فصل چهار
هادی‌ها و عایق‌ها و خواص الکتریکی آنها

هادی: واحد ساختمانی ماده اتم است که متشکل از یک هسته با بار الکتریکی مثبت و تعدادی الکترون با بار منفی می‌باشد مقدار کل بار الکتریکی الکترونهای هر اتم با بار الکتریکی هسته مساوی است یعنی اتم از نظر الکتریکی خنثی است الکترونهای آخرین لایه که بعنوان الکترونهای ظرفیت شناخته می‌شوند نقش اصلی را در فعل و انفعالات شیمیایی و هدایت الکتریکی دارند و چون نیروی بین هسته و این الکترونها ضعیف می‌باشد براحتی به اتمهای دیگر می‌پیوندند چنین الکترونهایی را الکترونهای آزاد گویند. فلزات دارای تعداد زیادی الکترون آزاد هستند که در اثر انرژی حرارتی محیط دارای حرکات مداوم ولی بدون نظم و ترتیب هستند سرعت متوسط الکترونها در مقیاس ماکروسکپی صفر است لذا جریان الکتریکی از حرکات نامنظم آنها پدید نمی‌آید اعمال میدان الکتریکی خارجی الکترونها را با سرعت متوسطی به حرکت در می‌آورد و در نتیجه جریانی که ناشی از جابجایی الکترونها می‌باشد بوجود می‌آید چنین پدیده‌ای را هدایت الکتریکی و جسمی که قابل هدایت آنها بالا باشد را مانند اکثر فلزات هادی می‌گویند.

۴-۱- معادله حرکت الکترون در هادی:

حرکت الکترون وقتی تحت تاثیر میدان الکتریکی قرار می‌گیرد تحت تاثیر دو نیروی کولمب $\overline{F}_1 = e\overline{E}$ و نیروی بازدارنده $\overline{F}_2$ که متناسب با ممنتم الکترون و عکس متوسط زمان بین دو برخورد می‌باشد قرار میگیرد قانون نیوتن را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$e\overline{E} - m_e \frac{\overline{V}_d}{\tau} = m_e \frac{d\overline{V}_d}{dt} \qquad (۴-۱)$$

در معادله (۴-۱)، τ متوسط زمان بین دو برخورد، $\overline{V}_d$ سرعت متوسط جابجایی الکترون و m_e جرم الکترون می‌باشد در حالتی که میدان الکتریکی ساکن باشد $(E=E_\circ)$ خواهیم داشت.

$$m_e \frac{d\overline{V}_d}{dt} + m_e \frac{\overline{V}_d}{\tau} = eE_\circ \quad \rightarrow \quad \overline{V}_d = \frac{e\tau E_\circ}{m_e}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (۴-۲)$$

τ برای هادی معمولی مانند مس از مرتبه 10^{-14} است پس جمله اکسپونانسیل بسرعت صفر می‌شود و میتوان از آن صرفنظر نمود یعنی معادله (۴-۲) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\overline{V}_d = \frac{e\tau}{m_e} E_\circ \qquad (۴-۳)$$

برای میدانهای متغیر با زمان و سینوسی تا وقتی که دوره تناوب از چندین برابر τ کوچکتر نباشد یعنی $f \ll \frac{1}{\tau}$ میتوان از همان رابطه استفاده کرد مثلاً برای $\tau = 10^{-14}$ رابطه (۴-۳) برای فرکانسهای تا صدگیگا هرتز صادق است با جایگزینی e، τ و m_e در رابطه (۴-۳) خواهیم داشت.

$$\overline{V}_d = -\mu_e \overline{E} \qquad (۴-۴)$$

در رابطه (۴-۴) ضریب μ_e را ضریب تحرک الکترون می‌نامند. اگر یک قطعه فلز را در داخل یک میدان الکتریکی قرار دهیم الکترونها در خلاف جهت میدان طوری حرکت می‌کنند که در داخل فلز میدان کل ناشی از میدان خارجی و میدان حاصله از تغییر مکان الکترونها برابر صفر شود اگر سطح مقطع قسمتی از فلز را ΔS فرض کنیم و الکترونها در مدت زمان Δt

مسافت Δx را در فلز طی کنند در اینصورت تعریف جریان عبوری از مقطع Δs عبارتست از:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho\,\Delta v}{\Delta t} = \frac{\rho\,\Delta s\,\Delta x}{\Delta t} = \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta s \rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta s} = \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

بعبارت دیگر

$$\overline{J} = \rho\,\overline{V}_d \qquad (۵-۴)$$

که J چگالی جریان (جریان بر واحد سطح) و ρ چگالی حجمی الکترونها می‌باشد. حال اگر تعداد الکترونها در واحد حجم فلز N باشد در اینصورت با جایگزینی $\overline{V}_d$ از رابطه (۴-۴) در رابطه (۴-۵) خواهیم داشت.

$$\overline{J} = (-Ne)(-\mu_e\overline{E}) = Ne\mu_e\overline{E}$$

بعبارت دیگر

$$\overline{J} = \sigma\overline{E} \qquad (۶-۴)$$

که σ همان ضریب هدایت الکتریکی فلز است رابطه (۴-۶) در حقیقت همان رابطه اهم است.

مثال ۱: یک میله فلزی بطول l و سطح مقطع s مفروض است با استفاده از رابطه (۴-۶) معادله‌ای برای مقاومت میله بدست آورید.

حل: ***اگر باطری به ولتاژ $V_\circ$ را به دو سر میله وصل کنیم خواهیم داشت***

$$J = \sigma E \rightarrow \frac{I}{s} = \sigma\frac{V_\circ}{l} \rightarrow \frac{V_\circ}{I} = \frac{l}{\sigma s}$$

$\frac{V_\circ}{I}$ همان مقاومت میله است بنابراین

$$R = \frac{l}{\sigma s} \qquad (۷-۴)$$

مثال ۲: اگر در فلزی فاصله بین اتمها $۰/۱\,nm$ باشد و هر اتم یک الکترون در شبکه فلز قرار دهد در اینصورت چگالی حجمی بار چقدر است؟

حل: ***تعداد الکترون در واحد حجم عبارتست از:***

$$N = \left[\frac{۱}{۱۰^{-۱۰}}\right]^{۳} = ۱۰^{۳۰}\ \frac{\text{الکترون}}{\text{واحد حجم}}$$

$$\rho = -Ne = -۱۰^{۳۰}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} = -۱/۶\times ۱۰^{۱۱}\ \frac{c}{m^{۳}}$$

مثال ۳: از یک سطح استوانه‌ای به طول $۱\,cm$ و شعاع $۲\,mm$ جریانی به چگالی $\overline{J} = \frac{\sin\frac{\phi}{۲}}{R}\hat{a}_R$ می‌گذرد کل جریان عبوری از استوانه چقدر است؟

حل: ***جریان را از رابطه $I = \int_s \overline{J}\cdot\overline{ds}$ بدست می‌آوریم.***

$$I = \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{۰/۰۱}\frac{\sin\frac{\phi}{۲}}{R}R\,d\phi\,dz = -۲z\cos\frac{\phi}{۲}\Big]_\circ^{۲\pi}\Big]_\circ^{۰/۰۱} = ۲\times ۰/۰۱\times ۲ = ۴۰\,mA$$

مثال ۴: در مثال بالا اگر $\rho = \frac{۱۰^{-۷}}{R}$ و $\overline{V}_d = ۳\times ۱۰^{۱۰}\,R^{۲}\frac{m}{s}$ باشد I چقدر است؟

$$J = \rho\overline{V}_d = \frac{۱۰^{-۷}}{R}\times ۳\times ۱۰^{۱۰}R^{۲} = ۳\times ۱۰^{۳}R$$

$$I = \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{۰/۰۱} JR\,d\phi\,dz = \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{۰/۰۱} ۳\times ۱۰^{۳}R^{۳}\,d\phi\,dz\,\Big|_{R=۰/۰۲} = ۳\times ۱۰^{۳}(۰/۰۲)^{۳}\,۲\pi\times ۰/۰۱ = ۷۵/۴\,mA$$

۴-۲- پیوستگی جریان (اصل بقای بار)

بار نه از بین می‌رود و نه بوجود می‌آید بلکه از جسمی به جسم دیگر منتقل می‌شود اگر یک منطقه بوسیله یک سطح بسته محدود شود کل جریان خارج شونده از سطح بسته عبارتست از:

$$I = \frac{-dQ}{dt} \qquad (۴-۸)$$

رابطه (۴-۸) در حقیقت نشان دهنده نرخ کاهش بار داخل سطح بسته که همان جریان خارج شونده از سطح بسته است می‌باشد حال اگر جریان را به چگالی جریان ارتباط دهیم رابطه (۴-۸) بصورت زیر درمی آید.

$$I = \oint \bar{J}\,.\overline{ds} = \frac{-dQ}{dt} \qquad (۴-۹)$$

سمت چپ معادله (۴-۹) با استفاده از قانون دیورژانس به $\int_v (\bar{\nabla}.\bar{J})\,dv$ و سمت راست معادله (۴-۹) به $-\frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv$ تبدیل می‌شود لذا خواهیم داشت

$$\int_v (\bar{\nabla}.\bar{J})\,dv = -\frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv$$

که بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{\nabla}.\bar{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (۴-۱۰)$$

رابطه (۴-۱۰) در حقیقت همان قانون پیوستگی بار است حال با توجه به اینکه $\bar{J} = \sigma\bar{E}$ و $\bar{\nabla}.\bar{D} = \rho$ است خواهیم داشت.

$$\bar{\nabla}.\left[\sigma\frac{\bar{D}}{\varepsilon_0}\right] = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \;\rightarrow\; \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

بعبارت دیگر

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0 \qquad (۴-۱۱)$$

اگر در لحظه $t=0$ چگالی حجمی بار ρ_0 باشد پاسخ معادله دیفرانسیل (۴-۱۱) بصورت زیر خواهد بود.

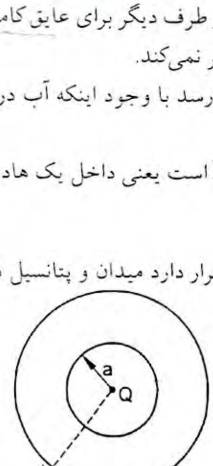
$$\rho = \rho_0\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} \qquad (۴-۱۲)$$

رابطه (۴-۱۲) نشاندهندهٔ این مطلب است که چگالی حجمی بار در یک سطح بسته با ثابت زمانی $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ و بصورت اکسپونانسیلی کاهش می‌یابد برای یک هادی کامل که $\sigma \rightarrow \infty$ میل می‌کند ثابت زمانی صفر است بعبارت دیگر چگالی حجمی در فلز بسرعت صفر می‌شود و بارهای داخل فلز به روی سطح فلز انتقال می‌یابند از طرف دیگر برای عایق کامل $\sigma \rightarrow 0$ و ثابت زمانی بی نهایت است یعنی همواره $\rho = \rho_0$ است و چگالی حجمی تغییر نمی‌کند.

برای آب دریا $\tau = ۳/۵۴\,\mu s$ است یعنی پس از $۱۵/۷\mu s$ چگالی حجمی به صفر می‌رسد با وجود اینکه آب دریا هادی خیلی خوبی هم نیست ولی بسرعت چگالی حجمی بار به صفر می‌رسد.

از رابطه (۴-۶) مشخص می‌شود که برای یک هادی کامل چون $\sigma \rightarrow \infty$ در نتیجه $E=0$ است یعنی داخل یک هادی کامل میدان الکتریکی صفر است بعبارت دیگر فلز یک سطح هم پتانسیل است.

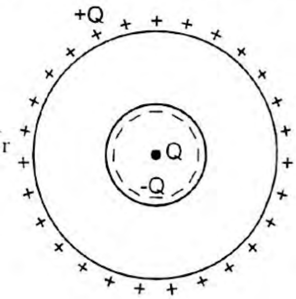
مثال ۵: بار نقطه‌ای Q در مرکز یک پوسته فلزی بشعاع داخلی a و شعاع خارجی b قرار دارد میدان و پتانسیل در کل فضا را بدست آورید.



حل: چون میدان داخل فلز صفر است پس داریم:

$$a < r < b \qquad \bar{E} = 0 \;\rightarrow\; \oint \bar{E}.\overline{ds} = 0$$

بعبارت دیگر اگر سطح گوسی داخل فلز انتخاب کنیم چون E روی این سطح گوی صفر است کل بار داخل سطح گوی باید صفر باشد یعنی باید بار Q- روی سطح داخلی پوسته $(r=a)$ جمع شده باشد و چون فلز از نظر الکتریکی خنثی است بار $Q+$ باید روی سطح خارجی پوسته جمع شود.



$$r<a \qquad \oint \overline{E}.\overline{ds}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}Q \quad \rightarrow \overline{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r$$

$$a<r<b \qquad \overline{E}=\circ$$

$$r>b \qquad \oint \overline{E}.\overline{ds}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(+Q-Q+Q)=\frac{1}{\varepsilon_\circ}Q \ \rightarrow\ \overline{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r$$

بعبارت دیگر

$$\overline{E}=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r & \circ<r<a\\ \circ & a<r<b\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r & r>b\end{cases}$$

$$r\geq b \qquad V=-\int_\infty^r \overline{E}.\overline{d\ell}=-\int_\infty^r \frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r}$$

$$a\leq r\leq b \qquad V=-\int_\infty^r \overline{E}.\overline{d\ell}=-\int_\infty^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}dr-\int_b^r \overline{E}.\overline{d\ell}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ b}$$

$$r\leq a \qquad V=-\int_\infty^r \overline{E}.\overline{d\ell}=-\left[\int_\infty^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}dr+\int_b^a \circ\, dr+\int_a^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}dr\right]$$

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right]$$

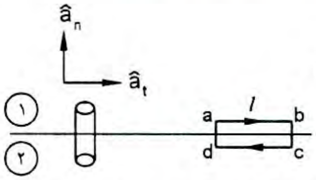
بنابراین

$$V=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right] & r\leq a\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ b} & a\leq r\leq b\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r} & r\geq b\end{cases}$$

همانطوریکه دیده می‌شود پتانسیل داخل پوسته فقط بستگی به شعاع خارجی پوسته دارد و a شعاع داخلی پوسته هر چه می‌تواند باشد و این در حقیقت نشان دهندهٔ این مطلب است که همانطوریکه در بحث معادله (۴-۱۲) توضیح داده شد بار فقط روی سطح خارجی فلز جمع می‌شود. اگر $a=\circ$ باشد پوسته تبدیل به کره توپر فلزی به شعاع b و اگر $a=b$ باشد پوسته تبدیل به کره توخالی به شعاع b می‌شود. بعبارت دیگر اگر کره فلزی بشعاع b دارای Q باشد پتانسیل آن $V=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ b}$ می‌باشد کره می‌تواند توخالی و یا توپر باشد.

۴-۳- شرط مرزی بین فلز و هوا

فرض کنید مطابق شکل ناحیه ۱ هوا و ناحیه ۲ هادی کامل باشد بردارهای یکه $\hat{a}_t$ و $\hat{a}_n$ به ترتیب بردارهای واحد مماس وعمودی بر مرز مشترک دو ناحیه ۱ و ۲ می‌باشد اگر چهار ضلعی abcd را در نظر بگیریم داریم.



شکل (۴-۱): شرط مرزی بین هوا و هادی کامل

$$\oint_{abcd} \overline{E}.\overline{d\ell} = ۰ \rightarrow \int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell} + \int_b^c \overline{E}.\overline{d\ell} + \int_c^d \overline{E}.\overline{d\ell} + \int_b^a \overline{E}.\overline{d\ell} = ۰$$

اگر اضلاع bc و ad به سمت صفر میل می‌کند خواهیم داشت

$$E_{t_۱} l - E_{t_۲} l = ۰ \rightarrow E_{t_۱} = E_{t_۲}$$

اما چون در محیط ۲ میدان صفر است (زیرا این محیط هادی کامل است) $E_{t_۲} = ۰$ پس

$$E_{t_۱} = ۰ \qquad (۴-۱۳)$$

یعنی مولفه مماسی میدان روی فلز صفر است.

حال اگر برای استوانه به مساحت قاعده Δs قانون گوس را بنویسیم خواهیم داشت.

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = Q = \underbrace{\int \overline{D}.\overline{ds}}_{\text{قاعده بالا}} + \underbrace{\int \overline{D}.\overline{ds}}_{\text{سطح جانبی استوانه}} + \underbrace{\int \overline{D}.\overline{ds}}_{\text{قاعده پایین}} = Q$$

اگر ارتفاع استوانه به سمت صفر میل کند انتگرال دوم به سمت صفر میل می‌کند در نتیجه خواهیم داشت.

$$D_{n_۱} \Delta s - D_{n_۲} \Delta s = \rho_s \Delta s \rightarrow D_{n_۱} - D_{n_۲} = \rho_s$$

اما چون داخل فلز E و در نتیجه D صفر است $D_{n_۲} = ۰$ بنابراین:

$$D_{n_۱} = \rho_s \qquad (۴-۱۴)$$

یعنی مولفه عمودی D روی سطح فلز برابر با چگالی سطحی بار روی فلز می‌باشد.

روابط (۴-۱۳) و (۴-۱۴) دو رابطه مهم شرط مرزی برای فلز می‌باشند که کاربرد زیادی در الکترومغناطیس دارند.

