مسائل

بخش ۴-۲ قانون کولن و شدت میدان

۴-۱ بارهای نقطه‌ای $Q_1 = 5\,\mu C$ و $Q_2 = -4\,\mu C$ به ترتیب در (۳,۲,۱) و (-۴,۰,۶) قرار دارند. نیروی وارد بر Q_1 را بیابید.

۴-۲ بارهای نقطه‌ای Q_1 و Q_2 به ترتیب در (۴,۰,-۳) و (۲,۰,۱) قرار دارند. اگر $Q_2 = 4\,nC$ ، Q_1 را به نحوی تعیین کنید که

(الف) $\mathbf{E}$ در (۵,۰,۶) مولفهٔ z نداشته باشد.

(ب) نیروی وارد بر بار آزمون واقع در (۵,۰,۶) مولفهٔ x نداشته باشد.

۴-۳ بارهای $Q+$ و $3Q+$ به فاصلهٔ ۲ m از هم قرار دارند. یک بار دیگر به نحوی قرار داده می‌شود که در حالت تعادل باشد. محل و مقدار این بار را بر حسب Q بیابید.

۴-۴ بار نقطه‌ای Q در $(a,0,0)$ و بار نقطه‌ای $Q-$ در $(-a,0,0)$ قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در (الف) $(0,0,0)$ ، (ب) $(0,a,0)$ ، و (پ) $(a,0,a)$ تعیین کنید.

بخش ۴-۳ میدان الکتریکی ناشی از توزیع بارهای پیوسته

۴-۵ کل بار

(الف) روی $0 < x < 5\,m$ را به ازای $\rho_L = 12x^2\,mC/m$ بیابید.

(ب) روی استوانهٔ $\rho = 3$ ، $0 < z < 4\,m$ را به ازای $\rho_S = \rho z^2\,nC/m^2$ بیابید.

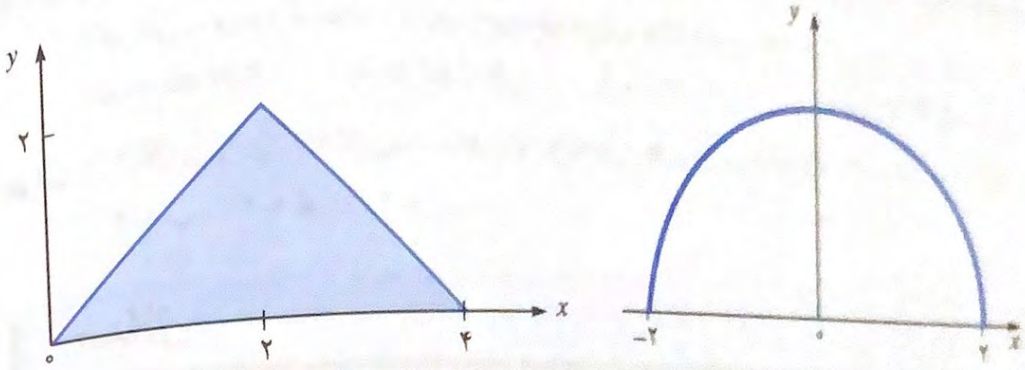
(ج) داخل کرهٔ $r = 4\,m$ را به ازای $\rho_v = \frac{10}{r\sin\theta}\,C/m^3$ بیابید.

۴-۶ بار نقطه‌ای Q در نقطهٔ $P(0,-4,0)$ قرار دارد ، و بار ۱۰ nC به طور یکنواخت روی نیمدایرهٔ شکل ۴-۲۵ توزیع شده است . مقدار Q را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم $E(0,0,0) = 0$.

۴-۷ داریم $\rho_s = 6xy\,C/m^2$ ؛ کل بار روی ناحیهٔ مثلثی شکل ۴-۲۶ را بیابید.

