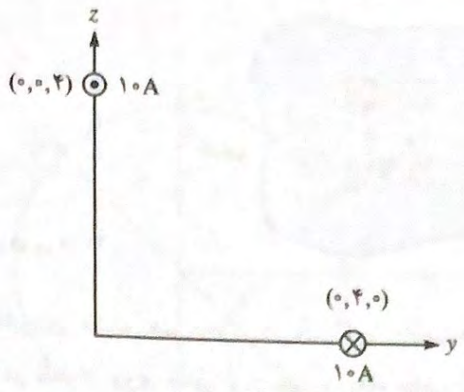
مسائل

بخش ۷-۲ قانون بیو – ساوار

۷-۱ (الف) قانون بیو – ساوار را بیان کنید. (ب) روی محورهای y و z به ترتیب جریان $10\ \mathrm{A}$ در جهت $\mathbf{a}_y$ و $20\ \mathrm{A}$ در جهت $-\mathbf{a}_z$ وجود دارد. $\mathbf{H}$ را در $(-3,4,5)$ بیابید.

۷-۲ دو رشتهٔ بینهایت بلند مطابق شکل ۷-۲۷ به موازات محور x قرار دارند. (الف) $\mathbf{H}$ در مبدا، و (ب) $\mathbf{H}$ در $(-1,2,2)$ را بیابید.

۷-۳ جریان $Id\mathbf{l}=4\mathbf{a}_x\ \mathrm{A\cdot m}$ در مبدا قرار دارد. شدت میدان مغناطیسی ناشی از این جریان را در (الف) $(1,0,0)$، (ب) $(0,1,0)$، (پ) $(0,0,1)$، و (ت) $(1,1,1)$ بیابید.



شکل ۷-۲۷ مسئلهٔ ۷-۲.

۴-۷ یک عنصر جریان به طول 5mm در محل $x=0$ ، $y=4$ ، $z=-3$ و به موازات محور x قرار دارد. از این عنصر جریان ۳A در جهت $\mathbf{a}_x$ می‌گذرد ، $\mathbf{H}$ در مبدا را بیابید.

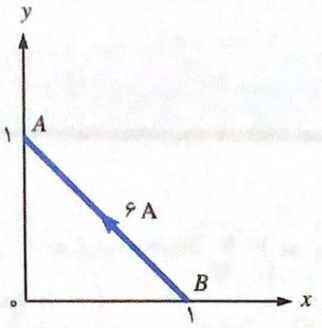
۵-۷ روی یک رشتهٔ هادی جریان I از $A(0,0,a)$ به $B(0,0,b)$ می‌گذرد. نشان دهید که شدت میدان مغناطیسی در نقطهٔ $P(x,y,0)$ عبارت است از

$$\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{b}{\sqrt{x^2+y^2+b^2}}-\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\right]\mathbf{a}_\phi$$

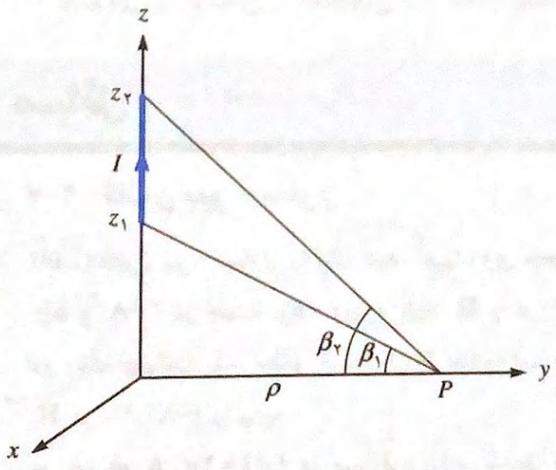
۶-۷ در شکل ۷-۲۸ سیم AB بخشی از یک مدار الکتریکی است . $\mathbf{H}$ ناشی از جریان سیم AB را در مبدا به دست آورید.

