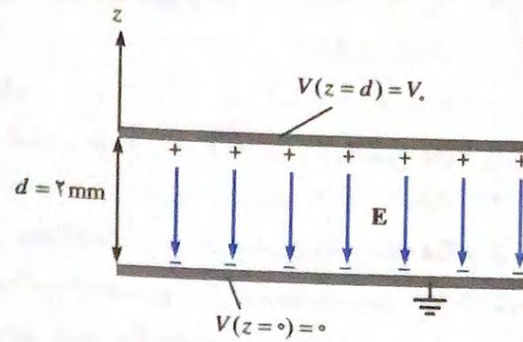
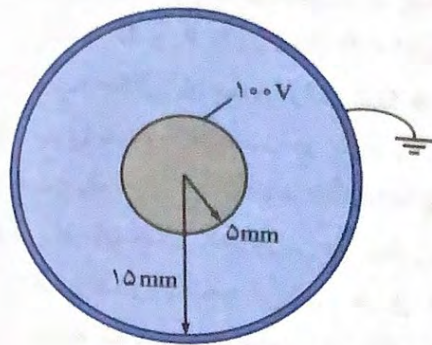


مسائل

بخش ۶-۲ معادلات پواسون و لاپلاس

- ۱-۶ داریم $V = 5x^3y^2z$ و $\epsilon = 2/25\epsilon_0$. (الف) E را در $P(-3, 1, 2)$ بیابید. (ب) ρ_v را در P بیابید.
- ۲-۶ صفحات رسانایی در $y=1$ و $y=3$ قرار دارند. در فضای بین این صفحات باری با توزیع نایکنواخت $\rho_v = (y/4\pi)nC/m^3$ وجود دارد و $\epsilon = 4\epsilon_0$. با فرض $V(y=1) = 0$ و $V(y=3) = 50V$ ، $V(y=2)$ را بیابید.

