغناطیسی با استفاده از پتانسیل برداری در خیلی اوقات راحت‌تر از محاسبه آن توسط قانون بیوساوار است.

**مثال ۱:** میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم طویل حامل جریان I را با استفاده از پتانسیل برداری بدست می‌آید.




*حل: فرض کنید سیم بر محور z منطبق است به دلیل تقارن میتوان پتانسیل برداری را روی محور y بدست آورد.*

$$A=\int \frac{\mu_0 I\,\overline{dl}}{4\pi r}=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I\,dz\,\hat{a}_z}{4\pi\sqrt{R^2+z^2}}$$

*بسادگی میتوان نشان داد که برای انتگرال بالا وقتی حدود انتگرال از ∞- تا ∞ باشد پاسخ بی نهایت می‌شود برای حل این مشکل ابتدا طول سیم را L گرفته و سپس L را بسمت ∞ میل می‌دهیم در اینصورت خواهیم داشت.*

$$\overline{A}=\int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{dz\,\hat{a}_z}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+R^2}}{\frac{-L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+R^2}}\,\hat{a}_z$$

$$\overline{B}=\lim_{L\to\infty}\ \nabla\times\overline{A}=\lim_{L\to\infty}\ -\frac{\partial A_z}{\partial R}\,\hat{a}_\phi=\lim_{L\to\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\,\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{2R}{L}\right)^2}}\,\hat{a}_\phi$$

$$\overline{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,\hat{a}_\phi$$

*که* $\overline{H}=\frac{\overline{B}}{\mu_0}=\frac{I}{2\pi R}\,\hat{a}_\phi$ *و این همان میدان ناشی از سیم بی نهایت طویل می‌باشد که قبلاً از قانون بیوساوار محاسبه کردیم.*

**مثال ۲:** یک کابل هم محور بشعاع داخلی a و شعاع خارجی b مفروض است اگر پتانسیل در R=b صفر باشد معادله پتانسیل برداری را در کل فضا بدست آورید فرض کنید هادی داخلی دارای جریان I می‌باشد و محور کابل منطبق بر محور z می‌باشد.

*حل: چون جریان در جهت* $\hat{a}_z$ *است فقط مولفه* $A_z$ *موجود است میدان مغناطیسی در* $R<a$ *و* $R>a$ *را قبلاً با استفاده از قانون آمپر بدست آوردیم که عبارتست از:*

$$\overline{H}=\frac{IR}{2\pi a^2}\,\hat{a}_\phi \qquad R<a$$

$$\overline{H}=\frac{I}{2\pi R}\,\hat{a}_\phi \qquad R>a$$

*حالا با استفاده از رابطه* $\nabla\times\overline{A}=\overline{B}$ *میتوان* $\overline{A}$ *را بدست آورد.*

$$\nabla\times\overline{A}=\frac{\mu_0 IR}{2\pi a^2}\,\hat{a}_\phi \qquad R<a$$

$$\nabla\times\overline{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,\hat{a}_\phi \qquad R>a$$

با توجه به اینکه فقط مولفه $A_z$ موجود است و فقط تابع R است (بعلت تقارن $A_z$ تابع $\phi$ نیست و بعلت طویل بودن سیم $A_z$ تابع z نیست) در اینصورت $\nabla\times\overline{A}=\frac{-\partial A_z}{\partial R}\,\hat{a}_\phi$ پس

$$-\frac{\partial A_z}{\partial R}\,\hat{a}_\phi=\frac{\mu_0 IR}{2\pi a^2}\,\hat{a}_\phi \qquad R<a$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial R}\hat{a}_\phi=\frac{\mu_\circ I}{2\pi R}\hat{a}_\phi \qquad R>a$$

از هر کدام از معادلات بالا میتوان $A_z$ را بدست آورد.

$$A_z=-\frac{\mu_\circ IR^2}{4\pi a^2}+C_1 \qquad R<a$$

$$A_z=-\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln R+C_2 \qquad R>a$$

حالا شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$A_z(R=b)=0 \rightarrow -\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln b+C_2=0 \rightarrow C_2=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln b$$

$$\rightarrow \quad A_z=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln\frac{b}{R} \qquad R>a$$

پیوستگی پتانسیل در $R=a$ را اعمال می‌کنیم.

$$\left.\frac{-\mu_\circ IR^2}{4\pi a^2}+C_1\right|_{R=a}=\left.\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln\frac{b}{R}\right|_{R=a}$$

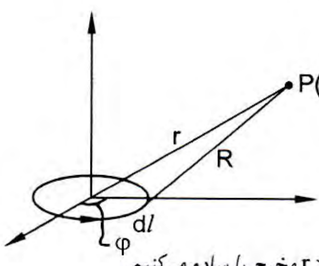
$$\Rightarrow C_1=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\left[\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\right]$$

بنابراین

$$A_z=\begin{cases}\dfrac{-\mu_\circ IR^2}{4\pi a^2}+\dfrac{\mu_\circ I}{2\pi}\left[\ln\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{2}\right] & R<a\\[2ex] \dfrac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln\dfrac{b}{R} & R>a\end{cases}$$

نکته جالب توجه اینکه پتانسیل برداری در خارج سیم خیلی شبیه پتانسیل الکتریکی در خارج یک میله با چگالی $\rho_\ell$ می‌باشد که برابر بود با $\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{R_\circ}{R}$ که $R_\circ$ محلی است که پتانسیل الکتریکی صفر است (در اینجا $R_\circ=b$ می‌باشد)

**مثال ۳:** با استفاده از پتانسیل برداری میدان مغناطیسی ناشی از یک دو قطبی مغناطیسی را بدست آورید.




*حل: با توجه به فرمول پتانسیل برداری برای یک حلقه به شعاع a که حامل جریان I می‌باشد خواهیم داشت.*

$$\overline{A}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\oint\frac{I\,\overline{d\ell}}{R}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\oint\frac{\overline{d\ell}}{\left[r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos(\phi-\phi')\right]^{\frac{1}{2}}}$$

