# مسائل

## بخشهای ۹-۲ و ۹-۳ قانون فارادی و نیروی محرکهٔ الکتریکی

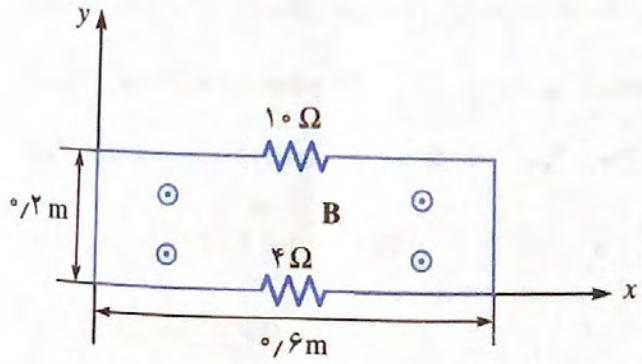
۹-۱ یک حلقهٔ رسانا به شعاع ۲۰cm در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}=10\cos 377t\,\mathbf{a}_z\ \mathrm{mWb/m^2}$ قرار دارد و در صفحهٔ $z=0$ قرار گرفته است . ولتاژ القاء شده در این حلقه را بیابید.

۹-۲ میله‌ای به طول $\ell$ با سرعت زاویه‌ای $\omega$ حول محور $z$ می‌چرخد. داریم $\mathbf{B}=B_0\,\mathbf{a}_z$ . ولتاژ القاء شده روی این میله را بیابید.

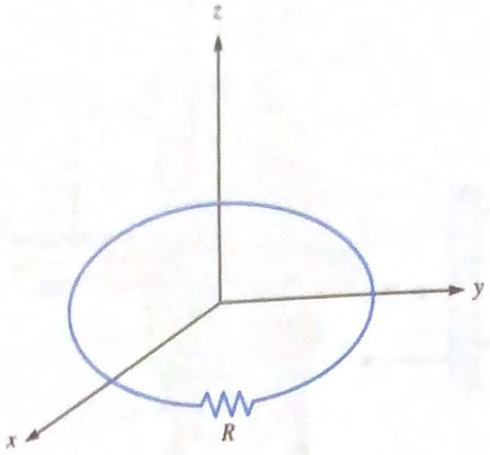
۹-۳ مدار شکل ۹-۱۶ در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}=40\cos(30\pi t-2y)\,\mathbf{a}_z\ \mathrm{Wb/m^2}$ قرار دارد. فرض کنید مقاومت سیمهای اتصال ناچیز است و جریان مدار را بیابید.

۹-۴ حلقهٔ رسانایی مطابق شکل ۹-۱۷ در صفحهٔ $xy$ قرار دارد. شعاع حلقه ۰٫۲ m و مقاومت آن $R=4\Omega$ است . جریان حلقه را به ازای $\mathbf{B}=40\sin 10^4 t\,\mathbf{a}_z\ \mathrm{mWb/m^2}$ بیابید.

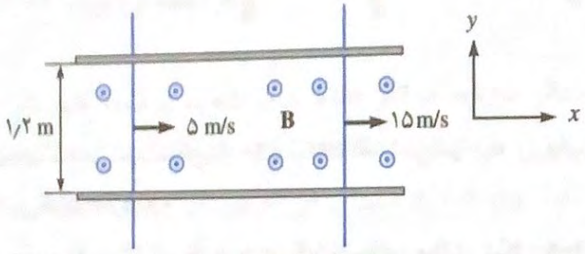
۹-۵ دو میلهٔ رسانا مطابق شکل ۹-۱۸ روی یک ریل ساکن می‌لغزند. emf القا شده در این حلقه را به ازای $\mathbf{B}=0.2\mathbf{a}_z\ \mathrm{Wb/m^2}$ بیابید.




شکل ۹-۱۶ مربوط به مسئلهٔ ۹-۳.




شکل ۹-۱۷ مربوط به مسئلهٔ ۹-۴.