- ۳-۶ فرض کنید در یک دی‌الکتریک با $\epsilon = 2/8\epsilon_0$ داریم $V = (\sin^2\phi/\rho)V$ (الف) \mathbf{E} و \mathbf{P} را در نقطه $A(1, 2^\circ, 4)$ بیابید.
 (ب) چگالی بار حجمی را در نقطه A حساب کنید.
- ۴-۶ باری به طور یکنواخت در $0 < x < 1$ توزیع شده است، طوری که $\rho_v = -6\epsilon_0$. پتانسیل $V(x)$ را با شرایط مرزی $V(0) = 0$ و $V(1) = 10$ بیابید.
- ۵-۶ یک ماده خاص فضای بین دو تیغه رسانا واقع در $y = \pm 2 \text{ cm}$ را پر کرده است. این ماده هنگام گرم شدن الکترون ایجاد می‌کند، طوری که $\rho_v = 50(1 - y^2) \mu\text{C}/\text{m}^3$. اگر تیغه‌ها در ولتاژ 30 kV نگه داشته شوند، توزیع پتانسیل بین تیغه‌ها را بیابید. فرض کنید $\epsilon = 3\epsilon_0$.
- ۶-۶ یک ساختار استوانه‌ای هم محور بلند، با شعاع داخلی 2 mm و شعاع بیرونی $4/5 \text{ mm}$ در نظر بگیرید که در فضای بین استوانه‌های آن یک ابر الکترونی با چگالی بار $\rho_v = \frac{10\epsilon_0}{\rho} \text{ C}/\text{m}^3$ و $\epsilon = \epsilon_0$ قرار دارد. استوانه داخلی به زمین و استوانه بیرونی به پتانسیل 40 V متصل است. توزیع پتانسیل را در $2 \text{ mm} < \rho < 4/5 \text{ mm}$ بیابید.
- ۷-۶ نشان دهید که هر یک از پتانسیل‌های زیر معادله لاپلاس را برآورده می‌کنند؟
 (الف) $V_1 = e^{-y} \sin x$
 (ب) $V_2 = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)$
 (پ) $V_3 = \frac{\cos\phi}{\rho}$
 (ت) $V_4 = \frac{10 \cos\theta}{r^2}$
- ۸-۶ نشان دهید که در محیط بدون بار تمام مولفه‌های میدان الکتریکی معادله لاپلاس را برآورده می‌کند.
- ۹-۶ نشان دهید که $V = 10\rho \cos\phi$ معادله لاپلاس را برآورده می‌کند.
- ۱۰-۶ میدان پتانسیل $V = 2x^2yz - y^3z$ در یک محیط دی‌الکتریک با $\epsilon = 2\epsilon_0$ وجود دارد. (الف) آیا V معادله لاپلاس را برآورده می‌کند؟
 (ب) کل بار داخل مکعب واحد $0 < x < 1 \text{ m}$ ، $0 < y < 1 \text{ m}$ ، $0 < z < 1 \text{ m}$ را بیابید.
- ۱۱-۶ صفحات رسانای نشان داده شده در شکل ۳۱-۶ را در نظر بگیرید. اگر داشته باشیم $V(z=0) = 0$ و $V(z=2 \text{ mm}) = 50 \text{ V}$ ، \mathbf{E} ، \mathbf{V} ، \mathbf{D} را در ناحیه دی‌الکتریک ($\epsilon_r = 1/5$) بین صفحات، و ρ_s روی صفحات را بیابید.
- ۱۲-۶ شعاع‌های داخلی و خارجی یک خازن استوانه‌ای، که برش آن در شکل ۳۲-۶ نشان داده شده، به ترتیب 5 mm و 15 mm است. به ازای $V(\rho=5 \text{ mm}) = 100 \text{ V}$ و $V(\rho=15 \text{ mm}) = 0 \text{ V}$ ، \mathbf{E} ، \mathbf{D} را در $\rho = 10 \text{ mm}$ ، و ρ_s روی صفحات خازن را بیابید. فرض کنید $\epsilon_r = 2/0$.
- ۱۳-۶ دو صفحه رسانا در $x=0$ و $x=50 \text{ mm}$ قرار دارند. صفحه $x=20 \text{ mm}$ مرجع ولتاژ صفر است. با توجه به این که $\mathbf{E} = -110 \mathbf{a}_x \text{ V}/\text{m}$ ولتاژ صفحات رسانا را بیابید.
- ۱۴-۶ دو نیم‌صفحه در فضای آزاد در $\phi=0$ و $\phi=\pi/4$ قرار دارند. این صفحات در روی محور z توسط نوار عایقی از هم مجزا شده‌اند. صفحه $\phi=0$ به 50 V و صفحه $\phi=\pi/4$ به -50 V متصل است. \mathbf{V} و \mathbf{E} را در $\rho=1 \text{ cm}$ ، $\phi=\pi/6$ پیدا کنید.



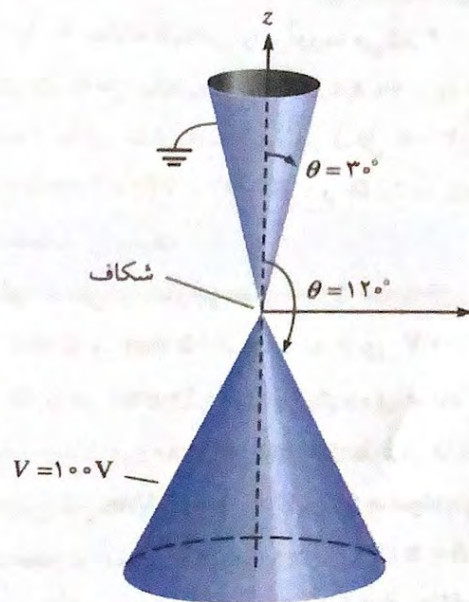
شکل ۳۲-۶ خازن استوانه‌ای مسئله ۶-۱۲.

شکل ۳۱-۶ مربوط به مسئله ۶-۱۱.

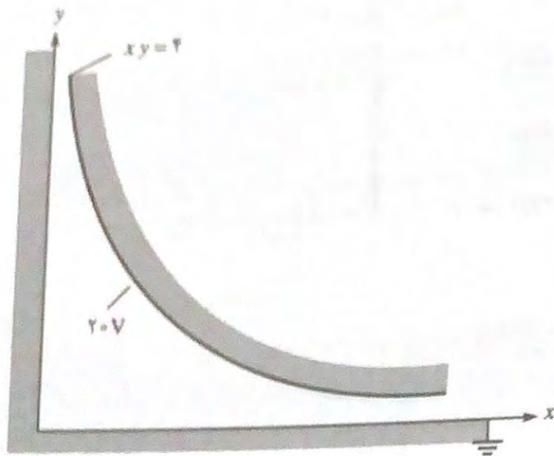
۶-۱۵ ناحیه بین پوسته‌های کروی رسانا $r = 0.5 \text{ m}$ و $r = 1 \text{ m}$ بدون بار است. اگر $V(r = 0.5) = -50 \text{ V}$ و $V(r = 1) = 50 \text{ V}$ ، توزیع پتانسیل و شدت میدان الکتریکی در ناحیه بین کره‌ها را بیابید.