۴-۸ توزیع بار حجمی $\rho_v = 6x^2y^2\,nC/m^3$ داده شده است . کل بار داخل مکعبی به ضلع ۲ m ، به مرکز مبدا ، که یال‌های آن با محورهای مختصات موازی است ، چقدر است؟

۴-۹ داریم $\rho_v = 4\rho^2 z\cos\phi\,nC/m^3$. کل بار داخل گوهٔ تعریف شده با $0 < \rho < 2$ ، $0 < \phi < \pi/4$ ، $0 < z < 1$ را بیابید.



شکل ۴-۲۵ مربوط به مسئلهٔ ۴-۶.

شکل ۴-۲۶ مربوط به مسئلهٔ ۴-۷.

۴-۱۰ در یک پوستهٔ کروی با شعاع داخلی ۲ cm و شعاع خارجی ۴ cm باری با چگالی یکنواخت $\rho_v = 5\,\text{mC/m}^3$ وجود دارد. کل بار داخل این پوسته را بیابید.

۴-۱۱ (الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطهٔ $(0,0,h)$، ناشی از یک ورق مستطیلی توصیف شده با $-a \le x \le a$ ، $-b \le y \le b$ ، $z = 0$ که باری با چگالی $\rho_S\ \text{C/m}^2$ دارد، عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\left[\frac{ab}{h(a^2+b^2+h^2)^{1/2}}\right]\mathbf{a}_z$$

(ب) به ازای $a = 2$ ، $b = 5$ ، و $\rho_S = 10^{-5}$ کل بار روی ورق و شدت میدان الکتریکی در $(0,0,10)$ را بیابید.

۴-۱۲ روی صفحهٔ $x + 2y = 5$ باری با چگالی $\rho_S = 6\ \text{nC/m}^2$ قرار دارد. $\mathbf{E}$ را در $(-1,0,1)$ تعیین کنید.

۴-۱۳ روی صفحهٔ $x = 0$ چگالی بار یکنواخت ρ_s و روی صفحهٔ $x = a$ چگالی بار یکنواخت $-\rho_s$ وجود دارد. شدت میدان الکتریکی را در نواحی (الف) $x < 0$ ، (ب) $0 < x < a$ ، و (پ) $x > a$ بیابید.

۴-۱۴ سه توزیع بار سطحی در فضای آزاد وجود دارد: $10\ \mu\text{C/m}^2$ در $x = 2$ ، $-20\ \mu\text{C/m}^2$ در $y = -3$ ، و $30\ \mu\text{C/m}^2$ در $z = 5$. میدان $\mathbf{E}$ را در نقاط زیر بیابید:

(الف) $P(5,-1,4)$

(ب) $R(0,-2,1)$

(پ) $Q(3,-4,10)$

۴-۱۵ نیروی گرانش بین دو جسم به جرمهای m_1 و m_2 عبارت است از

$$\mathbf{F}_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{a}_r$$

که در آن $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg-s}^2$. نسبت نیروی الکتروستاتیک به نیروی گرانش بین دو الکترون را بیابید.

بخش ۴-۴ چگالی شار الکتریکی

* ۴-۱۶ قانون گاوس را بیان کنید. قانون کولن را از قانون گاوس به دست آورید و به این ترتیب نشان دهید که قانون گاوس بیان دیگری از قانون کولن است ، و قانون کولن به طور ضمنی در اولین معادلهٔ مکسول ، یعنی $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ نهفته است .

۴-۱۷ روی حلقهٔ $y^2+z^2=4$ ، $x=0$ بار یکنواخت $5\ \mu C/m$ وجود دارد.

(الف) $\mathbf{D}$ را در $P(3,0,0)$ بیابید.

(ب) علاوه بر حلقه دو بار نقطه‌ای مشابه Q در نقاط $(0,-3,0)$ و $(0,3,0)$ وجود دارد ؛ مقدار Q را طوری تعیین کنید که در P داشته باشیم $\mathbf{D}=0$.

بخشهای ۴-۵ و ۴-۶ قانون گاوس و کاربرد آن

۴-۱۸ چگالی بار متناظر با هر چگالی شار الکتریکی داده شده را بیابید.