مثال ۶: اگر $E = ۳۰۰ \left[۲\hat{a}_x - ۲\hat{a}_y + \hat{a}_z\right]$ در سطح فلز باشد مطلوبست چگالی سطحی بار روی فلز

حل: ***چون مولفه موجود روی فلز مولفه عمودی است پس E داده شده همان مولفه عمودی E است بنابراین***

$$E_n = ۳۰۰\sqrt{۲^۲ + ۲^۲ + ۱^۱} = ۹۰۰ \frac{v}{m}$$

$$\rho_s = D_n = \varepsilon_۰ E_n = \frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱۰^{-۹} \times ۹۰۰ = \frac{۱}{۴\pi} \times ۱۰^{-۷} = ۸ \frac{nc}{m^۲}$$

مثال ۷: اگر چگالی انرژی مجاور سطح فلز $۱۰^{-۷} \frac{J}{m^۳}$ باشد چگالی سطحی بار روی فلز چقدر است؟

$$\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E_n^۲ = ۱۰^{-۷} \rightarrow E_n = \left[\frac{۲\times ۱۰^{-۷}}{\varepsilon_۰}\right]^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow \rho_s = \varepsilon_۰ E_n = \sqrt{۲\times ۱۰^{-۷} \times \varepsilon_۰} = ۱/۳۲ \frac{nc}{m^۲}$$

مثال ۸: میدان الکتریکی به شدت $\overline{E} = \frac{۳}{r}\hat{a}_r$ در دستگاه مختصات کروی در فضای آزاد موجود است اگر یک کره فلزی در $r=۳^{cm}$ قرار گیرد چقدر بار روی سطح داخلی آن جمع می‌شود.

$$\rho_s = \circ - D_n = -D_n = -\varepsilon_\circ E_n = -\varepsilon_\circ \times \frac{۳}{r} \Big|_{r=\circ/\circ۳} = -۱\circ\circ\varepsilon_\circ = -۱\circ\circ \times \frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱\circ^{-۹}$$

$$\rho_s = -\frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱\circ^{-۷}$$

$$Q = \rho_s ۴\pi a^۲ = -\frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱\circ^{-۷} \times ۴\pi \times (\circ/\circ۳)^۲ = -۱\circ pc$$

لازم به ذکر است که بار $+۱\circ pc$ روی سطح خارجی کره فلزی جمع می‌شود.

سوالهای هادی‌های الکتریکی

۱. دو کره فلزی بشعاع a و $2a$ به ترتیب دارای پتانسل 45^V و 60^V هستند اگر این دو کره را با یک سیم نازک فلزی به هم متصل کنیم پتانسیل هر کدام چقدر خواهد شد؟

۱) 55^V ۲) $52/5^V$ ۳) $47/5^V$ ۴) $57/5^V$

۲. n قطره هادی هر کدام دارای پتانسیل V_0 می‌باشند اگر پتانسیل قطره‌ای که از پیوستن این قطره‌ها بوجود می‌آید $16V_0$ باشد در اینصورت n کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۷ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

۳. یک سطح فلزی بی نهایت با چگالی بار سطحی $\rho_s = 54\varepsilon_0$ منطبق بر صفحه $2x+y-2z=8$ در فضای آزاد قرار دارد مطلوبست میدان الکتریکی در قسمتی از فضا که شامل مبدأ نباشد؟

۱) $18\left[2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 2\hat{a}_z\right]$ ۲) $6\left[2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 2\hat{a}_z\right]$

۳) $18\left[-2\hat{a}_x - \hat{a}_y + 2\hat{a}_z\right]$ ۴) $9\left[2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 2\hat{a}_z\right]$

۴. یک حباب مایع به شعاع 2^{cm} و ضخامت $0/01^{mm}$ دارای پتانسیل 50^{mv} می‌باشد پتانسیل قطره‌ای که از ترکیدن این حباب بدست می‌آید کدام است؟

۱) 276^{mv} ۲) 437^{mv} ۳) 356^{mv} ۴) 521^{mv}

۵. پتانسیل الکتریکی در ناحیه $0<y$ در فضا بصورت $V= 2e^{-x}\sin 3y$ می‌باشد اگر $y=\frac{\pi}{3}$ یک رسانای کامل باشد مقدار باری که در فاصله $\infty > x > 0$ و $4>z>0$ روی صفحه $y=\frac{\pi}{3}$ قرار دارد در طرفی از صفحه که روبروی مبدأ نیست کدام است؟

۱) $24\varepsilon_0$ ۲) $18\varepsilon_0$ ۳) $16\varepsilon_0$ ۴) $12\varepsilon_0$

۶. دو کره هادی به شعاعهای a، $3a$ مجموعاً دارای بار Q می‌باشند اگر این دو کره را به هم متصل کنیم پتانسیل آنها کدام خواهد بود؟

۱) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ ۲) $\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$ ۳) $\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$ ۴) $\frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 a}$

۷. در مرکز یک پوسته کروی هادی به شعاع داخلی $0/2^m$ و شعاع خارجی $0/3^m$ یک بار نقطه‌ای Q قرار می‌دهیم پتانسیل در $r=0/15^m$ کدام است؟ ($Q = 18\pi\varepsilon_0$)

۱) $17/5^V$ ۲) 20^V ۳) 25^V ۴) $22/5^V$

۸. یک میلیون قطره مایع هادی هر کدام دارای پتانسیل 50^{mv} می‌باشند پتانسیل قطره‌ای که از پیوستن این قطره بوجود می‌آید چقدر است؟

۱) 500^V ۲) 50^V ۳) 5^V ۴) 50000^V

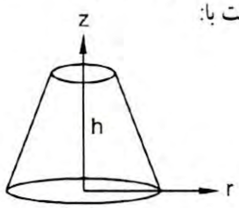
۹. بین دو کره فلزی هم مرکز به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b اختلاف پتانسیل V_0 برقرار می‌شود بطوریکه کره بزرگتر زمین است اگر ماده بین دو کره دارای ضریب هدایت الکتریکی σ باشد تلف حرارتی چقدر است؟

۱) $\frac{2\pi\sigma V_0^2 ab}{b-a}$ ۲) $\frac{\pi\sigma V_0^2 ab}{4(b-a)}$ ۳) $\frac{4\pi\sigma V_0^2 ab}{b-a}$ ۴) $\frac{4\pi\sigma V_0^2 (b-a)}{ab}$

۱۰. بین دو کره فلزی هم مرکز بشعاع‌های $a=10^{cm}$ و $b=40^{cm}$ اختلاف پتانسیل 270^{V} برقرار شده است بطوریکه کره بزرگتر زمین شده است پتانسیل در $r=30^{cm}$ چقدر است؟

۱) 135^{V} ۲) 30^{V} ۳) 80^{V} ۴) 120^{V}

۱۱. یک مخروط ناقص با ضریب هدایت $2\times10^{6}\,\frac{}{m}$ به ارتفاع 20^{cm} دارای قواعد بالایی و پائینی به شعاع $0/1^{mm}$ و 1^{mm} می‌باشد مقاومت تقریبی بین قواعد بالایی و پائینی این مخروط ناقص برابر است با:



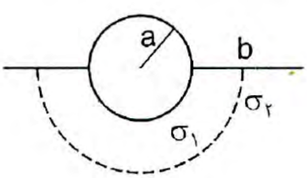
۱) $0/24^{\Omega}$ ۲) $0/32^{\Omega}$

۳) $0/41^{\Omega}$ ۴) $0/54^{\Omega}$

۱۲. بین دو کره هم مرکز هادی بشعاع داخلی $a=20^{cm}$ و خارجی $b=30^{cm}$ ماده‌ای با ضریب هدایت الکتریکی متغیر $\sigma=2\left(1+\frac{1}{r}\right)$ پر شده است مقاومت الکتریکی بین دو کره کدام است؟

۱) $10/45^{m\Omega}$ ۲) $8/47^{m\Omega}$ ۳) $11/27^{m\Omega}$ ۴) $12/94^{m\Omega}$

۱۳. کره‌ای از رسانای کامل به شعاع a بطور نیمه داخل زمین قرار دارد ضریب هدایت الکتریکی زمین در ناحیه $a<r<b$ برابر σ_1 و در ناحیه $b<r<\infty$ برابر σ_2 می‌باشد مقاومت زمین وقتی توزیع جریان یکنواخت است کدام می‌باشد؟



۱) $\frac{1}{2\pi\sigma_2}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]+\frac{1}{2\pi\sigma_1 b}$

۲) $\frac{1}{4\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]+\frac{1}{4\pi\sigma_2 b}$

۳) $\frac{1}{2\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]+\frac{1}{2\pi\sigma_2 b}$

۴) $\frac{1}{4\pi\sigma_2}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]+\frac{1}{4\pi\sigma_1 b}$

۱۴. ناحیه $a\le r\le b$ در مختصات کروی در فضای آزاد از ماده‌ای با ضریب دی الکتریک ε و ضریب هدایت الکتریکی σ پر شده است بار Q_0 را در لحظه $t=0$ بطور یکنواخت روی سطح $r=a$ قرار می‌دهیم چگالی بار سطحی در سطح $r=b$ را بدست آورید؟

۱) $\rho_s=\frac{Q_0}{4\pi b^2}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$ ۲) $\rho_s=\frac{Q_0}{4\pi b^2}\left[1-e^{-\frac{\sigma}{2\varepsilon}t}\right]$

۳) $\rho_s=\frac{Q_0}{4\pi b^2}\left[1-e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon}t}\right]$ ۴) $\rho_s=\frac{Q_0}{4\pi b^2}\left[1-e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\right]$

۱۵. یک کره هادی بشعاع 25^{cm} به باطری به پتانسیل 250^{V} متصل شده است حال این کره را از باطری قطع کرده و آن را بطور هم مرکز با یک پوسته هادی کروی بشعاع داخلی 30^{cm} و شعاع خارجی 35^{cm} قرار می‌دهیم پتانسیل کره هادی کدام خواهد بود؟

۱) 220^{V} ۲) 200^{V} ۳) 250^{V} ۴) صفر

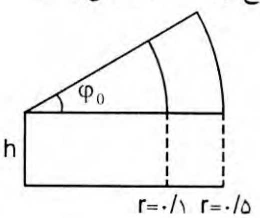
۱۶. سه استوانه فلزی بلند هم محور دارای شعاعهای a و b و c می‌باشند استوانه داخلی و بیرونی بزمین وصل شده و روی استوانه میانی بار الکتریکی به چگالی سطحی ρ_s قرار داده می‌شود چگالی سطحی بار استوانه داخلی کدام است؟ $(a<b<c)$

۱) $\rho_s \frac{a}{b} \frac{\ln\frac{b}{c}}{\ln\frac{c}{a}}$ ۲) $\rho_s \frac{b}{a} \frac{\ln\frac{b}{c}}{\ln\frac{c}{a}}$ ۳) $\rho_s \frac{c}{a} \frac{\ln\frac{c}{a}}{\ln\frac{b}{a}}$ ۴) $\rho_s \frac{c}{b} \frac{\ln\frac{b}{c}}{\ln\frac{c}{a}}$

۱۷. در شکل زیر که یک گوه می‌باشد مقاومت الکتریکی بین سطح $r=0/1^{m}$ و $r=0/5^{m}$ چقدر است ارتفاع کره $h=0/1^{m}$، زاویه آن $\phi_0=\frac{\pi}{6}$ و ضریب هدایت الکتریکی بین دو سطح $\sigma = 2r\cos\phi$ می‌باشد؟

۱) 25^{Ω} ۲) 60^{Ω}

۳) 80^{Ω} ۴) 120^{Ω}



۱۸. دو کره هادی بشعاع $0/1^{m}$ بفاصله 20^{m} از هم قرار دارند اگر ضریب هدایت الکتریکی فضا $\sigma = 10^{-3}$ باشد مقاومت بین دو کره کدام است؟

۱) 814^{Ω} ۲) 628^{Ω} ۳) 927^{Ω} ۴) 792^{Ω}

پاسخ سوالهای هادی‌های الکتریکی

۱. گزینهٔ ۱) فرض کنیم بار کره کوچکتر Q_1 و بار کره بزرگتر Q_2 باشد در اینصورت داریم

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (2a)}$$

اگر پتانسیل دو کره پس از اتصال V_0 و بار هر کدام به ترتیب Q_1' و Q_2' باشد در اینصورت

$$V_0 = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 (2a)} = \frac{Q_1' + Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 (3a)} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (3a)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a V_1 + 8\pi\varepsilon_0 a V_2}{4\pi\varepsilon_0 (3a)}$$

$$V_0 = \frac{V_1 + 2V_2}{3} = \frac{45 + 2\times 60}{3} = 55^{v}$$

۲. گزینهٔ ۳) اگر بار هر قطره Q و شعاع هر قطره a باشد در اینصورت $V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

اگر n قطر را با هم ترکیب کنیم بار قطره جدید nQ و شعاع قطره جدید طبق رابطه زیر برابر است با b:

$$n \times \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi b^3 \rightarrow b = \sqrt[3]{n}\, a$$

بنابراین

$$V_0' = \frac{nQ}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{nQ}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt[3]{n}\, a} = (n)^{\frac{2}{3}} V_0 = 16 V_0$$

$$(n)^{\frac{2}{3}} = 16 \qquad n = (16)^{\frac{3}{2}} = 4^3 = 64$$

۳. گزینهٔ ۴) چون سطح فلز بی‌نهایت بزرگ است میدان همواره بر آن عمود است (نه تنها در مجاور صفحه بلکه در کل فضا) حال برداریکه عمود بر صفحه که همان گرادیان صفحه است را بدست می‌آوریم.

$$\hat{n} = \frac{\overline{\nabla} P}{|\overline{\nabla} P|} = \frac{2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 2\hat{a}_z}{3} = \frac{1}{3}\left[2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 2\hat{a}_z\right]$$

$$\left|\overline{E}\right| = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} = 27 \rightarrow \overline{E} = \left|\overline{E}\right| \hat{n} = 9\left[2\hat{a}_x + \hat{a}_y - 2\hat{a}_z\right]$$

۴. گزینهٔ ۲) اگر بار حباب Q باشد و شعاع خارجی آن را 2^{cm} فرض کنیم در اینصورت شعاع قطره حاصل از ترکیدن حباب برابر است با:

$$\frac{4}{3}\pi\left[2^3 - 1/999^3\right] = \frac{4}{3}\pi a^3 \Rightarrow a = 0/23^{cm}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{4\pi\varepsilon_0 (2) V_0}{4\pi\varepsilon_0 (0/23)} = 8/737 V_0 = 43^{mv}$$

۵. گزینهٔ ۱) $\overline{E} = -\overline{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y = ۲e^{-x}\sin ۳y\,\hat{a}_x - ۶e^{-x}\cos ۳y\,\hat{a}_y$

مولفه $\hat{a}_x$ مولفه مماسی و مولفه $\hat{a}_y$ مولفه عمودی میدان است پس

$$\rho_s = \varepsilon_\circ E_y \Big|_{y=\frac{\pi}{۳}} = ۶e^{-x}\varepsilon_\circ \qquad Q = \iint \rho_s\, dx\, dz = \int_{x=\circ}^{\infty}\int_{z=\circ}^{۴} ۶\varepsilon_\circ e^{-x}\, dx\, dz = ۲۴\varepsilon_\circ$$

۶. گزینهٔ ۲) اگر پس از اتصال پتانسیل هر کره $V_\circ$ باشد داریم

$$V_\circ = \frac{Q_۱}{۴\pi\varepsilon_\circ a} = \frac{Q_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ (۳a)} = \frac{Q_۱ + Q_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ (a+۳a)} = \frac{Q}{۱۶\pi\varepsilon_\circ a}$$

۷. گزینهٔ ۴) طبق آنچه در مثال درس دیدیم پتانسیل برای $r<a$ برابر است با:

$$V = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{r} + \frac{۱}{b} - \frac{۱}{a}\right] = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{\circ/۱۵} + \frac{۱}{\circ/۳} - \frac{۱}{\circ/۲}\right] = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{۴+۲-۳}{\circ/۶}$$

$$= \frac{۵Q}{۴\pi\varepsilon_\circ} = \frac{۵\times ۱۸\pi\varepsilon_\circ}{۴\pi\varepsilon_\circ} = ۲۲/۵^{v}$$

۸. گزینهٔ ۱) اگر بار هر قطره Q و شعاع هر قطره a باشد دراینصورت بار قطره جدید $۱\circ^۶Q$ و شعاع قطره جدید b برابراست با

$$۱\circ^۶\,\frac{۴}{۳}\pi a^۳ = \frac{۴}{۳}\pi b^۳ \rightarrow b = ۱\circ\circ a$$

$$V = \frac{۱\circ^۶ Q}{۴\pi\varepsilon_\circ b} = ۱\circ^۴\,\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ a} = ۱\circ^۴ \times ۵\circ^{mv} = ۵\circ\circ^{v}$$

۹. گزینهٔ ۳) ابتدا مقاومت بین دو کره را بدست می‌آوریم.

$$\int \overline{D}.\overline{ds} = Q \rightarrow D = \frac{Q}{۴\pi r^۲} \rightarrow E = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} \qquad a<r<b$$

$$J = \sigma E = \frac{\sigma Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} \qquad \int_a^b E dr = V_\circ \rightarrow \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right] = V_\circ$$

$$I = \int \overline{J}.\overline{ds} = \int_\circ^{\pi}\int_\circ^{۲\pi} \frac{\sigma Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} r^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{\sigma Q}{\varepsilon_\circ}$$

$$R = \frac{V_\circ}{I} = \frac{\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right]}{\frac{\sigma Q}{\varepsilon_\circ}} = \frac{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}}{۴\pi\sigma}$$

$$P = RI^۲ = \frac{V_\circ^۲}{R} = \frac{۴\pi\sigma V_\circ^۲}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}} = \frac{۴\pi\sigma V_\circ^۲ . ab}{b-a}$$

۱۰. گزینهٔ ۲) پتانسیل در فاصله r از مرکز دو کره برابر است با:

$$V_r = \int_r^b E dr = \int_r^b \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} dr = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{r} - \frac{۱}{b}\right]$$

در حالی که اختلاف پتانسیل بین دو کره با جایگزینی $r=a$ در رابطه بالا بدست می‌آید.

