فصل سوم

پتانسیل الکتریکی

اگر در یک محیط میدان الکتریکی وجود داشته باشد جهت حرکت یک بار q' از یک نقطه به نقطه دیگر باید کاری انجام داد مثلاً اگر بار q میدان E را در فضا ایجاد کند این میدان بر بار q' نیروی $F = q'E$ وارد می‌کند بنابراین اگر خلاف جهت میدان بار q' را حرکت دهیم (تا کاری انجام شود در غیر اینصورت برای حرکت در جهت میدان نیاز به انجام کاری نیست بلکه این کار را میدان انجام می‌دهد) نیروی خلاف جهت میدان $F' = -F = -qE'$ می‌باشد در اینصورت کار انجام شده توسط نیروی F' عبارتست از

$$W_{AB} = \int_A^B F' . d\ell \qquad (۱-۳)$$

که W_{AB} کار لازم جهت انتقال بار q' از نقطه A به B می‌باشد اگر بجای F' قرار دهیم خواهیم داشت

$$W_{AB} = -\int_A^B q' \overline{E} . \overline{d\ell} = -q' \int_A^B \overline{E} . \overline{d\ell} \qquad (۲-۳)$$

اگر $q' = 1^c$ باشد کار انجام شده جهت انتقال آن از A به B را اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B می‌نامیم بعبارت دیگر اختلاف پتانسیل بین دو نقطه کار لازم جهت انتقال بار واحد مثبت بین دو نقطه می‌باشد با آنچه گفته شد داریم.

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \overline{E} . \overline{d\ell} \qquad (۳-۳)$$

برای به دست آوردن پتانسیل یک نقطه باید پتانسیل نقطه مرجع را داشته باشیم بعبارت دیگر پتانسیل الکتریکی یک نقطه اختلاف پتانسیل آن نقطه با پتانسیل نقطه مرجع می‌باشد. در این رابطه فرض کنید بار Q در فضا قرار دارد اگر دو نقطه A و B به ترتیب در فواصل r_A و r_B از Q باشند در اینصورت اختلاف پتانسیل بین دو نقطه عبارتست از

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \overline{E} . \overline{d\ell} = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{a}_r . \overline{d\ell} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V_B - V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} \qquad (۴-۳)$$

از رابطه (۳-۴) معلوم است که معادله پتانسیل هر نقطه با فاصله آن نقطه از بار نسبت عکس دارد و پتانسیل یک نقطه بفاصله r از بار نقطه‌ای Q از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (۵-۳)$$

بعبارت دیگر پتانسیل در $r = \infty$ صفر است یعنی نقطه مرجع نقطه بی نهایت است بنابراین پتانسیل هر نقطه اختلاف پتانسیل بین آن نقطه و نقطه $r = \infty$ می‌باشد با آنچه گفته شد پتانسیل نقطه A عبارتست از:

$$V_A = -\int_\infty^A \overline{E} . \overline{d\ell} \qquad (۶-۳)$$

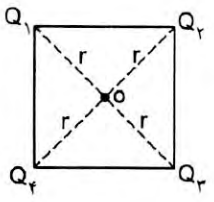
بعبارت دیگر پتانسیل هر نقطه کار لازم جهت انتقال واحد بار از بی نهایت به آن نقطه می‌باشد از رابطه (۳-۵) معلوم است که رابطه بین پتانسیل و بار الکتریکی رابطه خطی است بنابراین اصل جمع آثار برقرار است یعنی پتانسیل ناشی از N بار $Q_۱$، $Q_۲$،..... Q_N برابر است با مجموع پتانسیل‌های ناشی از تک تک بارها یعنی:

$$V_A = \sum_{i=۱}^{N} \frac{Q_i}{۴\pi\varepsilon_۰ r_i} \qquad (۳-۷)$$

که r_i فاصله نقطه A از بار Q_i می‌باشد. رابطه (۳-۷) در حقیقت پتانسیل نقطه A را بیان می‌کند. شبیه آنچه در بحث میدان الکتریکی گفته شد بارها بصورت نقطه‌ای و پراکنده نیستند بلکه بصورت طولی، سطحی و یا حجمی و بصورت پیوسته توزیع شده‌اند در اینصورت رابطه (۳-۷) به فرم زیر خواهد شد.

$$V = \int \frac{dq}{۴\pi\varepsilon_۰ r} = \begin{cases} \int_L \frac{\rho_\ell\, d\ell}{۴\pi\varepsilon_۰ r} & \text{توزیع طولی بار} \\ \int_s \frac{\rho_s\, ds}{۴\pi\varepsilon_۰ r} & \text{توزیع سطحی بار} \\ \int_v \frac{\rho\, dv}{۴\pi\varepsilon_۰ r} & \text{توزیع حجمی بار} \end{cases} \qquad (۳-۸)$$

مثال ۱: چهار بار ۱^{nc} , -۴^{nc} , ۳^{nc} , ۵^{nc} در روی رئوس یک مربع به ضلع ۵^{m} قرار دارند پتانسیل در مرکز مربع چقدر است؟



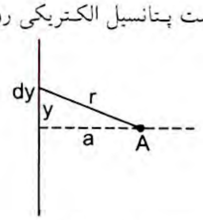
حل:

$$V_O = \frac{Q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{Q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{Q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{Q_۴}{۴\pi\varepsilon_۰ r}$$

$$V_O = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰ r}\left[Q_۱ + Q_۲ + Q_۳ + Q_۴\right] = \frac{۹\times ۱۰^{۹}}{۵\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\left[۵\times ۱۰^{-۹}\right]$$

$$V_O = \frac{۱۸}{\sqrt{۲}} = ۱۲/۶^{V}$$

مثال ۲: بار الکتریکی با چگالی طولی ρ_ℓ روی یک میله بطول L توزیع شده است پتانسیل الکتریکی روی عمود منصف میله و بفاصله a از میله را بدست آورید.



حل: از رابطه (۳-۸) اولین معادله استفاده می‌کنیم.

$$V_A = \int \frac{\rho_\ell\, dy}{۴\pi\varepsilon_۰ r} = \int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}} \frac{\rho_\ell\, dy}{۴\pi\varepsilon_۰ \sqrt{a^۲ + y^۲}} = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_۰} \sinh^{-۱}\frac{L}{۲a}$$

$$V_A = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_۰} \ln\left[\frac{L}{۲a} + \sqrt{۱ + \left[\frac{L}{۲a}\right]^۲}\right]$$

اگر $L \gg a$ ***باشد (میله خیلی بلند) در اینصورت رابطه بالا به رابطه زیر ساده می‌شود.***

$$V_A = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_۰} \ln\frac{L}{a} \qquad (۳-۹)$$

مثال ۳: بار الکتریکی به چگالی سطحی ρ_s روی یک نیم کره و سطح قاعده آن به شعاع r=a توزیع شده است پتانسیل الکتریکی در مرکز نیمکره را بدست آورید.

حل: ابتدا پتانسیل در مرکز نیمکره ناشی از بار سطحی نیمکره را با استفاده از دومین رابطه معادله (۳-۸) بدست می‌آوریم.

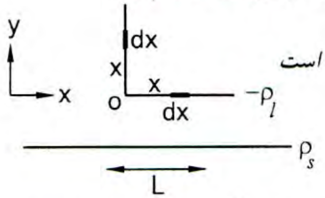
$$V_1 = \iint \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\rho_s a^2 \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\rho_s a}{2\varepsilon_0}$$

حال پتانسیل ناشی از بار سطحی دایره قاعده را بدست می‌آوریم.

$$V_2 = \iint \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 R} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho_s R\, dR\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_s a}{2\varepsilon_0}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0}$$

مثال ۴: روی یک صفحه بزرگ بار سطحی با چگالی ثابت ρ_s موجود است میله‌ای به طول L با چگالی $-\rho_\ell$ به فاصله h موازی با این صفحه وجود دارد کار لازم جهت چرخاندن میله بطور عمود بر صفحه کدام است.