(الف) $\mathbf{D} = 8xy\,\mathbf{a}_x + 4x^2\mathbf{a}_y\ C/m^2$

(ب) $\mathbf{D} = 4\rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + 2\rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi + 2z^2\mathbf{a}_z\ C/m^2$

(پ) $\mathbf{D} = \dfrac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{a}_r + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{a}_\theta\ C/m^2$

۴-۱۹ روی سطوح کروی $r=1$ m و $r=2$ m به ترتیب بار سطحی یکنواخت با چگالی $8\ nC/m^2$ و $-6\ nC/m^2$ قرار دارد. $\mathbf{D}$ را در $r=3$m حساب کنید.

۴-۲۰ بار ۵۰ nC در یک کرهٔ توپر به شعاع ۲۰ mm به طور یکنواخت توزیع شده است . چگالی شار الکتریکی را در سطح این کره حساب کنید.

۴-۲۱ فرض کنید $\mathbf{D} = 2xy\,\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y\ C/m^2$.

(الف) چگالی بار حجمی ρ_v را بیابید.

(ب) شاری را که از سطح $0<x<1$، $0<z<1$ ، $y=1$ می‌گذرد به دست آورید.

(پ) کل بار داخل ناحیهٔ $0<x<1$ ، $0<y<1$ ، $0<z<1$ را بیابید.

۴-۲۲ در یک ناحیهٔ مشخص شدت میدان الکتریکی به صورت زیر است

$$\mathbf{D} = 2\rho(z+1)\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho - \rho(z+1)\sin\phi\,\mathbf{a}_\phi + \rho^2\cos\phi\,\mathbf{a}_z\ \mu C/m^2$$

(الف) چگالی بار را بیابید.

(ب) کل بار داخل ناحیهٔ $0<\rho<2$ ، $0<\phi<\pi/2$ ، $0<z<4$ را بیابید.

(پ) قانون گاوس را با یافتن شار خالصی که از ناحیهٔ تعریف شده در بند (ب) خارج می‌شود ، امتحان کنید.

۴-۲۳ مدل تامسون از اتم هیدروژن کره‌ای از بار مثبت است که یک الکترون در مرکز آن قرار دارد . کل بار مثبت با بار الکترون e برابر است . ثابت کنید که اگر الکترون در فاصلهٔ r از مرکز کرهٔ دارای بار مثبت قرار داشته باشد نیروی جاذبهٔ زیر به آن وارد می‌شود

$$F = \frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

که در آن R شعاع کره است.

۴-۲۴ در ناحیهٔ کروی $0 < r < a$ داریم $\rho_v = \rho_0 / r \ \mathrm{nC/m^3}$ که در آن ρ_0 ثابت است . (الف) شدت میدان الکتریکی را داخل و خارج کرهٔ $r = a$ به دست آورید. (ب) کل بار را حساب کنید.

۴-۲۵ فرض کنید

$$\rho_v = \begin{cases} \dfrac{10}{r^2} \ \mathrm{mC/m^3} & 1 < r < 4 \\ 0 & r > 4 \end{cases}$$

(الف) شاری را که از سطح $r = 2\ \mathrm{m}$ ، $r = 6\ \mathrm{m}$ می‌گذرد به دست آورید.

(ب) $\mathbf{D}$ را در $r = 1\ \mathrm{m}$ و $r = 5\ \mathrm{m}$ حساب کنید.

۴-۲۶ چگالی بار $\rho_v = (50e^{-r}/r)\mathrm{nC/m^3}$ داده شده است . شدت میدان الکتریکی را با استفاده از قانون گاوس به دست آورید.

۴-۲۷ بار Q در یک ناحیهٔ کروی به شعاع a توزیع شده است . اگر توزیع بار یکنواخت باشد ، با استفاده از قانون گاوس میدان چگالی شار الکتریکی را در داخل و بیرون کره بیابید.