$$V_{\circ}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)\ \rightarrow\ V_r=\frac{\frac{۱}{r}-\frac{۱}{b}}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}V_{\circ}=\frac{\frac{۱}{۳۰}-\frac{۱}{۴۰}}{\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۴۰}}\times ۲۷۰$$

$$V_r=\frac{\frac{۱}{۱۲۰}}{\frac{۳}{۴۰}}\times ۲۷۰=۳۰^{V}$$

۱۱. گزینهٔ ۲) *اگر استوانه‌ای به ارتفاع dz و شعاع r انتخاب کنیم خواهیم داشت.*

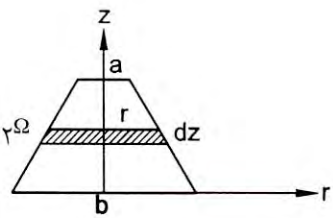
$$dR=\frac{dz}{\sigma\pi r^{۲}}$$

که dR مقاومت استوانه به ارتفاع dz و شعاع r می‌باشد اگر شعاع قاعده بالا a و شعاع قاعده پایین b باشد میتوان r را بر حسب z بصورت زیر نوشت:

$$z=-\frac{h}{b-a}r+\frac{hb}{b-a}=\frac{h}{a-b}\left(r-b\right)\ \rightarrow\ dz=h\frac{dr}{a-b}$$

$$dR=h\frac{dr}{a-b}\times\frac{۱}{\sigma\pi r^{۲}}=\frac{h}{\sigma\pi(a-b)}\frac{dr}{r^{۲}}\ \rightarrow\ R=\int_a^b dR$$

$$=\frac{h}{\sigma\pi(a-b)}\times\left[\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}\right]=\frac{h}{\sigma\pi ab}=\frac{۰/۲}{۲\times ۱۰^{۶}\pi\times ۱۰^{-۷}}=\frac{۱}{\pi}=۰/۳۲^{\Omega}$$



۱۲. گزینهٔ ۴) *اگر پوسته کروی به ضخامت dr و شعاع r بین دو کره انتخاب کنیم مقاومت آن عبارتست از* dR

$$dR=\frac{dr}{۴\pi r^{۲}\sigma}=\frac{dr}{۴\pi r^{۲}\times ۲\left(۱+\frac{۱}{r}\right)}=\frac{dr}{۸\pi(r+۱)r}$$

$$R=\int_a^b dR=\int_a^b\frac{dr}{۸\pi}\left[\frac{۱}{r}-\frac{۱}{r+۱}\right]=\frac{۱}{۸\pi}\ln\frac{r}{r+۱}\Big]_a^b=\frac{۱}{۸\pi}\ln\frac{b(a+۱)}{a(b+۱)}$$

$$=\frac{۱}{۸\pi}\ln\frac{۰/۳۶}{۰/۲۶}=۱۲/۹۵^{m\Omega}$$

۱۳. گزینهٔ ۳) چون جریان بصورت شعاعی است پس $J=\frac{I}{۲\pi r^{۲}}$ در نتیجه

$$E_۱=\frac{J}{\sigma_۱}=\frac{I}{۲\pi r^{۲}\sigma_۱}\qquad E_۲=\frac{J}{\sigma_۲}=\frac{I}{۲\pi r^{۲}\sigma_۲}$$

$$V_a=-\int_{\infty}^{a}\overline{E}.\overline{d\ell}=-\left[\int_{\infty}^{b}E_۲\,dr+\int_{b}^{a}E_۱\,dr\right]=\frac{I}{۲\pi\sigma_۲ b}+\frac{I}{۲\pi\sigma_۱}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)$$

$$R=\frac{V_a}{I}=\frac{۱}{۲\pi\sigma_۱}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)+\frac{۱}{۲\pi\sigma_۲ b}$$

۱۴. گزینهٔ ۴) بعلت غیر عایق کامل بودن فضای بین دو کره بار بصورت زیر تقلیل می‌یابد.

$$Q=Q_{\circ}e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad \tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

با استفاده از قانون گوس داریم:

$$\overline{D}_2 = \frac{Q_\circ}{4\pi r^2}\hat{a}_r \qquad r>b$$

$$\rho_s = D_2 - D_1\Big|_{r=b} = \frac{Q_\circ}{4\pi b^2}\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$\overline{D}_1 = \frac{Q_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}}{4\pi r^2}\hat{a}_r \qquad a<r<b$$

۱۵. گزینهٔ ۱) فرض کنیم بار کره هادی Q باشد در اینصورت همانطوریکه قبلاً دیدیم برای $r<R'$ که R' شعاع داخلی پوسته کروی است پتانسیل برابر است با:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{R''}-\frac{1}{R'}\right]$$

که R'' شعاع خارجی پوسته است و $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ a} = ۲۵۰$ که a شعاع کره به شعاع ۲۵^{cm} است

$$V = ۲۵۰\times ۰/۲۵\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{R''}-\frac{2}{R'}\right]$$

حالا باید به جای r عدد ۲۵^{cm} بگذریم تا پتانسیل کره بدست آید.

$$V = ۲۵۰\times ۰/۲۵\left[\frac{1}{۰/۲۵}+\frac{1}{۰/۳۵}-\frac{1}{۰/۳}\right] = ۲۲۰^{V}$$

۱۶. گزینهٔ ۲) فرض کنیم روی استوانه داخل چگالی بار ρ_{s_1} باشد در اینصورت

$$\int \overline{D}_1.\overline{ds} = Q_1 \to D_1\,(2\pi rl) = \rho_{s_1}2\pi a l \to E_1 = \rho_{s_1}\frac{a}{\varepsilon_\circ r} \qquad a<r<b$$

$$\int \overline{D}_2.\overline{ds} = Q_2 \to D_2\,(2\pi rl) = \rho_{s_1}2\pi a l + \rho_s 2\pi bl \Rightarrow E_2 = \rho_{s_1}\frac{a}{\varepsilon_\circ r}+\rho_s\frac{b}{\varepsilon_\circ r} \qquad b<r<c$$

$$V_{ab} = V_{cb} \Rightarrow \int_a^b E_1\,d\ell = \int_c^b E_2\,d\ell \Rightarrow \rho_{s_1}\frac{a}{\varepsilon_\circ}\ln\frac{b}{a} = \rho_s\frac{b}{\varepsilon_\circ}\ln\frac{b}{c}+\rho_{s_1}\frac{a}{\varepsilon_\circ}\ln\frac{b}{c}$$

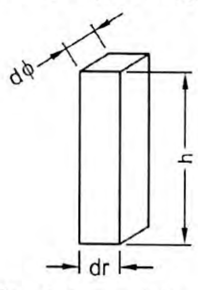
$$\rho_{s_1} a\left[\ln\frac{b}{a}-\ln\frac{b}{c}\right] = \rho_s b\ln\frac{b}{c} \Rightarrow \rho_{s_1} a\ln\frac{c}{a} = \rho_s b\ln\frac{b}{c} \Rightarrow \rho_{s_1} = \rho_s\frac{b}{a}\frac{\ln\frac{b}{c}}{\ln\frac{c}{a}}$$

۱۷. گزینهٔ ۳) اگر یک عنصر مطابق شکل بین دو سطح انتخاب کنیم داریم:

طول عنصر = dr

سطح مقطع عنصر $= h\,(r d\phi)$

مقاومت عنصر $d\,(dR) = \frac{dr}{(h\,r\,d\phi)\sigma} = \frac{dr}{2r^2 h\cos\phi\, d\phi}$



اگر این عنصرها را در جهت r و ϕ کنار هم قرار دهیم مشاهده می‌شود این جزء مقاومتها در جهت r سری و در جهت ϕ موازی هستند پس

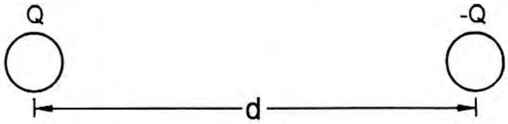
$$dR = \int_{r=۰/۱}^{r=۰/۵} d(dR) = \frac{1}{2h\,d\phi\cos\phi}\left[\frac{1}{۰/۱}-\frac{1}{۰/۵}\right] = \frac{4}{h\cos\phi\, d\phi}$$

$$\frac{۱}{R}=\int_{\phi=۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{۱}{dR}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{h\,d\phi\cos\phi}{۴}=\frac{h}{۴}\left[\sin\frac{\pi}{۶}\right]=\frac{h}{۸}\rightarrow R=\frac{۸}{h}=\frac{۸}{۰/۱}=۸۰^{\Omega}$$

۱۸. گزینهٔ ۴) اگر بار دو کره را به ترتیب Q و $-Q$ بگیریم و دو کره را به یک باطری متصل کنیم داریم (شعاع هر کره a و فاصله بین مراکز دو کره d می‌باشد)

$$V_Q=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ a}-\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰(d-a)}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{a}-\frac{۱}{d}\right]$$

$$V_{-Q}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰(d-a)}-\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ a}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{d}-\frac{۱}{a}\right]$$



$$\Delta V=V_۰=V_Q-V_{-Q}=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{a}-\frac{۱}{d}\right]$$

$$I=\int J\,ds=\int\frac{\sigma Q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{r^۲}-\frac{۱}{(d-r)^۲}\right]ds=۲\int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\pi}\frac{\sigma Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$I=\frac{۲\sigma Q}{\varepsilon_۰}\rightarrow R=\frac{\Delta V}{I}=\frac{۱}{۴\pi\sigma}\left[\frac{۱}{a}-\frac{۱}{d}\right]=۷۹۲^{\Omega}$$

۴-۴- مواد دی الکتریک (عایق)

در عایق باند ممنوعه چندین الکترون است در شرایط عادی تعداد کمی از الکترونها می توانند از باند ظرفیت وارد بار هدایت شوند به همین علت رسانندگی این اجسام بسیار کم است وقتی یک عایق در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد یک جابجایی بین مراکز ثقل بار مثبت و بار منفی ایجاد می‌شود این جابجایی در عایق‌های مختلف متفاوت است در بعضی از مولکولها این جابجایی بصورت دائمی وجود دارد به این مولکولها «مولکولهای قطبی» گفته می‌شود در حالت عادی جهت این دو قطبی‌ها در داخل ماده بی نظم و ترتیب است و وقتی در یک میدان الکتریکی قرار می‌گیرند در یک جهت منظم قرار می‌گیرند. دسته دیگر مولکولهای غیر قطبی دارند که در اثر اعمال میدان خارجی بارهای مثبت و منفی در دو جهت مخالف نیروی جاذبه متقابل خود جابجا شده تشکیل یک دو قطبی می‌دهند که هم جهت با میدان است. مشخصه همه دی الکتریکها ذخیره کردن انرژی الکتریکی است. از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که در یک مولکول قطبی یک جابجایی دائمی بین مرکز ثقل بارهای مثبت و منفی که یک دو قطبی الکتریکی را تشکیل می‌دهند وجود دارد معمولاً این دو قطبی‌ها در جهت تصادفی قرارگرفته‌اند و با اعمال میدان خارجی این دوقطبی‌ها در یک جهت که همان جهت میدان اعمالی است قرار می‌گیرند بعبارت دیگر دو قطبی‌ها در غیاب میدان خارجی اعمالی وجود داشته ولی این دو قطبی‌ها در جهت‌های مختلف قرار دارند اما یک مولکول غیر قطبی دارای دو قطبی نیست و با اعمال میدان خارجی دو قطبی برجود می‌آید همانطوریکه قبلاً دیدیم دو بار الکتریکی $-q$ و q که تشکیل یک دو قطبی الکتریکی را می‌دهند دارای ممان الکتریکی $\overline{p} = qd\ \hat{a}_z$ می‌باشد (اگر دو بار روی محور z باشند) پتانسیل ناشی از این دو قطبی در فاصله r ($r \gg d$ که d فاصله دو بار از یکدیگر می‌باشد) برابر با $\dfrac{q\,d\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}$ که می توان آنرا بصورت زیر نوشت:

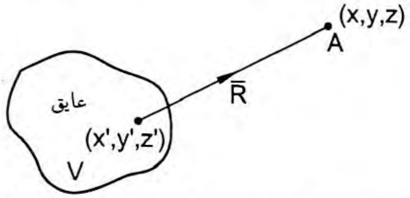
$$V = \frac{\overline{p}\cdot\hat{a}_r}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} \qquad (۱۵-۴)$$

حال اگر n دو قطبی در واحد حجم داشته باشیم در اینصورت میتوان چگالی حجمی ممانهای دو قطبی را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\overline{P} = \lim_{\Delta v \to ۰} \frac{\sum_{i=۱}^{n\Delta v} \overline{p}_i}{\Delta v}$$

که $\overline{p}_i$ ممان i امین دو قطبی می‌باشد حال میتوان پتانسیل الکتریکی ناشی از حجم v از عایق راکه دارای چگالی حجمی ممان دو قطبی $\overline{P}$ می‌باشد را با استفاده از رابطه (۴-۱۵) بصورت زیر تعریف کرد.

$$V = \int_v \frac{\overline{P}\,dv\cdot\hat{a}_R}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲} = \int \frac{\overline{P}}{۴\pi\varepsilon_۰}\cdot\left[\frac{\hat{a}_R}{R^۲}\right] dv \qquad (۱۶-۴)$$



شکل (۴-۲) : پتانسیل ناشی از عایقی به حجم v در نقطه A

با توجه به اینکه بردار $\overline{R}$ را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد

$$\overline{R} = (x-x')\,\hat{a}_x + (y-y')\,\hat{a}_y + (z-z')\,\hat{a}_z \qquad (۱۷-۴)$$

در اینصورت

$$\frac{۱}{R} = \left[(x-x')^۲ + (y-y')^۲ + (z-z')^۲\right]^{-\frac{۱}{۲}} \qquad (۱۸-۴)$$

$$\overline{\nabla}\left[\frac{۱}{R}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{۱}{R}\right]\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{۱}{R}\right]\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{۱}{R}\right]\hat{a}_z$$

که با جایگزینی $\frac{۱}{R}$ از معادله (۴-۱۸) خواهیم داشت:

$$\nabla\left[\frac{1}{R}\right]=\frac{(x-x')\hat{a}_x+(y-y')\hat{a}_y+(z-z')\hat{a}_z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\hat{a}_R}{R^2} \qquad (۴-۱۹)$$

با جایگزینی رابطه (۴-۱۹) در رابطه (۴-۱۶) خواهیم داشت:

$$V=\int\frac{\overline{P}}{4\pi\varepsilon_\circ}\cdot\left[\overline{\nabla}\left[\frac{1}{R}\right]\right]dv \qquad (۴-۲۰)$$

با توجه به معادله برداری $\overline{\nabla}\cdot(\alpha\overline{A})=\alpha\overline{\nabla}\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot\overline{\nabla}\alpha$ رابطه (۴-۲۰) به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$V=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\overline{\nabla}\cdot\left[\frac{\overline{P}}{R}\right]dv-\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ R}\overline{\nabla}\cdot\overline{P}\,dv \qquad (۴-۲۱)$$

با استفاده از قضیه دورژانس رابطه (۴-۲۱) به صورت زیر در خواهد آمد

$$V=\oint_s\frac{\overline{P}\cdot\overline{ds}}{4\pi\varepsilon_\circ R}+\int_v\frac{-\overline{\nabla}\cdot\overline{P}\,dv}{4\pi\varepsilon_\circ R} \qquad (۴-۲۲)$$

با توجه به اینکه $\overline{P}\cdot\overline{ds}=\overline{P}\cdot\hat{n}\,ds$ که $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر سطح بطرف خارج است ملاحظه می‌شود که پتانسیل ناشی از یک عایق را میتوان با پتانسیل ناشی از دو توزیع بار یکی بار سطحی $\rho_{sb}=\overline{P}\cdot\hat{n}$ و دیگری بار حجمی $\rho_b=-\overline{\nabla}\cdot\overline{P}$ جایگزین کرد که ρ_{sb} و ρ_b به ترتیب چگالی سطحی و حجمی بارهای مقید یا پلاریزاسیون هستند (رابطه (۴-۲۲) را با رابطه (۳-۸) مقایسه کنید) بعبارت دیگر می‌توان عایق را با دو توزیع سطحی و حجمی بار جایگزین کرد حال رابطه نقطه‌ای قانون گوس را در داخل عایق می‌نویسیم.

$$\overline{\nabla}\cdot\varepsilon_\circ\overline{E}=\rho+\rho_b=\rho-\overline{\nabla}\cdot\overline{P}$$

و یا

$$\overline{\nabla}\cdot(\varepsilon_\circ\overline{E}+\overline{P})=\rho \qquad (۴-۲۳)$$

با مقایسه رابطه (۴-۲۳) با رابطه $\overline{\nabla}\cdot\overline{D}=\rho$ خواهیم داشت:

$$\overline{D}=\varepsilon_\circ\overline{E}+\overline{P} \qquad (۴-۲۴)$$

که $\overline{P}$ چگالی حجمی ممانهای دو قطبی یا بردار پلاریزاسیون داخل عایق می‌باشد. در عایق‌های خطی $\overline{P}$ با میدان رابطه زیر دارد.

$$\overline{P}=\varepsilon_\circ\chi_e\overline{E} \qquad (۴-۲۵)$$

که χ_e ضریب حساسیت الکتریکی است. با جایگزینی (۴-۲۵) در (۴-۲۴) خواهیم داشت.

$$D=\varepsilon_\circ(\chi_e+1)\overline{E}=\varepsilon_\circ\varepsilon_r\overline{E}=\varepsilon\overline{E} \qquad (۴-۲۶)$$

که ε_r ضریب دی الکتریک نسبی عایق می‌باشد ($\chi_e=\varepsilon_r-1$ یا $\varepsilon_r=1+\chi_e$) در حقیقت تاثیر ماده عایقی در رابطه $D=\varepsilon_\circ\overline{E}+\overline{P}$ بوسیله اضافه کردن $\overline{P}$ به $\overline{E}\varepsilon_\circ$ و در رابطه $\overline{\nabla}\cdot\varepsilon_\circ\overline{E}=\rho+\rho_b$ با اضافه کردن چگالی حجمی بارهای مقید (پلاریزه شده) به چگالی بارهای آزاد، ρ در نظر گرفته می‌شود پس کافی است در تمام معادلات بیان شده در فضای آزاد بجای $\varepsilon_\circ$ از ε استفاده کنیم تا معادلات برای داخل عایق بدست آید.