۶-۱۶ V و E در $(3, 0, 4)$ ناشی از دو مخروط رسانای نامحدود شکل ۶-۳۳ را بیابید.

۶-۱۷ الکترودهای داخلی و بیرونی یک دیود استوانه‌های هم محوری به شعاع $a = 0.6 \text{ mm}$ و $b = 30 \text{ mm}$ است. الکترودهای داخلی به پتانسیل 70 V و الکترودهای بیرونی به زمین وصل شده است. (الف) با فرض این که طول الکترودها l از a و b خیلی بزرگ‌تر است و می‌توان از اثرات بارفضایی چشم‌پوشی کرد، پتانسیل در $\rho = 15 \text{ mm}$ را بیابید. (ب) اگر یک الکترون از سوراخ کوچکی که در رسانای داخلی وجود دارد با سرعت 10^7 m/s در جهت شعاعی پرتاب شود، سرعت آن در $\rho = 15 \text{ mm}$ به چه مقداری می‌رسد؟



شکل ۳۳-۶ مخروط‌های رسانای مسئله ۶-۱۶.



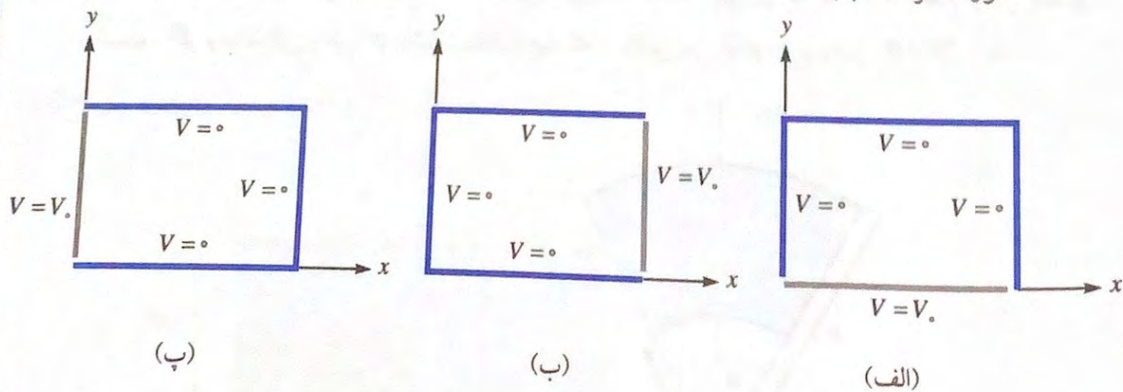
شکل ۳۴-۶ مربوط به مسئله ۱۸-۶.

- ۱۸-۶ الکترودی به شکل هذلولوی $(xy=4)$ بالای یک کنج قائمه نشان داده شده در شکل ۳۴-۶ قرار دارد. V و E را در نقطه $(1, 2, 0)$ بیابید. الکتروده به یک منبع $20V$ متصل شده است.
- * ۱۹-۶ معادله لاپلاس را برای سیستم الکتروستاتیک دوبعدی شکل ۳۵-۶ حل کرده، $V(x, y)$ را بیابید.
- * ۲۰-۶ تابع پتانسیل $V(x, y)$ را برای سیستم‌های دوبعدی شکل ۳۶-۶ به دست آورید.
- ۲۱-۶ با فرض این که $V(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ حل معادله لاپلاس در ناحیه‌ای است که در آن $\rho \neq 0$ ، نشان دهید که معادلات دیفرانسیل جدا شده برای R و Φ به صورت زیر است