*که $\phi'$ مختصات $d\ell$ و $\phi$ مختصات نقطه P می‌باشد حال با توجه به اینکه $r\gg a$ مخرج را ساده می‌کنیم.*

$$\left[r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos(\phi-\phi')\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}\left[1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos(\phi-\phi')\right]$$

پس

$$\overline{A}=\frac{\mu_\circ I}{4\pi r}\left[\oint\overline{d\ell}+\oint\frac{a}{r}\sin\theta\cos(\phi-\phi')\,\overline{d\ell}\right]$$

**با جایگزینی** $\overline{d\ell} = a\,d\phi' \left[-a_x \sin\phi' + a_y \cos\phi'\right]$ **خواهیم داشت. (دقت کنید که** $\oint \overline{d\ell} = 0$ **است)**

$$\overline{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_0^{2\pi} \frac{a}{r}\sin\theta\cos(\phi-\phi')\left[-\hat{a}_x \sin\phi' + \hat{a}_y\cos\phi'\right] a\, d\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^2}\sin\theta\,\pi\left[-\sin\phi\,\hat{a}_x + \cos\phi\,\hat{a}_y\right] = \frac{\mu_0\left[I\pi a^2\right]\sin\theta}{4\pi r^2}\hat{a}_\phi$$

با توجه به اینکه $m = \pi a^2 I$ ممان دو قطبی است پس

$$\overline{A} = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2}\hat{a}_\phi \qquad (۲۱-۸)$$

حال $\overline{B}$ را با استفاه از $\overline{A}$ حساب می‌کنیم.

$$\overline{B} = \nabla\times\overline{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}a_r - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\hat{a}_\theta$$

$$\overline{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta)$$

و یا

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{m}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

و این همان رابطه‌ای است که قبلاً با استفاده از قانون بیوساوار بدست آوردیم رابطه (۸-۲۱) را میتوان بفرم زیر نیز نوشت

$$\overline{A} = \frac{\mu_0 \overline{m}\times\hat{a}_r}{4\pi r^2} \qquad (۲۲-۸)$$

که $\overline{m} = m\hat{a}_z$ می‌باشد این رابطه نیز شبیه رابطه پتانسیل الکتریکی برای دو قطبی الکتریکی می‌باشد که بصورت $V = \dfrac{\overline{p}.\hat{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ بود.

حال ثابت می‌کنیم که برای یک جریان حلقه‌ای یعنی یک جریان خطی که از مسیر بسته C می‌گذرد دیورژانس بردار $\overline{A}$ برابر صفر است برای اینکار $\nabla.\overline{A}$ را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\nabla.\overline{A} = \nabla.\oint\frac{\mu_0 I\,\overline{d\ell'}}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\nabla.\left[\frac{\overline{d\ell'}}{R}\right]$$

با استفاده از اتحاد برداری $\nabla.\left[v\overline{A}\right] = \overline{A}.\nabla v + v\nabla.\overline{A}$ رابطه بالا بصورت زیر خواهد شد.

$$\nabla.\overline{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\oint_C \overline{d\ell'}.\nabla\left[\frac{1}{R}\right] + \oint_C\frac{1}{R}\nabla.\overline{d\ell'}\right]$$

انتگرال دوم در سمت راست همواره صفراست زیرا $\nabla$ روی z,y,x عمل می‌کند و $d\ell'$ تابعی از مختصات نقاط منبع $z',y',x'$ می‌باشد لذا $\nabla.\overline{d\ell} = 0$ است حال اگر از رابطه $\nabla\left[\frac{1}{R}\right] = -\nabla'\left[\frac{1}{R}\right]$ استفاده کنیم داریم:

$$\oint_C \overline{d\ell'}.\nabla\left[\frac{1}{R}\right] = -\int_C \nabla'\left[\frac{1}{R}\right].\overline{d\ell'} = -\int_s \nabla'\times\nabla'\left[\frac{1}{R}\right].\overline{ds'}$$

که $s'$ هر سطح دلخواه محدود بر منحنی بسته C می‌باشد چون کرل گرادیان هر تابع اسکالر صفر است پس حاصل عبارت بالا صفر می‌شود یعنی

$$\nabla.\overline{A} = 0 \qquad (۲۳-۸)$$

حال به استخراج معادلات پواسان و لاپلاس برای $\overline{A}$ که در میدان الکترواستاتیک برای $V$ بدست آوردیم می‌پردازیم برای این منظور از رابطه دیفرانسیلی قانون آمپر استفاده می‌کنیم.

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J}$$

و یا

$$\overline{\nabla} \times \overline{B} = \mu . \overline{J}$$

$$\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \times \overline{A}) = \mu . \overline{J}$$

با استفاده از رابطه برداری $\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \times \overline{A}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}.\overline{A}) - \overline{\nabla^{۲}}\,\overline{A}$ و با توجه به اینکه $\overline{\nabla}.\overline{A} = ۰$ داریم:

$$-\overline{\nabla^{۲}}\,\overline{A} = \mu . \overline{J} \qquad (۲۴-۸)$$

$$\overline{\nabla^{۲}}\,\overline{A} = -\mu . \overline{J}$$

در دستگاه کارتزین معادله (۸-۲۴) به سه معادله اسکالر تبدیل می‌شود.

$$\nabla^{۲} A_x = -\mu . J_x \qquad (۸-۲۵-\text{الف})$$

$$\nabla^{۲} A_y = -\mu . J_y \qquad (۸-۲۵-\text{ب})$$

$$\nabla^{۲} A_z = -\mu . J_z \qquad (۸-۲۵-\text{ج})$$

در ناحیه‌ای از فضا که $\overline{J} = ۰$ است رابطه (۸-۲۴) به رابطه لاپلاس تبدیل می‌شود یعنی

$$\nabla^{۲} \overline{A} = ۰ \qquad (۲۶-۸)$$

باید دقت داشت که در مختصات استوانه‌ای از رابطه (۸-۲۴) فقط معادله (۸-۲۵-ج) قابل استخراج است و فرم لاپلاسین برداری بسیار پیچیده است و از حوصله این کتاب بیرون است خوشبختانه چون جهت جریان با مولفه پتانسیل برداری یکی است در اینصورت اگر فقط مولفه $J_z$ داشته باشیم در اینصورت $A_x$ و $A_y$ صفر بوده و فقط معادله (۸-۲۵-ج) لازم است حل شود.

