بسم الله الرحمن الرحیم

خلاصه مباحث اساسی کارشناسی ارشد

مهندسی برق

(الکترومغناطیس)

تهیه کننده

دکتر محمود محمدطاهر

نشر پردازش گران

۱۳۸۰

فهرست مطالب

بسمه تعالی

مقدمه مولف

الکترومغناطیس مهندسی یکی از درس‌های بنیادی برای کلیه دانشجویان رشته مهندسی برق بخصوص دانشجویان گرایش مخابرات و قدرت می‌باشد. اهمیت این درس برای این دانشجویان بقدری است که از میان تعداد زیادی درس گذرانیده شده در دوره کارشناسی فقط ۷ درس در امتحان ورودی کارشناسی ارشد امتحان گرفته می‌شود و الکترومغناطیس یکی از این ۷ درس می‌باشد. سالها بود که نیاز به کتابی در زمینه الکترومغناطیس حس می‌شد که هم دربرگیرنده موضوعات اساسی این درس باشد و هم برای دانشجویان شرکت کننده در کنکور کارشناسی ارشد رشته برق که بعضاً سالها مدرک کارشناسی خود را دریافت کرده‌اند مفید باشد و شامل خلاصه درس و تست‌های نمونه جهت آمادگی در این امتحان باشد و دانشجویان شرکت کننده در کلاس‌های کنکور کارشناسی ارشد همیشه به دنبال چنین کتاب و کتابهای مشابه‌ای در زمینه سایر درسها بوده‌اند. مولف که خود سالها طراح سوال کنکور کارشناسی ارشد در درس الکترومغناطیس و مدرس این درس در کلاس کنکورهای کارشناسی ارشد می‌باشد و تدریس این درس را در دوره کارشناسی به مدت حدود ده سال در دانشکده فنی دانشگاه تهران بر عهده دارد بر خود لازم دید که برای کمک هر چه بیشتر دانشجویان جهت شرکت در کنکور کارشناسی ارشد و بخصوص دانشجویان شهرستانی که دسترسی کمتری به کلاس کنکورهای کارشناسی ارشد دارند به تالیف این کتاب بپردازند. امید است این کتاب و سایر کتابهای مشابه بتواند گامی هر چند کوچک در ارتقای علمی دانشجویان بردارد.

محمود محمد طاهری

تهران - پاییز ۱۳۸۰

فصل اول

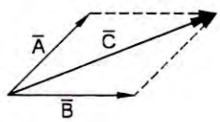
آنالیز برداری

تعریف بردار: بردار یک کمیت فیزیکی است که هم جهت دارد و هم مقدار مثل نیرو، ممنتم (گشتاور)
تعریف اسکالر: اسکالر یک کمیت فیزیکی است که فقط مقدار دارد مثل دما، جرم
عملیات برداری: کلاً دو نوع عملیات برداری وجود دارد. ۱- جمع (تفریق) ۲- ضرب

۱-۱- جمع دو بردار:

جمع دو بردار برداری است که ابتدایش ابتدای بردار اول و انتهایش انتهای بردار دوم است در حقیقت جمع دو بردار قطر متوازی الاضلاعی است که دو بردار اضلاع مجاور آن هستند. و از رأس مشترک دو بردار رسم می‌شود.

جمع دو بردار $\overline{A}$ و $\overline{B}$ در زیر نشان داده شده است.



شکل (۱-۱)

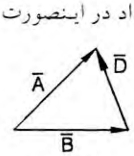
$$\overline{C}=\overline{A}+\overline{B} \qquad (۱-۱)$$

اگر زاویه بین دو بردار α باشد اندازه بردار جمع عبارتست از:

$$\left|\overline{C}\right| = \sqrt{\left|\overline{A}\right|^{۲} + \left|\overline{B}\right|^{۲} + ۲\left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right|\cos\alpha} \qquad (۲-۱)$$

که علامت | | به معنی اندازه بردار می‌باشد.

بدیهی است که تفاضل دو بردار $\overline{A}$ و $\overline{B}$ را میتوان بصورت جمع دو بردار $\overline{A}$ و $-\overline{B}$ نشان داد در اینصورت بردار $\overline{D}=\overline{A}-\overline{B}$ مطابق شکل زیر برداری است که ابتدای آن انتهای بردار $\overline{B}$ و انتهایش انتهای بردار $\overline{A}$ می‌باشد.



شکل (۲-۱)

$$\overline{D}=\overline{A}-\overline{B} \qquad (۳-۱)$$

اگر زاویه بین دو بردار $\overline{A}$ و $\overline{B}$ برابر α باشد اندازه بردار تفاضل عبارتست از

$$\left|\overline{D}\right| = \sqrt{\left|\overline{A}\right|^{۲} + \left|\overline{B}\right|^{۲} - ۲\left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right|\cos\alpha} \qquad (۴-۱)$$

در حقیقت بردار تفاضل قطر متوازی الاضلاعی است که دو بردار اضلاع آن هستند و مقابل رأس مشترک دو بردار قرار می‌گیرد.

۱-۲- ضرب دو بردار

برای دو بردار دو گونه ضرب تعریف می‌شود یکی ضرب داخلی یا اسکالر و دیگر ضرب خارجی یا برداری.

۱-۲-۱- ضرب اسکالر:

ضرب اسکالر دو بردار عددی است که برابر است با حاصلضرب اندازه (مقدار) بردار اول در اندازه بردار دوم درکسینوس زاویه بین دو بردار (زاویه حاده بین دو بردار) به این ضرب ، ضرب نقطه‌ای یا داخلی نیز گفته می‌شود با آنچه گفته شد خواهیم داشت:

$$\overline{A}.\overline{B} = \left|\overline{A}\right| . \left|\overline{B}\right| \cos\alpha \qquad (۵-۱)$$

نکته مهم: اگر دو بردار بر هم عمود باشند ضرب داخلی شان صفر است.

۱-۲-۲- ضرب خارجی:

ضرب خارجی دو بردار $\overline{A}$ و $\overline{B}$ برداری است که بر صفحه دو بردار عمود است جهت این بردار از قانون دست راست به دست می‌آید بدینگونه که اگر جهت بسته شدن انگشتان دست راست در جهت بردار $\overline{A}$ به $\overline{B}$ باشد جهت انگشت شصت جهت بردار حاصلضرب را نشان می‌دهد مقدار (اندازه) بردار حاصلضرب برابر است با حاصلضرب اندازه (مقدار) بردار اول در اندازه بردار دوم در سینوس زاویه بین دو بردار بعبارت دیگر

$$\left|\overline{A}\times\overline{B}\right| = \left|\overline{A}\right| \left|\overline{B}\right| \sin\alpha \qquad (۶-۱)$$

نکته مهم: اگر دو بردار با هم موازی باشند ضرب خارجی شان صفر است. با آنچه گفته شد اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار مساحت متوازی الاضلاعی است که دو بردار اضلاع مجاور آن هستند.

۱-۳- بیان یک بردار در دستگاههای مختصات مختلف

در درس الکترومغناطیس بردار را در سه دستگاه مختصات قائم (کارتزین)، استوانه و کروی تعریف می‌کنیم بدین ترتیب که هر بردار را میتوان بصورت مجموع سه مولفه‌اش بر روی محورهای مختصات دستگاههای گفته شده بیان کرد.

۱-۳-۱- مختصات قائم

بردار $\overline{A}$ را می‌توان در این دستگاه مختصات بصورت زیر تعریف کرد.

$$\overline{A} = A_x\ \hat{a}_x + A_y\, \hat{a}_y + A_z\, \hat{a}_z \qquad (۷-۱)$$

که A_x، A_y، A_z به ترتیب تصویر بردار A روی محورهای مختصات x، y، z می‌باشد و $\hat{a}_x$، $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_z$ به ترتیب بردارهای یکه این محورها نامیده می‌شوند.