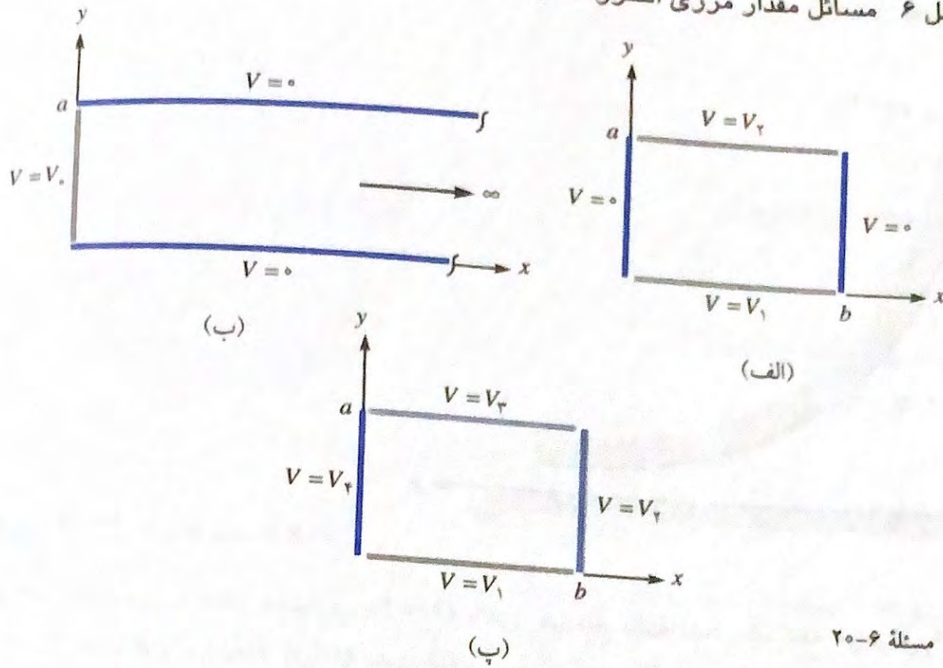
$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \quad \text{و} \quad R'' + \frac{R'}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho^2}R = 0$$

که در آنها λ ثابت جداسازی است.

- ۲۲-۶ یک پتانسیل در مختصات کروی تابعی از r و θ است، ولی به ϕ بستگی ندارد. فرض کنید $V(r, \theta) = R(r)F(\theta)$ و معادلات دیفرانسیل جدا شده را برای R و F بیابید. فرض کنید در ناحیه مورد نظر $\rho_v = 0$.



شکل ۳۵-۶ مسئله ۱۹-۶.



شکل ۶-۳۶ مسئله ۶-۲۰

بخش ۵-۶ مقاومت و ظرفیت

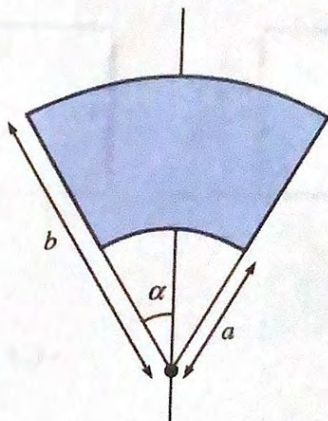
۶-۲۳ نشان دهید که مقاومت جسم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷، بین صفحات قائم واقع در $\phi = 0$ و $\phi = \pi/2$ عبارت است از

$$R = \frac{\pi}{2\sigma t \ln \frac{b}{a}}$$

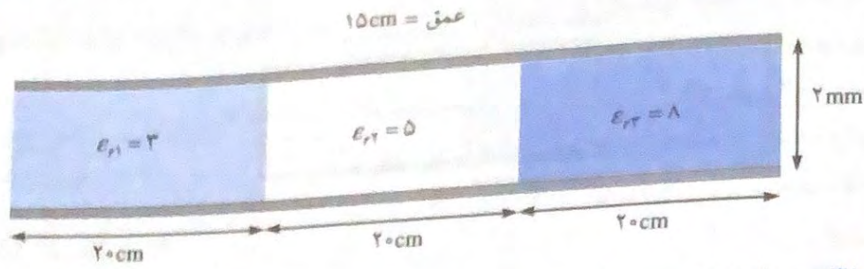
۶-۲۴ یک قطاع از یک پوسته کروی با رسانندگی σ با مقطعی مطابق شکل ۶-۳۷ ($0 \leq \phi < 2\pi$) در نظر بگیرید. نشان دهید که مقاومت بین صفحات $r=a$ و $r=b$ این جسم عبارت است از