**مثال ۴:** از هادی داخلی کابل هم محور به شعاع $a$ جریان $I$ عبور می‌کند اگر پتانسیل برداری در $R = b$ ($b$ شعاع هادی خارجی است) صفر باشد با استفاده از حل معادله لاپلاس و پواسان، پتانسیل برداری را بدست آورید فرض کنید محور استوانه در جهت محور $z$ است.

*حل: در این مسئله* $J = \frac{I}{\pi a^{۲}}\,\hat{a}_z$ *برای* $R<a$ *و* $J=۰$ *برای* $R>a$ ***پس باید برای داخل هادی داخلی معادله پواسان و برای خارج هادی داخلی معادله لاپلاس را برای پتانسیل برداری حل کنیم و فقط مولفه*** $A_z$ ***داریم زیرا جریان در جهت*** $z$ ***است.***

$$R > a \rightarrow \nabla^{۲} A_z = ۰$$

***چون طول کابل بی نهایت است و تقارن دارد پس*** $A_z$ ***نه تابع*** $z$ ***است و نه تابع*** $\phi$ ***بلکه فقط تابع*** $R$ ***است.***

$$\nabla^{۲} A_z = \frac{۱}{R}\frac{\partial}{\partial z}\left[R\frac{\partial A_z}{\partial R}\right] = ۰ \rightarrow A_z = C_۱ \ln R + C_۲ \qquad b>R>a$$

$$A_z(R=b) = ۰ \rightarrow C_۲ = -C_۱ \ln b \rightarrow A_z = C_۱ \ln\frac{R}{b}$$

$$R>a \rightarrow \overline{B} = \frac{\mu . I}{۲\pi R}\,a_\phi = \overline{\nabla} \times \overline{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial R}\hat{a}_\phi \Rightarrow$$

$$\frac{\mu . I}{۲\pi R} = -\frac{C_۱}{R} \rightarrow C_۱ = \frac{-\mu . I}{۲\pi} \Rightarrow A_z = -\frac{\mu . I}{۲\pi}\ln\frac{R}{b}$$

$$\rightarrow A_z = \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln\frac{b}{R} \qquad b \geq R \geq a$$

$$R < a \;\rightarrow\; \nabla^2 A_z = -\mu_\circ \frac{I}{\pi a^2} \;\rightarrow\; \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R\frac{\partial A_z}{\partial R}\right] = -\mu_\circ \frac{I}{\pi a^2}$$

$$A_z = \frac{-IR^2\mu_\circ}{4\pi a^2} + C\ln R + D$$

اولاً چون پتانسیل در $R=0$ نباید بی نهایت شود پس باید $C=0$ باشد حال اگر شرط پیوستگی پتانسیل در $R=a$ را برای دو پتانسیل خارج و داخل هادی بنویسیم ضریب $D$ بدست می‌آید.

$$\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln\frac{b}{R}\Bigg|_{R=a} = -\frac{\mu_\circ IR^2}{4\pi a^2} + D\Bigg|_{R=a} \rightarrow D = \frac{\mu_\circ I}{2\pi}\left[\frac{a^2}{2a^2} + \ln\frac{b}{a}\right]$$

پس

$$A_z = \begin{cases} \dfrac{\mu_\circ I}{2\pi}\left[-\dfrac{R^2}{2a^2} + \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{b}{a}\right] & R<a \\ \dfrac{\mu_\circ I}{2\pi}\ln\dfrac{b}{R} & R>a \end{cases}$$

این روابط را قبلاً از روش دیگری بدست آورده بودیم.

حال میتوان روابط زیر را برای میدان الکتریکی و مغناطیسی نوشت

$$\nabla\cdot\overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \nabla\cdot\overline{H} = 0$$

$$\nabla\times\overline{E} = 0 \qquad \nabla\times\overline{H} = \overline{J}$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود همواره دیورژانس میدان مغناطیسی صفر است ولی کرل آن در جایی که جریان داریم غیر صفراست در حالی که برعکس میدان الکتریکی همواره کرل آن صفر است ولی دیورژانس آن در جایی که بار داریم غیر صفر است بنابراین به میدان مغناطیسی میدان چرخشی می‌گوئیم (rotational) که کرل آن مخالف صفر و دیورژانس آن صفر است و به میدان الکتریکی میدان غیر چرخشی (irrotational) که کرل آن همواره صفر و دیورژانس آن مخالف صفر است گفته می‌شود بنابراین برای این دو میدان کافی است در یک نقطه از فضا یکی از کرل و یا دیورژانس آن مخالف صفر باشد تا آن میدان غیر صفر باشد مثلاً برای میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای در تمام فضا کرل میدان صفر است و برای تمام فضا دیورژانس میدان صفر است مگر در محل بار نقطه‌ای و همین کافی است که میدان ناشی از بار نقطه‌ای غیر صفر باشد همین مسئله برای میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم حامل جریان I صادق است که در تمام نقاط فضا دیورژانس میدان صفر است و در تمام نقاط فضا کرل میدان صفر است مگر روی سیم و همین کافی است که میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم حامل جریان غیر صفر باشد.