بخشهای ۴-۷ و ۴-۸ پتانسیل الکتریکی و رابطهٔ آن با E

۴-۲۸ دو بار نقطه‌ای $Q = 2\ \mathrm{nC}$ و $Q = -4\ \mathrm{nC}$ به ترتیب در $(1,0,3)$ و $(-2,1,5)$ قرار دارند. پتانسیل در نقطهٔ $P(1,-2,3)$ را بیابید.

۴-۲۹ (الف) بار کل $Q = 60\ \mu\mathrm{C}$ به دو بخش مساوی تقسیم شده و در دو نقطهٔ یک حلقهٔ دایروی به شعاع $4\ \mathrm{m}$ قرار داده شده است ، طوری که از هم 180° فاصله دارند (به بیان دیگر مقابل هم هستند) . پتانسیل در مرکز حلقه را بیابید.

(ب) اکنون Q را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنیم و آنها را در سه نقطهٔ حلقه قرار می‌دهیم طوری که از هم 120° فاصله داشته باشند. پتانسیل در مرکز حلقه را بیابید.

(پ) اگر این کار را ادامه دهیم سرانجام به وضعیتی می‌رسیم که بار با چگالی $\rho_L = Q/2\pi$ روی حلقه توزیع می‌شود. پتانسیل در مرکز حلقه را بیابید.

۴-۳۰ سه بار نقطه‌ای $Q_1 = 1\ \mathrm{mC}$ ، $Q_2 = -2\ \mathrm{mC}$ ، و $Q_3 = 3\ \mathrm{mC}$ به ترتیب در $(0,0,4)$ ، $(-2,5,1)$ ، و $(3,-4,6)$ قرار دارند.

(الف) پتانسیل V_P در $P(-1,1,2)$ را بیابید.

(ب) اختلاف پتانسیل V_{PQ} را بیابید ؛ Q نقطهٔ $(1,2,3)$ است .

۳۱-۴ روی یک قرص دایروی به شعاع a باری با چگالی $\rho_S = \frac{1}{\rho}\text{C/m}^2$ قرار دارد. پتانسیل در نقطهٔ $(0,0,h)$ را بیابید.

۳۲-۴ داریم $V = x^2 y\,(z+3)\ \text{V}$.

(الف) $\mathbf{E}$ را در $(3,4,-6)$ بیابید.

(ب) بار داخل مکعب $0<x<1$ ، $0<y<1$ ، و $0<z<1$ را بیابید.

۳۳-۴ داخل کره‌ای به شعاع a باری با چگالی $\rho_v = 1-(r/a)^2$ توزیع شده است . شدت میدان الکتریکی را در $r = 5a$ تعیین کنید.

۳۴-۴ یک توزیع بار با تقارن کروی به صورت زیر داده شده است

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_0\left(1-\dfrac{r}{a}\right)^2 & r \le a \\ 0 & r \ge a \end{cases}$$

(الف) $\mathbf{E}$ و V را در $r \ge a$ بیابید.

(ب) $\mathbf{E}$ و V را در $r \le a$ بیابید.

(پ) کل بار را بیابید.

۳۵-۴ بار Q به طور یکنواخت روی حلقهٔ دایروی تعریف شده با $a<\rho<b$ شکل ۴-۲۷ توزیع شده است . $\mathbf{D}$ را در $(0,0,h)$ بیابید.

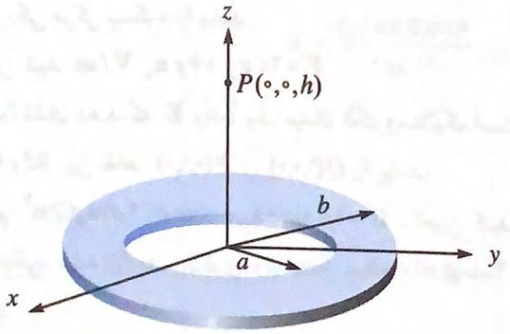
۳۶-۴ به ازای $\mathbf{D} = 4x\,\mathbf{a}_x - 10y^2\mathbf{a}_y + z^2\mathbf{a}_z\ \text{C/m}^2$ چگالی بار در $P(1,2,3)$ را بیابید.