۷-۷ خطی با طول محدود در شکل ۷-۲۹ نشان داده شده است . نشان دهید که $\mathbf{H}$ در نقطهٔ P عبارت است از

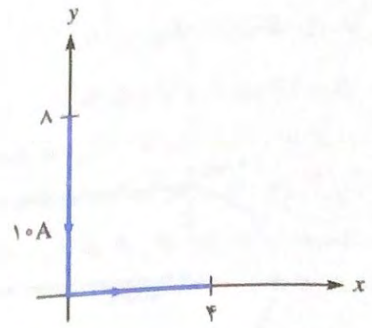
$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{I}}{4\pi\rho}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)\mathbf{a}_\phi$$



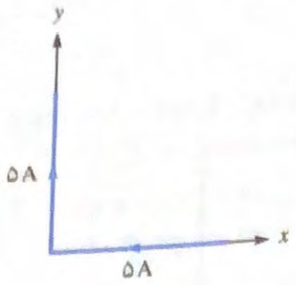
شکل ۷-۲۸ مسئلهٔ ۷-۶.



شکل ۷-۲۹ مسئلهٔ ۷-۷.



شکل ۷-۳۰ مسئلهٔ ۷-۸.



شکل ۷-۳۱ جریان رشته‌ای مسئلهٔ ۷-۱۱.

۷-۸ یک رسانا به شکل L، مطابق شکل ۷-۳۰ در نظر بگیرید. **H** را در نقطهٔ (۴,۸,۰) بیابید.

۷-۹ روی خط $x = 0$ ، $y = 0$ ، $0 \le z \le 10\ \text{m}$ جریان ۲ A در جهت $\mathbf{a}_z$ می‌گذرد. **H** را در نقاط زیر بیابید:

(الف) (۵,۰,۰)

(ب) (۵,۵,۰)

(پ) (۵,۱۵,۰)

(ت) (۵,−۱۵,۰)

* ۷-۱۰ (الف) **H** ناشی از ضلع ۲ مثلث شکل ۷-۶ (الف) را در (۰,۰,۵) بیابید.

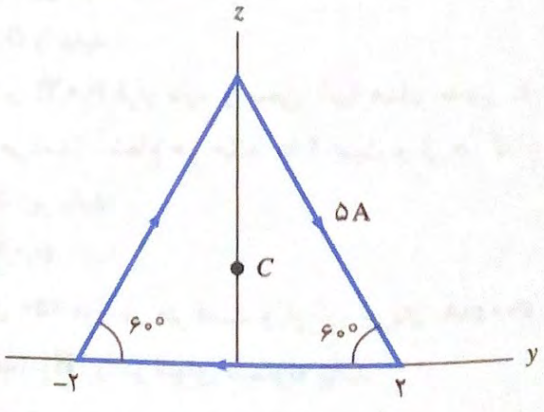
(ب) **H** ناشی از کل حلقه را در (۰,۰,۵) بیابید.

۷-۱۱ یک رشتهٔ سیم بینهایت بلند مطابق شکل ۷-۳۱ به صورت ⌊ خم شده است. اگر جریان ۵ A از این سیم بگذرد، شدت میدان مغناطیسی را در (الف) (۲,۲,۰)، (ب) (۰,−۲,۰)، (پ) (۰,۰,۲) بیابید.

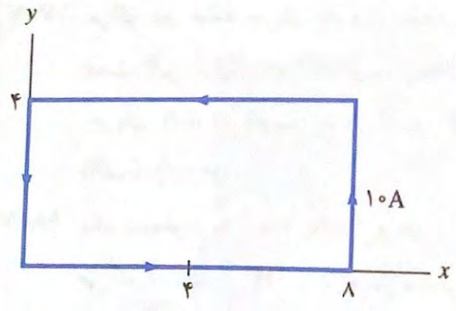
۷-۱۲ **H** را در مرکز C یک مثلث متساوی‌الاضلاع، که طول هر ضلع آن ۴ m است و از آن جریان ۵ A می‌گذرد، بیابید. (شکل ۷-۳۲ را ببینید.)