از آنچه گفته شد میتوان گفت میدان برداری میدانی است که دارای دیورژانس و کرل باشد اگر دیورژانس و کرل یک میدان برداری در تمام نقاط فضا صفر باشد آن میدان برداری صفر است اگر دیورژانس و کرل یک میدان مشخص باشد آن میدان بطور یکتا قابل تعریف است ولی اگر فقط دیورژانس یک میدان مشخص باشد نمی‌توان میدان را بطور یکتا تعیین کرد یعنی بی نهایت میدان وجود دارند که همه یک دیورژانس دارند مثلاً فرض کنید میدان $\overline{C}$ دارای دیورژانس معلوم w باشد یعنی

$$\nabla\cdot\overline{C} = w$$

حال اگر به $\overline{C}$ بردار $\nabla\times\overline{G}$ را اضافه کنیم بطوریکه $\overline{G}$ یک بردار اختیاری باشد در اینصورت داریم:

$$\overline{F} = \overline{C} + \nabla\times\overline{G}$$

$$\nabla\cdot\overline{F} = \nabla\cdot\overline{C} + \nabla\cdot\nabla\times\overline{C} = \nabla\cdot\overline{C} = w$$

یعنی $\overline{F}$ و $\overline{C}$ هر دو دارای دیورژانس یکسان هستند ولی نمی‌توان گفت $\overline{C}=\overline{F}$ یعنی بی نهایت بردار مثل $\overline{F}$ وجود

دارند (به ازاء هر $\overline{G}$ یک $\overline{F}$ داریم) که همه دارای دیورژانس مساوی با W هستند ولی هیچکدام از این بردارهای $\overline{F}$ مساوی نیستند همینطور فرض کنید کرل بردار $\overline{C}$ مساوی بردار $\overline{W}$ باشد در اینصورت

$$\nabla \times \overline{C} = \overline{W}$$

حال اگر بردار $\overline{F} = \overline{C} + \nabla g$ که g یک تابع اسکالر است را تعریف کنیم در اینصورت

$$\nabla \times \overline{F} = \nabla \times \left[\overline{C} + \nabla g\right] = \nabla \times \overline{C} + \nabla \times \nabla g = \nabla \times \overline{C} = \overline{W}$$

یعنی هر دو بردار $\overline{C}$ و $\overline{F}$ دارای کرل مساوی $\overline{W}$ هستند ولی $\overline{F} \neq \overline{C}$ یعنی بی نهایت بردار مثل $\overline{F}$ وجود دارند (به ازای هر g یک $\overline{F}$ داریم) که همه دارای کرل مساوی $\overline{W}$ هستند ولی با هم مساوی نیستند. حال میدان الکتریکی $\overline{E}$ را در نظر می‌گیریم که دارای کرل و دیورژانس مشخص هست یعنی

$$\begin{cases} \nabla \times \overline{E} = 0 \\ \nabla . \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

در اینصورت داریم $E = -\nabla V$ که V بطور یکتا از معادله پواسان $\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon}$ بدست می‌آید و چون V یکتاست E هم یکتاست همین مسئله درباره میدان مغناطیسی که هم کرل و هم دیورژانس آن معلوم است صادق است

$$\begin{cases} \nabla . \overline{H} = \overline{J} \\ \nabla . \overline{H} = 0 \end{cases}$$

در اینصورت $\overline{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \overline{A}$ که $\overline{A}$ بطور یکتا با حل معادله پواسان $\nabla^2 \overline{A} = -\mu_0 \overline{J}$ بدست می‌آید که چون $\overline{A}$ یکتاست پس $\overline{H}$ هم یکتاست

## ۸-۳- پتانسیل اسکالر مغناطیسی

اگر در نقطه‌ای $J = 0$ باشد (خارج از منبع) در اینصورت $\nabla \times \overline{H} = 0$ و شرایط شبیه میدان الکتریکی خواهد بود یعنی چون کرل $\overline{H}$ صفر است H را میتوان از گرادیان یک تابع اسکالر بدست آورد که به این تابع اسکالر پتانسیل اسکالر مغناطیسی می‌گویند یعنی

$$\overline{H} = -\nabla V_m \qquad (۸-۲۷)$$

حال میتوان به رابطه لاپلاس برای $V_m$ مطابق روابط زیر رسید

$$\nabla . \overline{H} = \nabla . (-\nabla V_m) = 0$$

یعنی

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad (۸-۲۸)$$

یعنی $V_m$ همواره در معادله لاپلاس صدق می‌کند فرق اساسی $V_m$ با پتانسیل الکتریکی اینست که چون برای میدان مغناطیسی $\oint \overline{H} . \overline{d\ell} = I$ و غیر صفر است پس $\int_A^B \overline{H} . \overline{d\ell}$ تابع مسیر است یعنی اختلاف پتانسیل مغناطیسی بین دو نقطه یکتا نیست بنابراین $V_m$ یک کمیت صرفاً ریاضی است و فیزیکی نیست مثال زیر این مطلب را به روشنی نشان می‌دهد.

**مثال ۵:** سیمی منطبق بر محور zها حامل جریان I است پتانسیل اسکالر را بدست آورید؟

**حل: *پتانسیل اسکالر فقط در خارج سیم وجود دارد که $J = 0$ است.***

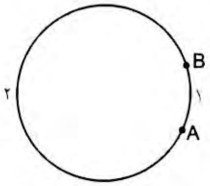
می‌دانیم میدان مغناطیسی در خارج سیم همانطوریکه از قانون آمپر بدست آوردیم برابر است با $\overline{H} = \frac{I}{2\pi R} \hat{a}_\phi$ بنابراین

$$\overline{H} = \frac{I}{2\pi R} \hat{a}_\phi = -\nabla V_m = -\frac{1}{R} \frac{\partial V_m}{\partial \phi} \hat{a}_\phi \qquad (۸-۲۹)$$