با ضرب داخلی کردن هر بردار در بردار یکه هر محور اندازه تصویر آن بردار روی آن محور خاص بدست می‌آید بعبارت دیگر

$$A_x = \overline{A}.\hat{a}_x \qquad (۱-۸\ \text{الف})$$

$$A_y = \overline{A}.\hat{a}_y \qquad (۱-۸\ \text{ب})$$

$$A_z = \overline{A}.\hat{a}_z \qquad (۱-۸\ \text{ج})$$

✳ بدیهی است که حاصلضرب داخلی دو بردار یکه غیر همنام صفر و حاصلضرب خارجی دو بردار یکه همنام نیز صفر می‌باشد حاصلضرب خارجی دو بردار یکه غیر همنام برابر با بردار یکه سوم می‌باشد. (اگر جهت ضرب در جهت مثلثاتی $x \to y \to z$ -x باشد) مثلاً $\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \quad \hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$

با توجه به مطالب گفته شده میتوان زاویه بین دو بردار $\overline{A}$ و $\overline{B}$ را با داشتن دو بردار $\overline{A}$ و $\overline{B}$ بصورت زیر بدست آورد.

$$\overline{A}.\overline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \left|\overline{A}\right| \left|\overline{B}\right| \cos\alpha \quad (۹-۱)$$

اندازه بردار $\left|\overline{A}\right|$ و $\left|\overline{B}\right|$ را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد.

$$\left|\overline{A}\right| = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲ + A_z^۲} \qquad \left|\overline{B}\right| = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲ + B_z^۲} \qquad (۱۰-۱)$$

در نتیجه زاویه بین دو بردار $\overline{A}$ و $\overline{B}$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\alpha = \cos^{-۱} \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^۲ + A_y^۲ + A_z^۲}.\sqrt{B_x^۲ + B_y^۲ + B_z^۲}} \qquad (۱۱-۱)$$

مثال ۱: زاویه بین دو بردار $\overline{A} = ۲\hat{a}_x - ۳\hat{a}_y + ۴\hat{a}_z$ و $\overline{B} = ۳\hat{a}_x - ۲\hat{a}_y + ۴\hat{a}_z$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه (۱-۱۱) داریم.

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{(۲\times۳-۳\times-۲+۴\times۴)}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲+(۴)^۲}\sqrt{۳^۲+(-۲)^۲+۴^۲}} = \cos^{-1}\frac{۲۸}{۲۹} = ۱۵/۱^\circ$$

مثال ۲: ثابت کنید دو بردار $\overline{A} = ۳\hat{a}_x - ۴\hat{a}_y + \hat{a}_z$ و $\overline{B} = ۲\hat{a}_x + ۲\hat{a}_y + ۲\hat{a}_z$ بر هم عمودند.

حل: با استفاده از رابطه (۱-۱۱) داریم:

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{۳\times۲-۴\times۲+۱\times۲}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲+۱^۲}\sqrt{۲^۲+۲^۲+۲^۲}} = ۰ \quad \rightarrow \alpha = ۹۰^\circ$$

مثال ۳: ثابت کنید دو بردار $\overline{A} = ۲\hat{a}_x + ۳\hat{a}_y + \hat{a}_z$ و $\overline{B} = \hat{a}_x + ۱/۵\hat{a}_y + ۰/۵\hat{a}_z$ با هم موازیند

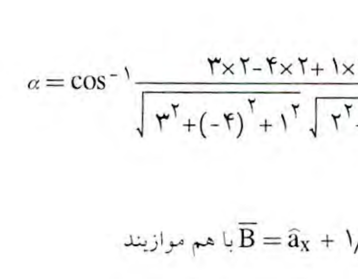
حل: با استفاده از رابطه (۱-۱۱) داریم

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{۲\times۱+۳\times۱/۵+۱\times۰/۵}{\sqrt{۲^۲+۳^۲+۱^۲}\sqrt{۱^۲+۱/۵^۲+۰/۵^۲}} = \cos^{-1}\frac{۷}{۷} = \cos^{-1}_{۱} \Rightarrow \quad \alpha = ۰$$

۱-۳-۲- مختصات استوانه‌ای

در این دستگاه هر نقطه مثل P با سه مختصات R، ϕ، z نشان داده می‌شود که R فاصله P از محور z (شعاع استوانه گذرانیده شده از P و حول محور z)، ϕ زاویه بین تصویر OP در صفحه xy با محور x و z فاصله نقطه P از صفحه xy می‌باشد (مطابق شکل)

در این دستگاه مختصات بردارهای یکه در جهت افزایش مختصات R، ϕ و z به ترتیب به $\hat{a}_R$، $\hat{a}_\phi$ و $\hat{a}_z$ نشان داده می‌شوند بنابراین بردار $\overline{A}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای بصورت زیر نمایش داده می‌شود.



شکل (۱-۳): نقطه P در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\overline{A} = A_R\,\hat{a}_R + \hat{A}_\phi\,\hat{a}_\phi + A_z\,\hat{a}_z$$

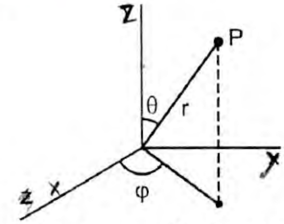
بغیر از بردار یکه $\hat{a}_z$ دو بردارهای یکه $\hat{a}_R$ و $\hat{a}_\phi$ جهتشان متغیر برده و بستگی به نقطه‌ای دارد که بردار $\overline{A}$ از آن نقطه رسم می‌شود بعبارت دیگر بردارهای یکه $\hat{a}_R$ و $\hat{a}_\phi$ تابع ϕ می‌باشند تبدیل مختصات قائم به استوانه‌ای و بالعکس با توجه به شکل داده شده صورت می‌گیرد بدین معنی که اگر نقطه P در دستگاه مختصات قائم (کارتزین) دارای مختصات (x,y,z) باشد در اینصورت مختصات آن در دستگاه استوانه‌ای بصورت $(\sqrt{x^۲+y^۲}\ ,\ tg^{-۱}\frac{y}{x}, z)$ می‌باشد بالعکس اگر نقطه P در دستگاه مختصات استوانه‌ای دارای مختصات (R, ϕ, z) باشد، در دستگاه قائم دارای مختصات $(R\cos\phi\ ,\ R\sin\phi\ ,\ z)$ خواهد بود.

۱-۳-۳- مختصات کروی

در این دستگاه مختصات هر نقطه مثل P مطابق شکل (۱-۴) با سه مختصات r و θ و ϕ نشان داده می‌شود که r

فاصله نقطه P تا مبدأ مختصات، θ زاویه OP با محور z و ϕ زاویه تصویر OP در صفحه xy با محور x (همان تعریفی که در مختصات استوانه‌ای P است) میباشد در این دستگاه نقطه P بصورت $P\,(r,\theta,\phi)$ بیان شده که با روابط زیر میتوان مختصات P را در دستگاه قائم بیان کرد.

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$



شکل (۱-۴): نقطه P در دستگاه مختصات کروی

بالعکس نقطه P با مختصات قائم (x,y,z) را میتوان با روابط زیر در دستگاه مختصات کروی نوشت.

$$r = \sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} \qquad \phi = tg^{-۱}\frac{y}{x} \qquad \theta = \cos^{-۱}\frac{z}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}$$

در دستگاه مختصات کروی سه برداریکه $\hat{a}_r$، $\hat{a}_\theta$ و $\hat{a}_\phi$ بردارهای واحد در جهت افزایش مختصات r، θ و ϕ میباشند و جهتشان متغیر بوده و بستگی به نقطه‌ای دارد که بردار از آن نقطه رسم می‌شود.

۱-۴- تبدیل بردارهای یکه از یک مختصات به مختصات دیگر

۱-۴-۱- تبدیل بردارهای یکه از دستگاه قائم به استوانه‌ای و بالعکس

$\measuredangle\ \hat{a}_\phi$ و $y = \phi$

$\measuredangle\ \hat{a}_\phi$ و $x = ۹۰+\phi$

بردارهای یکه با روابط زیر از یک دستگاه، به دستگاه دیگر تبدیل می‌شوند.