حل: می‌دانیم میدان ناشی از یک صفحه بزرگ ثابت و عمود بر صفحه است بنابراین میدان ناشی از صفحه داده شده $E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_y$ می‌باشد

کار لازم جهت چرخاندن بار dq به طول dx و در فاصله x از نقطه o از حالت افقی به عمودی عبارتست از:

$$dW = -dq\int_x^0 \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_y \cdot \overline{d\ell} = -\rho_\ell d_x \int_x^0 \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} dy = \frac{\rho_s\rho_\ell}{2\varepsilon_0} x\, dx$$

$$W = \int_0^L dW = \frac{\rho_s\rho_\ell}{4\varepsilon_0} L^2$$

۳-۱- رابطه بین میدان و پتانسیل

رابطه (۳-۳) را میتوان بصورت زیر نوشت.

$$dV = -\overline{E} \cdot \overline{d\ell} \qquad (۳-۱۰)$$

حال اگر به جای dV، $\overline{E}$, $\overline{d\ell}$ قرار دهیم خواهیم داشت.

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = -\left(E_x\hat{a}_x + E_y\hat{a}_y + E_z\hat{a}_z\right)\cdot\left(dx\,\hat{a}_x + d_y\hat{a}_y + d_z\hat{a}_z\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz$$

برای اینکه رابطه بالا همواره برقرار باشد باید ضرایب dx و dy و dz در دو طرف تساوی با هم برابر باشند بعبارت دیگر

$$E_x = \frac{-\partial V}{\partial x} \qquad (۳-۱۱ - الف)$$

$$E_y = \frac{-\partial V}{\partial y} \qquad (۳-۱۱ - ب)$$

$$E_z = \frac{-\partial V}{\partial z} \qquad (۳-۱۱ - ج)$$

حال میتوان بردار میدان را بر حسب مشتقات جزئی پتانسیل بصورت زیر نوشت

$$\overline{E} = E_x\,\hat{a}_x + E_y\,\hat{a}_y + E_z\,\hat{a}_z = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z\right] \qquad (۱۲-۳)$$

معادله (۳-۱۰) را میتوان بصورت زیر نوشت.

$$\overline{E} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_x\right]V \qquad (۱۳-۳)$$

عبارت داخل پرانتز رابطه (۳-۱۳) همان بردار اپراتور $\overline{\nabla}$ می‌باشد یعنی

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z \qquad (۱۴-۳)$$

ضرب $\overline{\nabla}$ در یک اسکالر را گرادیان آن اسکالر می‌نامند بعبارت دیگر خواهیم داشت.

$$\overline{E} = -\,\mathrm{grad}V = -\overline{\nabla}V \qquad (۱۵-۳)$$

یعنی میدان را میتوان با داشتن پتانسیل بدست آورد. رابطه (۳-۱۲) را به ترتیب در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی میتوان بصورت زیر نوشت.

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial R}\hat{a}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z \qquad (۱۶-۳)$$

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{a}_\phi \qquad (۱۷-۳)$$

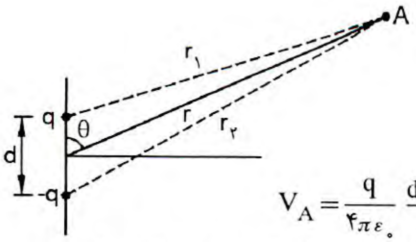
رابطه (۳-۱۰) را میتوان بصورت $dV = -E\,d\ell\cos\theta$ نوشت که θ زاویه بین بردار $\overline{E}$ و بردار $\overline{d\ell}$ می‌باشد اگر بخواهیم dV حداکثر باشد باید $\theta = \pi$ فرض شود در اینصورت خواهیم داشت.

$$E = \frac{dV}{d\ell}\Big|_{max} \qquad (۱۸-۳)$$

بعبارت دیگر اگر بخواهیم تغییرات پتانسیل به ازای $d\ell$ معین حداکثر باشد باید در جهتی مخالف جهت بردار میدان ($\theta=\pi$) حرکت کنیم جهتی که در آن جهت تغییرات پتانسیل حداکثر است را بردار عمود بر تابع پتانسیل و یا گرادیان پتانسیل می‌نامیم که آن جهت با میدان زاویه $\theta=\pi$ می‌سازد بعبارت دیگر بردار میدان در جهت خلاف بردار گرادیان می‌باشد و این همان رابطه (۳-۱۴) را بیان می‌کند.

مثال ۵: با استفاده از رابطه بین پتانسیل و میدان، میدان ناشی از یک دو قطبی الکتریکی را در فاصله دور بدست آورید.

حل: *اگر نقطه A بفاصله r_1 از بار q و r_2 از بار $-q$ فرض شود خواهیم داشت.*



$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = r - \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$r_2 = r + \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} \;\rightarrow\; V_A = \frac{q\,d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

چون پتانسیل در مختصات کروی بدست آمده است از رابطه (۳-۱۵) جهت بدست آوردن میدان استفاده می‌کنیم.

$$\overline{E}_A = -\overline{\nabla}V_A = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{a}_\theta$$

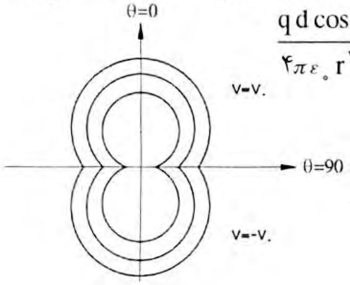
که پس از مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\overline{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right] \qquad (۱۹-۳)$$

این همان رابطه (۲-۳۲) می‌باشد که قبلاً بدست آوردیم.

مثال ۶: معادله خطوط هم پتانسیل را برای دو قطبی بدست آورید.

حل: اگر در مثال قبل $V_A = V_\circ$ *قرار دهیم مکان هندسی نقاطی از فضا که دارای پتانسیل* $V_\circ$ **هستند بدست می‌آید.**



$$\frac{q\,d\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} = V_\circ \;\Rightarrow\; \frac{k\cos\theta}{r^۲} = V_\circ \;\rightarrow\; r = \sqrt{\frac{k}{V_\circ}\cos\theta} \;\Rightarrow$$

$$r = C\sqrt{\cos\theta} \qquad (۲۰-۳)$$

معادله (۳-۲۰) در دستگاه مختصات قطبی در مقابل رسم شده است.

۳-۲- پتانسیل ناشی از یک میله طویل با چگالی بار طولی ρ_ℓ

پتانسیل در فاصله R از میله با چگالی ρ_ℓ را میتوان از رابطه انتگرالی (۳-۶) بدست آورد ولی در اینجا پتانسیل مبنا در بی نهایت نیست بلکه نقطه‌ای به فاصله $R_\circ$ از میله است یعنی:

$$V(R) = -\int_{R_\circ}^{R} \overline{E}\cdot\overline{d\ell} \qquad (۲۱-۳)$$

بردارهای میدان و $\overline{d\ell}$ عبارتند از:

$$\overline{E} = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ R}\,\hat{a}_R \qquad (۲۲-۳)$$

$$\overline{d\ell} = dR\,\hat{a}_R + R\,d\phi\,\hat{a}_\phi + dz\,\hat{a}_z \qquad (۲۳-۳)$$

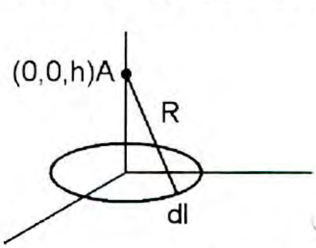
با جایگزینی (۳-۲۲) و (۳-۲۳) در (۳-۲۱) خواهیم داشت.

$$V(R) = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{R_\circ}{R} \qquad (۲۴-۳)$$