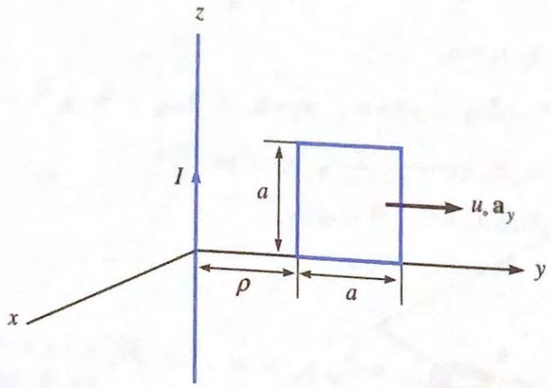



شکل ۹-۱۸ مربوط به مسئلهٔ ۹-۵.

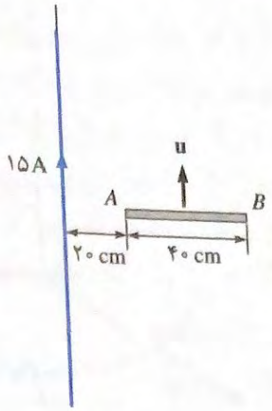
۹-۶ یک پیچک ۵۰ دوری روی یک قاب مربع شکل به طول ضلع ۲۰ cm پیچیده شده است. مرکز پیچک در مبدا صفحهٔ $z = 0$ قرار دارد و اضلاع آن با محورهای $x$ و $y$ موازی است. میدان مغناطیسی در فضای اطراف $\mathbf{B} = 2\cos y \cos 10^3 t\, \mathbf{a}_z$ Wb/m$^2$ است. emf القا شده در پیچک را بیابید.

۹-۷ یک حلقهٔ مربع شکل به طول ضلع $a$ مطابق شکل ۹-۱۹ با سرعت ثابت $u_0\, \mathbf{a}_y$ از سیم بینهایت حامل جریان $I$ واقع در امتداد $\mathbf{a}_z$ دور می‌شود. در $t = 0$ فرض کنید $\rho = \rho_0$ و نشان دهید که emf القاء شده در حلقه در $t > 0$ عبارت است از

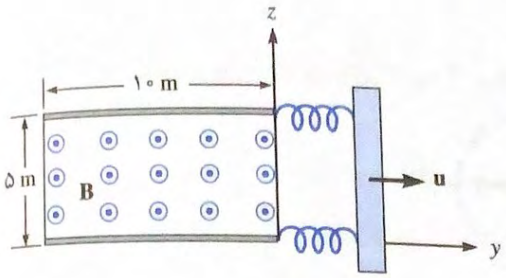
$$V_{\text{emf}} = \frac{u_0 a^2 \mu_0 I}{2\pi\rho(\rho + a)}$$




شکل ۹-۱۹ مربوط به مسئلهٔ ۹-۷.




شکل ۹-۲۰ مربوط به مسئلهٔ ۹-۸.



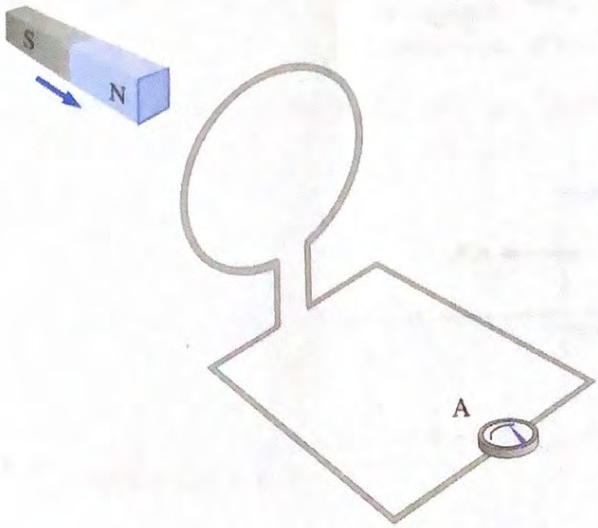

شکل ۹-۲۱ مربوط به مسئلهٔ ۹-۹.

۹-۸ یک میلهٔ رسانا با سرعت ثابت $3\mathbf{a}_z$ m/s به موازات یک سیم رشته‌ای بلند حامل جریان ۱۵ A حرکت می‌کند (شکل ۹-۲۰ ). emf القا شده در میله را بیابید و تعیین کنید کدام طرف میله پتانسیل بزرگتری دارد.