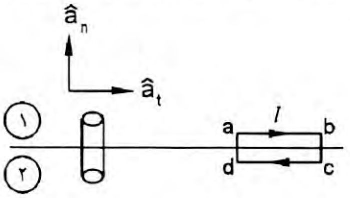
برای محیط‌های همگن ε تابع مکان نیست ولی برای محیط‌های غیر همگن ε تابع مکان است اگر رفتار محیط بدون توجه به جهت بردارهای میدان یکسان باشد محیط یکسان گرد یا ایزوتروپیک نامیده می‌شود در یک محیط غیر همسانگرد بردار چگالی شار الکتریکی $(\overline{D})$ به مولفه‌های بردار میدان الکتریکی بستگی دارد بعبارت دیگر ε یک ماتریس است و رابطه بین $\overline{D}$ و $\overline{E}$ بصورت زیر است.

$$\overline{D}=\varepsilon\overline{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \qquad (۴-۲۷)$$

برای یک محیط غیر خطی ε تابع میدان الکتریکی خواهد بود یعنی $\varepsilon=f(E)$

۴-۵- شرط مرزی بین دو عایق

اگر محیط ۱ و ۲ عایق هایی با ضریب دی الکتریک ε_1 و ε_2 باشند در اینصورت مطابق شکل میتوان شرط مرزی را با استفاده از روابط زیر بدست آورد.



شکل (۴-۳): شرط مرزی بین دو محیط عایق

$$\oint_{abcd} \overline{E}.\overline{d\ell}=0 \quad \to \quad E_{t_1}=E_{t_2}$$

$bc \to 0$ و $ad \to 0$

$$\oint \overline{D}.\overline{ds}=0 \quad \to \quad D_{n_1}-D_{n_2}=\rho_s$$

اگر دو محیط عایق کامل باشند $\rho_s = 0$ در نتیجه $D_{n_1}=D_{n_2}$

بنابراین در مرز مشترک دو عایق کامل شرایط مرزی زیر برقرار است

$$E_{t_1}=E_{t_2}$$
$$D_{n_1}=D_{n_2} \qquad (۲۸-۴)$$

بعبارت دیگری مولفه‌های مماسی میدان و مولفه‌های عمودی چگالی شار الکتریکی روی مرز مشترک دو عایق پیوسته هستند.

مثال ۹: بردار چگالی شار الکتریکی را برای حالات زیر بدست آورید؟

الف) چگالی حجمی ممان دو قطبی $1\frac{\mu c}{m}$ در میدان الکتریکی $E=30\,\frac{kv}{m}$

ب) $P=0/1\frac{\mu c}{m^2}$ و $\chi_e=1/6$

ج) چگالی مولکولها $10^{20}\,\frac{mol}{m^3}$ و هر مولکول با ممان دو قطبی $2\times10^{-27}c.m$ در میدان $E=100\,\frac{kv}{m}$

د) $\varepsilon_r=4/1$ و $E=20\,\frac{kv}{m}$

حل:

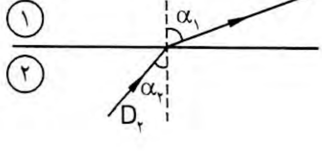
الف) $P=1\,\frac{\mu c}{m^2} \quad E=30\,\frac{kv}{m} \ \to D=\varepsilon_0 E+\overline{P}=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times3\times10^{4}+10^{-6}=1/266\,\frac{\mu c}{m^2}$

ب) $D=\varepsilon_0\varepsilon_r E=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{P}{\varepsilon_0\chi_e}=\frac{\varepsilon_r}{\chi_e}P=\frac{1/6+1}{1/6}\times0/1=0/1625\,\frac{\mu c}{m^2}$

ج) $P=10^{20}\times2\times10^{-27}=2\times10^{-7} \quad \overline{D}=\varepsilon_0\overline{E}+\overline{P}=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times10^{5}+2\times10^{-7}=1/084\,\frac{\mu c}{m^2}$

د) $D=\varepsilon\,.E=\varepsilon_0.\varepsilon_r E=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times4/1\times2\times10^{4}=0/725\,\frac{\mu c}{m^2}$

مثال ۱۰: در شکل زیر D_2 و E_2 در محیط ۲ را بر حسب D_1 و E_1 در محیط ۱ بدست آورید.



حل: $E_{t_1}=E_{t_2} \Rightarrow E_1\sin\alpha_1=E_2\sin\alpha_2$

$D_{n_1}=D_{n_2} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1\cos\alpha_1=\varepsilon_2 E_2\cos\alpha_2$

$$\rightarrow \begin{array}{l} E_۲ \sin\alpha_۲ = E_۱ \sin\alpha_۱ \\ E_۲ \cos\alpha_۲ = \frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲} E_۱ \cos\alpha_۱ \end{array} \quad E_۲ = E_۱ \sqrt{\sin^۲\alpha_۱ + \left[\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲}\right]^۲ \cos^۲\alpha_۱}$$

$$D_۲ = \varepsilon_۲ E_۲ = \varepsilon_۲ \frac{D_۱}{\varepsilon_۱} \sqrt{\sin^۲\alpha_۱ + \left[\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲}\right]^۲ \cos^۲\alpha_۱} \rightarrow D_۲ = D_۱ \sqrt{\cos^۲\alpha_۱ + \left[\frac{\varepsilon_۲}{\varepsilon_۱}\right]^۲ \sin^۲\alpha_۱}$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود اگر $\varepsilon_۱ < \varepsilon_۲$ باشد $D_۲ > D_۱$ و $E_۲ < E_۱$ و اگر $\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$ باشد $D_۲ < D_۱$ و $E_۲ > E_۱$ بعبارت دیگر در محیطی که ε بیشتری دارد D بزرگتر و E کوچکتر از محیط دیگر است.

مثال ۱۱: یک کره عایق به شعاع a تحت تاثیر یک میدان خارجی بصورت $P = P_\circ \hat{a}_z$ پلاریزه شده است ($P_\circ$ ثابت است) شدت میدان الکتریکی ناشی از بارهای پلاریزه در مرکز کره چقدر است؟

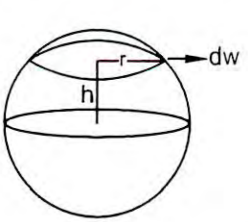
حل: ابتدا چگالی بارهای سطحی و حجمی پلاریزه را بدست می‌آوریم

$$\rho_b = -\overline{\nabla} . \overline{P} = \circ \qquad \rho_{sb} = \overline{P} . \hat{n} = P_\circ \hat{a}_z . \hat{a}_r = P_\circ \cos\theta$$

بنابراین کره‌ای بشعاع a و چگالی بار سطحی $P_\circ \cos\theta$ داریم که با استفاده از رابطه میدان ناشی از یک حلقه همانطوریکه در فصل دوم دیدیم مسئله را حل می‌کنیم اگر حلقه‌ای بشعاع r روی کره و به پهنای dw انتخاب کنیم داریم.

$$\rho_\ell = \rho_{sb}\, dw = P_\circ \cos\theta\, (a d\theta)$$

$$d\overline{E} = -\frac{\rho_\ell r h}{۲\varepsilon_\circ (r^۲ + h^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \hat{a}_z = -\frac{P_\circ \cos\theta\, a\, d\theta\, a^۲ \sin\theta \cos\theta}{۲\varepsilon_\circ (a^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \hat{a}_z$$

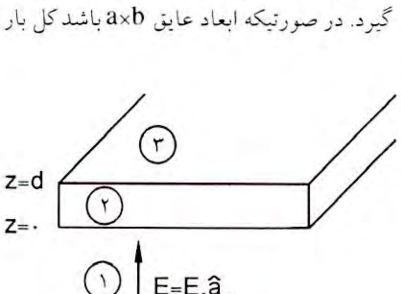


$$d\overline{E} = \frac{-P_\circ \sin\theta \cos^۲\theta\, d\theta}{۲\varepsilon_\circ} \hat{a}_z \rightarrow \overline{E} = \int_\circ^\pi d\overline{E} = \frac{-P_\circ}{۳\varepsilon_\circ} \hat{a}_z$$

مثال ۱۲: عایقی بضخامت d که بین صفحات $z=\circ$ و $z=d$ قرار گرفته دارای ضریب دی الکتریک $\varepsilon = \varepsilon_\circ \left[۱ + \frac{z}{d} \right]$ می‌باشد مطلوبست چگالی بارهای پلاریزه سطحی و حجمی در عایق اگر عایق تحت تاثیر میدان خارجی $\overline{E} = E_\circ \hat{a}_z$ قرار گیرد. در صورتیکه ابعاد عایق $a\times b$ باشد کل بار مقید (پلاریزه) چقدر است.

$$D_۱ = D_۲ \rightarrow \varepsilon_\circ E_۱ = \varepsilon E_۲ \Rightarrow E_۲ = \frac{\varepsilon_\circ}{\varepsilon} E_\circ \Rightarrow$$

$$E_۲ = \frac{\varepsilon_\circ E_\circ}{\varepsilon_\circ \left[۱ + \frac{z}{d} \right]} = \frac{d}{z+d} E_\circ \Rightarrow$$



$$\overline{E}_۲ = \frac{d}{z+d} E_\circ \hat{a}_z \qquad \overline{P} = \varepsilon_\circ \chi_e E_۲ = \varepsilon_\circ (\varepsilon_r - ۱) \overline{E}_۲$$

$$\overline{P} = \varepsilon_\circ \left[۱ + \frac{z}{d} - ۱ \right] \frac{d}{z+d} E_\circ \hat{a}_z = \frac{z}{z+d} E_\circ \hat{a}_z$$

$$\rho_{sb} = \overline{P} . \hat{n} = \begin{cases} \overline{P} . (-\hat{a}_z) \Big|_{z=\circ} = \circ & z=\circ \\ \overline{P} . (+\hat{a}_z) \Big|_{z=d} = \frac{۱}{۲} \varepsilon_\circ E_\circ & z=d \end{cases}$$

$$\rho_b = -\nabla . \overline{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{-d\varepsilon_۰}{(z+d)^۲} E_۰$$

$$q_{s_۱} = ab \times \rho_{s_b}(z=۰) = ۰$$ بار سطحی پلاریزه روی سطح $z=۰$

$$q_{s_۲} = ab \times \rho_{s_b}(z=d) = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E_۰ ab$$ بار سطحی پلاریزه روی سطح $z=d$

$$q_b = \int_۰^d \int_۰^a \int_۰^b \rho_b \, dx\, dy\, dz = \int_۰^d \int_۰^a \int_۰^b -\frac{d\varepsilon_۰ E_۰}{(z+d)^۲} dx\, dy\, dz = -\frac{۱}{۲}\varepsilon_۰ E_۰ ab$$

$$q_{کل} = q_{s_۱} + q_{s_۲} + q_b = ۰$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود کل بار پلاریزه صفر است و این طبیعی است زیرا همواره دوقطبی‌ها متشکل از زوج بار $+q$ و $-q$ هستند.

مثال ۱۳: مثال قبل را برای میدان خارجی $E = E_۰ \hat{a}_y$ تکرار کنید.

حل: ***در اینحالت میدان بر مرز مشترک عایق و هوا مماس است پس پیوستگی مولفه مماسی میدان را می‌نویسیم.***

$$E_۱ = E_۲ \rightarrow \overline{E}_۲ = E_۰ \hat{a}_y$$ میدان داخل عایق

$$\overline{P} = \varepsilon_۰ \chi_e E_۲ = \varepsilon_۰ \left[۱ + \frac{z}{d} - ۱ \right] E_۰ \hat{a}_y \rightarrow \overline{P} = \varepsilon_۰ \frac{z}{d} E_۰ \hat{a}_y$$

$$\rho_{sb_۱} = \overline{P} . \hat{n} \Big|_{y=۰} = \overline{P} . (-\hat{a}_y) \Big|_{y=۰} = \frac{-z}{d} E_۰$$ روی سطح $y=۰$

$$\rho_{sb_۲} = \overline{P} . \hat{n} \Big|_{y=a} = \overline{P} . (\hat{a}_y) \Big|_{y=a} = \frac{z}{d} E_۰$$

$$\rho_{sb_۳} = \overline{P} . \hat{n} \Big|_{z=۰} = \overline{P} . (-\hat{a}_z) = ۰ \qquad \rho_{sb_۴} = \overline{P} . \hat{n} \Big|_{z=d} = \overline{P} . \hat{a}_z = ۰$$

$$\rho_b = -\nabla . \overline{P} = -\frac{\partial P_y}{\partial y} = ۰$$

مثال ۱۴: منطقه $x>۰$ شامل دی الکتریکی با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_{r_۱} = ۳$ و منطقه $x<۰$ شامل دی الکتریکی با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_{r_۲} = ۵$ می‌باشد اگر $E_۲ = ۲۰\hat{a}_x + ۳۰\hat{a}_y - ۴۰\hat{a}_z$ باشد مطلوبست:

الف) $D_۲$ ب) $D_۱$ ج) P در دو محیط

حل:

$$D_۲ = \varepsilon_۲ E_۲ = \varepsilon_۰ \varepsilon_{r_۲} E_۲ = \varepsilon_۰ (۱۰۰\hat{a}_x + ۱۵۰\hat{a}_y - ۲۰۰\hat{a}_z)$$

$$E_{t_۱} = E_{t_۲} \rightarrow E_{t_۱} = ۳۰\hat{a}_y - ۴۰\hat{a}_z$$

$$D_{n_۱} = D_{n_۲} \Rightarrow D_{x_۱} = D_{x_۲} = ۱۰۰\varepsilon_۰ \Rightarrow E_{x_۱} = \frac{D_{x_۱}}{\varepsilon_۱} = \frac{۱۰۰}{۳}$$

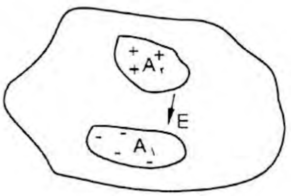
$$\overline{E}_۱ = \frac{۱۰۰}{۳}\hat{a}_x + ۳۰\hat{a}_y - ۴۰\hat{a}_z \rightarrow D_۱ = \varepsilon_۱ E_۱ = (۱۰۰\hat{a}_x + ۹۰\hat{a}_y - ۱۲۰\hat{a}_z)\varepsilon_۰$$

$$\overline{P_۱} = \varepsilon_۰ (\varepsilon_{r_۱} - ۱) \overline{E}_۱ = \varepsilon_۰ \left(\frac{۲۰۰}{۳}\hat{a}_x + ۶۰\hat{a}_y - ۸۰\hat{a}_z\right)$$

$$\overline{P_۲} = \varepsilon_۰ (\varepsilon_{r_۲} - ۱) \overline{E}_۲ = \varepsilon_۰ (۸۰\hat{a}_x + ۱۲۰\hat{a}_y - ۱۶۰\hat{a}_z)$$

۴-۶- خازن

فرض کنید دو هادی داخل یک محیط دی الکتریک قرار دارند یکی A_2 دارای بار مثبت Q و دیگری A_1 دارای بار Q- می‌باشد یعنی کل بار سیستم صفر است می‌دانیم که بار همیشه روی سطح هادی جمع می‌شود و میدان $\overline{E}$ همواره بر سطح هادی عمود است چون A_2 دارای بار مثبت است جهت $\overline{E}$ از A_2 به A_1 است به عبارت دیگر جهت انتقال بار مثبت از A_1 به A_2 باید کار انجام دهیم پس یک اختلاف پتانسیل بین A_2 و A_1 برقرار است.



شکل (۴-۴): شکل کلی یک خازن

بنا به تعریف ظرفیت سیستم متشکل از دو هادی که مجمع بار الکتریکی آنها صفر است و خازن نامیده می‌شود عبارتست از:

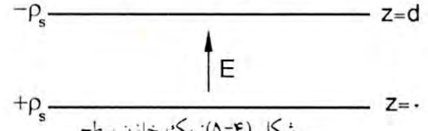
$$C=\frac{Q}{V} \qquad (۲۹-۴)$$

که Q اندازه بار الکتریکی هر صفحه و V اختلاف پتانسیل بین دو صفحه است.

Q بستگی به مولفه عمودی میدان روی صفحات دارد زیرا طبق شرط مرزی گفته شده بار سطحی روی هادی برابر است با مولفه عمودی D حال رابطه (۴-۲۹) را میتوان بصورت زیر نوشت.

$$C=\frac{\int_s \varepsilon \overline{E}.\overline{ds}}{-\int_{A_1}^{A_2} \overline{E}.\overline{d\ell}} \qquad (۳۰-۴)$$

همانطوریکه از رابطه (۴-۳۰) دیده می‌شود C مستقل از Q و V می‌باشد زیرا میدان الکتریکی که بستگی به Q یا V دارد در صورت و مخرج کسر (۴-۳۰) ظاهر می‌شود پس با افزایش Q یا V صورت و مخرج به یک نسبت زیاد می‌شوند. حال خازن مسطح زیر را در نظر بگیرید که صفحه پائینی دارای بار سطحی با چگالی $+\rho_s$ و صفحه بالایی دارای بار سطحی با چگالی $-\rho_s$ می‌باشد در اینصورت همانطوریکه قبلاً گفته شد میدان الکتریکی بین دو صفحه $\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}_z$ و خارج دو صفحه صفر است.



شکل (۴-۵): یک خازن سطح

$$V=-\int_d^0 \overline{E}.\overline{d\ell}=-\int_d^0 \frac{\rho_s}{\varepsilon}dz=\frac{\rho_s d}{\varepsilon}$$

$$V=\frac{Q}{A}\times\frac{d}{\varepsilon}=\frac{Qd}{\varepsilon A} \rightarrow C=\frac{Q}{V}=\varepsilon\frac{A}{d}$$

که A و d به ترتیب مساحت صفحات و فاصله آنها از یکدیگر است بعبارت دیگر ظرفیت یک خازن مسطح از رابطه

$$C=\varepsilon\frac{A}{d} \qquad (۳۱-۴)$$

بدست می‌آید.