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma(1-\cos\alpha)} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

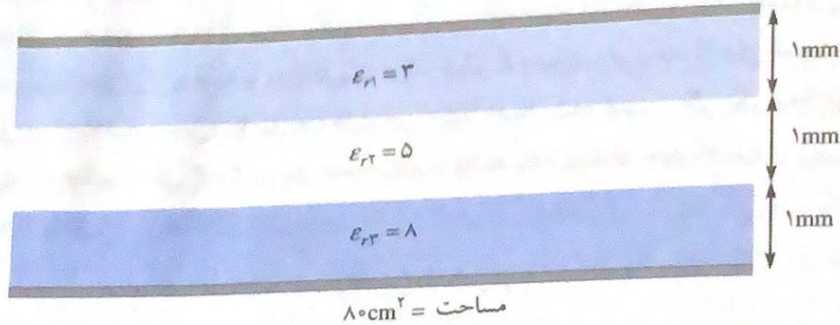
۶-۲۵ یک نیمکره رسانای خالی با شعاع a در زمین دفن شده است، طوری که لبه آن با سطح زمین منطبق است. اگر رسانندگی زمین σ باشد، نشان دهید که رسانایی بین الکتروود و زمین $2\pi a\sigma$ است.



شکل ۶-۳۷ مسئله ۶-۲۴.



شکل ۳۸-۶ مسئله ۲۸-۶



شکل ۳۹-۶ مسئله ۲۹-۶

۲۶-۶ یک روش دیگر یافتن ظرفیت یک خازن، استفاده از انرژی است، یعنی

$$C = \frac{2W_E}{V_0^2} = \frac{1}{V_0^2} \int \epsilon |\mathbf{E}|^2 dv$$

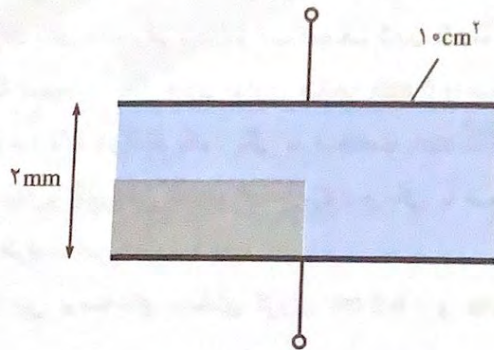
با استفاده از این روش معادلات (۲۲-۶)، (۲۸-۶)، و (۳۲-۶) را بیابید.

۲۷-۶ در یک مدار مجتمع خازنی با رشد دادن یک لایه سیلیسیم دی اکسید ($\epsilon_r = 4$) به ضخامت $1 \mu\text{m}$ روی یک زیرلایه سیلیسیم رسانا و پوشاندن آن با یک الکتروود فلزی به مساحت S ایجاد شده است. برای دستیابی به ظرفیت 2 nF باید S چه مقداری باشد؟

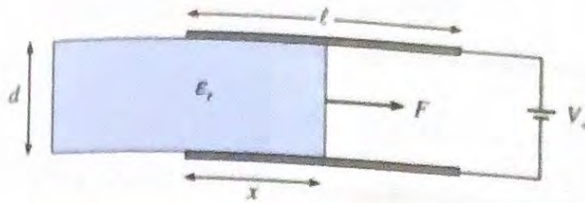
۲۸-۶ ظرفیت خازن موازی - صفحه شکل ۳۸-۶ را بیابید.

۲۹-۶ ظرفیت خازن موازی - صفحه شکل ۳۹-۶ را بیابید.

۳۰-۶ یک چهارم خازن موازی - صفحه شکل ۴۰-۶ از میکا ($\epsilon_r = 6$) پر شده است. ظرفیت این خازن را بیابید.



شکل ۴۰-۶ مسئله ۳۰-۶



شکل ۶-۴۱ مسئله ۶-۳۲.