۳۷-۴ بار ۱۰ nC به طور یکنواخت روی سطح کروی $r = 3\text{cm}$ ، و بار -5nC به طور یکنواخت روی سطح کروی $r = 5\text{cm}$ توزیع شده است . $\mathbf{D}$ را در نواحی $r<3\text{cm}$ ، $3\text{cm}<r<5\text{cm}$ ، و $r>5\text{cm}$ پیدا کنید.

۳۸-۴ یک میدان الکتریکی در فضای آزاد به صورت زیر داده شده است

$$\mathbf{E} = \begin{cases} E_0(\rho/a)\mathbf{a}_\rho & 0<\rho<a \\ 0 & \rho>a \end{cases}$$

چگالی بار حجمی را بیابید.



شکل ۴-۲۷ مربوط به مسئلهٔ ۴-۳۵.

۳۹-۴ شدت میدان الکتریکی در فضای آزاد به صورت زیر داده شده است

$$\mathbf{E} = 2xyz\,\mathbf{a}_x + x^2 z\,\mathbf{a}_y + x^2 y\,\mathbf{a}_z \ \text{V/m}$$

کار لازم برای این که یک بار $2\,\mu\text{C}$ از $(2,1,-1)$ به $(5,1,2)$ برده شود چقدر است ؟

۴۰-۴ انرژی صرف شده برای انتقال یک بار نقطه‌ای $20\,\mu\text{C}$ در میدان الکتریکی زیر

$$\mathbf{E} = 2\rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi \ \text{V/m}$$

(الف) از نقطهٔ $A(1,0,0)$ به $B(4,0,0)$ ،

(ب) از $B(4,0,0)$ به $C(4,30°,0)$ ،

(پ) از $C(4,30°,0)$ به $D(4,30°,-2)$ ، و

(ت) از A به D ، را بیابید.

۴۱-۴ در میدان الکتریکی $\mathbf{E} = 20r\sin\theta\,\mathbf{a}_r + 10r\cos\theta\,\mathbf{a}_\theta \ \text{V/m}$ ، انرژی صرف شده برای انتقال یک بار نقطه‌ای $10\,\text{nC}$

(الف) از $A(5,30°,0°)$ به $B(5,90°,0°)$ ،

(ب) از A به $C(10,30°,0°)$ ،

(پ) از A به $D(5,30°,60°)$ ، و

(ت) از A به $E(10,90°,60°)$ را بیابید.

۴۲-۴ میدان $\mathbf{E} = (10/r^2)\mathbf{a}_r \ \text{V/m}$ داده شده است . V_{AB} را به ازای $A(1,\pi/4,\pi/2)$ و $B(5,\pi,0)$ بیابید.

۴۳-۴ فرض کنید $\mathbf{E} = 2xy^2\mathbf{a}_x + 2y(x^2+1)\mathbf{a}_y \ \text{V/m}$. کار لازم برای انتقال یک بار نقطه‌ای $2\,\text{nC}$ از نقطهٔ $A(2,3,-1)$ به $B(8,0,-1)$ را بیابید.

۴۴-۴ میدان الکتریکی متناظر با هر یک از میدانهای پتانسیل زیر را تعیین کنید.

(الف) $V = 2x^2 + 4y^2$

(ب) $V = 10\rho^2\sin\phi + 6\rho z$

(پ) $V = 5r^2\cos\theta\sin\phi$

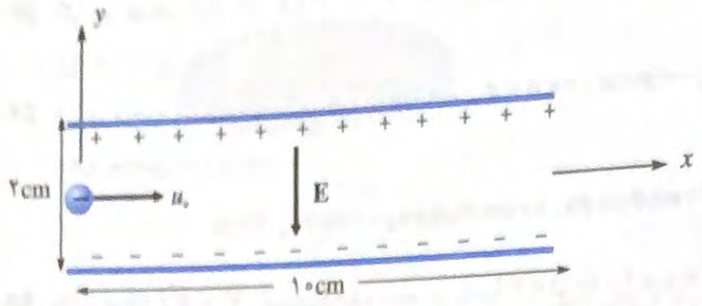
۴۵-۴ یک بار سطحی یکنواخت با چگالی ρ_s روی سطح نیمکروی $r=a$ و $\theta \le \pi/2$ قرار دارد. پتانسیل الکتریکی مرکز نیمکره را بیابید.