با مقایسه این رابط با رابطه (۳-۹) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳-۳- پتانسیل ناشی از یک حلقه دایروی به شعاع a و چگالی بار طولی ρ_ℓ در روی محور دایره

با استفاده از رابطه اول (۳-۸) خواهیم داشت.



$$V_A = \int \frac{\rho_\ell\,d\ell}{۴\pi\varepsilon_\circ R} = \int_\circ^{۲\pi} \frac{\rho_\ell\,a\,d\phi}{۴\pi\varepsilon_\circ\sqrt{a^۲+h^۲}}$$

$$V_A = \frac{\rho_\ell\,a}{۲\varepsilon_\circ\sqrt{a^۲+h^۲}} \qquad (۲۵-۳)$$

رابطه (۳-۲۵) رابطه مهمی است و کاربرد زیادی در محاسبه پتانسیل برای سایر اشکال هندسی دارد بدیهی است با قرار دادن $R=\circ$ پتانسیل در مرکز حلقه از رابطه

$$V_\circ = \frac{\rho_\ell}{۲\varepsilon_\circ} \qquad (۲۶-۳)$$

بدست می‌آید در مثال‌های بعدی به کاربرد این دو رابطه پی خواهیم برد.

مثال ۷: پتانسیل در مرکز یک دیسک به شعاع a و چگالی بار سطحی ρ_s را با استفاده از روابط پتانسیل در مرکز یک حلقه بدست آورید.

حل: اگر یک حلقه بضخامت dR و شعاع r در دیسک در نظر بگیریم چگالی بار طولی معادل آن ρ_s dR می‌باشد حال پتانسیل در مرکز یک حلقه بشعاع R و چگالی بار طولی ρ_ℓ را با استفاده از رابطه (۳-۲۶) پتانسیل ناشی از این حلقه در مرکز دیسک، dV_O به صورت زیر خواهد شد.

$$dV_O=\frac{\rho_\ell}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho_s\,dR}{2\varepsilon_0}$$

$$V_O=\int_0^a dV_O=\frac{\rho_s a}{2\varepsilon_0} \qquad (۲۷-۳)$$

این رابطه را قبلاً در مثال ۳ بدست آوردیم.

مثال ۸: پتانسیل در روی یک محور دیسک بشعاع a و چگالی بار سطحی ρ_s را بدست آورید.

حل: اگر یک حلقه به ضخامت dR و شعاع R در دیسک در نظر بگیریم چگالی بار طولی معادل این حلقه $\rho_\ell=\rho_s\,dR$ می‌باشد حال از رابطه (۳-۲۵) استفاده می‌کنیم پتانسیل ناشی از این حلقه به ضخامت است dR عبارت خواهد بود از:

$$dV=\frac{\rho_s\,dR\,R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$V=\int_0^a dV=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2+h^2}-h\right] \qquad (۲۸-۳)$$

رابطه (۳-۲۸) را می‌توان با استفاده از رابطه دوم معادله (۳-۸) که پتانسیل ناشی از توزیع سطحی بار الکتریکی است بدست آورد.

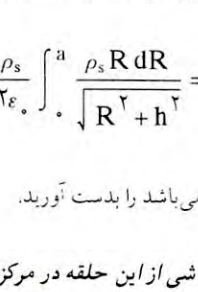
$$V=\iint\frac{\rho_s\,ds}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\rho_s R\,dR\,d\phi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$V=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\int_0^a\frac{\rho_s R\,dR}{\sqrt{R^2+h^2}}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2+h^2}-h\right]$$

که همان معادله (۳-۲۸) می‌باشد.

مثال ۹: پتانسیل در مرکز یک کره به شعاع a که دارای بار الکتریکی با چگالی بار سطحی ρ_s می‌باشد را بدست آورید.

حل: اگر یک حلقه به شعاع r را روی این کره مطابق شکل در نظر بگیریم پتانسیل ناشی از این حلقه در مرکز کره با استفاده از رابطه (۳-۲۵) عبارتست از:



$$dV=\frac{\rho_\ell r}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+h^2}}$$

که $r=a\sin\theta$ و $h=a\cos\theta$ و $\rho_\ell=\rho_s\,a\,d\theta$ که $a\,d\theta$ *ضخامت حلقه است.*

$$dV = \frac{(\rho_s\, a\, d\theta)\ (a \sin\theta)}{۲\varepsilon_\circ\, a} = \frac{\rho_s\, a \sin\theta\, d\theta}{۲\varepsilon_\circ}$$

$$V = \int_\circ^{\pi} \frac{\rho_s\, a \sin\theta\, d\theta}{۲\varepsilon_\circ} = \frac{\rho_s\, a}{\varepsilon_\circ} \qquad (۲۹-۳)$$

رابطه (۳-۲۹) را نیز میتوان با استفاده از رابطه دوم معادله (۳-۸) که پتانسیل ناشی از توزیع سطحی بار الکتریکی است بدست آورد.

$$V = \iint \frac{\rho_s\, ds}{۴\pi\varepsilon_\circ r} = \int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\pi} \frac{\rho_s\, a^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\phi}{۴\pi\varepsilon_\circ\, a} = \int_\circ^{\pi} \frac{\rho_s\, a \sin\theta\, d\theta}{۲\varepsilon_\circ}$$

$$\rightarrow\ V = \frac{\rho_s\, a}{\varepsilon_\circ}$$

که همان رابطه (۳-۲۹) می‌باشد.

۳-۴- محاسبه پتانسیل ناشی از توزیع حجمی بار با استفاده از قانون گوس

فرض کنید کره‌ای به شعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی بار حجمی ρ می‌باشد با استفاده از قانون گوس می‌توانیم میدان الکتریکی را در داخل و خارج کره بدست آوریم.

$$r<a \qquad \oint \overline{D}.\overline{ds} = \int_\circ^{r} \rho\, ۴\pi r^۲\, dr \ \rightarrow\ \overline{D} = \frac{\rho r}{۳}\,\hat{a}_r$$

$$\overline{E} = \frac{D}{\varepsilon_\circ} = \frac{\rho r}{۳\varepsilon_\circ}\,\hat{a}_r \qquad r<a \qquad (۳۰-۳)$$

$$r>a \qquad \oint \overline{D}.\overline{ds} = \int_\circ^{a} \rho\, ۴\pi r^۲\, dr \ \rightarrow\ \overline{D} = \frac{\rho a^۳}{۳r^۲}\,\hat{a}_r$$

$$E = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_\circ} = \frac{\rho a^۳}{۳\varepsilon_\circ r^۲}\,\hat{a}_r \qquad r>a \qquad (۳۱-۳)$$

$$r>a \qquad V(r) = -\int_\infty^{r} \overline{E}.\overline{d\ell} \qquad (۳۲-۳)$$

در مختصات کروی $\overline{d\ell}$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\overline{d\ell} = dr\,\hat{a}_r + r\,d\theta\,\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{a}_\phi \qquad (۳۳-۳)$$

در اینصورت خواهیم داشت.

$$V(r) = -\int_\infty^{r} \frac{\rho a^۳}{۳\varepsilon_\circ r^۲}\,dr = \frac{\rho a^۳}{۳\varepsilon_\circ r} \qquad r>a$$

$$V(r) = -\int_\infty^{r} \overline{E}.\overline{d\ell} = -\left[\int_\infty^{a} \frac{\rho a^۳}{۳\varepsilon_\circ r^۲}\,dr + \int_a^{r} \frac{\rho r}{۳\varepsilon_\circ}\,dr\right] \qquad r\cancel{>}a$$

$$= \frac{\rho}{۶\varepsilon_\circ}\left(۳a^۲ - r^۲\right)$$

بنابراین پتانسیل در داخل و خارج کره عبارتست از:

$$V = \begin{cases} \dfrac{\rho}{۶\varepsilon_\circ}\left(۳a^۲ - r^۲\right) & r<a \\ \dfrac{\rho a^۳}{۳\varepsilon_\circ r} & r>a \end{cases} \qquad (۳۴-۳)$$