مطابق شکل ۱-۳ $\hat{a}_R$ بر $\hat{a}_\phi$ عمود است

$$\begin{cases}\hat{a}_R = \hat{a}_x\cos\phi + \hat{a}_y\sin\phi \\ \hat{a}_\phi = -\hat{a}_x\sin\phi + \hat{a}_y\cos\phi\end{cases} \qquad \begin{cases}\hat{a}_x = \hat{a}_R\cos\phi - \hat{a}_\phi\sin\phi \\ \hat{a}_y = \hat{a}_R\sin\phi + \hat{a}_\phi\cos\phi\end{cases}$$

$\hat{a}_x = \hat{a}_R\cos\phi + \hat{a}_\phi\underbrace{\cos(\phi+۹۰)}_{-\sin\phi}$

$\hat{a}_y = \hat{a}_R\sin\phi + \hat{a}_\phi\underbrace{\sin(\phi+۹۰)}_{\cos\phi}$

همانطوریکه گفته شد بردارهای یکه $\hat{a}_R$ و $\hat{a}_\phi$ جهتشان بستگی به مختصات نقطه (ϕ) دارد.

مثال ۴: دو نقطه $P(۳,۰,۴)$ و $Q(۶,۱۲۰,۵)$ در مختصات استوانه‌ای داده شده مطلوبست اولاً فاصله بین دو نقطه ثانیاً رابطه بردار $\overline{PQ}$

حل: مختصات P و Q را در دستگاه قائم بصورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases}x_P = R\cos\phi = ۳\cos ۰ = ۳ \\ y_P = R\sin\phi = ۳\sin ۰ = ۰ \\ z_P = ۴\end{cases} \qquad \begin{cases}x_Q = R\cos\phi = ۶\cos ۱۲۰ = -۳ \\ y_Q = R\sin\phi = ۶\sin ۱۲۰ = ۳\sqrt{۳} \\ z_Q = ۵\end{cases}$$

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^{۲} + (y_Q - y_P)^{۲} + (z_Q - z_P)^{۲}} = \sqrt{(-۳-۳)^{۲} + (۰-۳\sqrt{۳})^{۲} + (۵-۴)^{۲}} = ۸$$

$$\overline{PQ} = (x_Q - x_P)\hat{a}_x + (y_Q - y_P)\hat{a}_y + (z_Q - z_P)\hat{a}_z = -۶\hat{a}_x + ۳\sqrt{۳}\hat{a}_y + \hat{a}_z$$

۱-۴-۲- تبدیل بردارهای یکه از دستگاه قائم به کروی و بالعکس

بردارهای یکه با روابط زیر از یک دستگاه به دستگاه دیگر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} \hat{a}_r = \hat{a}_x \sin\theta\cos\phi + \hat{a}_y \sin\theta\sin\phi + \hat{a}_z \cos\theta \\ \hat{a}_\theta = \hat{a}_x \cos\theta\cos\phi + \hat{a}_y \cos\theta\sin\phi - \hat{a}_z \sin\theta \\ \hat{a}_\phi = -\hat{a}_x \sin\phi + \hat{a}_y \cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_x = \hat{a}_r \sin\theta\cos\phi + \hat{a}_\theta \cos\theta\cos\phi - \hat{a}_\phi \sin\phi \\ \hat{a}_y = \hat{a}_r \sin\theta\sin\phi + \hat{a}_\theta \cos\theta\cos\phi + \hat{a}_\phi \cos\phi \\ \hat{a}_z = \hat{a}_r \cos\theta - \hat{a}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

مثال ۵: بردار $\overline{A} = \frac{۱۰۰}{r^۲}\hat{a}_r$ در مختصات کروی داده شده است مقدار این بردار را در نقطه $P(-۳,۴,۱۰)$ (مختصات قائم) به دست آورده و زاویه این بردار را با بردار $\overline{B} = ۲\hat{a}_x - ۲\hat{a}_y + \hat{a}_z$ بدست آورید.

$$\hat{a}_r = \hat{a}_x \sin\theta\cos\phi + \hat{a}_y \sin\theta\sin\phi + \hat{a}_z \cos\theta$$

$$\phi = tg^{-۱}\frac{y}{x} = tg^{-۱}\frac{۴}{-۳} = ۱۲۶/۹ \qquad \theta = \cos^{-۱}\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} = \cos^{-۱}\frac{۱۰}{\sqrt{۳^۲+۴^۲+۱۰^۲}} = ۲۶/۶$$

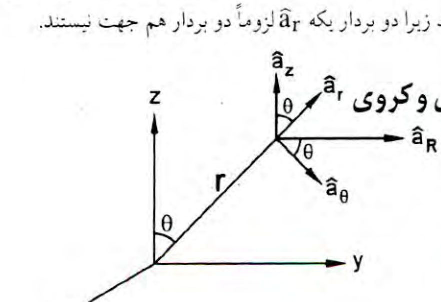
$$\hat{a}_r = \hat{a}_x \sin ۲۶/۶^\circ \cos ۱۲۶/۹^\circ + \hat{a}_y \sin ۲۶/۵ \sin ۱۲۶/۹ + \hat{a}_z \cos ۲۶/۶^\circ = ۰/۲۷\hat{a}_x + ۰/۳۶\hat{a}_y + ۰/۸۹\hat{a}_z$$

$$\overline{A} = \frac{۱۰۰}{r^۲}\hat{a}_r = \frac{۱۰۰}{x^۲+y^۲+z^۲}\hat{a}_r = \frac{۱۰۰}{۱۲۵}\hat{a}_r = -۰/۲۱\hat{a}_x + ۰/۲۹\hat{a}_y + ۰/۷۱\hat{a}_z \rightarrow |A| = ۰/۸$$

$$\alpha = \cos^{-۱}\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|A|\,|B|} = \cos^{-۱}\frac{-۰/۲۱\times۲ + ۰/۲۹\times-۲ + ۰/۷۱\times۱}{۰/۸\times۳} = ۹۶/۹^\circ$$

نکته مهم: بردارهای بیان شده در مختصات کروی و استوانه‌ای را نمی‌توان مثل حالت قائم براحتی با جمع ضرایب بردارهای یکه مشابه با هم جمع کرد زیرا جهت بردارهای یکه در این دستگاه مختصات یکسان نیست مثلاً در دستگاه کروی اگر $\overline{A} = ۲\hat{a}_r$ و $\overline{B} = ۳\hat{a}_r$ در اینصورت $\overline{A}+\overline{B}$ برابر با $۵\hat{a}_r$ نمی‌باشد زیرا دو بردار یکه $\hat{a}_r$ لزوماً دو بردار هم جهت نیستند.

۱-۵- رابطه بین بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای و کروی



شکل (۱-۵): رابطه بین بردارهای یکه کروی و استوانه‌ای

شکل مقابل زاویه بین بردارهای یکه در دستگاه مختصات را نشان می‌دهد. همانطوریکه دیده می‌شود زاویه بین $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_z$ و همچنین بین $\hat{a}_R$ و $\hat{a}_\theta$ برابر θ می‌باشد بدیهی است زاویه بین $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_R$ برابر $۹۰ - \theta$ می‌باشد. این شکل در ضرب بین دو بردار در دو دستگاه مختصات فوق بسیار مفید می‌باشد دقت شود که بردار یکه $\hat{a}_\phi$ در هر دو دستگاه مختصات مشترک است.

مثال ۶: زاویه بین دو بردار $\overline{A} = ۲\hat{a}_r - \hat{a}_\theta + ۲\hat{a}_\phi$ و $\overline{B} = \hat{a}_R + ۲\hat{a}_\phi - ۲\hat{a}_z$ را در نقطه (۲ و ۲ و ۱) بدست آورید.

حل:

$$\overline{A}.\overline{B} = |A|\,|B|\cos\alpha \qquad |A| = ۳ \qquad |B| = ۳$$

$$\overline{A}.\overline{B}=(\hat{a}_R+۲\hat{a}_\phi-۲\hat{a}_z).(۲\hat{a}_r-\hat{a}_\theta+۲\hat{a}_\phi)=۲\hat{a}_R.\hat{a}_r-\hat{a}_R.\hat{a}_\theta+۲\hat{a}_R.\hat{a}_\phi$$
$$+۴\hat{a}_\phi.\hat{a}_r+۲\hat{a}_z.\hat{a}_\theta-۲\hat{a}_\phi.\hat{a}_\theta+۴\hat{a}_\phi.\hat{a}_\phi-۴\hat{a}_z.\hat{a}_r-۴\hat{a}_z.\hat{a}_\phi=۲\cos\theta$$
$$-\sin\theta+۰+۰+۴-۴\cos\theta+۰۲\cos\theta(۹۰+\theta)=-۲\cos\theta-۳\sin\theta+۴$$

$$\theta=\cos^{-۱}\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\rightarrow\cos\theta=\frac{۲}{۳}\quad,\quad\sin\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\rightarrow\overline{A}.\overline{B}=-\frac{۴}{۳}-\sqrt{۵}+۴=۰/۴۳$$

$$\rightarrow\alpha=\cos^{-۱}\frac{\overline{A}.\overline{B}}{|A|\,|B|}=\cos^{-۱}\frac{۰/۴۳}{۹}=۸۷/۳^\circ$$

مثال ۷: زاویه بین دو بردار $\overline{A}=\frac{۱}{r}\hat{a}_r$ و $\overline{B}=\frac{۱}{R}\hat{a}_R$ را در نقطه (۱ و ۱ و ۱) به دست آورید و دو بردار را در دستگاه قائم بیان کنید.