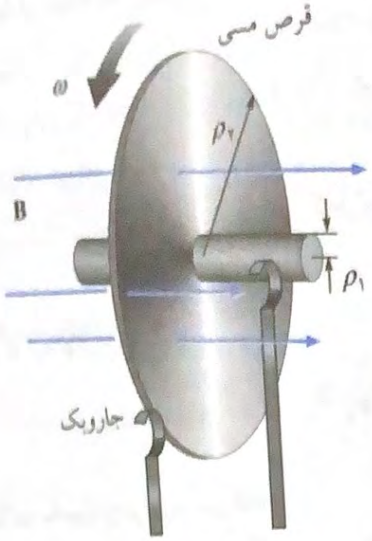
۹-۹ یک میلهٔ رسانا توسط سیمهای قابل انعطاف مطابق شکل ۹-۲۱ به یک ریل واقع در میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = 6\cos 10t\,\mathbf{a}_x$ mWb/m$^2$ متصل شده است . محور z موقعیت تعادلی میله است و سرعت میله را می‌توان به صورت $2\cos 10t\,\mathbf{a}_y$ m/s بیان کرد ، emf القاء شده در میله را بیابید.

۹-۱۰ خودرویی با سرعت ۱۲۰ km/hr حرکت می‌کند . میدان مغناطیسی زمین $4/3\times10^{-5}$ Wb/m$^2$ است . ولتاژ القاء شده بین دو سر سپر فلزی خودرو را ، که طول آن ۱/۶ m است ، بیابید. زاویهٔ بین میدان مغناطیسی زمین و بردار عمود بر خودرو ۶۵° است .

۹-۱۱ یک آهنربای میله‌ای مطابق شکل ۹-۲۲ به سمت مرکز یک پیچک ۱۰ دوری ، که مقاومت آن ۱۵Ω است ، برده می‌شود. شار مغناطیسی گذرنده از پیچک طی ۰/۰۲ s از ۰/۴۵ Wb به ۰/۶۴ Wb می‌رسد، اندازه و جهت جریان القا شده در پیچک را تعیین کنید.




شکل ۹-۲۲ مربوط به مسئلهٔ ۹-۱۱.




**شکل ۹-۲۳** مربوط به مسئلهٔ ۹-۱۲.

۹-۱۲ مقطع یک مولد قرصی یک قطبی در شکل ۹-۲۳ نشان داده شده است. شعاع داخلی قرص $\rho_1 = 2\ \text{cm}$ و شعاع بیرونی آن $\rho_2 = 10\ \text{cm}$ است. این قرص در میدان مغناطیسی یکنواخت $15\ \text{mWb/m}^2$ با سرعت $60\ \text{rad/s}$ می‌چرخد. ولتاژ القاء شده را بیابید.

## بخش ۹-۴ جریان جابه‌جایی

۹-۱۳ مولدی با ولتاژ $50\ \text{V}$ و فرکانس $20\ \text{MHz}$ به صفحات یک خازن موازی صفحه متصل شده است. مساحت صفحات خازن $2/8\ \text{cm}^2$ و فاصلهٔ هوایی بین آنها $0/2\ \text{mm}$ است. اندازهٔ ماکزیمم چگالی جریان جابه‌جایی و کل جریان جابه‌جایی را بیابید.

۹-۱۴ نسبت $J/J_d$ (جریان هدایتی به جریان جابه‌جایی) در فرکانس‌های بالا بسیار مهم است. این نسبت را در فرکانس $1\ \text{GHz}$ برای مواد زیر حساب کنید:

(الف) آب مقطر $(\mu = \mu_0, \varepsilon = 81\varepsilon_0, \sigma = 2\times10^{-3}\ \text{S/m})$

(ب) آب دریا $(\mu = \mu_0, \varepsilon = 81\varepsilon_0, \sigma = 25\ \text{S/m})$

(پ) آهک $(\mu = \mu_0, \varepsilon = 5\varepsilon_0, \sigma = 2\times10^{-4}\ \text{S/m})$

۹-۱۵ فرض کنید برای خاک خشک $\sigma = 10^{-4}\ \text{S/m}$ ، $\varepsilon = 3\varepsilon_0$ و $\mu = \mu_0$. فرکانسی را که در آن نسبت اندازهٔ چگالی جریان هدایتی به چگالی جریان جابه‌جایی یک می‌شود، تعیین کنید.

۹-۱۶ در فضای آزاد داریم $\mathbf{D} = D_0 \cos(t + \beta z)\,\mathbf{a}_y\ \text{C/m}^2$ . $\mathbf{B}$ را بیابید.