۷-۱۳ از یک حلقهٔ مستطیلی که مطابق شکل ۷-۳۳ در صفحهٔ $z = 0$ قرار دارد جریان ۱۰ A می‌گذرد. **H** را در این نقاط حساب کنید:

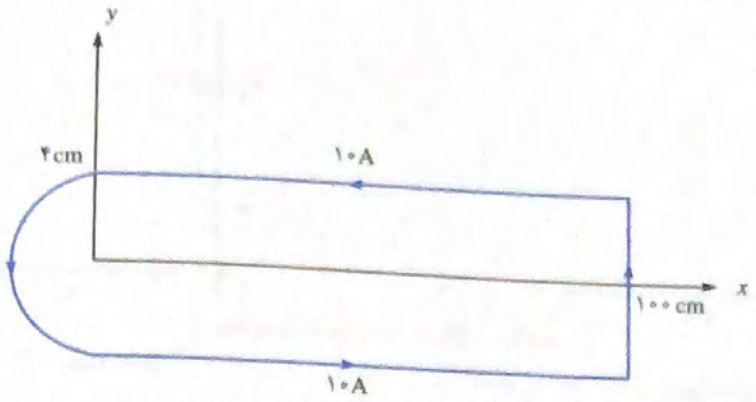
(الف) (۲,۲,۰) (ب) (۴,۲,۰) (پ) (۴,۸,۰) (ت) (۰,۰,۲)



شکل ۷-۳۲ مثلث متساوی‌الاضلاع مسئلهٔ ۷-۱۲.



شکل ۷-۳۳ حلقهٔ مستطیلی مسئلهٔ ۷-۱۳.



شکل ۷-۳۴ حلقهٔ مسئلهٔ ۷-۱۶ که با مقیاس درست رسم نشده است.

۷-۱۴ یک حلقهٔ مربعی شکل به طول ضلع $2a$ در صفحهٔ $z=0$ قرار دارد و از آن جریان I در جهت پادساعتگرد می‌گذرد. نشان دهید که در مرکز حلقه داریم

$$\mathbf{H}=\frac{\sqrt{2}I}{\pi a}\mathbf{a}_z$$

۷-۱۵ (الف) یک حلقه به شکل n ضلعی منتظم در نظر بگیرید که از آن جریان I بگذرد. نشان دهید که در مرکز حلقه داریم

$$H=\frac{nI}{2\pi r}\sin\frac{\pi}{n}$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی چندضلعی است.

(ب) این فرمول را به ازای $n=3$ و $n=4$ بررسی کنید و ببینید نتیجه با آنچه در مسائل ۷-۱۲ و ۷-۱۴ به ترتیب برای مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع به دست آوردید سازگار است یا نه.

(پ) با بزرگ شدن n چند ضلعی به دایره نزدیک می‌شود. آیا نتیجهٔ بند (الف) برای این حالت معتبر است. شدت میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقهٔ دایروی در مثال ۷-۳ به دست آمده است.

۷-۱۶ برای حلقهٔ شکل ۷-۳۴ شدت میدان مغناطیسی در O را بیابید.

۷-۱۷ مراکز دو حلقهٔ جریان دایروی مشابه در $(0,0,0)$ و $(0,0,4)$ قرار دارد و محور آنها همان محور z است (این آرایش دو حلقه‌ای را پیچک هلمهولتز می‌نامند). شعاع هر حلقه 2 m است و از هر کدام جریان 5 A در جهت $\mathbf{a}_\phi$ می‌گذرد. $\mathbf{H}$ را در نقاط زیر بیابید:

(الف) $(0,0,0)$ (ب) $(0,0,2)$

۷-۱۸ یک سیملوله به شعاع 4 mm و طول 2 cm دارای ۱۵۰ دور در متر است و از آن جریان 500 mA می‌گذرد. (الف) $|\mathbf{H}|$ را در مرکز سیملوله بیابید. (ب) $|\mathbf{H}|$ را در انتهای سیملوله بیابید.

۷-۱۹ روی صفحهٔ $x=10$ جریان 100mA/m در جهت $\mathbf{a}_z$ و روی خط $x=1$ ، $y=-2$ جریان $20\pi\text{ mA}$ در جهت $\mathbf{a}_z$ می‌گذرد. $\mathbf{H}$ را در $(4,3,2)$ تعیین کنید.

بخش ۷-۳ قانون مداری آمپر

۷-۲۰ (الف) قانون آمپر را بیان کنید.