۴-۶-۱- محاسبه ظرفیت خازن استوانه‌ای

دو استوانه هادی هم محور بشعاعهای a و b $(a<b)$ تشکیل یک خازن استوانه‌ای می‌دهند اگر روی استوانه داخلی بار $+Q$ و روی استوانه خارجی بار Q- قرار داشته باشد در اینصورت میدان بین صفحات خازن عبارتست از:

$$\overline{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon Rl}\hat{a}_R \qquad (۳۲-۴)$$

که با استفاده از قانون گوس بدست می‌آید اختلاف پتانسیل بین دو استوانه برابر است با:

$$V=\int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell}=\int_a^b \frac{Q}{۲\pi\varepsilon Rl}\,dR=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$$

در نتیجه ظرفیت خازن استوانه با استفاده زا رابطه $C=\frac{Q}{V}$ برابر است با:

$$C=\frac{۲\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (۳۳-۴)$$

چون طول استوانه‌ها بسیار بزرگ فرض شده (فرض میدان شعاعی) در اینصورت خازن بر واحد طول $(\overline{C}=\frac{C}{l})$ برای یک خازن استوانه‌ای عبارتست از:

$$\overline{C}=\frac{۲\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (۳۴-۴)$$

۴-۶-۲- محاسبه ظرفیت خازن کروی

دو کره هادی متحدالمرکز به شعاعهای a و b $(a<b)$ که کره کوچکتر دارای بار $+Q$ و کره بزرگتر دارای بار $-Q$ است تشکیل یک خازن کروی می‌دهند با استفاده از قانون گوس میدان بین دو کره (بین صفحات خازن) عبارتست از:

$$\overline{E}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon r^۲}\hat{a}_r \qquad (۳۵-۴)$$

اختلاف پتانسیل بین دو کره عبارتست از:

$$V=\int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon}\left[\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right]$$

در اینصورت ظرفیت خازن با استفاده از رابطه $C=\frac{Q}{V}$ عبارتست از:

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}} \qquad (۳۶-۴)$$

با استفاده از رابطه (۴-۳۶) ظرفیت یک کره بشعاع a با قرار دادن $b\to\infty$ از رابطه فوق بدست می‌آید که عبارتست از:

$$C=۴\pi\varepsilon a \qquad \text{(۴-۳۷) ظرفیت کره‌ای بشعاع a}$$

مثال ۱۵: روی کره فلزی بشعاع $a=۵^{cm}$ یک لایه دی الکتریک با $\varepsilon_r=۴$ و ضخامت d قرار می‌دهیم ضخامت d چقدر باشد تا ظرفیت کره ۲ برابر شود.

حل: در حالت اول ظرفیت کره فلزی $C_\circ=۴\pi\varepsilon_\circ a$ می‌باشد اگر بار کره Q باشد در اینصورت با استفاده از قانون گوس خواهیم داشت.

$$\overline{E}=\begin{cases}\dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\hat{a}_r & r>a+d\\[2ex] \dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon r^۲}\hat{a}_r & a+d>r>a\end{cases}$$

$$V_a=-\int_\infty^a \overline{E}.\overline{d\ell}=-\left[\int_\infty^{a+d}\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}dr+\int_{a+d}^{a}\frac{Q}{۴\pi\varepsilon r^۲}dr\right]$$

که پس از انتگرال‌گیری پتانسیل کره فلزی عبارت خواهد بود از:

$$V_a=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{a+d}+\frac{۱}{\varepsilon_r a}-\frac{۱}{\varepsilon_r(a+d)}\right]$$

$$\frac{1}{C}=\frac{V_a}{Q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a+d}+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4(a+d)}\right]=\frac{1}{2C_0}$$

که با توجه به اینکه $C_0=4\pi\varepsilon_0 a$ *خواهیم داشت:*

$$\frac{1}{a+d}+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4(a+d)}=\frac{1}{2a}$$

که خواهیم داشت:

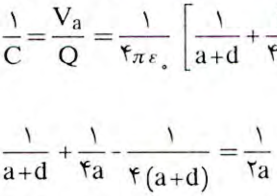
$$\frac{3}{4(a+d)}=\frac{1}{4a}\ \rightarrow\ a+d=3a$$

$$d=2a=10^{cm}$$

یعنی ضخامت عایق باید 10^{cm} ***باشد***

۴-۶-۳- ظرفیت خازن چند لایه

ابتدا یک خازن مسطح به مساحت صفحات A و فاصله صفحات d را در نظر بگیرید. فرض کنید N دی‌الکتریک بضخامت‌های d_1، d_2،... d_N و ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_N$ بین صفحات خازن قرار دارد در اینصورت با توجه به اینکه میدان ثابت و عمود بر صفحات خازن است خواهیم داشت.



$$V_0=\int_0^d \overline{E}.\overline{d\ell}=E_1 d_1+E_2 d_2+\dots+E_N d_N \qquad (۳۷-۴)$$

که E_i میدان در لایه iام است که با توجه به شرط مرزی بین عایق‌ها خواهیم داشت.

شکل (۴-۶): یک خازن چندلایه با لایه‌های افقی

$$\varepsilon_1 E_1=\varepsilon_2 E_2=\varepsilon_3 E_3=\dots=\varepsilon_N E_N=\rho_s \qquad (۳۸-۴)$$

حال با استفاده از تعریف ظرفیت خواهیم داشت:

$$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{\rho_s A}{E_1 d_1+E_2 d_2+\dots E_N d_N}$$

$$C=\frac{\rho_s A}{E_1 d_1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1 d_2+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}E_1 d_3+\dots\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_N}E_1 d_N}$$

با توجه به شرط مرزی $\rho_s=\varepsilon_1 E_1$ خواهیم داشت:

$$C=\frac{\rho_s A}{\frac{\rho_s}{\varepsilon_1}d_1+\frac{\rho_s}{\varepsilon_2}d_2+\dots\frac{\rho_s}{\varepsilon_N}d_N}=\frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 A}+\frac{d_2}{\varepsilon_2 A}+\dots\frac{d_N}{\varepsilon_N A}} \qquad (۳۸-۴)$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود عبارت مخرج مجموع عکس ظرفیت هر قسمت از خازن تشکیل شده با فاصله صفحات d_i (N ...و۲و۱=i) و مساحت صفحات A و ضریب دی الکتریک ε_i $(i=1,2,\dots N)$ می‌باشد.

بنابراین رابطه بالا بصورت زیر خواهد شد.

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\dots\frac{1}{C_N} \qquad (۳۹-۴)$$

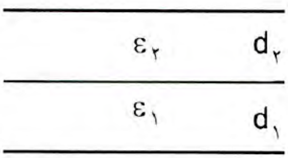
یعنی خازن‌های تشکیل شده با هم سری هستند این نکته یک اصل است که اگر مرز مشترک دی الکتریک‌ها با سطوح هادی خازن موازی باشند در اینصورت خازنهای تشکیل شده با هم سری هستند در حد وقتی تعداد لایه‌ها بسمت بی‌نهایت میل می‌کند می‌توان برای ضریب دی الکتریک موجود بین صفحات خازن تابعی از z (اگر صفحات در z=0 و

$z=d$ قرار داشته باشند) تعریف کرد که رابطه (۴-۳۹) در اینحالت به انتگرال زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{۱}{C}=\int_{\circ}^{d}\frac{۱}{dC}=\int_{\circ}^{d}\frac{dz}{\varepsilon(z)A} \qquad (۴۰-۴)$$

مثال ۱۶: دو صفحه هادی موازی مطابق شکل به یک باطری ۱۰۰ ولتی متصل شده‌اند اگر $d_۱=d_۲=۰/۵^{mm}$ و $\varepsilon_{r_۱}=۲$, $\varepsilon_{r_۲}=۵$ و مساحت صفحات $۱۰cm^۲$ باشد چگالی بار سطحی ρ_s و ولتاژ دو سر دی الکتریک ۱ را بدست آورید.

حل:



$$V_{\circ}=۱۰۰=\int \overline{E}.\overline{d\ell}=E_۱d_۱+E_۲d_۲$$

$$\rho_s=\varepsilon_۱E_۱=\varepsilon_۲E_۲$$

$$V_{\circ}=۱۰۰=E_۱d_۱+\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲}E_۱d_۲ \Rightarrow$$

$$۱۰۰=E_۱\left[d_۱+\frac{۲}{۵}d_۲\right] \Rightarrow E_۱=\frac{۱۰۰}{(۰/۵+\frac{۲}{۵}\times ۰/۵)\ ۱۰^{-۳}}$$

$$E_۱=\frac{۱۰^۵}{۰/۷}=\frac{۱۰^۶}{۷} \Rightarrow \rho_s=\varepsilon_۱E_۱=۸/۸۵۲\times ۱۰^{-۱۲}\times ۲\times\frac{۱۰^۶}{۷}=۲/۵۳\frac{\mu c}{m^۲}$$

$$V_۱=E_۱d_۱=\frac{۱۰^۶}{۷}\times ۰/۵\times ۱۰^{-۳}=\frac{۵۰۰}{۷}=۷۱/۴^V$$

راه دیگر

$$V_۱=\frac{C_۲}{C_۱+C_۲}V_{\circ}=\frac{۱}{۱+\frac{C_۱}{C_۲}}V_{\circ}=\frac{۱}{۱+\frac{\varepsilon_{r_۱}}{\varepsilon_{r_۲}}}V_{\circ}=\frac{۱۰۰}{۱+\frac{۲}{۵}}=۷۱/۴^V$$

مثال ۱۷: دو صفحه خازنی بین $z=۰$ و $z=d$ قرار دارد ضریب دی الکتریک بین صفحات خازن از رابطه $\varepsilon=\varepsilon_{\circ}\left[۱+\frac{z^۲}{d^۲}\right]$ بدست می‌آید ظرفیت خازن تشکیل شده بر واحد سطح را بدست آورید.

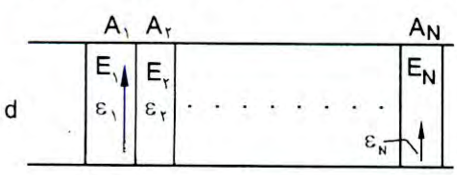
حل: از رابطه (۴-۴۰) استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{C}=\int_{\circ}^{b}\frac{dz}{\varepsilon(z)A}=\int_{\circ}^{d}\frac{dz}{\varepsilon_{\circ}(۱+\frac{z^۲}{d^۲})}=\frac{d}{\varepsilon_{\circ}}\ tg^{-۱}\frac{z}{d}\Big]_{\circ}^{d}=\frac{\pi d}{۴\varepsilon_{\circ}}$$

$$\Rightarrow C=\frac{۴\varepsilon_{\circ}}{\pi d}$$

در حقیقت مثل این است که ε متوسط برابر با $\frac{۴}{\pi}\varepsilon_{\circ}$ می‌باشد.

در حالتی که دی الکتریک‌ها طوری قرار گیرند که مرز مشترک آنها عمود بر صفحات خازن مطابق شکل زیر باشد ظرفیت را با روابط بدست می‌آوریم.



شکل (۴-۷): یک خازن چند لایه با لایه‌های عمودی

$$E_۱=E_۲=E_۳=\dots\dots=E_N$$

$$V_{\circ}=E_۱d=E_۲d=\dots\dots=E_Nd$$

$$C=\frac{Q}{V_{\circ}}=\frac{\rho_{s_۱}A_۱+\rho_{s_۲}A_۲+\dots\dots\rho_{s_N}A_N}{E_۱d}$$

$$C=\frac{\varepsilon_۱E_۱A_۱+\varepsilon_۲E_۲A_۲+\dots\varepsilon_NE_NA_N}{E_۱d}$$

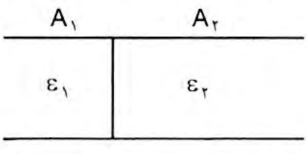
$$C=\varepsilon_1\frac{A_1}{d}+\varepsilon_2\frac{A_2}{d}+\ldots.\qquad \varepsilon_N\frac{A_N}{d}\qquad (۴۱-۴)$$

رابطه (۴-۴۱) نشان می‌دهد که خازنهای تشکیل یافته با هم موازی هستند و این نکته یک اصل است که اگر مرز مشترک دی الکتریکها بر سطوح هادی خازن عمود باشند خازنهای تشکیل شده با هم موازی هستند. در حد که تعداد دی‌الکتریک‌ها به سمت بی نهایت میل می‌کند رابطه (۴-۴۱) به انتگرال زیر تبدیل می‌شود که ε تابع x و یا y خواهد بود (اگر صفحات خازن در جهت x و یا y باشند.)

$$C=\int\frac{\varepsilon(x)\,a\,dx}{d}\qquad (۴۲-۴)$$

که a یکی از ابعاد صفحات می‌باشد (در جهت y و یا x)

مثال ۱۸: دو دی الکتریک با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_{r_1}=3$ و $\varepsilon_{r_2}=5$ مطابق شکل بین صفحات خازن قرار گرفته‌اند اگر این خازن را به یک ولتاژ ۱۲۰ ولتی متصل کنیم بار جمع شده روی هر قسمت از سطح صفحات خازن (A_1 و A_2) چقدر است اگر $A_1=\frac{1}{3}A_2$ باشد. فاصله صفحات را 2^{mm} و سطح صفحات را $100cm^2$ فرض کنید.



$$\varepsilon_1E_1=\rho_{s_1}\qquad \varepsilon_2E_2=\rho_{s_2}$$

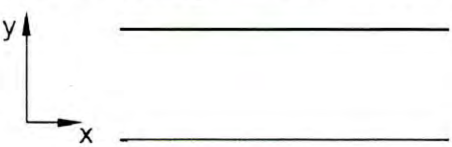
$$E_1d=V_0=120\Rightarrow E_1\times2\times10^{-3}=120\Rightarrow E_1=60000\,\frac{v}{m}=E_2$$

$$\rho_{s_1}=\varepsilon_1E_1=3\times8/852\times10^{-12}\times60000=1/594\,\frac{Nc}{m^2}$$

$$Q_1=\rho_{s_1}A_1=1/594\times25\times10^{-4}=3/98^{nc}$$

$$Q_2=\rho_{s_2}A_2=\varepsilon_2E_2A_2=5\times8/852\times10^{-12}\times60000\times75\times10^{-4}=19/9^{nc}$$

مثال ۱۹: ضریب دی الکتریک بین صفحات خازنی که از مربع‌هایی به ضلع a تشکیل شده با تابع $\varepsilon=\varepsilon_0\left[1+\frac{x^2}{a^2}\right]$ مطابق شکل داده شده است ظرفیت خازن تشکیل شده چقدر است فاصله صفحات 1^{mm} می‌باشد و مساحت صفحات $100cm^2$ می‌باشد.



حل: از رابطه (۴-۴۲) خواهیم داشت:

$$C=\int\frac{\varepsilon\,a\,dx}{d}=\int_0^a\frac{\varepsilon_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)a\,dx}{d}=\frac{\varepsilon_0 a}{d}\left[a+\frac{1}{3}a\right]=\frac{4\varepsilon_0a^2}{3d}$$

$$C=\frac{4}{3}\varepsilon_0\frac{a^2}{d}=\frac{4}{3}\times8/852\times10^{-12}\times\frac{10^{-2}}{10^{-3}}=118pf$$

۴-۶-۴- انرژی ذخیره شده بین صفحات خازن

همانطوریکه در فصل قبل دیدیم چگالی حجمی انرژی ذخیره شده الکتریکی $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ می‌باشد برای یک خازن مسطح E ثابت و برابر است با $\frac{V_0}{d}$ که V_0 اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن است در اینصورت انرژی ذخیره شده بین صفحات خازن برابر است با:

$$W_e=\frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 dv=\frac{1}{2}\varepsilon\left[\frac{V_0}{d}\right]^2 Ad=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{A}{d}V_0^2=\frac{1}{2}CV_0^2$$

که همان رابطه معروف است که قبلاً دیده بودیم.

حالا همین رابطه را برای خازنهای استوانه‌ای و کروی بدست می‌آوریم.

برای یک خازن استوانه‌ای و با استفاده از قانون گوس میدان بین صفحات خازن $\overline{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon Rl}\hat{a}_R$ می‌باشد بنابراین انرژی ذخیره شده برابر است با:

$$W_e=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^l \varepsilon E^2 dv=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^l \varepsilon\left[\frac{Q}{2\pi\varepsilon Rl}\right]^2 R\,dR\,d\phi\,dz$$

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV_0^2$$

برای یک خازن کروی و با استفاده از قانون گوس میدان بین صفحات خازن $\overline{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r$ می‌باشد بنابراین انرژی ذخیره شده برابر است با:

$$W_e=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon E^2 dv=\frac{1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right]^2 r^2\sin\theta\,dr\,d\phi\,d\theta$$

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CV_0^2$$

بنابراین انرژی ذخیره شده بین صفحات خازن صرفنظر از شکل آن از رابطه $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ و یا $\frac{1}{2}CV_0^2$ بدست می‌آید.

مثال ۲۰: ضریب دی الکتریک عایق بین صفحات خازنی بطور خطی از ε_1 از صفحه $z=0$ به ε_2 تا صفحه $z=d$ تغییر می‌کند اگر فاصله صفحات خازن d و مساحت صفحات A باشد.

الف: ثابت کنید که ظرفیت این خازن از رابطه $C=\frac{A(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ بدست می‌آید.

ب: قسمت الف را به کمک انرژی ثابت کنید.

ج: چگالی حجمی بارهای پلاریزاسیون در عایق را بدست آورید.