## بخش ۹-۵ معادلات مکسول

۹-۱۷ (الف) معادلات مکسول را برای یک محیط خطی و همگن بر حسب $\mathbf{E}_s$ و $\mathbf{H}_s$ بنویسید، با این فرض که عامل زمانی به صورت $e^{-j\omega t}$ است.

(ب) شکل نقطه‌ای معادلات مکسول جدول ۹-۲ را در دستگاه مختصات قائم به صورت هشت معادلهٔ اسکالر بنویسید.

۹-۱۸ نشان دهید که برای یک محیط عاری از منبع ($\mathbf{J}=0, \rho_v=0$) معادلات مکسول را می‌توان به صورت دو معادله نوشت. این دو معادله را پیدا کنید.

۹-۱۹ معادلات مکسول را بر حسب $\mathbf{D}$ و $\mathbf{B}$ به طور کامل بیان کنید. محیط را خطی، همگن، و همسانگرد فرض کنید.

۹-۲۰ نشان دهید که میدانهای زیر

$$\mathbf{E}=E_0\cos x\cos t\,\mathbf{a}_y \quad , \quad \mathbf{H}=\frac{E_0}{\mu_0}\sin x\sin t\,\mathbf{a}_z$$

تمام معادلات مکسول را برآورده نمی‌کنند.

۹-۲۱ نشان دهید که در یک محیط خطی، همگن، و همسانگرد چگالی بار $\rho_v$ رابطهٔ زیر را برآورده می‌کند

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v=0$$

۹-۲۲ معادلهٔ نفوذ در یک ناحیهٔ بدون منبع به صورت زیر است

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

این معادله را به دست آورید.

۹-۲۳ در یک محیط خاص داریم

$$\mathbf{J}=(2y\mathbf{a}_x+xz\,\mathbf{a}_y+z^3\mathbf{a}_z)\sin 10^4 t\ \mathrm{A/m}$$

$\rho_v$ را با فرض $\rho_v(x,y,0,t)=0$ بیابید.

۹-۲۴ در محیطی با $\mu=\mu_0$ و $\varepsilon=4\varepsilon_0$ داریم

$$\mathbf{H}=0.4\sin(10\pi x/3)\cos(2\pi\times 10^9 t-\beta z)\,\mathbf{a}_y\ \mathrm{A/m}$$

$\beta$ و $\mathbf{E}$ را بیابید.

۹-۲۵ $\mathbf{B}$ را به ازای $\mathbf{D}=D_0\cos(\omega t+\beta z)\,\mathbf{a}_y\ \mathrm{C/m^2}$ بیابید. محیط را فضای آزاد فرض کنید.

۹-۲۶ در فضای آزاد داریم

$$\mathbf{E}=\frac{50}{\rho}\cos(10^8 t-kz)a_\rho\ \mathrm{V/m}$$

$k$، $\mathbf{J}_d$، و $\mathbf{H}$ را بیابید.

۹-۲۷ در محیطی با $\sigma=0$، $\mu=2\mu_0$، و $\varepsilon=10\varepsilon_0$ داریم

$$\mathbf{J}=60\sin(10^9 t-\beta z)\mathbf{a}_x\ \ \mathrm{mA/m^2}$$

(الف) $\mathbf{D}$ و $\mathbf{H}$ را بیابید. (ب) $\beta$ را تعیین کنید.

۹-۲۸ در فضای آزاد

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin\alpha x \cos(\omega t - \beta y)\mathbf{a}_z$$

میدان $\mathbf{H}$ متناظر با این میدان الکتریکی را بیابید.

۹-۲۹ تعیین کنید آیا میدانهای الکترومغناطیسی زیر معادلات مکسول را برآورده می‌کنند یا نه. محیط را بدون بار فرض کنید

(الف) $\mathbf{A} = 40\sin(\omega t + 10x)\mathbf{a}_z$

(ب) $\mathbf{B} = \frac{10}{\rho}\cos(\omega t - 2\rho)\mathbf{a}_\phi$

(پ) $\mathbf{C} = \left(3\rho^2\cot\phi\,\mathbf{a}_\rho + \frac{\cos\phi}{\rho}\mathbf{a}_\phi\right)\sin\omega t$

(ت) $\mathbf{D} = \frac{1}{r}\sin\theta\sin(\omega t - 5r)\mathbf{a}_\theta$

۹-۳۰ انرژی الکترومغناطیسی کل به صورت زیر بیان می‌شود

$$W = \frac{1}{2}\int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\,dv$$

با توجه به معادلات مکسول نشان دهید که باید داشته باشیم

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} - \int_v \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,dv$$

۹-۳۱ در فضای آزاد داریم

$$\mathbf{H} = \rho(\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + 2\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi)\cos(4\times10^6 t)\ \text{A/m}$$

$\mathbf{J}_d$ و $\mathbf{E}$ را بیابید.