(ب) از یک استوانهٔ خالی به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b جریان I در جهت مثبت z می‌گذرد. $\mathbf{H}$ را در تمام نقاط فضا بیابید.

۷-۲۱ صفحات جریان $20\mathbf{a}_x$ A/m و $-20\mathbf{a}_x$ A/m به ترتیب در $y=1$ و $y=-1$ قرار دارند. $\mathbf{H}$ را در ناحیهٔ $y>1$ و $y<-1$ بیابید.

۷-۲۲ روی صفحهٔ $z=0$ جریان سطحی $\mathbf{K}=10\mathbf{a}_x$ A/m و روی خط $y=0$ ، $z=6$ جریان I در جهت $\mathbf{a}_x$ می‌گذرد. I را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم $\mathbf{H}(0,0,3)=0$.

۷-۲۳ (الف) یک هادی بلند توپر به شعاع a در امتداد محور z قرار دارد. اگر از این هادی جریان I در جهت $z+$ بگذرد ، نشان دهید که در داخل هادی

$$\mathbf{H}=\frac{I\rho}{2\pi a^2}\mathbf{a}_\phi$$

چگالی جریان را بیابید.

(ب) اگر در بند (الف) داشته باشیم $I=3$ A و $a=2$ cm ، $\mathbf{H}$ را در $(0,1\text{ cm},0)$ و $(0,4\text{ cm},0)$ بیابید.

۷-۲۴ یک رسانای استوانه‌ای نامحدود با شعاع a در امتداد محور z قرار دارد. چگالی جریان در این رسانا $\mathbf{J}=(J_0/\rho)\mathbf{a}_z$ است ، که در آن J_0 یک مقدار ثابت است . $\mathbf{H}$ را بیابید.

۷-۲۵ فرض کنید $\mathbf{H}=k_0(\rho/a)\mathbf{a}_\phi$ در $\rho<a$ ، که k_0 ثابت است . (الف) $\mathbf{J}$ در $\rho<a$ را بیابید. (ب) $\mathbf{H}$ را در $\rho>a$ بیابید.

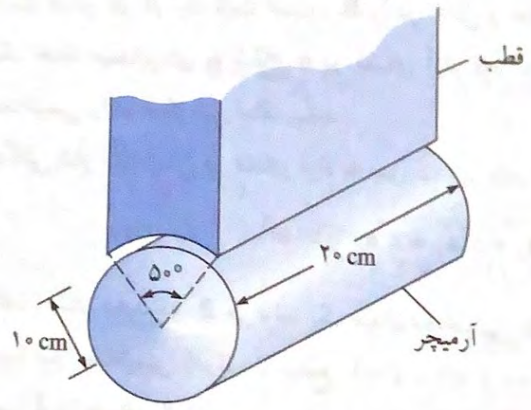
۷-۲۶ یک سیم بینهایت بلند روی محور z قرار دارد و از آن جریان ۲ A در جهت $z+$ می‌گذرد.

(الف) $\mathbf{B}$ در $(-3,4,7)$ را بیابید.

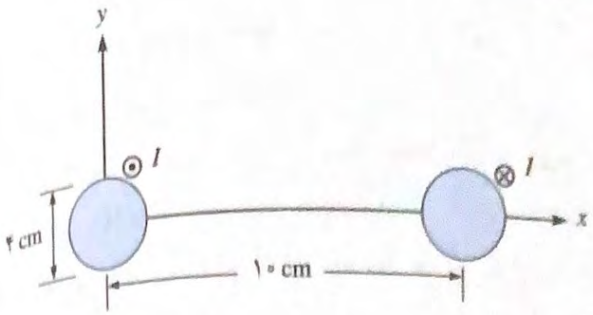
(ب) شاری که از حلقهٔ مربعی توصیف شده با $2\le\rho\le6$ ، $0\le z\le4$ ، $\phi=90^\circ$ می‌گذرد چقدر است؟

۷-۲۷ میدان موتور نشان داده شده در شکل ۷-۳۵ به صورت زیر است

$$\mathbf{H}=\frac{10^6}{\rho}\sin 2\phi\,\mathbf{a}_\rho\ \text{A/m}$$



شکل ۷-۳۵ قطب موتور الکتریکی مسئلهٔ ۷-۲۷ .