حل: الف

$$\varepsilon(z)=Az+B$$
$$\varepsilon(0)=\varepsilon_1 \rightarrow B=\varepsilon_1$$
$$\varepsilon(d)=\varepsilon_2 \rightarrow A=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}$$
$$\rightarrow \varepsilon(z)=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1$$

حال از رابطه (۴-۴۰) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{C}=\int\frac{dz}{\varepsilon(z)A}=\int_0^d\frac{dz}{\left[\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1\right]A}=\frac{d}{A(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\rightarrow C=\frac{A(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

ب:
$$W=\frac{1}{2}\int_0^d \varepsilon E^2 dv=\frac{1}{2}\int_0^d \varepsilon\left(\frac{\rho_s}{\varepsilon}\right)^2 A dz=\frac{1}{2}\int_0^d \frac{\rho_s^2}{\varepsilon} A dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^d \frac{\rho_s^2 A dz}{\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1\right)}=\frac{A\rho_s^2}{2}\times\left[\frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z_1+\varepsilon_1\right)\right]_0^d$$

$$=A\left(\frac{Q}{A}\right)^2\frac{1}{2}\times\left[\frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right]=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\rightarrow C=\frac{A\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\right)}{d\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

ج:
$$\overline{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{\rho_s\hat{a}_z}{\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1\right)}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\rho_s\hat{a}_z}{\varepsilon}$$

$$\overline{P}=\frac{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1}\rho_s\hat{a}_z\rightarrow\rho_b=-\nabla.\overline{P}=-\rho_s\frac{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}\varepsilon_0}{\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z+\varepsilon_1\right)^2}$$

مثال ۲۱: ضریب دی الکتریک بین دو صفحه خازن که در صفحات $z=0$ و $z=d$ قرار گرفته بفرم $\varepsilon=\varepsilon_0 e^z$ تغییر می‌کند ظرفیت خازن بر واحد سطح را از سه طریق بدست آورید

حل: از طریق قانون گوس (فرم نقطه‌ای) $\nabla.D=0\rightarrow D=k=$ ثابت

چون فقط D یک مولفه در جهت z دارد پس از رابطه $\nabla.\overline{D}=0$ میتوان نتیجه گرفت که D ثابت است.

$$\overline{E}=\frac{\overline{D}}{\varepsilon}=\frac{k}{\varepsilon_0 e^z}\hat{a}_z=\frac{k}{\varepsilon_0 e^z}\hat{a}_z=\frac{k}{\varepsilon_0}e^{-z}\hat{a}_z$$

$$V_0=\int_0^d E dz=\frac{k}{\varepsilon_0}(1-e^{-d})\qquad \rho_s=D=k\rightarrow Q=kA=k$$

$$C=\frac{Q}{V_0}\Rightarrow C=\frac{k}{\frac{k}{\frac{k}{\varepsilon_0}(1-e^{-d})}}=\frac{\varepsilon_0}{(1-e^{-d})}$$

حال از طریق ترکیب سری خازنها (معادله (۴-۴۰)) ظرفیت خازن را بدست می‌آوریم.

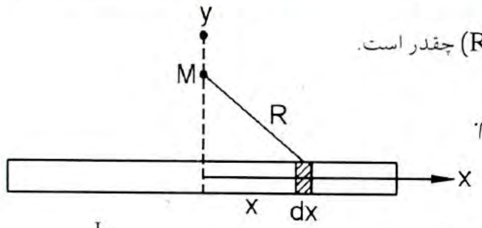
$$\frac{1}{C}=\int\frac{dz}{\varepsilon(z)A}=\int_0^d\frac{dz}{\varepsilon_0 e^z}=\frac{1}{\varepsilon_0}(1-e^{-d})\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_0}{1-e^{-d}}$$

از طریق انرژی ظرفیت را بدست می‌آوریم.

$$W_e=\frac{1}{2}\int\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\int_0^d\varepsilon_0 e^z\times\frac{k^2}{(\varepsilon_0 e^z)^2}A dz=\frac{1}{2}\int_0^d\frac{k^2 dz}{\varepsilon_0 e^z}$$

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{k^2}{\varepsilon_0}(1-e^{-d})=\frac{1}{2}\frac{k^2}{\frac{\varepsilon_0}{(1-e^{-d})}}=\frac{1}{2}\frac{k^2}{C}\Bigg|_{k=Q}\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_0}{(1-e^{-d})}$$

مثال ۲۲: ظرفیت یک میله بطول L و شعاع R $(R \ll L)$ چقدر است.



حل: ابتدا پتانسیل نقطه‌ای مثل M را بدست می‌آوریم.

$$V_M = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_\ell dx}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$V_M = \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_\ell dx}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}{\frac{-L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$$

پتانسیل میله $\rightarrow y = R \Rightarrow V_{\text{میله}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}$

$$\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2} = \frac{L}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{L}\right)^2}\right] = \frac{L}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2R}{L}\right)^2\right] = \frac{L}{2} + \frac{R^2}{L}$$

$$V_{\text{میله}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{\frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{R^2}{L}}{\frac{-L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{R^2}{L}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{L}{\frac{R^2}{L}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{L}{R}$$

$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{L}{R}} \rightarrow \overline{C} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{L}{R}} \left[\frac{f}{m}\right]$ خازن بر واحد طول

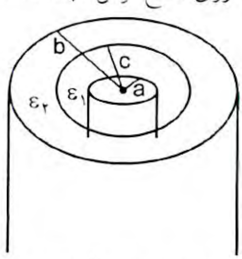
۴-۶-۵- خازن چند لایه استوانه‌ای و کروی و ملاحظاتی درباره محاسبه $\overline{D}$

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که مرز مشترک دی الکتریکها موازی با صفحات خازن باشد برای خازن استوانه‌ای اگر در فاصله $a<R<c$ ضریب دی الکتریک ε_1 و در فاصله $c<R<b$ ضریب دی الکتریک ε_2 باشد با استفاده از قانون گوس خواهیم داشت.

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = Q \rightarrow \overline{D} = \frac{Q}{2\pi R l}\hat{a}_R$$

چون $\overline{D}$ شعاعی است بر مرز مشترک دی الکتریک‌ها عمود بوده و بعلت پیوستگی مولفه عمودی D میتوان نتیجه گرفت که D روی سطح گوس ثابت است.

$$\overline{E} = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 R l}\hat{a}_R & a<R<c \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 R l}\hat{a}_R & c<R<b \end{cases}$$



شکل (۴-۸): خازن دو لایه استوانه‌ای

$$V_0 = \int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell} = \int_a^c \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 R l} dR + \int_c^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 R l} dR$$

$$V_0 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 l} \ln \frac{c}{a} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 l} \ln \frac{b}{c}$$

$$\frac{V_0}{Q}=\frac{1}{C}=\frac{\ln\frac{c}{a}}{2\pi\varepsilon_1\ell}+\frac{\ln\frac{b}{c}}{2\pi\varepsilon_2\ell}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

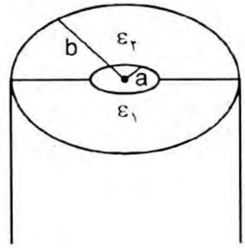
یعنی خازنهای تشکیل شده با هم سری هستند و این بدان علت است که مرز مشترک دی الکتریک‌ها با سطوح خازن موازی می‌باشد. در حالتی که مرز مشترک دی الکتریکها بر سطوح خازن عمود باشد چون میدان شعاعی می‌باشد پس بر مرز مشترک دی الکتریک‌ها مماس می‌باشد و بعلت پیوستگی مولفه مماس E میتوان گفت E در دو محیط دی الکتریک با هم مساوی می‌باشد بنابراین بعلت یکسان نبودن εها نتیجه می‌گیریم که D ها در دو محیط دی الکتریک مساوی نیستند (در اینحالت برای $\pi > \phi > 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ و برای $2\pi > \phi > \pi$، $\varepsilon = \varepsilon_2$ می‌باشد). با استفاده از قانون گوس خواهیم داشت:

$$\oint \overline{D}.\overline{ds}=Q \rightarrow (D_1+D_2)\pi R l=Q \rightarrow \begin{cases}\overline{D}_1+\overline{D}_2=\dfrac{Q}{\pi R l}\,\hat{a}_r\\[2mm] \dfrac{\overline{D}_1}{\varepsilon_1}=\dfrac{\overline{D}_2}{\varepsilon_2}=\overline{E}_1=\overline{E}_2\end{cases}$$

$$\rightarrow\ \overline{D}_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{\pi R l}\hat{a}_R \qquad D_2=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{\pi R l}\hat{a}_R$$

$$\overline{E}_1=\overline{E}_2=\frac{Q}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R l}\hat{a}_R$$

$$V_0=\int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell}=\frac{Q}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)l}\ln\frac{b}{a}$$



$$\frac{Q}{V_0}=C=\frac{\pi\varepsilon_1 l}{\ln\frac{b}{a}}+\frac{\pi\varepsilon_2 l}{\ln\frac{b}{a}}=C_1+C_2$$

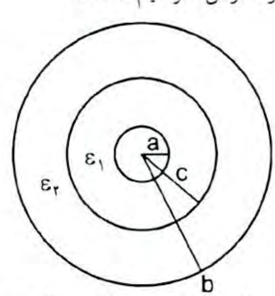
شکل (۴-۹): خازن دو لایه استوانه‌ای متشکل از خازنهای موازی

که C_1 و C_2 ظرفیت خازن تشکیل شده از نیمی از استوانه‌ها می‌باشد.

حال برای خازن چند لایه کروی ظرفیت را در دو حالت گفته شده برای خازن استوانه‌ای حساب می‌کنیم در حالت اول که مرز مشترک دی الکتریک‌ها با صفحات خازنها موازی است چون میدان شعاعی است پس $\overline{D}$ بر مرز مشترک دی الکتریک‌ها عمود است و بعلت پیوستگی مولفه عمودی D اگر از قانون گوس استفاده کنیم D روی سطح گوس ثابت است با استفاده از قانون گوس خواهیم داشت:

$$\oint \overline{D}.\overline{ds}=Q \rightarrow \overline{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r$$

$$\overline{E}=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\hat{a}_r & a<r<c\\[2mm] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\hat{a}_r & c<r<b\end{cases}$$



شکل (۴-۱۰): خازن کروی دو لایه متشکل از خازنهای سری

در اینحالت هم ضریب دی الکتریک در فاصله $a<r<c$ برابر ε_1 و ضریب دی الکتریک در فاصله $c<r<b$ برابر ε_2 می‌باشد.

$$V_0=\int_a^b \overline{E}.\overline{d\ell}=\int_a^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}dr+\int_c^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right]+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left[\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\rightarrow \frac{V_0}{Q}=\frac{1}{C}=\frac{1}{\dfrac{4\pi\varepsilon_1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}}+\frac{1}{\dfrac{4\pi\varepsilon_2}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

یعنی خازنهای تشکیل شده با هم سری هستند و این بدان علت است که مرز مشترک دی الکتریک‌ها با صفحات خازن موازی است. در حالتی که مرز مشترک دی الکتریک‌ها بر سطوح خازن عمود باشد چون میدان شعاعی است پس بر مرز مشترک دی الکتریک‌ها مماس می‌باشد و بعلت پیوستگی مولفه مماس E میتوان گفت E در دو محیط دی الکتریک با هم مساوی می‌باشد بنابراین بعلت یکسان نبودن εها نتیجه می‌گیریم که در دو محیط دی الکتریک Dها یکسان نیستند بنابراین قانون گوس به صورت زیر خواهد بود:

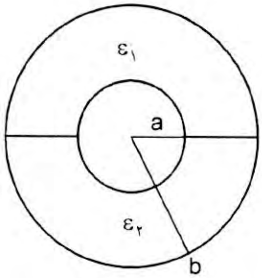
$$\oint \overline{D}\cdot\overline{ds}=Q \rightarrow D_1\,(2\pi r^2)+D_2\,(2\pi r^2)=Q$$

$$\begin{cases} D_1+D_2=\dfrac{Q}{2\pi r^2} \\ \dfrac{D_1}{\varepsilon_1}=\dfrac{D_2}{\varepsilon_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{D}_1=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\dfrac{Q}{2\pi r^2}\,\hat{a}_r \\ \overline{D}_2=\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\dfrac{Q}{2\pi r^2}\,\hat{a}_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{E}_1=\overline{E}_2=\frac{D_1}{\varepsilon_1}=\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{Q}{2\pi r^2}\,\hat{a}_r=\overline{E}$$

$$V_0=\int_a^b \overline{E}\cdot\overline{dr}=\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{V_0}=\frac{2\pi\varepsilon_1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}+\frac{2\pi\varepsilon_2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \Rightarrow C=C_1+C_2$$

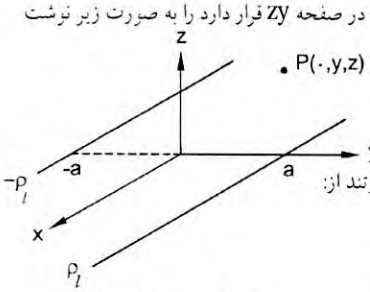


شکل (۴-۱۱): خازن کروی دو لایه متشکل از خازنهای موازی

که C_1 و C_2 ظرفیت بین دو نیمکره هستند. همانطوریکه ملاحظه می‌شود دو خازن تشکیل شده با هم موازی هستند و این بدان علت است که مرز مشترک دو دی الکتریک بر صفحات خازن عمود است.

۴-۶-۶- خازن دو سیمه

دو میله با چگالی ρ_ℓ و $-\rho_\ell$ که موازی با محور xها و در صفحه xy قرار دارند مطابق شکل در نظر بگیرید چون میله‌ها در جهت x بی نهایت هستند پس پتانسیل تابع x نیست و میتوان پتانسیل نقطه‌ای مثل P را که در صفحه zy قرار دارد را به صورت زیر نوشت



شکل (۴-۱۲): خازن دو سیمه

$$V_P=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad (4\text{-}43)$$

که R_2 و R_1 به ترتیب فاصله نقطه P از میله‌های ρ_ℓ - و ρ_ℓ هستند که عبارتند از:

$$R_1=\sqrt{z^2+(y-a)^2} \qquad (4\text{-}44)$$

$$R_2=\sqrt{z^2+(y+a)^2}$$

در نتیجه خواهیم نوشت:

$$V_P=\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z^2+(y+a)^2}{z^2+(y-a)^2}$$

برای بدست آوردن معادله سطوح هم پتانسیل کافیست که $V_P = V_\circ$ قرار دهیم که $V_\circ$ مقداری ثابت است.

$$\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{z^2+(y+a)^2}{z^2+(y-a)^2} = V_\circ \rightarrow \frac{z^2+(y+a)^2}{z^2(y-a)^2} = e^{\frac{4\pi\varepsilon_\circ V_\circ}{\rho_\ell}} = k$$

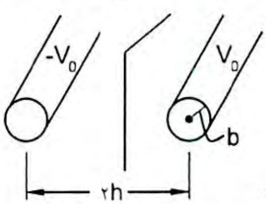
$$\Rightarrow y^2 - 2ay\,\frac{k+1}{k-1} + z^2 + a^2 = 0 \rightarrow \left(y - a\frac{k+1}{k-1}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\right)^2$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود معادله فوق معادلهٔ یک دایره بشعاع $\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}$ و مرکز $O\left|\begin{matrix} a\frac{k+1}{k-1} \\ 0 \end{matrix}\right.$ در صفحه zy است از

آنجائیکه نقطه P را میتوان در تمام صفحات موازی صفحه zy در نظر گرفت پس بطور کلی معادله سطوح هم پتانسیل استوانه خواهد شد که سطح مقطع آن با صفحه zy دایره‌ای است که معادله آن در بالا داده شده است حال اگر $V_P = -V_\circ$ قرار دهیم برای بدست آوردن معادله سطوح هم پتانسیل کافی است که در روابط بالا k را به $\frac{1}{k}$ تبدیل کنیم در اینصورت معادله بالا به فرم

$$\left[y + a\frac{k+1}{k-1}\right]^2 + z^2 = \left[\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\right]^2 \qquad (۴۵-۴)$$

در خواهد آمد که دایره‌ای است که قرینه دایره بالا نسبت به صفحه zx خواهد بود بنابراین سطوح هم پتانسیل دو استوانه موازی و قرینه نسبت به صفحه zx خواهند بود دقت کنید که فاصله محورهای دو استوانه از محور x برابر است با $h = a\frac{k+1}{k-1}$ (بنابراین فاصله محور دو استوانه 2h خواهد بود) و شعاع استوانه‌ها



شکل (۴-۱۳): استوانه‌های هم پتانسیل

$b = a\frac{k+1}{k-1}$ می‌باشد. از آنچه گفته شد چنین نتیجه می‌گیریم که دو میله به چگالی ρ_l و $-\rho_l$ که بفاصله 2a از هم قرار دارند دو استوانه که همان سطوح هم پتانسیل هستند ایجاد می‌کنند که شعاع استوانه‌ها b و فاصله محورهای آنها 2h می‌باشد که b و h در بالا تعریف شده‌اند حالا میتوان ظرفیت بر واحد طول را برای خازن دو سیمه بدست آورد.

$$k = e^{\frac{4\pi\varepsilon_\circ V_\circ}{\rho_\ell}} \Rightarrow V_\circ = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_\circ}\ln\sqrt{k} \rightarrow \frac{\rho_\ell}{V_\circ} = \overline{C} = \frac{2\pi\varepsilon_\circ}{\ln\frac{(h+\sqrt{h^2-b^2})}{b}}$$

اما چون اختلاف پتانسیل بین دو استوانه هم پتانسیل $2V_\circ$ می‌باشد ظرفیت بر واحد طول بین دو سیم که همان ظرفیت بین دو استوانه بشعاع b و فاصله محورهای 2h می‌باشد عبارتست از $\frac{1}{2}\overline{C}$ بعبارت دیگر ظرفیت سیستم عبارتست از:

$$\overline{C} = \frac{\pi\varepsilon_\circ}{\ln\frac{(h+\sqrt{h^2-b^2})}{b}} = \frac{\pi\varepsilon_\circ}{\cosh^{-1}\left[\frac{h}{b}\right]} \qquad (۴۶-۴)$$

رابطه بالا در حقیقت ظرفیت بین دو میله استوانه‌ای بشعاع b که محورهای آنها بفاصله 2h از هم قراردارد می‌باشد حال در شرایط عملی که $h \gg b$ می‌باشد (فاصله استوانه‌ها خیلی بیشتر از شعاع آنها است مثل خطوط انتقال برق) رابطه بالا به رابطه زیر ساده می‌شود.

$$\overline{C}=\frac{\pi \varepsilon_{\circ}}{\ln \frac{2h}{b}} \qquad (۴۷-۴)$$

بعبارت دیگر ظرفیت بر واحد طول دو میله بشعاع b که بفاصله d از هم قرار دارند برابر است با $\overline{C}=\frac{\pi \varepsilon_{\circ}}{\ln \frac{d}{b}}$

همانطوریکه در فصل بعد خواهیم داشت میله ρ_ℓ- در حقیقت تصویر میله ρ_ℓ در استوانه‌ای به پتانسیل $V_{\circ}$- و میله ρ_ℓ تصویر میله ρ_ℓ- در استوانه‌ای به پتانسیل $V_{\circ}$ خواهد بود.