حل:

$$\overline{A}=\frac{۱}{r}\hat{a}_r=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}(\hat{a}_x\sin\theta\cos\phi+\hat{a}_y\sin\theta\sin\phi+\hat{a}_z\cos\theta)$$

$$\cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\qquad tg\,\phi=\frac{y}{x}=۱\rightarrow\phi=۴۵^\circ\rightarrow\sin\phi=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\phi=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\overline{A}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}(\hat{a}_x\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\hat{a}_y\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\hat{a}_z\frac{۱}{\sqrt{۳}})=\frac{۱}{۳}\hat{a}_x+\frac{۱}{۳}\hat{a}_y+\frac{۱}{۳}\hat{a}_z$$

$$\overline{B}=\frac{۱}{R}\hat{a}_R=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}(\hat{a}_x\cos\phi+\hat{a}_y\sin\phi)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\hat{a}_x\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\hat{a}_y\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۱}{۲}\hat{a}_x+\frac{۱}{۲}\hat{a}_y$$

$$\alpha=\cos^{-۱}\frac{A.B}{|A|\,|B|}=\cos^{-۱}\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}+۰\times\frac{۱}{۳}}{\sqrt{۳\times(\frac{۱}{۳})^۲}\sqrt{۲\times(\frac{۱}{۲})^۲}}=\cos^{-۱}\frac{\frac{۱}{۳}}{\sqrt{\frac{۱}{۶}}}=۳۵/۳^\circ$$

از شکل (۱-۵) ملاحظه می‌شود که زاویه بین $\hat{a}_R$ و $\hat{a}_r$ برابر است با θ - ۹۰ یعنی

$$\alpha=۹۰-\theta=۹۰-\cos^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۳}}=۳۵/۳^\circ$$

که همان جواب به دست آمده از تبدیل دو بردار به دستگاه کارتزین می‌باشد.

سوالهای آنالیز برداری

۱. بردار $\overline{A}=\frac{27\sqrt{2}}{r^2}\hat{a}_\theta$ در دستگاه کروی داده شده است در اینصورت کدامیک از پاسخ‌های زیر این بردار را در دستگاه قائم و در نقطه (۱ و ۲ و ۲) بیان می‌کند.

۱) $\hat{a}_x+\hat{a}_y-4\hat{a}_z$
۲) $a_x-4\hat{a}_y+\hat{a}_z$
۳) $4a_x+\hat{a}_y-\hat{a}_z$
۴) $2\hat{a}_x+2\hat{a}_y-3\hat{a}_z-4$

۲. زاویه بردار $\overline{A}=\frac{25}{R}\hat{a}_R$ و $\overline{B}=4\hat{a}_x-3\hat{a}_y$ در نقطه (۴ و ۳) کدام است.

۱) 45°
۲) صفر
۳) 90°
۴) 180°

۳. به ازای کدام مقدار b دو بردار $\overline{A}=b\,\hat{a}_x-2\hat{a}_z$ و $\overline{B}=3\hat{a}_x-6\hat{a}_z$ بر هم عمودند

۱) $b=-2$
۲) $b=-4$
۳) $b=0$
۴) $b=6$

۴. بردارهای $\overline{A}=2\hat{a}_R$ و $\overline{B}=4\hat{a}_R$ مفروضند در اینصورت بردار تفاضل $\overline{A}-\overline{B}$ در نقطه (۱ و ۱) کدام است اگر بردار $\overline{A}$ در نقطه $(\sqrt{3},3)$ و $\overline{B}$ در نقطه $(3,\sqrt{3})$ داده شده باشند.

۱) $2\hat{a}_R$
۲) $1/7\hat{a}_R-1/4\hat{a}_\phi$
۳) $2/1\hat{a}_R+1/2\hat{a}_\phi$
۴) $1/9\hat{a}_R+1/5\hat{a}_\phi$

۵. بردار $\overline{A}=3\hat{a}_R-2\hat{a}_\phi$ در چه نقطه‌ای بر بردار $\overline{B}=2\hat{a}_r-3\hat{a}_\phi$ عمود است.

۱) نقطه با $\theta=\frac{\pi}{4}$
۲) نقطه با $\theta=\frac{\pi}{2}$
۳) نقطه با $\theta=0$
۴) نقطه با $\theta=\pi$

۶. نقطه A به مختصات $(2,\frac{\pi}{3},4)$ و B به مختصات $(R,\phi,5)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند اگر بردار $\overline{AB}$ با بردار $\overline{C}=2\hat{a}_x+4\hat{a}_y+3\hat{a}_z$ موازی باشد در اینصورت R , ϕ کدامند؟

۱) $R=3/5,\ \phi=61/5$
۲) $R=4/5,\ \phi=41/5$
۳) $R=2/5,\ \phi=81/5$
۴) $R=3/5,\ \phi=71/5$

۷. اگر $\overline{A}=2\hat{a}_r$ و $\overline{B}=3\hat{a}_R+\hat{a}_z$ باشند در اینصورت در چه نقطه‌ای $\overline{A}$ و $\overline{B}$ با هم موازیند؟

۱) نقطه با $\theta=54/7^\circ$
۲) نقطه با $\theta=34/6^\circ$
۳) نقطه با $\theta=71/6^\circ$
۴) نقطه با $\theta=84/2^\circ$

۸. دو بردار $\overline{A}=4\hat{a}_R$ و $\overline{B}=2\hat{a}_R$ به ترتیب در $\phi_A=30^\circ$ و $\phi_B=60^\circ$ داده شده‌اند در اینصورت بردار $\overline{A}-\overline{B}$ در نقطه $\phi=45^\circ$ کدام است؟

۱) $-2/7\hat{a}_R+2/1\hat{a}_\phi$
۲) $-1/9\hat{a}_R+1/6\hat{a}_\phi$
۳) $-2/4\hat{a}_R+2/4\hat{a}_\phi$
۴) $-2/8\hat{a}_R-2/1\hat{a}_\phi$

۹. بردار $\overline{A} = ۲x\,\hat{a}_x - y\,\hat{a}_y + \hat{a}_z$ و $\overline{B} = \frac{۱}{۲}x\,\hat{a}_x - y\,\hat{a}_y - ۴\,\hat{a}_z$ مفروض هستند مکان هندسی نقاطی که در آن نقاط دو برابر $\overline{A}$ و $\overline{B}$ بر هم عمودند کدام است؟

۱) دایره‌ای بشعاع ۲ ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) دایره‌ای بشعاع ۱

متوسط ۱۰. دو بردار $\overline{A} = ۳t^۲\,\hat{a}_x - ۲\,\hat{a}_y$ و $\overline{B} = ۲t^۲\,\hat{a}_x - ۳\,\hat{a}_y$ که بصورت تابعی از زمان تغییر می‌کنند مفروضند در چه لحظه‌ای دو بردار به موازات هم قرار می‌گیرند؟

۱) $t=\frac{۱}{۳}$ ۲) $t=\frac{۳}{۲}$ ۳) $t=\frac{۳}{۴}$ ۴) $t=\frac{۲}{۳}$

پاسخ سوالهای آنالیز برداری

۱. گزینهٔ ۱)