که با حل این معادله و با شرایط اولیه $V_m(\phi)=0$ خواهیم داشت

$$V_m = \frac{-I}{2\pi}\phi \qquad (30-8)$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود دو نقطه $A$ و $B$ که $\phi_A = 0$ و $\phi_B = 2\pi$ اگر چه یک نقطه هستند ولی $V_m$ یکسانی ندارند یعنی $V_{mA}=0$ و $V_{mB}=-I$ دقت کنید که $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2k\pi$ اگر چه همه یک نقطه هستند ولی اختلاف پتانسیل این نقاط صفر نیستند حال فرض کنید $\phi_A = 0$ , $\phi_B = \frac{\pi}{4}$ در اینصورت $V_{mA} - V_{mB} = \int_A^B \overline{H}.\overline{d\ell}$ اگر از $A$ به $B$ در کمان کوتاهتر حرکت کنید برابر $\frac{I}{8}$ و اگر از مسیر کمان بلندتر برویم برابر $\frac{7I}{8}$ می‌شود یعنی اختلاف پتانسیل اسکالر مغناطیسی بین دو نقطه $A$ و $B$ تابع مسیر است یعنی




$$\underset{\text{مسیر ۱}}{\int_A^B} \overline{H}.\overline{d\ell} = \frac{I}{8}$$

$$\underset{\text{مسیر ۲}}{\int_A^B} \overline{H}.\overline{d\ell} = \frac{7I}{8}$$

بنابراین نمی‌توان مثل پتانسیل الکتریکی برای پتانسیل مغناطیسی اختلاف پتانسیل تعریف کرد زیرا این اختلاف پتانسیل تابع مسیر است.

**مثال ۶:** سه استوانه توخالی هم محور به شعاعهای $a=0/1^m$، $b=0/3^m$ و $c=0/5^m$ به ترتیب دارای جریان سطحی به چگالی $J_{s_1} = 100\,\hat{a}_z$ ، $J_{s_2} = -25\hat{a}_z$ و $J_{s_3} = -5\hat{a}_z$ هستند اگر $V_m(\phi)=0$ در $\phi = 0$ باشد پتانسیل اسکالر در $\phi = \frac{\pi}{2}$ و $R=0/2^m$ و $\phi = -\frac{\pi}{2}$ و $R=0/4^m$ را بدست آورید؟

*حل: برای $0/1<R<0/3$ داریم:*

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = I = J_{s_1}\times 2\pi a = 100\times 2\pi\times 0/1$$

$$H(2\pi R) = 20\pi \rightarrow \quad H = \frac{10}{R}\,\hat{a}_\phi$$

$$\overline{H} = \frac{10}{R}\,\hat{a}_\phi = -\overline{\nabla} V_m = \frac{1}{R}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}\,\hat{a}_\phi \rightarrow V_m = -10\phi$$

$$V_m = -10\phi \qquad 0/1<R<0/3 \rightarrow \begin{matrix} R=0/2 \\ \phi=\frac{\pi}{2} \end{matrix} \rightarrow \quad V_m = -5\pi$$

*برای $0/3<R<0/5$ داریم:*

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = I = J_{s_1}2\pi a + J_{s_2}2\pi b = 100\times 2\pi\times 0/1 - 25\times 2\pi\times 0/3$$

$$H(2\pi R) = 5\pi \rightarrow H = \frac{2/5}{R} = -\overline{\nabla}V_m = -\frac{1}{R}\frac{\partial V_m}{\partial\phi}\,\hat{a}_\phi$$

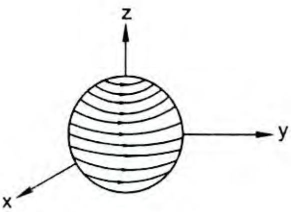
$$\rightarrow V_m = -2/5\phi \qquad 0/3<R<0/5$$

$$\begin{cases} R = 0/4 \\ \phi = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \quad V_m = -2/5\times\frac{-\pi}{2} = 1/25\pi$$

همانطوریکه گفتیم پتانسل اسکالر در معادله لاپلاس صدق می‌کند بنابراین فرم تابعیت این پتانسیل در دستگاه قائم، استوانه‌ای و قائم همانی است که در مبحث حل معادله لاپلاس برای پتانسیل الکتریکی دیدیم حل مسائلی از اینگونه را در فصول بعد خواهیم دید

**مثال ۷:** یک رشته سیم نازک حامل جریان $I$ بصورت یک پوسته کروی بشعاع $a$ مطابق شکل سیم پیچی می‌شود با فرض اینکه تعداد سیم پیچ‌ها در واحد طول در امتداد محور $z$ یکنواخت باشد توزیع جریان حاصل از این سیم پیچ را میتوان با یک لایه کروی جریان به چگالی $\overline{J}_s = J_{s_0} \sin\theta\, \widehat{a}_\phi$ تقریب زد مطلوبست محاسبه شدت میدان مغناطیسی در درون و بیرون سیم پیچ

*حل:* ***چون فقط روی سطح $r=a$ جریان وجود دارد لذا رابطه $\overline{H} = -\nabla V_m$ در تمام نقاط درون و بیرون سیم کروی برقرار است و $V_m$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند یعنی $\nabla^2 V_m = 0$ حالا باید پاسخ معادله لاپلاس در دستگاه کروی با شرایط زیر بدست آوریم.***




(۱) $r \to \infty$ ، $V_m \to$ مقداری محدود

(۲) $r \to 0$ ، $V_m \to$ مقداری محدود

(۳) $r = a \;\to\; B_{r_1} = B_{r_2} \;\to\; H_{r_1} = H_{r_2}$

(۴) $r = a \;\to\; H_{\theta_2} - H_{\theta_1} = J_{s_0} \sin\theta$

شرط چهارم مقرر می‌دارد که تابعیت پتانسیل اسکالر بصورت $\cos\theta$ است یعنی $n$ در تابع لژاندر برابر ۱ می‌باشد حال فرم کلی پتانسیل اسکالر در داخل و خارج کره را بنویسیم.