۳۱-۶ برای داشتن حسی نسبت به اندازه خازنی با ظرفیت F یک خازن موازی صفحه با دی الکتریک هوا و فاصله بین صفحات 1 mm در نظر بگیرید. مساحت صفحات چنین خازنی چقدر است؟

۳۲-۶ یک خازن موازی - صفحه با دی الکتریک هوا، طول L ، پهنای a و فاصله بین صفحات d در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل V_0 بین صفحات این خازن اعمال شده است. اگر یک تیغه دی الکتریک با ثابت ϵ_r مطابق شکل ۶-۴۱ در بین صفحات قرار داشته باشد، نشان دهید که نیروی زیر برای کشیدن تیغه به داخل خازن به آن وارد می شود

$$F = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1) a V_0^2}{2d}$$

۳۳-۶ مساحت صفحات یک خازن موازی - صفحه 200 cm^2 و فاصله بین آنها 3 mm است. چگالی بار روی صفحات $1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ و دی الکتریک هوا است.

(الف) ظرفیت خازن را بیابید.

(ب) صفحات با چه نیرویی همدیگر را جذب می کنند؟

۳۴-۶ مساحت صفحات یک خازن موازی صفحه 8 cm^2 و فاصله بین صفحات آن 1 cm است. داخل خازن دی الکتریکی با $\epsilon_r = 3/5$ قرار دارد. در صورت اعمال ولتاژ $V = 20$ به این خازن بار روی هر صفحه چقدر است؟

۳۵-۶ یک خازن موازی صفحه از دو قرص دایروی به شعاع 0.3 m تشکیل شده که فاصله بین آنها 4 mm است. گذردهی دی الکتریک بین صفحات $\epsilon_r = 170$ است. اگر اختلاف پتانسیل $V = 6$ به این خازن اعمال شود، روی هر صفحه آن چقدر بار قرار می گیرد؟

۳۶-۶ روی هر صفحه یک خازن موازی صفحه با مساحت صفحات S و فاصله بین صفحات d بار Q قرار دارد. بین دو صفحه دی الکتریک با گذردهی $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ قرار دارد. انرژی ذخیره شده در این خازن در صورت (الف) دوبرابر شدن و (ب) نصف شدن فاصله صفحات چقدر می شود؟

۳۷-۶ فاصله صفحات یک خازن موازی صفحه 5 mm و مساحت صفحات آن 0.4 m^2 است. در داخل این خازن سه لایه دی الکتریک، یکی به ضخامت 1.5 mm با گذردهی نسبی $\epsilon_{r1} = 2/5$ ، یکی به ضخامت 1.5 mm با گذردهی نسبی $\epsilon_{r2} = 5/6$ ، و یکی با ضخامت 2 mm با گذردهی نسبی $\epsilon_{r3} = 1/1$ قرار دارد. ظرفیت این خازن را بیابید.

۳۸-۶ فضای بین پوسته های رسانای کروی $r = 5 \text{ cm}$ و $r = 10 \text{ cm}$ از ماده دی الکتریکی با $\epsilon = 2/25 \epsilon_0$ پر

شده است. اختلاف پتانسیل بین دو کره ۸۰V است. (الف) ظرفیت خازن را بیابید. (ب) چگالی بار روی پوسته $r = 5\text{ cm}$ را بیابید.

۳۹-۶ شعاع داخلی یک خازن کروی d و شعاع بیرونی آن a است. یک پوسته کروی با شعاع بیرونی c و شعاع داخلی b هم مرکز و بین صفحات خازن قرار دارد. اگر نواحی $d < r < c$ ، $c < r < b$ و $b < r < a$ به ترتیب از موادی با گذردهی ϵ_1 ، ϵ_2 ، و ϵ_3 پر شده باشد، ظرفیت کل خازن چقدر است؟

۴۰-۶ ظرفیت یک کره رسانا به شعاع 5 cm را که کاملاً در آب دریا ($\epsilon_r = 80$) قرار دارد، حساب کنید.

۴۱-۶ یک کره رسانا به شعاع 1 cm به صورت هم مرکز با کره رسانای دیگری به شعاع 2 cm قرار دارد و فضای بین آنها با پلی پروپیلین ($\epsilon_r = 2/25$) پر شده است. ظرفیت این سیستم چقدر است؟

* ۴۲-۶ در چاپگر جوهر افشان برای باردار کردن قطرات جوهر، افشانه به شعاع $20\text{ }\mu\text{m}$ توسط یک استوانه هم محور به شعاع $600\text{ }\mu\text{m}$ احاطه شده است (شکل ۴۲-۶ را ببینید). می نیمم ولتاژ لازم برای تولید بار 50 fC روی یک قطره را بیابید؛ طول افشانه در داخل استوانه $100\text{ }\mu\text{m}$ است. فرض کنید $\epsilon = \epsilon_0$.