شکل ۷-۳۶ برش خط دوسیمهٔ مسئلهٔ ۷-۲۸.

شاری را که از شکاف هوایی هر قطب می‌گذرد بیابید. طول محوری قطب ۲۰ cm است.

۷-۲۸ خط انتقال دوسیمه‌ای را که برش آن در شکل ۷-۳۶ نشان داده شده در نظر بگیرید. شعاع هر سیم ۲ cm و فاصلهٔ بین سیمها ۱۰ cm است. مرکز سیمها در (۰,۰) و (۱۰ cm,۰) قرار دارد، و جریان رفت و برگشت از آنها ۵ A است. $\mathbf{H}$ را در نقاط زیر بیابید:

(الف) (۵ cm,۰)

(ب) (۱۰ cm,۵ cm)

۷-۲۹ یک پرتوی الکترونی چگالی جریان زیر را تشکیل داده است

$$\mathbf{J}=\begin{cases} J_0(1-\rho^2/a^2)\mathbf{a}_z, & \rho<a \\ 0, & \rho>a \end{cases}$$

(الف) کل جریان چقدر است؟

(ب) شدت میدان مغناطیسی را در نقاط مختلف فضا بیابید.

بخش ۷-۵ چگالی شار مغناطیسی

۷-۳۰ شار مغناطیسی گذرنده از حلقهٔ مستطیلی $(a\times b)$ شکل ۷-۳۷ را بیابید. جریان سیم بینهایت بلند I و فاصلهٔ بین سیم و حلقه d است.

۷-۳۱ چگالی جریان در یک سیم راست بلند به شعاع a به صورت $\rho<a$ ، $\mathbf{J}=J_0e^{-\beta(a-\rho)}\mathbf{a}_z$ داده شده است که در آن β یک ثابت است. $\mathbf{B}$ را در داخل و خارج سیم به دست آورید.

۷-۳۲ یک حلقهٔ نیمدایره‌ای به شعاع a در فضای آزاد قرار دارد و از آن جریان I می‌گذرد. چگالی شار مغناطیسی را در مرکز این حلقه بیابید.

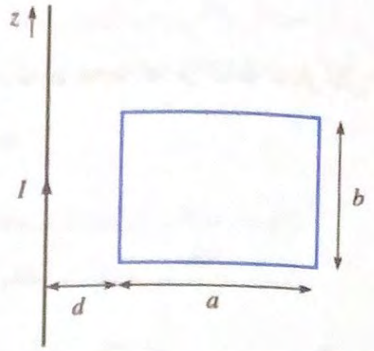
۷-۳۳ چگالی شار مغناطیسی در فضای آزاد به صورت زیر داده شده است

$$B=y^2\mathbf{a}_x+z^2\mathbf{a}_y+x^2\mathbf{a}_z \ \text{Wb/m}^2$$

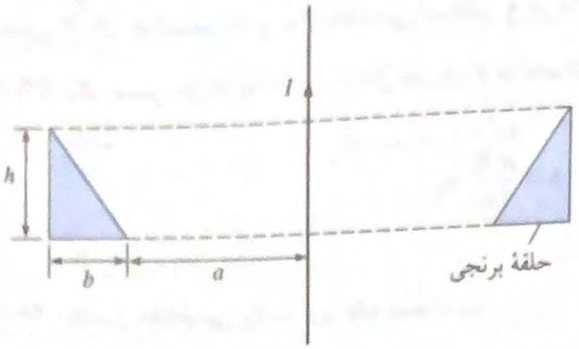
(الف) نشان دهید که B می‌تواند یک میدان مغناطیسی باشد.

(ب) شار مغناطیسی گذرنده از سطح $x=1$ ، $0<y<1$ ، $1<z<4$ را بیابید.

(پ) $\mathbf{J}$ را حساب کنید.



شکل ۷-۳۷ مسئلهٔ ۷-۳۰.



شکل ۷-۳۸ برش یک حلقهٔ مسی که دور یک سیم راست بلند قرار دارد؛ مربوط به مسئلهٔ ۷-۳۴.