۳-۵- انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

هر گاه جهت انتقال بار الکتریکی از یک نقطه به نقطه دیگر کاری انجام گیرد این کار بصورت انرژی ذخیره می‌شود مثلاً اگر بار q_1 در فضا وجود داشته باشد این بار الکتریکی در فضا میدان الکتریکی ایجاد می‌کند که بر هر بار الکتریکی دیگر که در فضا موجود است نیرو وارد می‌کند بنابراین برای آوردن بار q_2 در فاصله R_{12} از بار q_1 باید کاری انجام داد که بر این نیرو ناشی از میدان q_1 غلبه کند می‌دانیم پتانسیل بار q_1 در یک نقطه برابر است با کار لازم جهت انتقال واحد بار الکتریکی از بی نهایت به آن نقطه. بنابراین اگر بخواهیم بار q_2 را به فاصله R_{12} از بار q_1 قرار دهیم باید به اندازه q_2V_1 کار انجام دهیم که V_1 پتانسیل بار q_1 در نقطه‌ای است که بار q_2 قرار می‌گیرد بنابراین

$$W_{12} = q_2 V_1 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}}$$

که W_{12} کار لازم جهت قرار دادن بار q_2 به فاصله R_{12} از بار q_1 می‌باشد. حال اگر بخواهیم بار سوم q_3 را در مجاورت بارهای q_1 و q_2 قرار دهیم بطوریکه فاصله آن تا بار q_1 برابر با R_{13} و فاصله آن از بار q_2 برابر R_{23} باشد در اینصورت کار لازم عبارتست از q_3V_{12} که V_{12} مجموع پتانسیل ناشی از بارهای q_1 و q_2 در محل قرارگرفتن بار q_3 است بنابراین:

$$W_{123} = q_3\left[\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right]$$

بنابراین کار لازم جهت آوردن سه بار q_1، q_2 و q_3 روی رئوس یک مثلث به اضلاع R_{12}، R_{23} و R_{13} عبارتست از مجموع W_{12} و W_{123} یعنی:

$$W_3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}} \qquad (۳-۳۵)$$

رابطه (۳-۳۵) برای سه بار را میتوان به کار لازم جهت درکنار هم قرار دادن N بار بصورت زیر تعمیم داد.

$$W_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 R_{ij}} \qquad (۳-۳۶)$$

رابطه (۳-۳۶) را به صورت زیر میتوان نوشت

$$W_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 R_{ij}} \qquad (۳-۳۷)$$

عبارت $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 R_{ij}}$ برابر با مجموع پتانسیل ناشی از همه بارها (غیر از بار iام) در محل بار iام می‌باشد که به V_i نشان می‌دهیم بنابراین رابطه (۳-۳۷) به صورت زیر خواهد شد.

$$W_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \qquad (۳-۳۸)$$

که عبارت داخل $\sum$ برابر است با حاصلضرب بار iام در پتانسیل در محل بار iام (ناشی از سایر بارها)

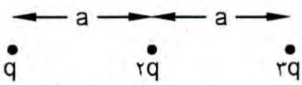
مثال ۱۰: سه بار q، $2q$ و $3q$ در روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرارگرفته‌اند انرژی ذخیره شده را بدست آورید.

حل: از رابطه (۳-۳۸) خواهیم داشت:

$$W_3=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i V_i=\frac{1}{2} q\left[\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right]+\frac{1}{2}(2q)\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right]$$

$$+\frac{1}{2}(3q)\left[\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right]=\frac{11q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

مثال ۱۱: سه بار نقطه‌ای q، ۲q و ۳q روی یک خط راست و به فاصله a از یکدیگر قرار دارند چقدر کار لازم است تا این سه بار را مطابق مثال قبل روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرار دهیم.



حل: کار لازم جهت تغییر حالت برابر است با تغییر انرژی در دو حالت. در حالتی که سه بار روی یک خط راست هستند انرژی ذخیره شده برابر است با:

$$W_3=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i V_i=\frac{1}{2} q\left[\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 a}\right]+\frac{1}{2}(2q)\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right]$$

$$+\frac{1}{2}(3q)\left[\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}+\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right]=\frac{\frac{7}{2}q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}+\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{\frac{15}{2}q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

$$W_3=\frac{19q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

کار لازم برابر است با تغییر انرژی دو حالت یعنی:

$$\text{کار لازم}=\frac{11q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}-\frac{19q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}=\frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

تاکنون درباره انرژی لازم جهت درکنار هم قرار دادن بارهای نقطه‌ای بحث کردیم ولی در حالت کلی بارها بصورت پراکنده نیستند بلکه آنها بصورت حجمی و یا سطحی و یا طولی در فضا موجود هستند مثلاً لازم است کار لازم جهت ساختن بار حجمی با چگالی حجمی ρ و یا بار سطحی با چگالی سطحی ρ_s را بدست آوریم در اینصورت رابطه (۳-۳۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$W=\frac{1}{2}\int_s \rho_s V\,ds$$ (۳-۳۹) کار لازم جهت ساختن بار سطحی با چگالی ρ_s

$$W=\frac{1}{2}\int_v \rho V dv$$ (۳-۴۰) کار لازم جهت ساختن بار حجمی با چگالی ρ

انتگرالهای روابط بالا را می‌توان روی کل فضا گرفت زیرا در قسمتی از فضا که ρ_s و یا ρ وجود ندارد حاصل انتگرال‌ها صفر هستند بنابراین رابطه (۳-۴۰) را میتوان بصورت زیر ساده کرد.

$$W=\frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} \rho V\,dv=\frac{1}{2}\int_{\text{کل فضا}} (\nabla.\overline{D})V\,dv=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int (\nabla.\overline{E})V\,dv$$

اگر از رابطه $\nabla.(\overline{E}V)=V\nabla.E+\overline{E}.\nabla V$ استفاده کنیم داریم:

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int\left[\nabla.(\overline{E}V)-\overline{E}.\nabla V\right]dv$$

با توجه به اینکه $\overline{E}=-\nabla V$ خواهیم داشت

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{\text{کل فضا}}\left[\nabla.(\overline{E}V)+|E|^2\right]dv=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{\text{کل فضا}\,V}\nabla.(\overline{E}V)\,dv+\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{\text{کل فضا}\,V}|E|^2 dv$$

حال اگر از قانون دیورژانس استفاده کنیم خواهیم داشت

$$W=\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ \oint V\overline{E}.\overline{ds}+\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ \int |E|^۲ dv$$

روی سطح کره‌ای بشعاع بی نهایت — V کل فضا

چون V متناسب با $\frac{۱}{r}$ و $\overline{E}$ متناسب با $\frac{۱}{r^۲}$ و ds متناسب با $r^۲$ است و r به سمت بی نهایت میل می‌کند حاصل انتگرال اول صفر است (عبارت داخل انتگرال متناسب با $\frac{۱}{r}$ است که با توجه به اینکه $r \to \infty$ میل می‌کند صفر است) بنابراین:

$$W=\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ \int_{v} |E|^۲ dv \qquad (۴۱-۳)$$

کل فضا

رابطه (۳-۴۱) یک رابطه مهم در محاسبه انرژی ذخیره شده در فضا جهت ساختن بار الکتریکی بصورت توزیع بار در فضا می‌باشد.