$$V_m^i = \left[A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right]\cos\theta \qquad r<a \qquad \text{(۸-۳۱- الف)}$$

$$V_m^o = \left[A_2 r + \frac{B_2}{r^2}\right]\cos\theta \qquad r>a \qquad \text{(۸-۳۱- ب)}$$

اعمال شرط ۲ در (۸-۳۱- الف) نتیجه $B_1=0$ و اعمال شرط ۱ در (۸-۳۱- ب) نتیجه $A_2=0$ را به دنبال دارد برای اعمال شرایط مرزی دیگر ابتدا میدان $\overline{H}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$H^i = -\nabla V_m^i = -A_1 \cos\theta\, \widehat{a}_r + A_1 \sin\theta\, \widehat{a}_\theta \qquad r<a \qquad \text{(۸-۳۲- الف)}$$

$$H^o = -\nabla V_m^o = \frac{2B_2}{r^3}\cos\theta\, \widehat{a}_r + \frac{B_2}{r^3}\sin\theta\, \widehat{a}_\theta \qquad r>a \qquad \text{(۸-۳۲- ب)}$$

اعمال شرایط مرزی ۳ و ۴ به معادلات (۸-۳۲- الف) و (۸-۳۲- ب) به دستگاه دو معادله‌ای زیر می‌انجامد

$$\begin{cases} \dfrac{2B_2}{a^3} = -A_1 \\[2ex] \dfrac{B_2}{a^3} - A_1 = J_{s_0} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{-2}{3} J_{s_0} \\[2ex] B_2 = \dfrac{1}{3} a^3 J_{s_0} \end{cases} \qquad \text{(۸-۳۳)}$$

با جایگزینی $A_1$ و $B_2$ در معادلات (۸-۳۲) خواهیم داشت:

$$H = \begin{cases} \frac{۲}{۳} J_{s_\circ} \left[\cos\theta\, \hat{a}_r - \sin\theta \hat{a}_\theta\right] = \frac{۲}{۳} J_{s_\circ} \hat{a}_z & r<a \qquad \text{(۸-۳۴- الف)} \\ \frac{۱}{۳} J_{s_\circ} \frac{a^۳}{r^۲} \left[۲\cos\theta\, \hat{a}_r + \sin\theta\, \hat{a}_\theta\right] & r>a \qquad \text{(۸-۳۴- ب)} \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که میدان مغناطیسی در درون سیم پیچ کروی یکنواخت و در جهت z است در حالیکه در بیرون سیم پیچ همانند میدان یک دو قطبی مغناطیسی با ممان $m = ۴\pi a^۳ \frac{J_{s_\circ}}{۳}$ می‌باشد.

# سوالهای پتانسیل اسکالر و برداری

۱. یک پیچک بلند دارای N دور سیم پیچ در واحد طول و حامل جریان I می‌باشد پتانسیل برداری در داخل پیچک کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\mu_0 N^2 I R$ ۲) $\frac{1}{2}\mu_0 N I R$ ۳) $\mu_0 N I R^2$ ۴) صفر

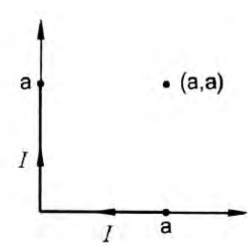
۲. جریان I از حلقه‌ای به شعاع ۴cm می‌گذرد پتانسیل اسکالر روی محور حلقه (محور z) بفاصله ۳cm از مرکز حلقه کدام است؟

۱) $\frac{I}{10}$ ۲) $\frac{I}{5\pi}$ ۳) $\frac{I}{5}$ ۴) $\frac{I}{10\pi}$

۳. یک کابل هم محور بشعاع داخلی a و خارجی b حامل جریانی به چگالی $J = J_0 \frac{R}{a}\hat{a}_z$ در هادی داخلی می‌باشد اگر پتانسیل در $R=b$ صفر باشد پتانسیل در $a<R<b$ کدام است؟

۱) $\frac{\mu_0 J_0 a^2}{3}\ln\frac{R}{b}$ ۲) $\frac{\mu_0 J_0 a}{3}\ln\frac{b}{R}$ ۳) $\frac{\mu_0 J_0 a^3}{3}\ln\frac{R}{b}$ ۴) $\frac{\mu_0 J_0 a^2}{3}\ln\frac{b}{R}$

۴. دو قطعه سیم نازک مستقیم با جریان I بطول a مطابق شکل دو ضلع یک مربع را تشکیل می‌دهند بردار پتانسیل مغناطیسی $\overline{A}$ در گوشه مقابل چقدر است؟




۱) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\hat{a}_y - \hat{a}_x\right)$

۲) $\frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{4\pi a}\left(\hat{a}_x + \hat{a}_y\right)$

۳) $\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\hat{a}_x + \hat{a}_y\right)$

۴) $\frac{\pi I\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{4\pi a}\left(\hat{a}_y + \hat{a}_x\right)$

۵. حلقه جریان دار مربعی شکلی بضلع ۲a در صفحه $z=0$ و بر مبدأ مختصات قرار دارد اگر میدان روی محور zها $H = \frac{I}{2\pi\left(a^2+z^2\right)}\hat{a}_z$ باشد اختلاف پتانسیل اسکالر مغناطیسی بین نقطه $M(0,0,a)$ و مبدأ مختصات را بدست آورید؟

۱) $-\frac{I}{2a}$ ۲) $-\frac{I}{4a}$ ۳) $-\frac{I}{8a}$ ۴) $-\frac{I}{a}$

۶. ناحیه $|y| \le \frac{a}{2}$ دارای جریانی به چگالی $\overline{J} = J_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)\hat{a}_z$ می‌باشد پتانسیل مغناطیسی برداری در