* ۷-۳۴ یک حلقهٔ برنجی با سطح مقطع مثلثی مطابق شکل ۷-۳۸ حول یک سیم بسیار بلند و هم محور با آن قرار گرفته است. جریان سیم را I بگیرید و نشان دهید کل شاری که از حلقه می‌گذرد عبارت است از

$$\Psi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi b}\left[b - a\ln\frac{a+b}{b}\right]$$

Ψ را به ازای $a = 30\text{ cm}$ ، $b = 10\text{ cm}$ ، $h = 5\text{ cm}$ ، و $I = 10\text{ A}$ حساب کنید.

۷-۳۵ شدت میدان مغناطیسی در فضای آزاد به صورت $\mathbf{H} = \frac{10^6}{\rho}\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho\ \text{A/m}$ است. از سطح تعریف شده به صورت $0 < z < 2\text{ m}$ ، $0 < \phi < \pi/3$ چه شاری می‌گذرد؟

۷-۳۶ در فضای آزاد داریم $\mathbf{B} = \frac{5}{\rho}\cos\phi\,\mathbf{a}_z\ \text{Wb/m}^2$. شاری را که از نوار $z = 0$ ، $1\text{ m} < \rho < 2\text{ m}$ ، $0 < \phi < \pi/4$ می‌گذرد، به دست آورید.

بخش ۷-۶ معادلات مکسول

۷-۳۷ میدانهای داده شده در زیر را در نظر بگیرید. تعیین کنید که هر کدام می‌توانند یک میدان مگنتوستاتیک در فضای آزاد باشند یا نه.

(الف) $\mathbf{A} = y\cos ax\,\mathbf{a}_x + (y + e^{-x})\,\mathbf{a}_z$ (ب) $\mathbf{B} = \frac{20}{\rho}\mathbf{a}_\rho$

(پ) $\mathbf{C} = r^2\sin\theta\,\mathbf{a}_\phi$

۷-۳۸ مسئلهٔ ۷-۳۵ را برای میدانهای زیر تکرار کنید.

(الف) $\mathbf{D} = y^2 z\,\mathbf{a}_x + 2(x+1)yz\,\mathbf{a}_y - (x+1)z^2\mathbf{a}_z$

(ب) $\mathbf{E} = \frac{(z+1)}{\rho}\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho + \frac{\sin\phi}{\rho}\mathbf{a}_z$

(پ) $\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta)$

بخش ۷-۷ پتانسیل‌های مغناطیسی اسکالر و برداری

۳۹-۷ یک عنصر جریان به طول L حامل جریان I در جهت z است . نشان دهید که در نقاط بسیار دور داریم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 IL}{4\pi r}\mathbf{a}_z$$

$\mathbf{B}$ را بیابید.

۴۰-۷ پتانسیل مغناطیسی برداری زیر داده شده است

$$\mathbf{A} = e^x \sin y\, \mathbf{a}_x + (y + \cos y)\, \mathbf{a}_z \ \text{Wb/m}$$

چگالی شار مغناطیسی در مبدا را بیابید.

۴۱-۷ به ازای یک توزیع جریان خاص در فضای آزاد داریم

$$\mathbf{A} = (2x^2y + yz)\mathbf{a}_x + (xy^2 - xz^3)\mathbf{a}_y - (6xyz - 2x^2y^2)\mathbf{a}_z \ \text{Wb/m}$$

(الف) $\mathbf{B}$ متناظر را بیابید.

(ب) شار مغناطیسی گذرنده از حلقهٔ توصیف شده با $x = 1$ ، $0 < y < 2$ ، $0 < z < 2$ را بیابید.

(پ) نشان دهید که $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

۴۲-۷ پتانسیل مغناطیسی برداری متناظر با یک توزیع جریان در فضای آزاد عبارت است از

$$\mathbf{A} = 15 e^{-\rho} \sin\phi\, \mathbf{a}_z \ \text{Wb/m}$$

$\mathbf{H}$ را در $(3, \pi/4, -10)$ حساب کنید . شاری را که از $\rho = 5$ ، $0 \le \phi \le \pi/2$ ، و $0 \le z \le 10$ می‌گذرد به دست آورید.