مثال ۱۲: کار لازم جهت ساختن کره‌ای بشعاع a و چگالی بار سطحی ρ_s کدام است؟

حل: ***با استفاده از قانون گوس می‌توانیم پتانسیل را در r>a بدست آوریم.***

$$\oint \overline{D}.\overline{ds}=Q \quad \rightarrow \overline{D}=\frac{\rho_s ۴\pi a^۲}{۴\pi r^۲}\,\hat{a}_r \rightarrow \overline{D}=\rho_s\frac{a^۲}{r^۲}\hat{a}_r \qquad r>a$$

$$\overline{E}=\frac{\rho_s a^۲}{\varepsilon_\circ r^۲}\,\hat{a}_r \qquad V=-\int_\infty^r \overline{E}.\overline{d\ell}=-\int_\infty^r \frac{\rho_s a^۲}{\varepsilon_\circ r^۲}dr=\frac{\rho_s a^۲}{\varepsilon_\circ r}$$

حال از رابطه (۳-۳۹) استفاده می‌کنیم.

$$W=\frac{۱}{۲}\int_s \rho_s V ds=\frac{۱}{۲}\int \rho_s V ds \Big|_{r=a}=\frac{۱}{۲}\int \rho_s\frac{\rho_s a^۲}{\varepsilon_\circ a}ds=\frac{۱}{۲}\frac{\rho_s^۲ a}{\varepsilon_\circ}\,۴\pi a^۲=\frac{۲\pi\rho_s^۲ a^۳}{\varepsilon_\circ}$$

سطح کره

میتوان همین نتیجه را با استفاده از رابطه (۳-۴۱) نیز بدست آورد.

$$W=\frac{۱}{۲}\int \varepsilon_\circ |E|^۲ dv=\frac{۱}{۲}\int_a^\infty \varepsilon_\circ\left[\frac{\rho_s a^۲}{\varepsilon_\circ r^۲}\right]^۲ ۴\pi r^۲ dr=\frac{۲\pi\rho_s^۲ a^۳}{\varepsilon_\circ}$$

کره‌ای بشعاع بی نهایت

دقت شود که چون میدان داخل کره صفر است لذا انتگرال $\frac{۱}{۲}\int_\circ^a \varepsilon_\circ |E|^۲ dv$ لازم نیست محاسبه شود.

مثال ۱۳: کار لازم جهت ساختن کره‌ای بشعاع a و چگالی بار حجمی ρ چقدر است؟

حل: ***قبلاً میدان را در داخل و خارج کره با استفاده از قانون گوس حساب کردیم که برابر است با***

$$\overline{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{۳\varepsilon_\circ}\hat{a}_r & r<a\\[2ex] \dfrac{\rho a^۳}{۳\varepsilon_\circ r^۲} & r>a\end{cases}$$

با استفاده از معادله (۳-۴۱) داریم

$$W=\frac{1}{2}\int \varepsilon_{0}\,|E|^{2}dv=\frac{1}{2}\varepsilon_{0}\int_{0}^{a}\left[\frac{\rho r}{3\varepsilon_{0}}\right]^{2}4\pi r^{2}dr+\frac{1}{2}\varepsilon_{0}\int_{a}^{\infty}\left[\frac{\rho a^{3}}{3\varepsilon_{0}r^{2}}\right]^{2}4\pi r^{2}dr$$

$$W=\frac{4\pi\rho^{2}a^{5}}{15\varepsilon_{0}} \qquad (۴۲-۳)$$

همین رابطه را میتوان از رابطه (۳-۳۹) نیز بدست آورد چون $\rho=0$ برای $r>a$ بنابراین انتگرال را باید در داخل کره محاسبه کرد قبلاً پتانسیل داخل کره را با رابطه (۳-۳۴) دادهایم بنابراین:

$$W=\frac{1}{2}\int_{\text{داخل کره}}\rho V dv=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\rho(3a^{2}-r^{2})\frac{\rho}{6\varepsilon_{0}}4\pi r^{2}dr=\frac{4\pi\rho^{2}a^{5}}{15\varepsilon_{0}}$$

که همان رابطه (۳-۴۲) میباشد.

مثال ۱۴: دو کره بشعاع a و چگالی ρ مفروض است چقدر کار لازم است تا این دو کره را در هم فرو کرده و یک کره به همان چگالی ρ بسازیم.

حل: انرژی لازم جهت ساختن دو کره بشعاع a و چگالی ρ طبق مثال قبل عبارتست از:

$$W=2\times\frac{4\pi\rho^{2}a^{5}}{15\varepsilon_{0}}=\frac{8\pi\rho^{2}a^{5}}{15\varepsilon_{0}}$$

انرژی لازم جهت ساختن کره جدید به شعاع جدید b برابر است با:

$$W'=\frac{4\pi\rho^{2}b^{5}}{15\varepsilon_{0}} \qquad 2\times\frac{4}{3}\pi a^{3}=\frac{4}{3}\pi b^{3}\rightarrow b=a\sqrt[3]{2}$$

$$W'=\frac{4\pi\rho^{2}a^{5}\,2\sqrt[3]{4}}{15\varepsilon_{0}}=\frac{8\pi\rho^{2}a^{5}\sqrt[3]{4}}{15\varepsilon_{0}}$$

$$\text{کار لازم}=W'-W=\frac{8\pi\rho^{2}a^{5}}{15\varepsilon_{0}}\left[\sqrt[3]{4}-1\right]$$

سوالهای پتانسیل و انرژی

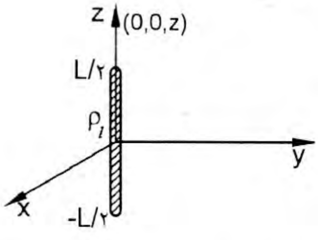
۱. یک دیسک بشعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی بار الکتریکی سطحی ρ_s می‌باشد پتانسیل روی محیط دیسک کدام است؟

۱) $\frac{a\rho_s}{4\pi\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{a\rho_s}{2\pi\varepsilon_\circ}$ ۳) $\frac{a\rho_s}{\pi\varepsilon_\circ}$ ۴) $\frac{2a\rho_s}{\pi\varepsilon_\circ}$

۲. پتانسیل در مرکز یک کره بشعاع a و چگالی بار حجمی $\rho = kr$ کدام است؟

۱) $\frac{ka^3}{12\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{ka^3}{4\varepsilon_\circ}$ ۳) $\frac{ka^3}{3\varepsilon_\circ}$ ۴) صفر

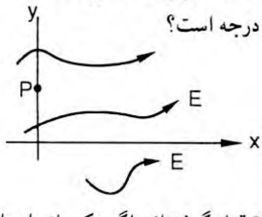
۳. پتانسیل الکتریکی بر روی محور z در نقطه‌ای (z و ۰ و ۰) وقتی $z>\frac{L}{2}$ است برای یک توزیع بار الکتریکی خطی یکنواخت بطول L و چگالی بار ρ_ℓ شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{z-\frac{L}{2}}{z+\frac{L}{2}}$ ۲) $\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ}\;\frac{z-\frac{L}{2}}{z+\frac{L}{2}}$

۳) $\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{z+\frac{L}{2}}{z-\frac{L}{2}}\right]$ ۴) $\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{z+\frac{L}{2}}{z-\frac{L}{2}}$

۴. پتانسیل الکتریکی در صفحه z=۰ با رابطه $V(x,y)=e^{-x}\cos y$ داده شده است اگر یک الکترون در نقطه $P\left(\circ,\frac{\pi}{6}\right)$ قرار داده شود زاویه بین محور yها و جهت شروع حرکت الکترون چند درجه است؟



۱) 60° ۲) 120°
۳) 20° ۴) 150°

۵. سه بار الکتریکی q به جرم m در رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرار گرفته‌اند اگر یکی از بارها مجاز به حرکت باشد سرعت آن در بی نهایت چقدر خواهد شد فرض کنید اصطکاک صفر است و تنها نیروهای کولمبی وجود دارد؟

۱) $\frac{q}{\sqrt{ma\pi\varepsilon_\circ}}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}q}{\sqrt{ma\pi\varepsilon_\circ}}$ ۳) $\frac{q}{\sqrt{2ma\pi\varepsilon_\circ}}$ ۴) $\frac{q}{\sqrt{3ma\pi\varepsilon_\circ}}$