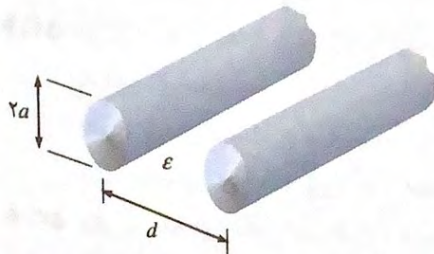
۴۳-۶ ظرفیت در واحد طول خط انتقال دو سیمه شکل ۴۳-۶ عبارت است از

$$C = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1} \left[\frac{d}{2a} \right]}$$

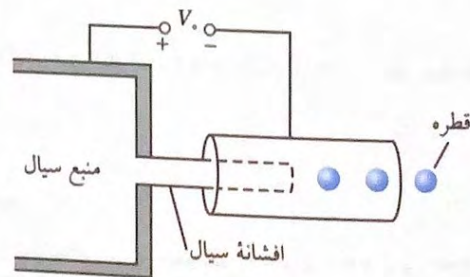
رسانایی در واحد طول این خط را بیابید.

* ۴۴-۶ شعاع پوسته داخلی یک خازن کروی a ، بار آن Q ، و پتانسیل آن صفر است. شعاع پوسته بیرونی در اثر نیروی داخلی از b به c تقلیل می یابد؛ ثابت کنید که کار انجام شده توسط میدان الکتریکی در این انقباض عبارت است از

$$W = \frac{Q^2(b-c)}{8\pi \epsilon bc}$$



شکل ۴۳-۶ مربوط به مسئله ۴۳-۶.



شکل ۴۲-۶ وضعیت هندسی ساده شده یک چاپگر

جوهر افشان، مسئله ۴۲-۶.

۴۵-۶ یک صفحه خازن موازی - صفحه‌ای در $x=0$ و صفحه دیگر آن در $x=d$ قرار دارد، فضای بین صفحات با ماده ناهمگنی پر شده که گذردهی آن به صورت $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{x}{d}\right)$ تغییر می‌کند. پتانسیل صفحه واقع در $x=d$ برابر V_0 است و صفحه واقع در $x=0$ به زمین متصل است.

(الف) V و E را بیابید.

(ب) P را بیابید.

(پ) ρ_{ps} در $x=0$ و $x=d$ را بیابید.

۴۶-۶ یک خازن کروی، با شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b با یک دی‌الکتریک ناهمگن دارای $\epsilon = \epsilon_0 k/r^2$ پر شده است. نشان دهید که ظرفیت این خازن عبارت است از

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 k}{b-a}$$

۴۷-۶ داخل یک خازن استوانه‌ای، به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b عایق ناهمگنی با $\epsilon = \epsilon_0 k/\rho$ قرار دارد، k ثابت است. ظرفیت در واحد طول این خازن را بیابید.

۴۸-۶ اگر زمین یک خازن کروی در نظر گرفته شود، ظرفیتش چقدر است؟ شعاع زمین تقریباً 6370 km است.

۴۹-۶ خازنی از دو استوانه فلزی هم‌محور با شعاع‌های $a=1 \text{ mm}$ و $b=5 \text{ mm}$ تشکیل شده است. فضای بین دو استوانه را دی‌الکتریکی با گذردهی نسبی $\epsilon_r = 3(1+\rho)$ ، $a < \rho < b$ پر کرده است؛ ρ بر حسب میلی‌متر است. ظرفیت در واحد طول این خازن را بیابید.

بخش ۶-۶ روش تصویر

۵۰-۶ یک صفحه فلزی متصل به زمین در $z=0$ قرار دارد و یک بار نقطه‌ای Q در $(0,0,a)$ واقع است. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $-Q$ واقع در $(a,0,a)$ را بیابید.

۵۱-۶ در $x=0$ و $y=0$ صفحات فلزی متصل به زمین قرار دارد، و بار نقطه‌ای Q در نقطه $(a,a,0)$ واقع است. پتانسیل در $x>0$ ، $y>0$ را بیابید.