۴۳-۷ از یک سیم بسیار بلند به شعاع a جریانی با چگالی $\mathbf{J} = j_0 \mathbf{a}_z$ می‌گذرد. نشان دهید که پتانسیل مغناطیسی برداری در $\rho < a$ عبارت است از

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4}\mu_0 j_0 \rho^2 \mathbf{a}_z$$

۴۴-۷ میدان $\mathbf{B}$ متناظر با پتانسیل مغناطیسی برداری زیر را بیابید

$$\mathbf{A} = \sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2}\mathbf{a}_z$$

۴۵-۷ پتانسیل مغناطیسی برداری متناظر با دو سیم بینهایت موازی که از آنها جریان I در جهت‌های مخالف هم می‌گذرد عبارت است از

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{d-\rho}{\rho}\mathbf{a}_z$$

که در آن d فاصلهٔ بین دو سیم است و یک سیم روی محور z قرار دارد . چگالی شار مغناطیسی $\mathbf{B}$

متناظر با این جریان را بیابید.

۴۶-۷ شدت میدان مغناطیسی در یک محیط هادی عبارت است از

$$\mathbf{H} = xy^{۲}\mathbf{a}_x + x^{۲}z\mathbf{a}_y - y^{۲}z\mathbf{a}_z \ \mathrm{A/m}$$

(الف) چگالی جریان را در نقطهٔ $P(۲,-۱,۳)$ بیابید.

(ب) $\dfrac{\partial \rho_v}{\partial t}$ در نقطهٔ P چقدر است ؟

۴۷-۷ فرض کنید $\mathbf{A} = ۱۰\rho^{۲}\,\mathbf{a}_z \ \mu\mathrm{Wb/m}$.

(الف) $\mathbf{H}$ و $\mathbf{J}$ را بیابید.

(ب) کل جریانی را که از سطح $z = ۱$ ، $۰ \le \rho \le ۲$ ، $۰ \le \phi \le ۲\pi$ می‌گذرد به دست آورید.

۴۸-۷ ثابت کنید که پتانسیل مغناطیسی اسکالر متناظر با حلقهٔ دایروی دارای شعاع a شکل ۸-۷ (الف) در نقطهٔ $(۰,۰,z)$ به صورت زیر است

$$V_m = \frac{I}{۲}\left[۱ - \frac{z}{[z^{۲}+a^{۲}]^{۱/۲}}\right]$$

* ۴۹-۷ یک خط انتقال هم محور در نظر بگیرید که شعاع هادی داخلی آن a ، و شعاع‌های درونی و بیرونی هادی خارجی آن به ترتیب $۳a$ و $۴a$ باشد. پتانسیل مغناطیسی برداری داخل هادی خارجی را بیابید. فرض کنید در $\rho = ۳a$ داریم $A_z = ۰$.

۵۰-۷ روی محور z سیم بلندی قرار دارد و از آن جریان ۱۲ A در جهت $\mathbf{a}_z$ می‌گذرد. V_m را در $(۴,۳۰°,-۲)$ بیابید ؛ در $(۱۰,۶۰°,۷)$ داریم $V_m = ۰$.

۵۱-۷ روی صفحهٔ $z = -۲$ جریانی با چگالی $۵۰\mathbf{a}_y \ \mathrm{A/m}$ وجود دارد. اگر در مبدا $V_m = ۰$ ،

(الف) V_m را در $(-۲,۰,۵)$ به دست آورید.

(ب) V_m را در $(۱۰,۳,۱)$ به دست آورید.

۵۲-۷ ثابت کنید که در مختصات استوانه‌ای

(الف) $\nabla \times (\nabla V) = ۰$

(ب) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = ۰$

* ۵۳-۷ اگر $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ و $R = |\mathbf{R}|$ ، ثابت کنید که

$$\nabla \frac{۱}{R} = -\nabla' \frac{۱}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^{۳}}$$

که در آن ∇ و ∇' به ترتیب عملگرهای دل در مختصات (x,y,z) و (x',y',z') هستند.