۴۶-۴ فرض کنید $\mathbf{E} = 2x\,\mathbf{a}_x + 6y\,\mathbf{a}_y \ \text{V/m}$.

(الف) نشان دهید که $\mathbf{E}$ واقعاً یک میدان الکتروستاتیک است .

(ب) ولتاژ بین نقاط $P(0,1,0)$ و $Q(1,0,0)$ را بیابید.

۴۷-۴ داریم $\mathbf{D} = 2\rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho - (\cos\phi/2\rho)\mathbf{a}_\phi \text{C/m}^2$. تعیین کنید که آیا $\mathbf{D}$ می‌تواند یک میدان چگالی شار الکتریکی باشد یا نه . شاری را که از سطح $\rho=1$ ، $0 \le \phi \le \pi/4$ ، $0 < z < 1$ می‌گذرد به دست آورید.



شکل ۴-۲۸
مربوط به مسئلهٔ ۴-۴۹.

* **۴-۴۸** (الف) ثابت کنید که اگر ذره‌ای با جرم و بار ثابت در یک میدان الکتریکی از حالت سکون شتاب داده شود ، سرعت نهایی‌اش با جذر اختلاف پتانسیل بین نقطهٔ شروع و نقطهٔ پایان شتاب‌گیری متناسب است .

(ب) اندازهٔ ضریب تناسب را برای حالتی که ذره الکترون است به دست آورید.

(پ) ولتاژ شتاب‌دهندهٔ الکترون باید چقدر باشد تا با فرض عدم تغییر جرم ، به سرعت یک دهم سرعت نور برسد ؟ (در چنین سرعتی جرم ذره بسیار بزرگتر از "جرم سکون" آن است و نمی‌توان آن را ثابت فرض کرد.)

* **۴-۴۹** الکترونی با سرعت اولیهٔ $u_0 = 10^7\ \mathrm{m/s}$ به داخل میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات موازی شکل ۴-۲۸ پرتاب می‌شود. محل ورود الکترون به این ناحیه درست بین دو صفحه است . الکترون هنگام خارج شدن از این ناحیه درست در محل صفحهٔ بالایی قرار دارد.

(الف) شدت میدان الکتریکی را بیابید.

(ب) سرعت الکترون هنگام خروج از ناحیه را تعیین کنید. اثرات لبه‌ای را ندیده بگیرید.

بخش ۴-۹ دوقطبی الکتریکی و خطوط شار

۴-۵۰ یک دوقطبی الکتریکی با $\mathbf{p} = p\mathbf{a}_z\ \mathrm{C\cdot m}$ در $(x,z) = (0,0)$ قرار دارد. اگر پتانسیل در (۰٫۱ nm) برابر ۹ V باشد ، پتانسیل در (۱nm,۱nm) چقدر است ؟

۴-۵۱ بارهای نقطه‌ای Q و $-Q$ در $(0,d/2,0)$ و $(0,-d/2,0)$ قرار دارند. نشان دهید که در نقطهٔ (r,θ,ϕ) ، با $r \gg d$ ، داریم

$$V = \frac{Qd\sin\theta\sin\phi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

میدان $\mathbf{E}$ متناظر را بیابید.

بخش ۴-۱۰ چگالی انرژی

۴-۵۲ مقدار کار لازم برای انتقال دو بار نقطه‌ای ۴۰ nC و ۵۰ nC- از بینهایت به ترتیب به نقاط (۰,۰,۱) و (۲,۰,۰) را تعیین کنید.