۵۲-۶ دو بار نقطه‌ای 3 nC و -4 nC به ترتیب در $(0,0,1 \text{ m})$ و $(0,0,2 \text{ m})$ قرار دارند و $z=0$ یک صفحه رسانای نامحدود است.

(الف) کل بار القا شده بر روی صفحه را بیابید.

(ب) اندازه نیروی جاذبه بین بارها و صفحه را بیابید.

۵۳-۶ یک بار نقطه‌ای $10 \mu\text{C}$ در $(1,1,1)$ قرار دارد، و بخش‌های مثبت صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، و $z=0$ رسانا و متصل به زمین است. نیرویی را که از طرف رساناها به بار وارد می‌شود به دست آورید.

۵۴-۶ یک بار نقطه‌ای Q بین دو صفحه رسانای متصل به زمین متقاطع، که با هم زاویه 45° می‌سازند قرار دارد. تعداد بارهای تصویر و محلشان را تعیین کنید.

- ۵۵-۶ خط نامحدود $x=3$ ، $z=4$ باری با چگالی 16 nC/m دارد و اطراف آن فضای آزاد است. یک صفحه رسانای نامحدود در $z=0$ قرار دارد. (الف) میدان الکتریکی در $(2, -2, 3)$ را بیابید. (ب) چگالی بار سطحی القا شده بر روی سطح رسانا در $(5, -6, 0)$ چقدر است؟
- ۵۶-۶ روی صفحات نامحدود $y=4$ و $y=8$ واقع در فضای آزاد به ترتیب باری با چگالی 20 nC/m^2 و 30 nC/m^2 قرار دارد. صفحه $y=2$ یک رسانای متصل به زمین است. E را در $P(0, 0, 0)$ و $Q(-4, 6, 2)$ بیابید.
- ۵۷-۶ حلقه‌ای به شعاع a با چگالی بار خطی ثابت ρ_L به فاصله h از صفحه رسانای کامل $z=0$ قرار دارد، به نحوی که صفحه حلقه با صفحه رسانا موازی است. چگالی بار سطحی در نقطه O روی سطح رسانا، درست زیر مرکز حلقه، چقدر است؟
- ۵۸-۶ بار الکتریکی Q به فاصله d از یک صفحه رسانایی بسیار بزرگ قرار دارد و O نزدیکترین نقطه صفحه رسانا از بار است. یک دایره به مرکز O و شعاع a در نظر بگیرید که یک چهارم کل بار القاء شده در صفحه رسانا در داخل آن قرار داشته باشد. مقدار a باید چقدر باشد؟
- ۵۹-۶ یک روش باردار کردن اجسام رسانا، موسوم به روش القاء، این است جسم رسانا را به زمین متصل کرده، جسم باردار دیگری را به آن نزدیک می‌کنیم. سپس اتصال به زمین را قطع می‌کنیم و به این ترتیب باری مخالف بار جسم مورد استفاده روی رسانا ایجاد می‌شود. فرض کنید یک کره رسانا به شعاع 2 cm توسط سیمی نازک به زمین متصل است و بار نقطه‌ای $q=2 \text{ nC}$ در فاصله 4 cm از مرکز آن قرار دارد. سیم بریده شده، بار نقطه‌ای به آرامی به بینهایت برده می‌شود. پس از اتمام این فرایند پتانسیل روی کره چقدر است؟
- ۶۰-۶ یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $|p|=2 \text{ C.m}$ از بینهایت به فاصله 1 متری یک صفحه رسانای کامل بسیار بزرگ آورده و به موازات آن قرار داده می‌شود. به این منظور چه مقدار انرژی صرف شده است؟
- ۶۱-۶ اگر یک بار نقطه‌ای را به یک کره رسانای مجزا نزدیک کنیم (یعنی کره‌ای که نمی‌تواند بار خالص روی آن تغییر کند) باید علاوه بر بار تصویر بار دیگری نیز در مرکز کره فرض کنیم، به نحوی که مجموع بار تصویر و این بار صفر شود. اگر بار q به فاصله a از یک کره رسانای مجزای بدون بار قرار داده شود، پتانسیل کره به چه مقداری می‌رسد؟ شعاع کره را R فرض کنید.