۶. کره‌ای بشعاع a و چگالی بار حجمی ρ مفروض است کار لازم جهت فشرده کردن این کره و ساختن کره‌ای بشعاع $\frac{a}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{4\pi\rho^2a^5}{15\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{8\pi\rho^2a^5}{15\varepsilon_\circ}$ ۳) $\frac{6\pi\rho^2a^5}{15\varepsilon_\circ}$ ۴) $\frac{2\pi\rho^2a^5}{15\varepsilon_\circ}$

۷. ۸ کره بشعاع a و چگالی بار حجمی ρ مفروض است کار لازم جهت ترکیب کردن این کره و ساختن یک کره واحد کدام است (با همان چگالی)

۱) $\frac{8\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{16\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{64\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{32\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$

۸. سه بار نقطه‌ای ۴q، ۸q- و ۴q+ به ترتیب در نقاط z=d، z=۰ و z=-d قرار دارند پتانسیل ناشی از این سه بار در فاصله $r \gg d$ کدام است؟

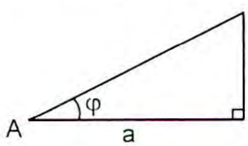
۱) $\frac{q d^2 \cos^2\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$ ۲) $\frac{q d \cos\theta}{\pi\varepsilon_0 r^3}$ ۳) $\frac{2q d^2 \cos^2\theta}{\pi\varepsilon_0 r^3}$ ۴) $\frac{q d \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$

۹. سه بار نقطه q روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a=2^m$ قرار دارند کار لازم جهت انتقال این سه بار به رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $b=1/5^m$ کدام است؟

۱) $\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0}$

۱۰. یک مثلث مطابق شکل دارای بار سطحی با چگالی $\rho_s=\varepsilon_0$ می‌باشد پتانسیل الکتریکی در رأس مثلث (نقطه A) کدام است؟

$(a=1^m \quad \phi=60^\circ)$



۱) ۰/۲۰۴ ۲) ۰/۱۸۲
۳) ۰/۱۰۵ ۴) ۰/۳۱۵

۱۱. روی دو کره بشعاع a و ۲a بارهای الکتریکی به چگالی سطحی ρ_s و $2\rho_s$ توزیع شده‌اند انرژی ذخیره شده در فضا را بدست آورید؟

۱) $\frac{81\pi\rho_s^2 a^3}{\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{82\pi\rho_s^2 a^3}{\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{28\pi\rho_s^2 a^3}{\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{124\pi\rho_s^2 a^3}{\varepsilon_0}$

۱۲. یک پوسته کروی بشعاع داخلی a و شعاع خارجی ۲a دارای بار الکتریکی به چگالی حجمی $\rho=\rho_0\frac{1}{r^2 a}$ می‌باشد بار نقطه‌ای Q در مرکز پوسته قرار می‌دهیم اگر پتانسیل در خارج پوسته ثابت باشد در اینصورت Q چقدر باید باشد.

۱) $Q=-2\pi\rho_0$ ۲) $Q=-4\pi\rho_0$ ۳) $Q=0$ ۴) $Q=\frac{-\rho_0}{\pi}$

۱۳. بین دو صفحه z=۰ و z=۳ بار الکتریکی به چگالی $\rho=(1+z)$ قرار دارد اگر میدان و پتانسیل در z=۰ برابر صفر باشد پتانسیل در z=۳ کدام است؟

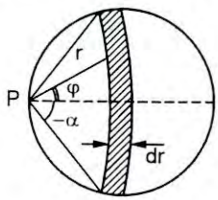
۱) -12^V ۲) -6^V ۳) -9^V ۴) -10^V

۱۴. پتانسیل الکتریکی در فضا بصورت $V=2x^2+3y^2+6z$ می‌باشد کل بار موجود در داخل کره‌ای بشعاع 3^m کدام است؟

۱) -20^{nc} ۲) -15^{nc} ۳) -25^{nc} ۴) -10^{nc}

پاسخ سوالهای پتانسیل و انرژی

۱. گزینهٔ ۳) مطابق شکل دیسک را بصورت نوارهای دایره‌ای شکل بشعاع r درمی آوریم (به ضخامت dr)
پتانسیل ناشی از یک نوار بضخامت dr و شعاع r در نقطه P عبارتست از:



$$dV = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\rho_s r\, d\phi\, dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_s \alpha\, dr}{2\pi\varepsilon_0}$$

$$r = 2a\cos\alpha \;\rightarrow\; dr = -2a\, d\alpha \sin\alpha \;\rightarrow\; dv = \frac{\rho_s \alpha(-2a\, d\alpha \sin\alpha)}{2\pi\varepsilon_0}$$

$$dV = \frac{-\rho_s a\, \alpha \sin\alpha\, d\alpha}{\pi\varepsilon_0} \;\rightarrow\; V = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\rho_s a}{\pi\varepsilon_0} \alpha \sin\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{-\rho_s a}{\pi\varepsilon_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \alpha \sin\alpha\, d\alpha = \frac{-\rho_s a}{\pi\varepsilon_0}\left\{ -\alpha\cos\alpha\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\alpha\, d\alpha \right\} = \frac{\rho_s a}{\pi\varepsilon_0}$$

۲. گزینهٔ ۳)

$$r>a \qquad \oint \overline{E}.\overline{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^a kr\, 4\pi r^2\, dr$$

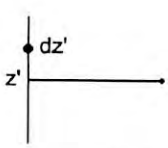
$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi k \frac{1}{4} a^4 \;\rightarrow\; E = \frac{ka^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

$$r<a \;\rightarrow \oint \overline{E}.\overline{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dv \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r kr\, 4\pi r^2\, dr$$

$$\rightarrow E = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0} \qquad V = -\int_{\infty}^{0} E\, dr = -\left[\int_{\infty}^{a} \frac{ka^4}{4\varepsilon_0 r^2} dr + \int_a^0 \frac{kr^2}{4\varepsilon_0} dr\right]$$

$$V = \frac{ka^3}{3\varepsilon_0}$$

۳. گزینهٔ ۴) با توجه به تعریف پتانسیل و شکل مقابل داریم.



$$V = \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_\ell\, dz'}{4\pi\varepsilon_0 (z-z')} = -\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[z-z'\right]_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{z+\frac{L}{2}}{z-\frac{L}{2}}$$

۴. گزینهٔ ۲)

$$\overline{E} = -\overline{\nabla} V = \frac{-\partial V}{\partial x}\hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y = e^{-x}\cos y\,\hat{a}_x + e^{-x}\cos y\,\hat{a}_y$$

میدان E در نقطه $P\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ عبارتست از:

$$\overline{E}_P = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{a}_x + \frac{1}{2}\hat{a}_y$$

زاویه E با محور x برابر ۳۰° و با محور y برابر ۶۰° است ولی الکترون خلاف جهت میدان حرکت می‌کند یعنی با زاویه

°۱۲۰. نسبت به محور y

۵. گزینهٔ ۱) در حالتی که سه بار روی رئوس مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a هستند انرژی ذخیره شده الکتریکی عبارتست از:

$$W = ۳\times\frac{۱}{۲}q\times\frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_۰ a} = \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ a}$$