مثال ۲۳: دو میله استوانه‌ای به شعاع ۱ cm بفاصله ۵۰ cm از هم قرار دارند ظرفیت بر واحد طول سیستم را بدست آورید؟

حل: با استفاده از معادله (۴-۴۷) خواهیم داشت

$$\overline{C}=\frac{\pi \varepsilon_{\circ}}{\ln \frac{50}{1}}=7/1\,\mathrm{pf}$$

نکته: برای $V_{\circ}=0$ خواهیم داشت $k=1$ که در اینحالت شعاع دایره یعنی b بی نهایت می‌شود و دایره تبدیل به صفحه می‌شود که در حقیقت همان صفحه ZX است که پتانسیل آن صفر است زیرا درست در وسط دو استوانه با پتانسیل $V_{\circ}$- و $V_{\circ}$ قرار گرفته است این صفحه درست بین دو میله ρ_ℓ+ و ρ_ℓ- نیز قرار گرفته است و باید پتانسیل آن صفر باشد.

سوالهای عایق و خازن

۱. ناحیه $\circ<z<d$ از ماده‌ای با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_r = \left[\text{۲}+\frac{z}{d}\right]^{\text{۲}}$ پوشانیده شده است اگر این ناحیه تحت میدان خارجی یکنواخت $E = E_\circ \hat{a}_z$ قرار گیرد چگالی سطحی بارهای پلاریزه در $z=\circ$ و $z=d$ کدام است؟ (ρ_{sb_1} در $z=\circ$ و ρ_{sb_2} در $z=d$)

۱) $\rho_{sb_1} = \circ$ ، $\rho_{sb_2} = -\frac{\text{۸}}{\text{۹}}\varepsilon_\circ E_\circ$

۲) $\rho_{sb_1} = \frac{-\text{۳}}{\text{۴}}\varepsilon_\circ E_\circ$ ، $\rho_{sb_2} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\varepsilon_\circ E_\circ$

۳) $\rho_{sb_1} = \frac{-\text{۳}}{\text{۴}}\varepsilon_\circ E_\circ$ ، $\rho_{sb_2} = \frac{\text{۸}}{\text{۹}}\varepsilon_\circ E_\circ$

۴) $\rho_{sb_1} = \circ$ ، $\rho_{sb_2} = \frac{\text{۸}}{\text{۹}}\varepsilon_\circ E_\circ$

۲. در مسئله بالا چگالی حجمی بارهای پلاریزه داخل عایق کدام است؟

۱) $\rho_b = \circ$ ۲) $\rho_b = \dfrac{-\text{۲}}{d\left[\text{۲}+\frac{z}{d}\right]^{\text{۳}}}$ ۳) $\rho_b = \dfrac{+\text{۲}}{d\left[\text{۲}+\frac{z}{d}\right]^{\text{۳}}}$ ۴) $\rho_b = \dfrac{\text{۲}}{d^{\text{۲}}\left[\text{۲}+\frac{z}{d}\right]^{\text{۳}}}$

۳. یک کره فلزی بشعاع a که دارای بار Q است در یک مایع با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_r = \text{۴}$ تا نیمه فرو رفته است در اینصورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\circ/\text{۸}Q$ روی نیمکره داخل مایع و $\circ/\text{۲}Q$ روی نیمکره بیرونی قرار دارد.

۲) $\circ/\text{۲}Q$ روی نیمکره داخل مایع و $\circ/\text{۸}Q$ روی نیمکره بیرونی قرار دارد.

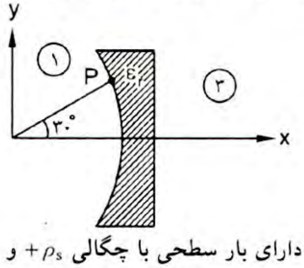
۳) $\circ/\text{۷۵}Q$ روی نیمکره داخل مایع و $\circ/\text{۲۵}Q$ روی نیمکره بیرونی قرار دارد.

۴) $\circ/\text{۵}Q$ روی نیمکره داخل مایع و $\circ/\text{۵}Q$ روی نیمکره بیرونی قرار دارد.

۴. در شکل زیر یک دی الکتریک به شکل لنز در معرض میدان $E = \text{۴}\sqrt{\text{۳}}\,\hat{a}_R + \text{۳}\hat{a}_\phi$ در نقطه P قرار دارد ضریب دی الکتریک نسبی دی الکتریک ε_r چقدر باشد تا میدان در محیط ۳ موازی محور y قرار می‌گیرد.

۱) ۲/۵   ۲) ۱/۵

۳) ۳   ۴) ۴



۵. صفحات خازنی مسطح در $z=\circ$ و $z=\text{۲}^m$ قرار داشته و به ترتیب دارای بار سطحی با چگالی $+\rho_s$ و $-\rho_s$

می‌باشد ضریب دی الکتریک بین صفحات خازن بطور خطی از $\varepsilon_\circ$ تا $۳\varepsilon_\circ$ از $z=\circ$ تا $z=۲^m$ تغییر می‌کند چگالی سطحی و حجمی بارهای مقید کدام است؟

۱) $\rho_{sb_1}=\circ$ ، $\rho_{sb_2}=\frac{۲}{۳}\rho_s$ ، $\rho_b=\frac{۱}{z+۱}\rho_s$

۲) $\rho_{sb_1}=\circ$ ، $\rho_{sb_2}=\frac{۳}{۴}\rho_s$ ، $\rho_b=\frac{\rho_s}{(z+۱)^۲}$

۳) $\rho_{sb_1}=\circ$ ، $\rho_{sb_2}=\frac{۲}{۳}\rho_s$ ، $\rho_b=\frac{+\rho_s}{(z+۱)^۲}$

۴) $\rho_{sb_1}=\frac{-۲}{۳}\rho_s$ ، $\rho_{sb_2}=\frac{۲}{۳}\rho_s$ ، $\rho_b=\circ$

۶. کره دی الکتریک با چگالی بار حجمی $\rho=\rho_\circ\frac{r}{a}$ (a شعاع کره) از عایقی به ضریب دی الکتریک نسبی متغیر $\varepsilon=\frac{\varepsilon_\circ}{r}$ ساخته شده است چگالی حجمی بارهای مقید (پلاریزه) کدام است؟

۱) $(۴-۵r)\frac{\rho_\circ}{۴a}$ ۲) $(۵r^۲-۴r)\frac{\rho_\circ}{۴a}$ ۳) $(r^۲-۲r)\frac{\rho_\circ}{۴a}$ ۴) $(۵r^۲+۴r)\frac{\rho_\circ}{۴a}$

۷. ناحیه $\circ<z<d$ از عایقی با ضریب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_r=۴$ پوشانیده شده است میدان یکنواخت $E=۲\hat{a}_z+۳\hat{a}_y$ در فضای آزاد برقرار است میدان داخل عایق و چگالی سطحی بارهای پلاریزه (مقید) در $z=d$ کدام است؟

۱) $\overline{E}=\circ/۵\hat{a}_z+۳\hat{a}_y$ ، $\rho_{sb}=\circ$

۲) $E=\circ/۵\hat{a}_z+۳\hat{a}_y$ ، $\rho_{sb}=۱/۵\,\varepsilon_\circ$

۳) $E=\frac{۱}{۴}\hat{a}_z+\frac{۳}{۴}\hat{a}_y$ ، $\rho_{sb}=\circ$

۴) $E=\circ/۵\hat{a}_z+۳\hat{a}_y$ ، $\rho_{sb}=۱/۵\,\varepsilon_\circ$

۸. ناحیه $\circ>z$ از عایقی با ضریب دی‌الکتریک نسبی $\varepsilon_{r_1}=۲$ و ناحیه $\circ<z$ از عایقی با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon_{r_2}=۴$ پوشانده شده‌است اگر در $\circ>z$ میدان‌بصورت $\overline{E}=(a-۲b+c)\hat{a}_x+(۲a-۲+۳c-۴)\hat{a}_y+(a-b+۲c+۴)\hat{a}_z$ و در ناحیه $\circ<z$ میدان بصورت $\overline{E}=(۲a+b)\hat{a}_x+(a-۳b-c-۲)\hat{a}_y+(a-b+c)\hat{a}_z$ باشد در اینصورت c,b,a کدامند؟

۱) $a=۲$ ، $b=۲$ ، $c=۱$

۲) $a=۲/۵$ ، $b=۱/۵$ ، $c=۱$

۳) $a=۱/۵$ ، $b=-۲/۵$ ، $c=-۱$

۴) $a=۲/۵$ ، $b=-۱/۵$ ، $c=-۱$

۹. یک پوسته عایق استوانه‌ای بشعاع داخلی a و شعاع خارجی b مفروض است یک میله طویل به چگالی بار طولی $\rho_\ell=۲\pi\varepsilon_\circ$ در محور این پوسته قرار دارد اگر میدان الکتریکی داخل پوسته $E=\frac{۱}{۲a}\hat{a}_R$ باشد

چگالی سطحی بارهای پلاریزه در سطح $R=a$ کدام است؟

۱) $\frac{-\varepsilon_\circ}{a}$ ۲) $\frac{-۲\varepsilon_\circ}{a}$ ۳) $\frac{-\varepsilon_\circ}{۲a}$ ۴) صفر

۱۰. خازن کروی بشعاع داخلی ۲cm و شعاع خارجی ۵cm مفروض است ضخامت لایه‌ای از دی الکتریک که روی کره داخلی باید قرارگیرد تا ظرفیت خازن ۲ برابر شود چقدر است اگر ضریب دی الکتریک نسبی دی‌الکتریک $\varepsilon_r = ۴$ باشد؟

۱) ۱cm ۲) ۱/۳cm ۳) ۱/۶cm ۴) ۱/۹cm

۱۱. صفحات یک خازن مسطح در $z=\circ$ و $z=d$ قرار گرفته است دی الکتریک بین دو صفحه متغیر و از رابطه $\varepsilon = \frac{۴\varepsilon_\circ}{۱+\frac{z^۲}{d^۲}}$ بدست آید ظرفیت خازن بر واحد سطح کدام است؟

۱) $\frac{۴\varepsilon_\circ}{d}$ ۲) $\frac{۳\varepsilon_\circ}{۴d}$ ۳) $\frac{\varepsilon_\circ}{۳d}$ ۴) $\frac{۳\varepsilon_\circ}{d}$

۱۲. کره فلزی بشعاع a را که دارای پتانسیل $V_\circ$ می‌باشد در یک محیط که ضریب دی الکتریک نسبی آن $\varepsilon_r = ۱ + \frac{a}{r}$ می‌باشد قرار می‌دهیم در اینصورت پتانسیل کره چقدر خواهد بود؟

۱) $\circ/۶۹V_\circ$ ۲) $\circ/۳۷V_\circ$ ۳) $\circ/۵V_\circ$ ۴) $\circ/۸V_\circ$

۱۳. ناحیه $۳<r<۵$ بین دو کره هادی شامل عایق غیر هموژن با $\varepsilon_r = \frac{۱}{r}$ می‌باشد اگر کره داخلی دارای پتانسیل ۱۲۰V و کره خارجی دارای پتانسیل ۱۰۰V باشد در اینصورت تابع پتانسیل بین دو کره کدام است؟

۱) $V = \frac{۱۵\circ}{r} + ۷\circ$ ۲) $V = ۱۴۲-۲\circ\ln r$ ۳) $V = ۱۵۴-۳۴\ln r$ ۴) $V = ۱۶۳-۳۹\ln r$

۱۴. در مسئله قبل اگر $\varepsilon_r = ۱ + \frac{۱}{r^۲}$ باشد ظرفیت خازن تشکیل شده کدام است؟

۱) ۹۴۵pf ۲) ۴۸۳pf ۳) ۸۹۶pf ۴) ۹۲۵pf

۱۵. ناحیه $z<\circ$ از عایقی با ضریب دی الکتریک $\varepsilon = \varepsilon_\circ(۱+\frac{۱}{z})$ پر شده است و ناحیه $z>\circ$ هوا است میدان الکتریکی $E = E_\circ \hat{a}_z$ در ناحیه $z>\circ$ وجود دارد کل بار حجمی پلاریزه در $z<\circ$ چقدر است ابعاد صفحه $z=\circ$ را a×b فرض کنید؟

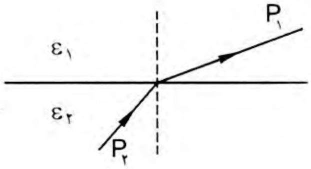
۱) $E_\circ ab$ ۲) $\frac{۱}{۲}E_\circ ab$ ۳) صفر ۴) ∞

۱۶. کابل هم محوری منطبق بر محور x مفروض است شعاع هادی داخلی a و شعاع هادی خارجی b می‌باشد فضای بین a و b از عایق با ضریب دی الکتریک $\varepsilon = \varepsilon_\circ e^{-|x|}$ پر شده است ظرفیت خازنی چنین کابلی با طول بی نهایت را محاسبه کنید؟

۱) $\frac{۲\pi\varepsilon_\circ}{\ln\frac{b}{a}}$ ۲) $\frac{۴\pi\varepsilon_\circ}{\ln\frac{b}{a}}$ ۳) $۴\pi\varepsilon_\circ\ln\frac{b}{a}$ ۴) $۲\pi\varepsilon_\circ\ln\frac{b}{a}$

۱۷. در سطح مشترک بدون بار دو عایق با ضرایب دی الکتریک نسبی $\varepsilon_{r_۱}$ و $\varepsilon_{r_۲}$ نسبت مولفه‌های عمودی

بردارهای چگالی حجمی دو قطبی الکتریکی یعنی نسبت $\frac{P_{n_2}}{P_{n_1}}$ برابر است با:



۱) $\frac{\varepsilon r_1 - 1}{\varepsilon r_2 - 1}$ ۲) $\frac{\varepsilon r_2 - 1}{\varepsilon r_1 - 1}$

۳) $\frac{\varepsilon r_1 (\varepsilon r_2 - 1)}{\varepsilon r_2 (\varepsilon r_1 - 1)}$ ۴) $\frac{\varepsilon r_2 (\varepsilon r_1 - 1)}{\varepsilon r_1 (\varepsilon r_2 - 1)}$

۱۸. یک استوانه به شعاع a به ارتفاع h با محور z به صورت $\overline{P} = \frac{1}{R}\hat{a}_R + z\hat{a}_z$ پلاریزه شده است کل بار سطحی پلاریزه روی سطح جانبی استوانه کدام است؟

۱) $2ah$ ۲) صفر ۳) $2\pi h$ ۴) $2\pi a$

۱۹. یک استوانه عایق به شعاع 3^m به طول 8^m بطور دائم به صورت $\overline{P} = P_0\,\hat{a}_z$ پلاریزه شده است میدان الکتریکی در وسط محور این استوانه را بدست آورید.