این ناحیه کدام است؟

۱) $\frac{\mu_\circ J_\circ a^2}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{a}y\right]$ ۲) $\frac{\mu_\circ J_\circ a^2}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\cos\frac{\pi}{a}y\right]$

۳) $\frac{\mu_\circ J_\circ a^2}{\pi}\left[1+\cos\frac{\pi}{a}y\right]$ ۴) $\frac{\mu_\circ J_\circ a^2}{\pi}\left[2+\cos\frac{\pi}{a}y\right]$

۷. سیم طویل به شعاع a حامل جریان با چگالی $J = J_\circ \frac{R}{a}\hat{a}_z$ می‌باشد اگر پتانسیل اسکالر در $\phi = \circ$ برابر صفر باشد نسبت پتانسیل اسکالر در R=۳a به پتانسیل اسکالر در R=۲a کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{9}$

۸. نیم دایره‌ای به شعاع a حامل جریان I و در صفحه xy بوده بطوری که مرکز میدان مبدأ مختصات است پتانسیل برداری روی محور z بفاصله h از مرکز نیم دایره کدام است؟

۱) $\frac{-\mu_\circ I a}{2\pi\sqrt{a^2+h^2}}\hat{a}_x$ ۲) $\frac{\mu_\circ I a}{2\pi\sqrt{a^2+h^2}}\hat{a}_y$ ۳) $\frac{-\mu_\circ I a}{2\pi\sqrt{a^2+h^2}}\hat{a}_\phi$ ۴) $\frac{\mu_\circ I a}{2\pi\sqrt{a^2+h^2}}\hat{a}_z$

# پاسخ سوالهای پتانسیل اسکالر و برداری

۱. گزینهٔ ۲) همانطوریکه می‌دانیم میدان مغناطیسی داخل پیچک بلند برابر است با $H=NI$ بنابراین

$$\nabla \times \overline{A}=\mu_\circ \overline{H}=\mu_\circ NI\,\hat{a}_z \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R}\frac{\partial(RA_\phi)}{\partial R}=\mu_\circ NI \quad \rightarrow$$

$$RA_\phi=\frac{1}{2}\mu_\circ NIR^2+C \quad \rightarrow \quad A_\phi=\frac{1}{2}\mu_\circ NIR+\frac{C}{R}$$

چون پتانسیل در مرکز پیچک محدود است پس $C=0$ باید باشد

$$A_\phi=\frac{1}{2}\mu_\circ NIR$$

۲. گزینهٔ ۳) می‌دانیم روی محور یک حلقه حامل جریان به فاصله $z$ از مرکز عبارتست از:

$$\overline{B}=\frac{Ia^2}{2\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z=-\nabla V_m=\frac{-\partial V_m}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\rightarrow V_m=-\int_\infty^z H dz=-\int_\infty^z \frac{Ia^2}{2\left(a^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{zI}{2\sqrt{z^2+a^2}}\Big|_\infty^z=\frac{I}{2}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$$

$$\begin{matrix} z=3 \\ a=4 \end{matrix}\rightarrow \quad V_m=\frac{I}{2}\left[1-\frac{3}{5}\right]=\frac{I}{5}$$

۳. گزینهٔ ۱) با توجه به اینکه جریان در جهت $\hat{a}_z$ است فقط مولفه $A_z$ پتانسیل برداری موجود است پس داریم

$$\nabla^2 A_z=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R\frac{\partial A_z}{\partial R}\right]=0 \quad \rightarrow$$

$$A_z=A\ln R+B \qquad A_z(R=b)=0 \quad \rightarrow \quad B=-A\ln b \quad \rightarrow$$

$$A_z=A\ln\frac{R}{b} \qquad \oint \overline{H}.\overline{d\ell}=I=\int_\circ^a J_\circ \frac{R}{a}2\pi R\,dR \Rightarrow$$

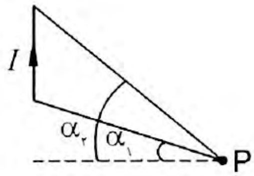
$$H=J_\circ\frac{1}{3}\frac{a^2}{R} \quad \rightarrow H=\frac{J_\circ a^2}{3R}\rightarrow \quad \overline{B}=\frac{\mu_\circ J_\circ a^2}{3R}\hat{a}_\phi$$

$$\nabla\times\overline{A}=\overline{B} \Rightarrow \frac{A}{R}=\frac{\mu_\circ J_\circ a^2}{3R} \quad \rightarrow \quad A=\frac{\mu_\circ J_\circ a^2}{3}$$

$$\rightarrow \quad A_z=\frac{\mu_\circ J_\circ a^2}{3}\ln\frac{R}{b}$$

۴. گزینهٔ ۱) بردار پتانسیل مغناطیسی یک قطعه حامل جریان مطابق شکل در نقطه $P$ برابر است

$$\overline{A}=\hat{a}_z\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\int_{\alpha_۱}^{\alpha_۲}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\hat{a}_z\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\ln\frac{\cos\alpha_۱\left(۱+\sin\alpha_۲\right)}{\cos\alpha_۲\left(۱+\sin\alpha_۱\right)}$$




*با توجه به این شکل پتانسیل برداری ناشی از دو قطعه عبور بر هم برابر است با*

$$\overline{A}=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\ln\left(۱+\sqrt{۲}\right)\left(\hat{a}_y-\hat{a}_x\right)$$