$r^{۲}=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴+۴+۱=۹ \qquad \cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{۱}{۳},\ \sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳},\ tg\phi=\frac{y}{x}=۱\ ,\ \phi=\frac{\pi}{۴}$

$$\hat{a}_\theta=\hat{a}_x\cos\theta\cos\phi+\hat{a}_y\cos\theta\sin\phi-\hat{a}_z\sin\theta=\hat{a}_x\frac{۱}{۳}\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\hat{a}_y\frac{۱}{۳}\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\hat{a}_z\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\overline{A}=\frac{۲۷\sqrt{۲}}{۹}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۶}\hat{a}_x+\frac{\sqrt{۲}}{۶}\hat{a}_y-۲\frac{\sqrt{۲}}{۳}\hat{a}_z\right)=\hat{a}_x+\hat{a}_y-۴\hat{a}_z$$

۲. گزینه ۳)

$$\overline{A}=\frac{۲۵}{R}\hat{a}_R=\frac{۲۵}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}(\hat{a}_x\cos\phi+\hat{a}_y\sin\phi)=\frac{۲۵}{۵}\left(\frac{۳}{۵}\hat{a}_x+\frac{۴}{۵}\hat{a}_y\right)$$

$$tg\phi=\frac{y}{x}=\frac{۴}{۳}\ \rightarrow \begin{cases}\sin\phi=\frac{۴}{۵} & \overline{A}=۳\hat{a}_x+۴\hat{a}_y\\ \cos\phi=\frac{۳}{۵} & \overline{A}.\overline{B}=۱۲-۱۲=۰\ \rightarrow\end{cases}$$

A و B بر هم عمودند

۳. گزینه ۲)

$\overline{A}.\overline{B}=۳b+۱۲=۰\ \rightarrow b=-۴$

۴. گزینهٔ ۴)

$\phi=tg^{-۱}\frac{y}{x}=tg^{-۱}\frac{۱}{۱}=۱\ \rightarrow\ \phi=۴۵^\circ$

$\overline{B}-\overline{A}=۴(\hat{a}_x\cos\phi_B+\hat{a}_y\sin\phi_B)-۲(\hat{a}_x\cos\phi_A+\hat{a}_y\sin\phi_A)$

$\phi_B=tg^{-۱}\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\frac{\pi}{۳} \qquad \phi_A=tg^{-۱}\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\pi}{۶}$

$$\overline{B}-\overline{A}=۴\left[\frac{۱}{۲}\hat{a}_x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\hat{a}_y\right]-۲\left[\frac{\sqrt{۳}}{۲}\hat{a}_x+\frac{۱}{۲}\hat{a}_y\right]=(۲-\sqrt{۳})\hat{a}_x+(۲\sqrt{۳}-۱)\hat{a}_y$$

$$=(۲-\sqrt{۳})(\hat{a}_R\cos\phi-\hat{a}_\phi\sin\phi)+(۲\sqrt{۳}-۱)(\hat{a}_R\sin\phi+\hat{a}_\phi\cos\phi)=(۲-\sqrt{۳})(\hat{a}_R\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\hat{a}_\phi\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$+(۲\sqrt{۳}-۱)(\hat{a}_R\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\hat{a}_\phi\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۱/۹\hat{a}_R+۱/۵\hat{a}_\phi$$

۵. گزینهٔ ۲)

$\overline{A}.\overline{B}=(۳\hat{a}_R-۲\hat{a}_\phi).(۲\hat{a}_r+۳\hat{a}_\phi)=۶\sin\theta-۶=۰\ \rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$

۶. گزینهٔ ۱) بردار $\overline{AB}$ را در مختصات قائم می‌نویسیم.

$$\overline{AB}=(x_B-x_A)\hat{a}_x+(y_B-y_A)\hat{a}_y+(z_B-z_A)\hat{a}_z$$

$$\overline{AB}=(R\cos\phi-۲\cos\frac{\pi}{۳})\hat{a}_x+(R\sin\phi-۲\sin\frac{\pi}{۳})\hat{a}_y+\hat{a}_z=(R\cos\phi-۱)\hat{a}_x+(R\sin\phi-\sqrt{۳})\hat{a}_y+\hat{a}_z$$

اگر بخواهیم این بردار با بردار $\overline{C}$ موازی باشد باید.

$$\frac{R\cos\phi-۱}{۲}=\frac{R\sin\phi-\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۱}{۳} \rightarrow \begin{matrix} R\cos\phi=\frac{۵}{۳} \\ R\sin\phi=\frac{۴}{۳}+\sqrt{۳} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{\frac{۴}{۳}+\sqrt{۳}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۴+۳\sqrt{۳}}{۵} \rightarrow \begin{cases}\phi=۶۱/۵ \\ R=۳/۵\end{cases}$$

۷. گزینهٔ ۳)

$$\overline{A}\times\overline{B}=(۲\hat{a}_r)\times(۳\hat{a}_R+\hat{a}_z)=۰$$

$$۲\left[\hat{a}_x\sin\theta\cos\phi+\hat{a}_y\sin\theta\sin\phi+\hat{a}_z\cos\theta\right]\times\left[۳\hat{a}_x\cos\phi+۳\hat{a}_y\sin\phi+\hat{a}_z\right]=$$

$$۶\cos\theta\,\hat{a}_\phi-۲\sin\theta\,\hat{a}_\phi=۰ \Rightarrow \operatorname{tg}\theta=۳ \rightarrow \theta=۷۱/۶^\circ$$

۸. گزینهٔ ۲)

$$\overline{B}-\overline{A}=(۲\cos\phi_B\,\hat{a}_x+۲\sin\phi_B\,\hat{a}_y)-(۴\cos\phi_A\,\hat{a}_x+۴\sin\phi_A\,.\hat{a}_y)$$

$$\overline{B}-\overline{A}=(۲\cos۶۰\,\hat{a}_x+۲\sin۶۰\,\hat{a}_y)-(۴\cos۳۰\,\hat{a}_x+۴\sin۳۰\,.\hat{a}_y)\Rightarrow$$

$$\overline{B}-\overline{A}=(۱-۲\sqrt{۳})\hat{a}_x+(\sqrt{۳}-۲)\hat{a}_y=(۱-۲\sqrt{۳})(\hat{a}_R\cos\phi-\hat{a}_\phi\sin\phi)+(\sqrt{۳}-۲)(\hat{a}_R\sin\phi+\hat{a}_\phi\cos\phi)=$$

$$(۱-۲\sqrt{۳})(\hat{a}_R\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\hat{a}_\phi\frac{\sqrt{۲}}{۲})+(\sqrt{۳}-۲)(\hat{a}_R\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\hat{a}_\phi\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$=\hat{a}_R\left[(۱-۲\sqrt{۳})\frac{\sqrt{۲}}{۲}+(\sqrt{۳}-۲)\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]+\hat{a}_\phi\left[(۲\sqrt{۳}-۱)\frac{\sqrt{۲}}{۲}+(\sqrt{۳}-۲)\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]=-۱/۹\,\hat{a}_R+۱/۶\,\hat{a}_\phi$$

۹. گزینهٔ ۱)

$$\overline{A}.\overline{B}=\left[\frac{۱}{۲}x\,\hat{a}_x-y\,a_y-۴\hat{a}_z\right].\left[۲x\,\hat{a}_x-y\,\hat{a}_y+\hat{a}_z\right]=x^۲+y^۲-۴=۰$$

$$x^۲+y^۲=۴$$

۱۰. گزینهٔ ۴) شرط اینکه دو بردار موازی باشند اینست که ضرب خارجی آنها صفر باشد یعنی:

$$\overline{A}\times\overline{B}=\left[۳t^۲\hat{a}_x-۲\hat{a}_y\right]\times\left[۲t^۲\hat{a}_x-۳t\,\hat{a}_y\right]=-۹t^۴\hat{a}_z+۴t^۲\hat{a}_z=۰$$

$$۹t^۲=۴\rightarrow t=\frac{۲}{۳}\,sec$$

۱-۶- انتگرال‌های مهم و کاربردی در الکترومغناطیس

در الکترومغناطیس سه نوع انتگرال مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد یکی انتگرال روی مسیر (طول) یکی انتگرال روی سطح و دیگری انتگرال روی حجم که البته انتگرال روی مسیر و سطح در دو حالت باز و بسته وجود داشته و هر کدام معنی فیزیکی خاصی دارند انتگرال‌های گفته شده را میتوان بصورت زیر نشان داد.

$$\int_\ell \overline{A}.\overline{d\ell}\ ,\ \oint_c \overline{A}.\overline{d\ell}\ ,\ \int_s \overline{A}.\overline{ds}\ ,\ \oint \overline{A}\overline{ds}\ ,\ \int_v F dv\ ,\ \int_\ell F\overline{d\ell}\ ,\ \oint_s F\overline{ds}$$

$$\int_s F\overline{ds}\ ,\ \int_v \overline{A}dv$$

که $\int_\ell \overline{A}.\overline{d\ell}$ کار انجام شده توسط بردار $\overline{A}$ را در مسیر ℓ نشان می‌دهند و $\oint \overline{A}.\overline{ds}$ معرف فلوی خارج شونده توسط بردار $\overline{A}$ از سطح بسته s می‌باشد در انتگرال‌های بالا $\overline{A}$ بردار و F اسکالر می‌باشند در حل این گونه مسائل باید دقت شود که لزوماً بردار $\overline{A}$ و $\overline{d\ell}$ یا $\overline{ds}$ در یک دستگاه مختصات بیان نمی‌شوند و در ضرب $\overline{A}$ و $\overline{ds}$ لازم است تبدیل بردارها از یک مختصات به مختصات دیگر انجام شود.