۱) $\frac{-P_0}{5\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{-P_0}{10\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{-P_0}{3\varepsilon_0}$ ۴) صفر

۲۰. بار $9\pi^{(c)}$ در مبدأ مختصات قرار دارد فضای $z>0$ از دی الکتریک با ضریب دی الکتریک $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ و فضای $z<0$ از دی الکتریک با ضریب دی الکتریک $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$ پوشانده شده است اندازه بردار چگالی شار الکتریکی در نقطه $P(1$ و 2 و $-2)$ کدام است؟

۱) ۲/ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۳

پاسخ سوالهای عایق و خازن

۱. گزینهٔ ۳) چون میدان بطور عمود بر عایق قرار دارد پس پیوستگی مولفه عمودی D را می‌نویسیم.

$$\overline{D}_{\text{عایق}} = \varepsilon_0 E_0 \hat{a}_z = \varepsilon \overline{E}_{\text{عایق}} \qquad \Rightarrow \overline{E}_{\text{عایق}} = \frac{E_0}{\left(2+\frac{z}{d}\right)^2}\hat{a}_z$$

$$\overline{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\overline{E}_{\text{عایق}} = \varepsilon_0 \left[\left(2+\frac{z}{d}\right)^2 - 1\right] \frac{E_0}{\left(2+\frac{z}{d}\right)^2}\hat{a}_z$$

$$\rho_{sb_1} = \overline{P}\cdot(-\hat{a}_z)\Big|_{z=0} = -\frac{3}{4}\varepsilon_0 E_0$$

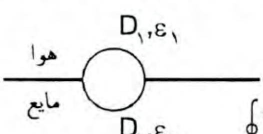
$$\rho_{sb_2} = \overline{P}\cdot(\hat{a}_z)\Big|_{z=d} = \frac{8}{9}\varepsilon_0 E_0$$

۲. گزینهٔ ۲)

$$\rho_b = -\overline{\nabla}\cdot\overline{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\varepsilon_0 \left\{\left(2+\frac{z}{d}\right)^2 - 1\right\}\frac{E_0}{\left(2+\frac{z}{d}\right)^2}\right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_0 E_0 \left[1 - \frac{1}{\left(2+\frac{z}{d}\right)^2}\right] = \varepsilon_0 E_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(2+\frac{z}{d}\right)^{-2} = \frac{-2}{d\left(2+\frac{z}{d}\right)^3}$$

۳. گزینهٔ ۱) بعلت پیوستگی مولفه مماسی E در مرز مشترک هوا و مایع E در دو محیط مساوی پس D در دو محیط یکسان نیست بنابراین معادله گوس بصورت زیر خواهد بود.



$$\oint \overline{D}\cdot\overline{ds} = D_1\, 2\pi r^2 + D_2\, 2\pi r^2 = Q \Rightarrow \begin{cases} D_1 + D_2 = \dfrac{Q}{2\pi r^2} \\[2mm] \dfrac{D_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_2}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

$$\rightarrow D_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{2\pi r^2} \qquad D_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{2\pi r^2}$$

$$\rho_{s_1} = D_1\Big|_{r=a} = \frac{1}{1+\varepsilon_r}\frac{Q}{2\pi a^2} \qquad \rho_{s_2} = D_2\Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\frac{Q}{2\pi a^2}$$

$$Q_1 = \rho_{s_1} 2\pi a^2 = \frac{1}{1+\varepsilon_r}Q = 0/2Q \qquad Q_2 = \rho_{s_2} 2\pi a^2 = \frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}Q = 0/8Q$$

۴. حل: گزینهٔ ۴) پیوستگی مولفه مماسی E و عمودی D در نقطه P، در مرزمشترک محیط ۱ و دی‌الکتریک بصورت زیراست.

$$\varepsilon_0 E_{R_1} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{R_2} \rightarrow E_{R_2} = \frac{1}{\varepsilon_r}E_{R_1} = \frac{4\sqrt{3}}{\varepsilon_r}$$

$$E_{\phi_2}=E_{\phi_1} \quad \rightarrow \quad E_{\phi_2}=3$$

$$E_2=\frac{4\sqrt{3}}{\varepsilon_r}\hat{a}_R+3\hat{a}_\phi=\frac{4\sqrt{3}}{\varepsilon_r}\left[\hat{a}_x\cos30+\hat{a}_y\sin30\right]+3\left[-\hat{a}_x\sin30+\hat{a}_y\cos30\right]$$

$$E_2=\left[\frac{6}{\varepsilon_r}-\frac{3}{2}\right]\hat{a}_x+\left[\frac{2\sqrt{3}}{\varepsilon_r}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]\hat{a}_y$$

برای اینکه میدان در ناحیه ۳ موازی محور y باشد باید مولفه E_x در محیط ۲ صفر باشد.

$$\frac{6}{\varepsilon_r}-\frac{3}{2}=0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_r=4$$

۵. گزینهٔ ۳)

$$\varepsilon=\alpha Z+\beta$$

$$\varepsilon(Z=0)=\varepsilon_0 \quad \rightarrow \beta=\varepsilon_0$$

$$\varepsilon(Z=2)=3\varepsilon_0 \quad \rightarrow \alpha=\varepsilon_0$$

$$\varepsilon=\varepsilon_0(Z+1) \quad \rightarrow \quad \varepsilon_r=Z+1$$

$$\overline{E}=\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{a}_Z=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0(Z+1)}\hat{a}_Z \rightarrow \overline{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\overline{E}=\frac{Z}{Z+1}\rho_s\,\hat{a}_Z$$

$$\rho_{sb_1}=\overline{P}.(-\hat{a}_Z)\Big|_{Z=0}=0 \qquad \rho_{sb_2}=P.\hat{a}_Z\Big|_{Z=2}=\frac{2}{3}\rho_s$$

$$\rho_s=-\nabla.\overline{P}=-\frac{\partial P_Z}{\partial Z}=\frac{\rho_s}{(Z+1)^2}$$

۶. گزینهٔ ۲) با استفاده از قانون گوس

$$\oint\overline{D}.\overline{ds}=Q=\int_0^r \rho\,4\pi r^2=\int_0^r \rho_0\frac{r}{a}4\pi r^2dr \rightarrow D(4\pi r^2)=\frac{\rho_0}{a}4\pi\frac{1}{4}r^4$$

$$\rightarrow\overline{D}=\frac{\rho_0 r^2}{4a}\hat{a}_r \rightarrow \overline{E}=\frac{\overline{D}}{\varepsilon}=\frac{\rho_0 r^3}{4a\varepsilon_0}\hat{a}_r \rightarrow \overline{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\overline{E}$$

$$\overline{P}=\varepsilon_0\left[\frac{1}{r}-1\right]\frac{\rho_0 r^3}{4a\varepsilon_0}\hat{a}_r \qquad \rho_b=-\nabla.\overline{P}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_r)$$

$$=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r-r^2\right]\frac{\rho_0 r^3}{4a}=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{4r^3\rho_0}{4a}-\frac{5\rho_0 r^4}{4a}\right]=\left[5r^2-4r\right]\frac{\rho_0}{4a}$$

۷. حل: گزینهٔ ۲) با استفاده از شرط مرزی میدان داخل عایق بدست می‌آید (محیط ۲ عایق است و محیط ۱ فضای آزاد)

$$E_{y_2}=E_{y_1} \quad \rightarrow \quad E_{y_1}=3 \quad \rightarrow \quad \overline{E}_2=0/5\hat{a}_z+3\hat{a}_y$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_r E_{z_2}=\varepsilon_0 E_{z_1} \Rightarrow E_{z_2}=\frac{1}{2} \qquad \overline{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E_2=1/5\varepsilon_0\hat{a}_z+6\varepsilon_0\hat{a}_y$$

$$\rho_{sb}=\overline{P}.\hat{a}_z=1/5\varepsilon_0$$

۸. حل: گزینهٔ ۴) شرط مرزی را می‌نویسیم:

$$E_{x_1}=E_{x_2} \Rightarrow a-2b+c=2a+b-c$$

$$E_{y_1}=E_{y_2} \Rightarrow a-b+2c+4=a-3b-c-2$$

$$\varepsilon_{r_1}E_{z_1}=\varepsilon_{r_2}E_{z_2} \Rightarrow 2(a-b+2c+4)=4(a-b+c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3b-2c=0 \\ 2b+3c=-6 \\ 2a-2b=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a + ۱۳b = -۱۲ \\ ۲a - ۲b = ۸ \end{cases} \rightarrow ۳۲b = -۴۸ \rightarrow \begin{matrix} b = -۱/۵ \\ a = ۲/۵ \end{matrix} \quad c = -۱$$

۹. حل: گزینهٔ ۳)

$$\overline{E} = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon R}\hat{a}_R = \frac{۱}{\varepsilon_r R}\hat{a}_R = \frac{۱}{۲a}\hat{a}_R \rightarrow \varepsilon_r = \frac{۲a}{R}$$

$$\overline{P} = \varepsilon_\circ(\varepsilon_r - ۱)\overline{E} = \varepsilon_\circ\left(\frac{۲a}{R} - ۱\right)\frac{۱}{۲a}\hat{a}_R = \varepsilon_\circ\left[\frac{۱}{R} - \frac{۱}{۲a}\right]\hat{a}_R$$

$$\rho_{sb} = \overline{P}\cdot(-\hat{a}_R)\Big|_{R=a} = -\varepsilon_\circ\left[\frac{۱}{a} - \frac{۱}{۲a}\right] = \frac{-\varepsilon_\circ}{۲a}$$

۱۰. حل: گزینهٔ ۲) ظرفیت خازن در حالت اول برابر است با:

$$C_\circ = \frac{۴\pi\varepsilon_\circ}{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}} = \frac{۴۰\pi\varepsilon_\circ}{۳}$$

در حالت دوم اگر ضخامت پوسته d باشد ظرفیت عبارتست از:

$$\frac{۱}{C} = \frac{\frac{۱}{a} - \frac{۱}{c}}{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon_r} + \frac{\frac{۱}{c} - \frac{۱}{b}}{۴\pi\varepsilon_\circ} \Rightarrow \frac{۳}{۸۰\pi\varepsilon_\circ} = \frac{\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{c}}{۱۶\pi\varepsilon_\circ} + \frac{\frac{۱}{c} - \frac{۱}{۵}}{۴\pi\varepsilon_\circ}$$

$$\frac{۳}{۲۰} = \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۴c} + \frac{۱}{c} - \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۰/۱۵ + ۰/۲ - ۰/۱۲۵ = \frac{۳}{۴c} \Rightarrow ۰/۲۲۵ = \frac{۳}{۴c}$$

$$\Rightarrow c = ۳/۳^{cm} \qquad d = c - a = ۳/۳ - ۲ = ۱/۳^{cm}$$

۱۱. حل: گزینهٔ ۴)

$$\frac{۱}{C} = \int\frac{۱}{dC} = \int_\circ^d \frac{dz}{\frac{۴\varepsilon_\circ}{۱ + \frac{z^۲}{d^۲}}} = \frac{۱}{۴\varepsilon_\circ}\int_\circ^d\left[۱ + \frac{z^۲}{d^۲}\right]dz = \frac{۱}{۴\varepsilon_\circ}\left[d + \frac{۱}{۳}d\right] = \frac{d}{۳\varepsilon_\circ}$$

$$\rightarrow C = \frac{۳\varepsilon_\circ}{d}$$

۱۲. حل: گزینهٔ ۱) میدان در خارج کره را با استفاده از قانون گوس بدست می‌آوریم

$$\oint\overline{D}.\overline{ds} = Q \rightarrow \overline{D} = \frac{Q}{۴\pi r^۲}\hat{a}_r \rightarrow \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{۴\pi r^۲(۱+\frac{a}{r})\varepsilon_\circ}\hat{a}_r = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r(r+a)}\hat{a}_r$$

$$V = -\int_\infty^a \overline{E}.\overline{d\ell} = \int_a^\infty \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r(r+a)}dr = \int_a^\infty \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{r} - \frac{۱}{r+a}\right]\frac{۱}{a}dr$$

$$= \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}\ln\frac{r}{r+a}\Big]_a^\infty = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}\ln ۲ = V_\circ \ln ۲ = ۰/۶۹\,V_\circ$$

۱۳. حل: گزینهٔ ۴) با توجه به اینکه $\rho = ۰$ است (عایق بدون بار آزاد است) پس

$$\overline{\nabla}.\overline{D} = ۰ \rightarrow \overline{D} = \frac{k}{r}\hat{a}_r \rightarrow \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon} = \frac{k}{r}\hat{a}_r$$

$$V_\circ = V(r=۳) - V(r=۵) = -\int_۵^۳ \overline{E}.\overline{d\ell} = \int_۳^۵ \frac{k}{r}dr = k\ln\frac{۵}{۳} = ۱۲۰ - ۱۰۰ = ۲۰$$

$$\rightarrow k = \frac{۲۰}{\ln\frac{۵}{۳}} = ۳۹/۱۵ \qquad V(r) - V(r=۵) = -\int_۵^r \frac{k}{r}dr$$

$$\to V(r) - ۱۰۰ = \int_r^{۵} \frac{۳۹/۱۵}{r} dr = ۳۹/۱۵ \ln\frac{۵}{r} \to V(r) = ۳۹/۱۵\,(\ln ۵ - \ln r) + ۱۰۰$$

$$V(r) = ۱۶۳ - ۳۹/۱۵ \ln r$$

۱۴. حل: گزینهٔ ۳)

$$\overline{D} = \frac{k}{r^{۲}}\hat{a}_r \to \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon} = \frac{k}{(r^{۲}+۱)\varepsilon_{\circ}}\hat{a}_r \to V_{\circ} = \int_{۳}^{۵} \overline{E}.\overline{d\ell}$$

$$= k'(tg^{-۱}۵ - tg^{-۱}۳) = V_{\circ} \to k' = \frac{V_{\circ}}{۰/۱۲۴} = ۸/۰۴۱V_{\circ} \qquad k' = \frac{k}{\varepsilon_{\circ}}$$

$$\rho_s = D(r=۳) = \frac{k}{۹} \to Q = \rho_s\, ۴\pi \times ۹ = ۴\pi k$$

$$C = \frac{Q}{V_{\circ}} = \frac{۴\pi k}{۰/۱۲۴k'} = \frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{۰/۱۲۴} = ۸۹۶\,pf$$

۱۵. گزینهٔ ۱) شرط مرزی میدان را در $z=۰$ می‌نویسم.

$$D_{z_۱} = D_{z_۲} \Rightarrow \varepsilon_{\circ}E_{\circ} = \varepsilon_{\circ}(۱+\frac{۱}{z})E_۲ \qquad \begin{array}{ccc} \varepsilon_{\circ} & z>۰ & ۱ \\ \hline \varepsilon_{\circ}(۱+\frac{۱}{z}) & z<۰ & ۲ \end{array} \; z=۰$$

$$E_۲ = \frac{z}{z+۱}E_{\circ} \qquad \overline{P} = \varepsilon_{\circ}(\varepsilon_r - ۱)\overline{E}_۲ = \varepsilon_{\circ}(\frac{۱}{z})\frac{z}{z+۱}E_{\circ}\hat{a}_z = \frac{E_{\circ}}{z+۱}\hat{a}_z$$

$$\rho_b = -\overline{\nabla}.\overline{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{E_{\circ}}{(z+۱)^{۲}} \to Q_b = \int_{۰}^{\infty}\rho_b ab\,dz = \int_{۰}^{\infty}E_{\circ}ab\frac{dz}{(z+۱)^{۲}}$$

$$= E_{\circ}ab\left[-\frac{۱}{z+۱}\right]_{۰}^{\infty} = E_{\circ}ab \;\; (c)$$

۱۶. گزینه ۲) ظرفیت طول dx از کابل برابر است با:

$$dC = \frac{۲\pi\varepsilon\, dx}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}e^{-|x|}dx}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty}dc = ۲\int_{۰}^{\infty}dc = ۲\int_{۰}^{\infty}\frac{۲\pi\varepsilon_{\circ}e^{-x}}{\ln\frac{b}{a}}dx = \frac{۴\pi\varepsilon_{\circ}}{\ln\frac{b}{a}}$$

در حقیقت جزء خازنها با هم موازی هستند (تغییرات ε در جهت موازی با سطوح هم پتانسیل است)

۱۷. گزینهٔ ۳)

$$D_{n_۲} = D_{n_۱} \Rightarrow \varepsilon_۲\frac{P_{n_۲}}{\varepsilon_{\circ}(\varepsilon_{r_۲}-۱)} = \varepsilon_۱\frac{P_{n_۱}}{\varepsilon_{\circ}(\varepsilon_{r_۱}-۱)}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_{r_۲}P_{n_۲}}{\varepsilon_{r_۲}-۱} = \frac{\varepsilon_{r_۱}P_{n_۱}}{\varepsilon_{r_۱}-۱} \to \frac{P_{n_۲}}{P_{n_۱}} = \frac{\varepsilon_{r_۱}(\varepsilon_{r_۲}-۱)}{\varepsilon_{r_۲}(\varepsilon_{r_۱}-۱)}$$

۱۸. گزینهٔ ۳)

$$\rho_{sb}\Big|_{R=a} = \overline{P}.\hat{a}_R\Big|_{R=a} = \frac{۱}{a}$$

$$Q_{sb} = (۲\pi a\, h)\rho_{sb} = ۲\pi h$$

۱۹. گزینهٔ ۱) میدان ناشی از یک صفحه دایروی بشعاع a و چگالی ρ_s روی محور دایره عبارتست از:

$$\overline{E}=\frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|h|}-\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]\hat{a}_z$$

$$\rho_{sb}=\overline{P}\cdot\hat{n}=\begin{cases}-P_0 & \text{روی قاعده پایین}\\ 0 & \text{روی سطح جانبی}\\ +P_0 & \text{روی قاعده بالا}\end{cases}$$

برای صفحه بالایی $\rho_s=P_0$ و $h=-\frac{L}{2}$ و برای صفحه پائینی $\rho_s=-P_0$ و $h=\frac{L}{2}$ می‌باشد.

$$\overline{E}=\frac{P_0\left(-\frac{L}{2}\right)}{2\varepsilon_0}\left[\frac{2}{L}-\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{L^2}{4}}}\right]\hat{a}_z+\frac{-P_0\left(\frac{L}{2}\right)}{2\varepsilon_0}\left[\frac{2}{L}-\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{L^2}{4}}}\right]\hat{a}_z$$

$$=\frac{-P_0 L}{2\varepsilon_0}\left[\frac{2}{L}-\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{L^2}{4}}}\right]\hat{a}_z=\frac{-P_0\times 8}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{9+16}}\right]\hat{a}_z$$

$$=\frac{-4P_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]\hat{a}_z=\frac{-P_0}{5\varepsilon_0}$$

۲۰. گزینهٔ ۴) با استفاده از قانون گوس و با توجه به اینکه D در دو محیط مساوی نیست داریم:

$$\oint\overline{D}\cdot\overline{ds}=Q\quad\rightarrow\begin{cases}D_1+D_2=\frac{Q}{2\pi r^2}\\ \frac{D_1}{\varepsilon_1}=\frac{D_2}{\varepsilon_2}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}D_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{2\pi r^2}\\ D_2=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{2\pi r^2}\end{matrix}$$

$$E_1=E_2=\frac{Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,2\pi r^2}$$

چون نقطه P در فضای $z>0$ قرار دارد پس باید مختصات نقطه P را در D_2 قرار دهیم.

$$D_2=\frac{3\varepsilon_0}{5\varepsilon_0}\times\frac{Q}{2\pi\left[1^2+2^2+(-2)^2\right]}=\frac{3}{5}\times\frac{Q}{18\pi}=\frac{3}{5}\times\frac{9\pi}{18\pi}=0/3$$