۵. گزینهٔ ۳)

$$\overline{H}=-\overline{\nabla}V_m \rightarrow \frac{I}{۲\pi(a^۲+z^۲)}=-\frac{\partial V_m}{\partial z}$$

$$V_{mab}=-\int_b^a\frac{I}{۲\pi(a^۲+z^۲)}dz=-\int_\circ^a\frac{I}{۲\pi(a^۲+z^۲)}dz=-\frac{I}{۲\pi a}tg^{-۱}\frac{z}{a}\Big]_\circ^a$$

$$=-\frac{I}{۸a}$$

۶. *گزینهٔ ۲) چون ناحیه در جهت z و x بی نهایت است پس پتانسیل تابع z و x نیست از طرفی چون پتانسیل برداری با جریان هم جهت است پس فقط مولفه $A_Z$ داریم:*

$$\nabla^۲A_Z=-\mu_\circ J_Z \quad\rightarrow\quad \frac{d^۲A_{Z_۲}}{dy^۲}=-\mu_\circ J_\circ\cos\left(\frac{\pi}{a}\right)y \qquad -\frac{a}{۲}<y<\frac{a}{۲}$$

$$\frac{dA_{Z_۲}}{dy}=-\mu_\circ J_\circ\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)y+A \rightarrow \quad Az_۲=\mu_\circ J_\circ\left(\frac{a}{\pi}\right)^۲\cos\left(\frac{\pi}{a}\right)y+Ay+B$$

$$y>\frac{a}{۲} \quad\rightarrow\quad J=\circ \qquad \nabla^۲A_{Z_۳}=\circ \quad\rightarrow\quad A_{Z_۳}=A'y+B'$$

$$y<-\frac{a}{۲} \quad\rightarrow\quad J=\circ \qquad \nabla^۲A_{Z_۱}=\circ \quad\rightarrow\quad A_{Z_۱}=A''y+B''$$

$$Az_۳\left(y=\frac{a}{۲}\right)=Az_۲\left(y=\frac{a}{۲}\right)\Rightarrow A'\frac{a}{۲}+B'=A\frac{a}{۲}+B$$

$$Az_۱\left(y=-\frac{a}{۲}\right)=Az_۲\left(y=-\frac{a}{۲}\right)\Rightarrow -A''\frac{a}{۲}+B''=-A\frac{a}{۲}+B$$

*حال پیوستگی H را در سه ناحیه می‌نویسیم*

$$\overline{H}=\frac{۱}{\mu_\circ}\overline{\nabla}\times\overline{A} \quad\rightarrow\quad \overline{H}_۱=-\frac{۱}{\mu_\circ}\frac{\partial Az_۱}{\partial y}\hat{a}_x=-\frac{۱}{\mu_\circ}A''\hat{a}_x \qquad y<-\frac{a}{۲}$$

$$\overline{H}_۲=-\frac{۱}{\mu_\circ}\frac{\partial Az_۲}{\partial y}\hat{a}_x=-\frac{۱}{\mu_\circ}\left[-\mu_\circ J_\circ\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x+A\right]\hat{a}_x \qquad \frac{a}{۲}>y>-\frac{a}{۲}$$

$$\overline{H}_۳=-\frac{۱}{\mu_\circ}\frac{\partial Az_۳}{\partial y}\hat{a}_x=-\frac{۱}{\mu_\circ}A'\hat{a}_x \qquad y>\frac{a}{۲}$$

$$H_۱\left(y=-\frac{a}{۲}\right)=H_۲\left(y=-\frac{a}{۲}\right) \;\Rightarrow\; A''=-\mu_\circ J_\circ\frac{a}{\pi}+A$$

$$H_۳\left(y=\frac{a}{۲}\right)=H_۲\left(y=\frac{a}{۲}\right) \;\Rightarrow\; A'=\mu_\circ J_\circ\frac{a}{\pi}+A$$

با توجه به اینکه میدان در $y > \frac{a}{۲}$ قرینه میدان در $y < -\frac{a}{۲}$ است پس $A' = A''$ که با توجه به شرط مرزی نتیجه می‌گیریم $A=۰$ پس داریم:

$$A'' = -\mu_{\circ} J_{\circ} \frac{a}{۲\pi} \qquad A' = \mu_{\circ} J_{\circ} \frac{a}{۲\pi} \qquad , \quad B = \frac{\mu_{\circ} J_{\circ}}{۴\pi} a^{۲}$$

$$Az_{۲} = \mu_{\circ} J_{\circ} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{۲} \cos\left(\frac{\pi}{a}\right) y + \frac{\mu_{\circ} J_{\circ}}{۴\pi} a^{۲} \quad -\frac{a}{۲} < y < \frac{a}{۲}$$

۷. گزینهٔ ۳) ابتدا میدان در خارج سیم را حساب می‌کنیم.

$$\oint \overline{H} . \overline{d\ell} = \int_{\circ}^{a} \int_{\circ}^{۲\pi} J_{\circ} \frac{R}{a} R \, dR \, d\phi \quad \rightarrow \quad H ۲\pi R = \frac{J_{\circ}}{a} ۲\pi \frac{۱}{۳} a^{۳}$$

$$\overline{H} = \frac{J_{\circ} a^{۲}}{۳R} \hat{a}_{\phi} = -\overline{\nabla} V_m = -\frac{۱}{R} \frac{\partial V_m}{\partial \phi} \hat{a}_{\phi} \Rightarrow V_m = \frac{J_{\circ} a^{۲}}{۳} \phi$$

چون پتانسیل تابع $R$ نیست لذا پتانسیل در $R=۳a$ و $R=۲a$ مساوی است.

۸. گزینهٔ ۱) از رابطه $\overline{A}$ استفاده می‌کنیم.

$$\overline{A} = \int \frac{\mu_{\circ} I \overline{d\ell}}{۴\pi R} = \int_{\circ}^{\pi} \frac{\mu_{\circ} I a \, d\phi \, \hat{a}_{\phi}}{۴\pi \left(a^{۲} + h^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}} = \int_{\circ}^{\pi} \frac{\mu_{\circ} I a \, d\phi \left(-\hat{a}_x \sin\phi + \hat{a}_y \cos\phi\right)}{۴\pi \sqrt{a^{۲} + h^{۲}}}$$

$$\overline{A} = \frac{-\mu_{\circ} I a}{۲\pi \sqrt{a^{۲} + h^{۲}}} \hat{a}_x$$