وقتی یکی از بارها به سمت بی نهایت می‌رود انرژی ذخیره شده عبارتست از:

$$W' = ۲\times\frac{۱}{۲}q\,\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a} = \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ a}$$

$$W' + \frac{۱}{۲}mv^۲ = W \Rightarrow -\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ a} + \frac{۳q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ a} = \frac{۱}{۲}mv^۲ \rightarrow v^۲ = \frac{q^۲}{\pi\varepsilon_۰ am}$$

$$\rightarrow v = \frac{q}{\sqrt{\pi a\varepsilon_۰ m}}$$

۶. گزینهٔ ۱) انرژی ذخیره شده (کار لازم) برای ساختن یک کره بشعاع a و چگالی ρ عبارتست از

$$W = \frac{۴\pi\rho^۲ a^۵}{۱۵\varepsilon_۰}$$

وقتی شعاع کره $\frac{a}{۲}$ می‌شود چگالی بار حجمی ۸ρ می‌شود (چون حجم کره $\frac{۱}{۸}$ می‌شود) پس انرژی ذخیره شده در این حالت عبارتست از:

$$W' = \frac{۴\pi(۸\rho)^۲\left[\frac{a}{۲}\right]^۵}{۱۵\varepsilon_۰} = \frac{۸\pi\rho^۲ a^۵}{۱۵\varepsilon_۰}$$

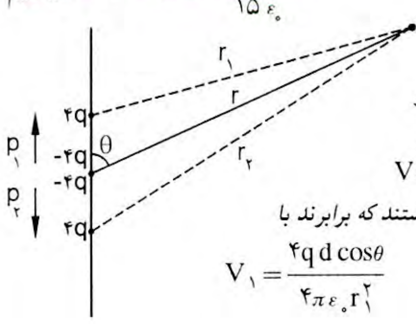
$$\text{کار لازم} = W' - W = \frac{۴\pi\rho^۲ a^۵}{۱۵\varepsilon_۰}$$

۷. گزینهٔ ۴) اصل بقای بار ← شعاع کره جدید $\quad b = ۲a \quad \rightarrow \quad ۸\times\frac{۴}{۳}\pi a^۳\rho = \rho\frac{۴}{۳}\pi b^۳$

کار لازم جهت ساختن ۸ کره بشعاع a و چگالی ρ $\quad W = ۸\times\frac{۴\pi\rho^۲ a^۵}{۱۵\varepsilon_۰} = \frac{۳۲\pi\rho^۲ a^۵}{۱۵\varepsilon_۰}$

کار لازم جهت ساختن یک کره به شعاع b و چگالی ρ $\quad W' = \frac{۴\pi\rho^۲ b^۵}{۱۵\varepsilon_۰} = \frac{۴\pi\rho^۲(۲a)^۵}{۱۵\varepsilon_۰} = \frac{۶۴\pi\rho^۲ a^۵}{۱۵\varepsilon_۰}$

$$\text{کار لازم} = W' - W = \frac{۳۲\pi\rho^۲ a^۵}{۱۵\varepsilon_۰}$$



۸. گزینهٔ ۳) سه بار را بصورت زیر نمایش می‌دهیم در حقیقت دو عدد دو قطبی (۴q- و ۴q) که مخالف یکدیگر هستند داریم پس

$$V = V_۱ - V_۲$$

$V_۱$ و $V_۲$ پتانسیل ناشی از دو قطبی‌های (۴q- و ۴q) هستند که برابرند با

$$V_۱ = \frac{۴q\,d\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r_۱^۲} \qquad V_۲ = \frac{۴q\,d\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r_۲^۲}$$

$$r_1 = r - \frac{d}{2}\cos\theta \qquad r_2 = r + \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r_2^2 - r_1^2}{(r_1 r_2)^2} = \frac{qd\cos\theta}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{2r \times d\cos\theta}{r^4}$$

$$V = \frac{2qd^2\cos^2\theta}{\pi\varepsilon_0 r^3}$$

۹. در حالت اول انرژی ذخیره شده عبارتست از:

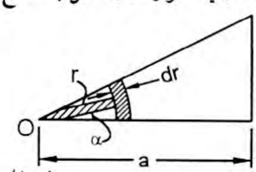
$$W = 3 \times \frac{1}{2} q \times \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

در حالت دوم انرژی ذخیره شده عبارتست از:

$$W' = 3 \times \frac{1}{2} q \times \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\text{کار لازم} = W' - W = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right] = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}$$

۱۰. گزینهٔ ۳) یک نوار کمان شکل به شعاع r و ضخامت dr مطابق شکل در نظر می‌گیریم در اینصورت خواهیم داشت.



$$V = \int_0^{\phi}\int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} \frac{\rho_s r\,dr\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_s a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\phi}\frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\rho_s a}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\mathrm{tg}\frac{\phi}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\phi}{2}} = 0.105$$

۱۱. گزینهٔ ۲) ابتدا میدان را در کلیه نقاط فضا بدست می‌آوریم.

$$r < a \rightarrow E_1 = 0 \qquad a < r < 2a \rightarrow E_2 = \frac{\rho_s 4\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_s a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$r > 2a \qquad \rightarrow E_3 = \frac{\rho_s 4\pi a^2 + 2\rho_s 4\pi (2a)^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{9\rho_s a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^{2a} E_2^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{2a}^{\infty} E_3^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^{2a} \frac{\rho_s^2 a^4}{\varepsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{2a}^{\infty} \frac{81\rho_s^2 a^4}{\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi\rho_s^2 a^4}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right] + \frac{4\pi\rho_s^2 a^4}{2\varepsilon_0}\left[\frac{81}{2a}\right] = \frac{82\pi\rho_s^2 a^3}{\varepsilon_0}$$

۱۲. گزینهٔ ۲) اگر بخواهیم پتانسیل در $r > 2a$ ثابت باشد باید میدان در $r > 2a$ صفر باشد و چون میدان شعاعی

است پس داریم:

$$\oint \overline{E}.\overline{ds}=\frac{۱}{\varepsilon_۰}\left[Q+\int_a^{۲a}\rho_۰\frac{۱}{r^۲a}۴\pi r^۲dr\right]=۰$$

$$\Rightarrow Q+\rho_۰ ۴\frac{\pi}{a}(۲a-a)=۰ \quad \rightarrow Q=-۴\pi\rho_۰$$

.۱۳ گزینهٔ ۳

$$\nabla.\overline{D}=\rho=(۱+z)\varepsilon_۰ \Rightarrow \frac{\partial D_z}{\partial Z}=(۱+z)\varepsilon_۰ \qquad D_z=\left[\frac{۱}{۲}z^۲+z+k\right]\varepsilon_۰$$

$$E_z=\frac{D_z}{\varepsilon_۰}=\frac{۱}{۲}z^۲+z+k \qquad E_z(z=۰)=۰ \quad \rightarrow k=۰$$

$$\overline{E}=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial Z}=\frac{۱}{۲}z^۲+z \quad \rightarrow \quad V=-\frac{۱}{۶}z^۳-\frac{۱}{۲}z^۲+k'$$

$$V(z=۰)=۰ \quad \Rightarrow \quad k'=۰ \qquad V=-\frac{۱}{۶}\left(z^۳+۳z^۲\right) \rightarrow V(z=۳)=-۹$$