مثال ۸: بردار $\overline{A}=x\,\hat{a}_x+y\,\hat{a}_y+z\,\hat{a}_z$ داده شده است انتگرال $\oint_s \overline{A}.\overline{ds}$ که s سطح یک استوانه بشعاع ۲m و ارتفاع ۱/۵m می‌باشد بدست آورید قاعده پائینی استوانه در صفحه z=0 قرار دارد

حل: ***انتگرال روی سطح بسته را میتوان تبدیل به سه سطح مطابق زیر کرد.***

$$\oint_s \overline{A}.\overline{ds} = \underbrace{\int \overline{A}.\overline{ds_1}}_{\text{قاعده پائینی استوانه}} + \underbrace{\int \overline{A}.\overline{ds_2}}_{\text{قاعده بالایی استوانه}} + \underbrace{\int \overline{A}.\overline{ds_3}}_{\text{سطح جانبی استوانه}}$$

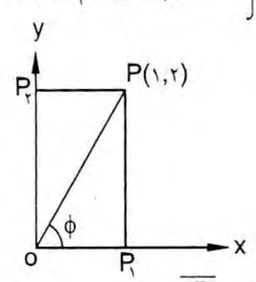
$$\overline{d}s_1=-R\,dR\,d\phi\,\hat{a}_z \qquad \overline{d}s_2=R\,dR\,d\phi\,\hat{a}_z \qquad \overline{d}s_3=a\,d\phi\,dz\,\hat{a}_R$$

$$\overline{A}.ds_1=[x\,\hat{a}_x+y\,\hat{a}_y+z\,\hat{a}_z].(R\,dR\,d\phi\,a_z)\ \big|_{z=0}=0$$

$$\overline{A}.ds_2\ [x\,\hat{a}_x+y\,\hat{a}_y+z\,\hat{a}_z].[R\,dR\,d\phi\,\hat{a}_z]\ \big|_{z=1/5}=1/5R\,dR\,d\phi$$

$$\overline{A}.\overline{ds_3}=(x\,\hat{a}_x+y\,\hat{a}_y+z\,\hat{a}_z).(a\,d\phi\,dz\hat{a}_R)=r\,\hat{a}_r.a\,d\phi\,dz\,\hat{a}_R=r\sin\theta\,a\,d\phi\,dz=Ra\,d\phi\,dz\ \big|_{R=a}$$

$$\Rightarrow \overline{A}.\overline{d}s_3=a^2\,d\phi\,dz \rightarrow \oint \overline{A}.\overline{d}s=0+\int_0^{2\pi}\int_0^{2} 1/5R\,dR\,d\phi+\int_0^{2\pi}\int_0^{1/5} 4\,d\phi\,dz=18\pi$$



مثال ۹: انتگرال $\int_0 R\,\overline{dR}$ روی مسیر O به P روی مسیرهای زیر حساب کنید.

الف) OP_1P ب) OP_2P ج) مسیر مستقیم OP

حل: الف: روی مسیر OP_1 مقدار y=0 و dy=0 است.

لذا R=x و $\overline{dR}=dx\,\hat{a}_x$ و *روی مسیر* P_1P، dx=0 و $R=\sqrt{1+y^2}$ و $\overline{dR}=dy\,\hat{a}_y$

بنابراین

$$\int_{OP_1P} R\,\overline{dR} = \int_{o}^{P_1} x\,dx\,\hat{a}_x + \int_{P_1}^{P} \sqrt{۱+y^۲}\,dy\,\hat{a}_y = \int_{۰}^{۱} x\,dx\,\hat{a}_x + \int_{۰}^{۲} \sqrt{۱+y^۲}\,dy\,\hat{a}_y$$

$$= \frac{۱}{۲}x^۲\,\hat{a}_x\,\Big]_{۰}^{۱} + \left[\frac{۱}{۲}\sinh^{-۱}y + \frac{y}{۲}\sqrt{۱+y^۲}\right]_{۰}^{۲}\hat{a}_y = \frac{۱}{۲}\hat{a}_x + ۲/۹۶\,\hat{a}_y$$

ب: روی مسیر $OP_۲$ مقدار $x=۰$ و $dx=۰$ است لذا $R=y$ و $\overline{dR}=dy\,\hat{a}_y$ و روی مسیر $P_۲P$، $dy=۰$ و $\overline{dR}=dx\,\hat{a}_x$ و $R=\sqrt{x^۲+۴}$ بنابراین

$$\int_{OP_۲P} R\,\overline{dR} = \int_{o}^{P_۲} y\,dy\,\hat{a}_y + \int_{P_۲}^{P} \sqrt{x^۲+۴}\,dx\,\hat{a}_x = \int_{۰}^{۲} y\,dy\,\hat{a}_y + \int_{۰}^{۱} \sqrt{x^۲+۴}\,dx\,\hat{a}_x$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}y^۲\right]_{۰}^{۲}\hat{a}_y + \left[۲\sinh^{-۱}x + \frac{۱}{۲}x\sqrt{x^۲+۴}\right]_{۰}^{۱}\hat{a}_x = ۲\,\hat{a}_y + ۲/۹\,\hat{a}_x$$

ج: روی مسیر OP داریم

$$\int_{OP} R\,\overline{dR} = \int_{۰}^{\sqrt{۵}} R\,dR\,\hat{a}_R = \frac{۱}{۲}R^۲\,\Big]_{۰}^{\sqrt{۵}}(\hat{a}_x\cos\phi + \hat{a}_y\sin\phi)$$

$$\sin\phi = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \quad \text{و} \quad \cos\phi = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \quad \rightarrow \int_{OP} R\,\overline{dR} = \frac{۵}{۲}\left[\frac{۱}{\sqrt{۵}}\hat{a}_x + \frac{۲}{\sqrt{۵}}\hat{a}_y\right] = \frac{\sqrt{۵}}{۲}\hat{a}_x + \sqrt{۵}\,\hat{a}_y$$

تمرین ۳

مثال ۱۰: اگر $\overline{F} = x^۲\hat{a}_x - ۲xy\,\hat{a}_y$ مطلوبست $\int_A^B \overline{F}.\overline{d\ell}$ روی مسیر ربع دایره‌ای به شعاع ۴ در ناحیه اول مختصات (A روی محور x و B روی محور y قرار دارد)

حل: مسئله را می‌توان هم در دستگاه مختصات قائم و هم استوانه‌ای حل کرد ابتدا مسئله را در دستگاه مختصات قائم حل می‌کنم

$$\int_A^B \overline{F}.\overline{d\ell} = \int (x^۲\hat{a}_x - ۲x\,\hat{a}_y).(dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y) = \int x^۲dx - ۲xy\,dy$$

$$= \int_{۴}^{۰} x^۲dx + \int_{۰}^{۴} -۲y\sqrt{۱۶-y^۲}\,dy = \frac{۱}{۳}x^۳\,\Big]_{۴}^{۰} + \left[\frac{۲}{۳}(۱۶-y^۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{۴} = -۶۴$$

حال مسئله را در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل می‌کنیم.