۹-۳۲ میدان تابشی یک آنتن در فضای آزاد به صورت زیر است

$$\mathbf{H} = \frac{12\sin\theta}{r}\cos(2\pi\times10^8 t - \beta r)\mathbf{a}_\theta\ \text{mA/m}$$

$\mathbf{E}$ متناظر با این میدان را به ازای $\beta$ بیابید.

۹-۳۳ میدان الکتریکی در هوا به صورت $\mathbf{E} = \rho t e^{-\rho - t}\mathbf{a}_\phi\ \text{V/m}$ داده شده است؛ $\mathbf{B}$ و $\mathbf{J}$ را بیابید.

## بخش ۹-۶ پتانسیل‌های متغیر با زمان

۹-۳۴ نشان دهید که در فضای آزاد $(\rho_v = 0, \mathbf{J} = 0)$ میدان زیر

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}(\cos\theta\,\mathbf{a}_r - \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta)e^{j\omega(t - r/c)}$$

معادلهٔ موج، معادلهٔ (۹-۵۲) را برآورده می‌کند. $V$ متناظر را بیابید. $c$ سرعت نور در فضای آزاد است.

۹-۳۵ نشان دهید که معادلهٔ زیر شکل دیگری از قانون فارادی است

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

که در آن $\mathbf{A}$ پتانسیل مغناطیسی برداری است.

۹-۳۶ در فضای آزاد پتانسیل‌های تاخیری زیر داده شده است

$$V = x(z - ct)\,\text{V}, \qquad \mathbf{A} = x(z/c - t)\,\mathbf{a}_z\ \text{Wb/m}$$

که در آن $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

(الف) ثابت کنید که $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$.

(ب) $\mathbf{E}$ را تعیین کنید.

## بخش ۹-۷ میدانهای هارمونیکی زمانی

۹-۳۷ اعداد مختلط زیر را یافته، آن را به شکل قطبی بیان کنید.

(الف) $(4\angle 30^\circ - 10\angle 50^\circ)^{1/2}$

(ب) $\dfrac{1 + j2}{6 + j8 - 7\angle 15^\circ}$

(پ) $\dfrac{(3 + j4)^2}{12 - j7 + (-6 + j10)^*}$

(ت) $\dfrac{(3/6\angle -200^\circ)^{1/2}}{(2/4\angle 45^\circ)^2(-5 + j8)^*}$

۹-۳۸ میدانهای هارمونیکی زیر را به شکل فیزور بیان کنید.

(الف) $\mathbf{A} = 5\sin(2t + \pi/3)\mathbf{a}_x + 3\cos(2t + 30^\circ)\mathbf{a}_y$

(ب) $\mathbf{B} = \dfrac{100}{\rho}\sin(\omega t - 2\pi z)\,\mathbf{a}_\rho$

(پ) $\mathbf{C} = \dfrac{\cos\theta}{r}\sin(\omega t - 3r)\,\mathbf{a}_\theta$

(ت) $\mathbf{D} = 10\cos(k_1 x)\cos(\omega t - k_2 z)\mathbf{a}_y$

۹-۳۹ شکل لحظه‌ای متناظر با هر یک از فیزورهای زیر را بیابید.

(الف) $\mathbf{A}_s = \dfrac{50}{j}\mathbf{a}_x - j10\mathbf{a}_y$

(ب) $\mathbf{B}_s = \dfrac{j20}{\rho}e^{-j(\pi/6)z}\mathbf{a}_\phi$

(پ) $\mathbf{C}_s = \dfrac{30}{r^2}(1 + j)e^{-j3\phi}\cos\theta\,\mathbf{a}_\phi$

۹-۴۰ در فضای آزاد بدون منبع

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\rho}\cos(\omega t - 3z)\,\mathbf{a}_\phi\ \text{A/m}$$