.۱۴ گزینهٔ ۴

$$\overline{D}=\varepsilon_۰\overline{E}=-\varepsilon_۰\nabla V=-\varepsilon_۰\left(۴x\,\hat{a}_x+۶y\,\hat{a}_y+۶\,\hat{a}_z\right)$$

$$\rho=\nabla.\overline{D}=-۱۰\varepsilon_۰ \qquad Q=\rho\times\frac{۴}{۳}\pi a^۳=-۱۰\varepsilon_۰\times\frac{۴}{۳}\pi\times۳^۳=-۳۶۰\pi\varepsilon_۰$$

$$Q=-۳۶۰\pi\times\frac{۱}{۳۶\pi}\times۱۰^{-۹}=-۱۰^{-۸}=-۱۰nc$$

فصل چهار

هادی‌ها و عایق‌ها و خواص الکتریکی آنها

هادی: واحد ساختمانی ماده اتم است که متشکل از یک هسته با بار الکتریکی مثبت و تعدادی الکترون با بار منفی می‌باشد مقدار کل بار الکتریکی الکترونهای هر اتم با بار الکتریکی هسته مساوی است یعنی اتم از نظر الکتریکی خنثی است الکترونهای آخرین لایه که بعنوان الکترونهای ظرفیت شناخته می‌شوند نقش اصلی را در فعل و انفعالات شیمیایی و هدایت الکتریکی دارند و چون نیروی بین هسته و این الکترونها ضعیف می‌باشد براحتی به اتمهای دیگر می‌پیوندند چنین الکترونهایی را الکترونهای آزاد گویند. فلزات دارای تعداد زیادی الکترون آزاد هستند که در اثر انرژی حرارتی محیط دارای حرکات مداوم ولی بدون نظم و ترتیب هستند سرعت متوسط الکترونها در مقیاس ماکروسکپی صفر است لذا جریان الکتریکی از حرکات نامنظم آنها پدید نمی‌آید اعمال میدان الکتریکی خارجی الکترونها را با سرعت متوسطی به حرکت در می‌آورد و در نتیجه جریانی که ناشی از جابجایی الکترونها می‌باشد بوجود می‌آید چنین پدیده‌ای را هدایت الکتریکی و جسمی که قابل هدایت آنها بالا باشد را مانند اکثر فلزات هادی می‌گویند.

۴-۱- معادله حرکت الکترون در هادی:

حرکت الکترون وقتی تحت تاثیر میدان الکتریکی قرار می‌گیرد تحت تاثیر دو نیروی کولمب $\overline{F}_1 = e\overline{E}$ و نیروی بازدارنده $\overline{F}_2$ که متناسب با ممنتم الکترون و عکس متوسط زمان بین دو برخورد می‌باشد قرار میگیرد قانون نیوتن را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$e\overline{E} - m_e \frac{\overline{V}_d}{\tau} = m_e \frac{d\overline{V}_d}{dt} \qquad (۱-۴)$$

در معادله (۴-۱)، τ متوسط زمان بین دو برخورد، $\overline{V}_d$ سرعت متوسط جابجایی الکترون و m_e جرم الکترون می‌باشد در حالتی که میدان الکتریکی ساکن باشد $(E=E_0)$ خواهیم داشت.

$$m_e \frac{d\overline{V}_d}{dt} + m_e \frac{\overline{V}_d}{\tau} = eE_0 \quad \rightarrow \quad \overline{V}_d = \frac{e\tau E_0}{m_e}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (۲-۴)$$

τ برای هادی معمولی مانند مس از مرتبه 10^{-14} است پس جمله اکسپونانسیل بسرعت صفر می‌شود و میتوان از آن صرفنظر نمود یعنی معادله (۴-۲) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\overline{V}_d = \frac{e\tau}{m_e} E_0 \qquad (۳-۴)$$

برای میدانهای متغیر با زمان و سینوسی تا وقتی که دوره تناوب از چندین برابر τ کوچکتر نباشد یعنی $f \ll \frac{1}{\tau}$ میتوان از همان رابطه استفاده کرد مثلاً برای $\tau = 10^{-14}$ رابطه (۴-۳) برای فرکانسهای تا صدگیگا هرتز صادق است با جایگزینی e، τ و m_e در رابطه (۴-۳) خواهیم داشت.

$$\overline{V}_d = -\mu_e \overline{E} \qquad (۴-۴)$$

در رابطه (۴-۴) ضریب μ_e را ضریب تحرک الکترون می‌نامند. اگر یک قطعه فلز را در داخل یک میدان الکتریکی قرار دهیم الکترونها در خلاف جهت میدان طوری حرکت می‌کنند که در داخل فلز میدان کل ناشی از میدان خارجی و میدان حاصله از تغییر مکان الکترونها برابر صفر شود اگر سطح مقطع قسمتی از فلز را ΔS فرض کنیم و الکترونها در مدت زمان Δt

مسافت Δx را در فلز طی کنند در اینصورت تعریف جریان عبوری از مقطع Δs عبارتست از:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho\,\Delta v}{\Delta t} = \frac{\rho\,\Delta s\,\Delta x}{\Delta t} = \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta s \;\rightarrow\; \frac{\Delta I}{\Delta s} = \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

بعبارت دیگر

$$\overline{J} = \rho\,\overline{V}_d \qquad (۵-۴)$$

که J چگالی جریان (جریان بر واحد سطح) و ρ چگالی حجمی الکترونها می‌باشد. حال اگر تعداد الکترونها در واحد حجم فلز N باشد در اینصورت با جایگزینی $\overline{V}_d$ از رابطه (۴-۴) در رابطه (۴-۵) خواهیم داشت.

$$\overline{J} = (-Ne)(-\mu_e\overline{E}) = Ne\mu_e\overline{E}$$

بعبارت دیگر

$$\overline{J} = \sigma\overline{E} \qquad (۶-۴)$$

که σ همان ضریب هدایت الکتریکی فلز است رابطه (۴-۶) در حقیقت همان رابطه اهم است.

مثال ۱: یک میله فلزی بطول l و سطح مقطع s مفروض است با استفاده از رابطه (۴-۶) معادله‌ای برای مقاومت میله بدست آورید.

حل: اگر باطری به ولتاژ $V_\circ$ را به دو سر میله وصل کنیم خواهیم داشت

$$J = \sigma E \;\rightarrow\; \frac{I}{s} = \sigma\frac{V_\circ}{l} \;\rightarrow\; \frac{V_\circ}{I} = \frac{l}{\sigma s}$$

$\frac{V_\circ}{I}$ همان مقاومت میله است بنابراین

$$R = \frac{l}{\sigma s} \qquad (۷-۴)$$

مثال ۲: اگر در فلزی فاصله بین اتمها $۰/۱^{nm}$ باشد و هر اتم یک الکترون در شبکه فلز قرار دهد در اینصورت چگالی حجمی بار چقدر است؟

حل: تعداد الکترون در واحد حجم عبارتست از:

$$N = \left[\frac{۱}{۱۰^{-۱۰}}\right]^{۳} = ۱۰^{۳۰}\ \frac{\text{الکترون}}{\text{واحد حجم}}$$

$$\rho = -Ne = -۱۰^{۳۰}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} = -۱/۶\times ۱۰^{۱۱}\ \frac{c}{m^{۳}}$$

مثال ۳: از یک سطح استوانه‌ای به طول ۱^{cm} و شعاع ۲^{mm} جریانی به چگالی $\overline{J} = \frac{\sin\frac{\phi}{۲}}{R}\hat{a}_R$ می‌گذرد کل جریان عبوری از استوانه چقدر است؟

حل: جریان را از رابطه $I = \int_s \overline{J}\cdot\overline{ds}$ *بدست می‌آوریم.*

$$I = \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۰/۰۱}\frac{\sin\frac{\phi}{۲}}{R}R\,d\phi\,dz = -۲z\cos\frac{\phi}{۲}\Big]_{\circ}^{۲\pi}\Big]_{\circ}^{۰/۰۱} = ۲\times ۰/۰۱\times ۲ = ۴۰^{mA}$$

مثال ۴: در مثال بالا اگر $\rho = \frac{۱۰^{-۷}}{R}$ و $\overline{V}_d = ۳\times ۱۰^{۱۰}\ R^{۲}\frac{m}{s}$ باشد I چقدر است؟

$$J = \rho\overline{V}_d = \frac{۱۰^{-۷}}{R}\times ۳\times ۱۰^{۱۰}R^{۲} = ۳\times ۱۰^{۳}R$$

$$I = \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۰/۰۱} JR\,d\phi\,dz = \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{۰/۰۱} ۳\times ۱۰^{۳}R^{۳}d\phi\,dz\,\Big|_{R=۰/۰۲} = ۳\times ۱۰^{۳}(۰/۰۲)^{۳}\,۲\pi\times ۰/۰۱ = ۷۵/۴^{mA}$$