$$\overline{d\ell} = ۴d\phi\,\hat{a}_\phi \qquad \overline{F} = x^۲\,\hat{a}_x - ۲xy\,\hat{a}_y$$

$$\overline{F}.\overline{d\ell} = (x^۲\hat{a}_x - ۲xy\,\hat{a}_y).(۴d\phi\,\hat{a}_\phi) = ۴x^۲d\phi\,\hat{a}_\phi.\hat{a}_x - ۸xy\,\hat{a}_y.\hat{a}_\phi$$

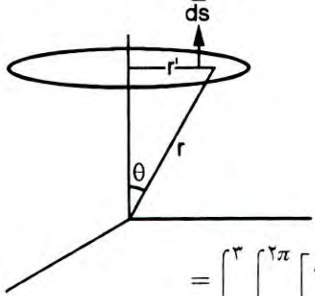
$$= ۴x^۲d\phi(-\sin\phi) - ۸xy(\cos\phi)\,d\phi = ۴\,(۴\cos\phi)^۲\,d\phi(-\sin\phi) - ۸(۴\cos\phi)(۴\sin\phi)(\cos\phi)\,d\phi$$

$$= (-۶۴\cos^۲\phi\sin\phi - ۱۲۸\cos^۲\phi\sin\phi)\,d\phi = -۱۹۲\cos^۲\phi\sin\phi\,d\phi$$

$$\Rightarrow \int \overline{F}.\overline{d\ell} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} -۱۹۲\cos^۲\phi\sin\phi\,d\phi = ۶۴\cos^۳\phi\,\Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = -۶۴$$

که نتیجه با حالت قبل یکی است.

مثال ۱۱: بردار $\overline{A} = 2r\,\hat{a}_r - \dfrac{4}{r\sin\theta}\,\hat{a}_\theta$ داده شده است مقدار $\int_s \overline{A}.\overline{ds}$ روی سطح دایره‌ای بشعاع ۳ که در صفحه z=۴ قرار دارد و در جهت مثبت $\hat{a}_z$ بدست آورید کوییز ۱



حل:
$$\int_s \overline{A}.\overline{ds} = \int_0^3\int_0^{2\pi} (2r\,\hat{a}_r - \frac{4}{r\sin\theta}\hat{a}_\theta).(r'\,dr'\,d\phi\,\hat{a}_z)$$

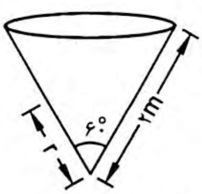
$$= \int_0^3\int_0^{2\pi}\left[2r\,\hat{a}_r.\hat{a}_z - \frac{4}{r\sin\theta}\hat{a}_\theta.\hat{a}_z\right] r'\,dr'\,d\phi$$

$$= \int_0^3\int_0^{2\pi}\left[2r\cos\theta - \frac{4}{r\sin\theta}(-\sin\theta)\right] r'\,dr'\,d\phi = \int_0^3\int_0^{2\pi}(2z + \frac{4}{r})\,r'\,dr'd\phi$$

$$= \int_0^3\int_0^{2\pi}(8 + \frac{4}{\sqrt{16+r'^2}})r'dr'd\phi = 2\pi\int_0^3(8 + \frac{4r'}{\sqrt{16+r'^2}})r'dr'd\phi = \left[4r'^2 + 4\sqrt{16+r'^2}\right]_0^3 2\pi$$

$$= 2\pi\left[36 + 4(5) - 16\right] = 80\pi$$

مثال ۱۲: مقدار انتگرال $\int_s \overline{A}.\overline{ds}$ که $\overline{A} = \frac{1}{r}\,\hat{a}_\theta$ و s سطح جانبی مخروطی به طول 2^m و زاویه 60° است بدست آورید.



***حل:* از روی شکل میتوان $\overline{ds}$ را بصورت زیر تعریف کرد.**

$$\overline{ds} = r\sin 30^\circ\,d\phi\,dr\,\hat{a}_\theta = \frac{1}{2}\,r\,dr\,d\phi\,\hat{a}_\theta$$

$$\int \overline{A}.\overline{ds} = \int_0^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\,\hat{a}_\theta.\frac{1}{2}\,r\,dr\,d\phi\,\hat{a}_\theta = \int_0^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dr\,d\phi = 2\pi$$

سوالهای انتگرال برداری

۱. بردار $\overline{A} = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z$ داده شده است $\oint_s \overline{A}.\overline{ds}$ که s کره‌ای بشعاع ۳^m و به مرکز مبدأ مختصات میباشد کدام است؟

۱) ۲۴π ۲) ۳۶π ۳) ۱۴۴π ۴) ۱۰۸π

۲. کار انجام شده توسط نیروی $\overline{F} = ۶xyz\,\hat{a}_x + ۳x^۲z\,\hat{a}_y + ۳x^۲y\,\hat{a}_z$ جهت تغییر مکان جسمی از مبدا به نقطه (۳ و ۲ و ۱-) کدام است؟

۱) ۱۸^j ۲) ۱۵^j ۳) صفر ۴) ۱۲^j

۳. نیروی $F = (۲y - y^۲)\,\hat{a}_x + xy\,\hat{a}_y$ در صفحه xy داده شده است اگر بخواهیم از نقطه (۰ و ۰) به نقطه (۲و۲) حرکت کنیم و کار انجام شده صفر باشد چگونه باید این عمل را انجام دهیم

۱) ابتدا به نقطه (۰و۲) رفته و از آنجا به نقطه (۲و۲) برویم ۲) ابتدا به نقطه (۲و۰) رفته و از آنجا به نقطه (۲و۲) برویم
۳) مستقیماً از مبدأ به نقطه (۲و۲) برویم. ۴) این کار امکان ندارد.

۴. مقدار عبارت $\int_{(۱,\frac{\pi}{۳},۲)}^{(۰/۴,\frac{\pi}{۲},-۱)} \overline{F}.\overline{d\ell}$ اگر $\overline{F} = \frac{۲\cos\phi}{R^۳}\hat{a}_R + \frac{\sin\phi}{R^۳}\hat{a}_\phi$ کدام است

۱) $-۰/۵$ ۲) ۱ ۳) $۰/۵$ ۴) صفر

۵. بردار $\overline{A} = \frac{۲\cos\theta}{r^۳}\hat{a}_r + \frac{\sin\theta}{r^۳}\hat{a}_\theta$ در مختصات کروی مفروض است در اینصورت $\int_B^C \overline{A}.\overline{d\ell}$ که مختصات B و C در دستگاه کروی بصورت $B\begin{cases}۲\\ \frac{\pi}{۳}\\ \frac{\pi}{۴}\end{cases}$ و $C\begin{cases}۱\\ \frac{\pi}{۲}\\ \frac{\pi}{۶}\end{cases}$ می‌باشند کدام است.

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۸}$

۶. حاصل انتگرال $\oint_s \frac{y}{x}\hat{a}_r.\overline{ds}$ روی کره‌ای بشعاع ۲^m کدام است؟

۱) صفر ۲) π ۳) $-\pi$ ۴) ۶π

۷. حاصل انتگرال $\oint ۲r\,\hat{a}_r.\overline{ds}$ روی استوانه‌ای بشعاع ۲^m و ارتفاع ۳^m که قاعده آن در صفحه xy قرار گرفته و محور آن محور z است کدام است؟

۱) ۲۴π ۲) ۴۸π ۳) ۷۲π ۴) صفر

۸. اگر بردار $\overline{F} = -2r\cos\theta\,\hat{a}_r + r\sin\theta\,\hat{a}_\theta$ باشد کار لازم جهت تغییر مکان جسمی از نقطه $\theta = 60^\circ$ به $\theta = 120^\circ$ روی کره‌ای بشعاع ۲m کدام است؟

۱) ۲j ۲) ۴j ۳) صفر ۴) ۱j

۹. حاصل انتگرال $\int_v \overline{A}dv$ که v حجم کره‌ای بشعاع ۳m و $\overline{A} = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_y$ کدام است؟

۱) $\pi\left[\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z\right]$ ۲) $2\pi\left[\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z\right]$ ۳) $\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z$ ۴) صفر

۱۰. بردار $\overline{A} = 2\,\hat{a}_R - 3\,\hat{a}_\phi + 2\hat{a}_z$ داده شده است $\oint_s \overline{A}.\overline{ds}$ روی کره‌ای بشعاع ۲m کدام است؟

۱) $8\pi^2$ ۲) صفر ۳) 6π ۴) $4\pi^2$

پاسخ سوالهای انتگرال برداری

۱. گزینهٔ ۴) $\overline{A} = x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z = r\,\hat{a}_r = ۳\hat{a}_r$ روی کره

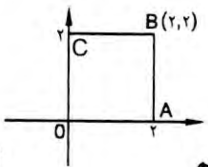
$$\int \overline{A}.ds = \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi} ۳\hat{a}_r.(۹\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{a}_r) = ۲۷ \times ۴\pi = ۱۰۸\pi$$

۲. گزینهٔ ۱) دقت شود که نیروی $\overline{F}$ یک نیروی کنسرواتیو است و کار بستگی به مسیر ندارد

$$\int \overline{F}.\overline{d\ell} = \int_{(\circ/\circ,\circ)}^{(-۱,۲,۳)} (۶xyz\,\hat{a}_x + ۳x^۲z\,\hat{a}_y + ۳x^۲y\,\hat{a}_z).(dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z)$$

$$= \int_{(\circ/\circ,\circ)}^{(-۱,۲,۳)} (۶xyd_x + ۳x^۲zdy + ۳x^۲y\,dz) = \int d(۳x^۲yz) = ۳x^۲yz\Big]_{(\circ/\circ,\circ)}^{(-۱,۲,۳)} = ۳(-۱)^۲(۲)(۳) = ۱۸$$

۳. گزینهٔ ۲)



$$\int \overline{F}.\overline{d\ell} = \int (۲y - y^۲)\,dx + xy\,dy$$

اگر از مسیر OAB برویم داریم

$$\Rightarrow \int (۲y - y^۲)\,dx + xy\,dy = \int_O^A \circ\, dx + \circ\, dy$$

$$+ \int_A^B (۲y - y^۲)(\circ) + ۲ydy = \int_{\circ}^{۲} ۲y\,dy = ۴$$

پس (۱) صحیح نیست

اگر از مسیر OCB برویم داریم

$$\int (۲y - y^۲)\,dx + xy\,dy = \int_O^C (۲y - y^۲)(\circ) + \circ dy + \int_C^B (۲\times۲ - ۲^۲)\,dx + xy(\circ) = \circ + \circ = \circ$$

۴. گزینهٔ ۳)

$$\int_{(۱,\frac{\pi}{۳},۲)}^{(\circ/۴,\frac{\pi}{۲},-۱)} \overline{F}.\overline{d\ell} = \int_{(۱,\frac{\pi}{۳},۲)}^{(\circ/۴,\frac{\pi}{۲},-۱)} \left(\frac{۲\cos\phi}{R^۳}\hat{a}_R + \frac{\sin\phi}{R^۳}\hat{a}_\phi\right).(dR\,\hat{a}_R + R\,d\phi\,\hat{a}_\phi + dz\,\hat{a}_z)$$

$$= \int_{(۱,\frac{\pi}{۳},۲)}^{(\circ/۴,\frac{\pi}{۲},-۱)} \frac{۲\cos\phi}{R^۳}\,dR + \frac{\sin\phi}{R^۲}\,d\phi = \int_{(۱,\frac{\pi}{۳},۲)}^{(\circ/۴,\frac{\pi}{۲},-۱)} d\left[\frac{-\cos\phi}{R^۲}\right] = \frac{-\cos\phi}{R^۲}\Big]_{(۱,\frac{\pi}{۳},۲)}^{(\circ/۴,\frac{\pi}{۲},-۱)}$$

$$= \circ + \frac{\cos\frac{\pi}{۳}}{۱^۲} = \circ/۵$$

.۵ ۴)

$$\int_B^C \overline{A}.d\ell = \int_B^C \left[\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{a}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{a}_\theta\right].\left[dr\,\hat{a}_r + r\,d\theta\,\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{a}_\phi\right]$$

$$= \int_B^C \left[\frac{2\cos\theta}{r^3}dr + \frac{\sin\theta}{r^2}d\theta\right] = \int_B^C d\left[-\frac{\cos\theta}{r^2}\right] = \frac{-\cos\theta}{r^2}\Big]_{(2,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})}^{(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})}$$

$$= -\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1^2} + \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{2^2} = \frac{1}{8}$$

.۶ گزینهٔ ۱)

$$\oint \frac{y}{x}\hat{a}_r.\overline{ds} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\sin\theta\sin\phi}{r\sin\theta\cos\phi}\hat{a}_r.r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{a}_r = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{4\sin\phi\sin\theta}{\cos\phi}d\theta\,d\phi$$

$$= 8\int_0^{2\pi}\frac{\sin\phi}{\cos\phi}d\phi = -8\ln\cos\phi\,\Big]_0^{2\pi} = 0$$

.۷ گزینهٔ ۳)

$$\oint 2r\,\hat{a}_r.\overline{ds} = \underbrace{\int 2r\,\hat{a}_r.\overline{ds}}_{\text{قاعده پایین}} + \underbrace{\int 2r\,\hat{a}_r.\overline{ds}}_{\text{قاعده بالا}} + \underbrace{\int 2r\,\hat{a}_r.\overline{ds}}_{\text{سطح جانبی}}$$

$$\int_{r'=0}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi} -2r\,\hat{a}_r.r'dr'd\phi\,\hat{a}_z + \int_{r'=0}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi} 2r\,\hat{a}_r.r'dr'd\phi\,\hat{a}_z + \int_0^3\int_0^{2\pi} 2r\,\hat{a}_r.a\,d\phi\,dz\,\hat{a}_R$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} -2r\cos\theta\,r'dr'd\phi + \int_0^2\int_0^{2\pi} 2r\cos\theta\,r'dr'd\phi + \int_0^3\int_0^{2\pi} 2r\sin\theta\,a\,d\phi\,dz$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} -2z\,r'dr'd\phi\,\Big|_{z=0} + \int_0^2\int_0^{2\pi} 2zr'dr\,d\phi\,\Big|_{z=3} + \int_0^3\int_0^{2\pi} 2a^2\,d\phi\,dz$$

$$= 0 + 3r'^2\Big]_0^2\,2\pi + 2\pi\times 2\times(2)^2\times 3 = 72\pi$$

.۸ گزینهٔ ۲)

$$W = \int_{\theta=60}^{\theta=120}\overline{F}.\overline{d\ell} = \int_{\theta=60}^{\theta=120}\left[-2r\cos\theta\,\hat{a}_r + r\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right].\left[dr\,\hat{a}_r + r\,d\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

$$= \int_{\theta=60}^{\theta=120} -2r\cos\theta\,dr + r^2\sin\theta\,d\theta = \int_{\theta=60}^{\theta=120} d(-r^2\cos\theta) = -4(\cos 120 - \cos 60) = +4J$$

.۹ گزینهٔ ۴)

$$\int_v \left[x\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z\right] r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr = \int_0^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(r\sin\theta\cos\phi\,\hat{a}_x +$$

$$r\sin\theta\sin\phi\,\hat{a}_y + r\cos\theta\,\hat{a}_z)\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr = \int_0^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^3(\sin^2\theta\cos\phi\,\hat{a}_x$$

$$+\sin^2\theta\sin\phi\,\hat{a}_y + \cos\theta\sin\theta\,\hat{a}_z)\,d\theta\,d\phi\,dr = 0$$

.۱۰ گزینهٔ ۱)

$$\oint \overline{A}.\overline{ds} = \int \left[2\hat{a}_R - 3\hat{a}_\phi + 2\hat{a}_z\right].\left[a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{a}_r\right]$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} 8\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{a}_R\cdot\hat{a}_r - 12\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_r + 8\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{a}_z\cdot\hat{a}_r$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin^2\theta\, d\theta\, d\phi - \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 12\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,(0) + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin\theta\, d\theta\, d\phi\cos\theta = 2\pi(4\pi) = 8\pi^2$$

با توجه به آنچه که در بخش (۱-۵) گفته شد $\hat{a}_R\cdot\hat{a}_r=\sin\theta$, $\hat{a}_z\cdot\hat{a}_r=\cos\theta$ می‌باشد که در بالا استفاده شده است.