مسائل

بخش ۱-۴ بردار یکه

۱-۱ یک بردار یکه در امتداد خطی که از نقطهٔ (۲,۴,۴) به نقطهٔ (۳-,۲,۲) وصل می‌شود ، بیابید.

۱-۲ بردار یکه‌ای در جهت OP بیابید ؛ O مبدا و P نقطهٔ (۴-,۵,۱) است .

بخش‌های ۱-۵ تا ۱-۷ جمع، تفریق، و ضرب برداری

۱-۳ بردارهای $\mathbf{A}=2\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=\mathbf{a}_x-3\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$ داده شده‌اند. $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ را بیابید.

۱-۴ بردارهای مکان نقاط M و N به ترتیب $\mathbf{a}_x-4\mathbf{a}_y-2\mathbf{a}_z$ و $3\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$ است. بردار فاصله از M به N را بیابید.

۱-۵ به ازای $\mathbf{A}=4\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y+6\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=12\mathbf{a}_x+18\mathbf{a}_y-8\mathbf{a}_z$ موارد زیر را حساب کنید:

(الف) $\mathbf{A}-3\mathbf{B}$ (ب) $(2\mathbf{A}+5\mathbf{B})/|\mathbf{B}|$

(پ) $\mathbf{a}_x\times\mathbf{A}$ (ت) $(\mathbf{B}\times\mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{a}_y$

۱-۶ فرض کنید $\mathbf{A}=\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_z$، $\mathbf{B}=\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$، و $\mathbf{C}=\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$. این حاصلضرب‌ها را بیابید.

(الف) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ (ب) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

(پ) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ (ت) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$

۱-۷ بردارهای مکان نقاط T و S به ترتیب $\mathbf{a}_z+3\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y$ و $2\mathbf{a}_x+6\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_x$ است. (الف) مختصات T و S را بیابید. (ب) بردار فاصله از T به S را بیابید. (پ) فاصلهٔ بین T و S را بیابید.

۱-۸ فرض کنید $\mathbf{A}=\alpha\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y-2\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=4\mathbf{a}_x+\beta\mathbf{a}_y+8\mathbf{a}_z$.

(الف) α و β را به نحوی تعیین کنید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی باشند.

(ب) رابطهٔ بین α و β را طوری تعیین کنید که $\mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$ عمود باشد.

۱-۹ (الف) نشان دهید که

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2+|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2=(AB)^2$$

(ب) نشان دهید که

$$\mathbf{a}_z=\frac{\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_y}{\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z},\quad \mathbf{a}_y=\frac{\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_x}{\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z},\quad \mathbf{a}_x=\frac{\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z}{\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z}$$

۱-۱۰ بردارهای زیر داده شده است

$$\mathbf{P}=2\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y-2\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{Q}=4\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{R}=-\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$$

(الف) $|\mathbf{P}+\mathbf{Q}-\mathbf{R}|$، (ب) $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$، (پ) $\mathbf{Q}\times\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}$، (ت) $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{R})$،

(ث) $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{R})$، (ج) $\cos\theta_{PR}$، و (چ) $\sin\theta_{PQ}$ را بیابید.

۱-۱۱ به ازای $\mathbf{A}=4\mathbf{a}_x-6\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=2\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_z$:

(الف) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+2|\mathbf{B}|^2$ را بیابید.

(ب) یک بردار یکه بیابید که هم بر $\mathbf{A}$ و هم بر $\mathbf{B}$ عمود باشد.

شکل ۱-۴

۱-۱۲ حاصلضرب نقطه‌ای ، برداری ، و زاویهٔ بین دو بردار زیر را بیابید.

$$\mathbf{P}=2\mathbf{a}_x-6\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z \quad ، \quad \mathbf{Q}=3\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$$

۱-۱۳ نشان دهید که دو بردار $\mathbf{A}=\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=-2\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y-6\mathbf{a}_z$ موازی هستند.

۱-۱۴ عبارتهای زیر را ساده کنید :

(الف) $\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(ب) $\mathbf{A}\times[\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]$

۱-۱۵ نشان دهید که در حاصلضرب سه‌گانهٔ اسکالر می‌توان جای نقطه و ضرب خارجی را عوض کرد ، یعنی

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

۱-۱۶ نقاط $P_1(1,2,3)$ ، $P_2(-5,2,0)$ ، و $P_3(2,7,-3)$ رئوس یک مثلث هستند. (الف) مساحت مثلث را بیابید . (ب) سه زاویهٔ مثلث را بیابید.

۱-۱۷ نقاط P ، Q ، و R به ترتیب در $(-1,4,8)$ ، $(2,-1,3)$ ، و $(-1,2,3)$ قرار دارند. (الف) فاصلهٔ بین P و Q ، و (ب) بردار فاصله از P تا R را بیابید. (پ) زاویهٔ بین خطوط QP و QR ، (ت) مساحت مثلث PQR ، و (ث) محیط مثلث PQR را بیابید.

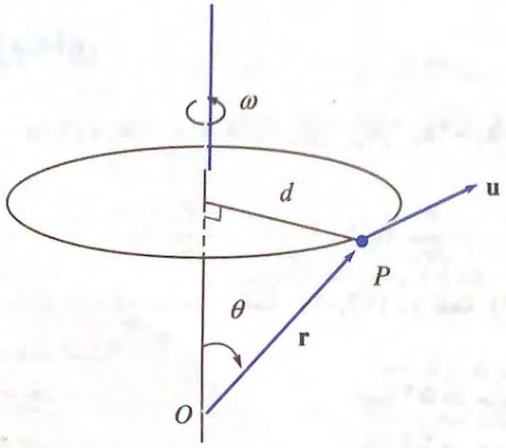
۱-۱۸ دو نقطهٔ $P(2,4,-1)$ و $Q(12,16,9)$ روی یک خط راست قرار دارند. چقدر طول می‌کشد تا یک سیگنال سونار با سرعت $300\,m/s$ از مبدا به وسط پاره خط PQ برسد؟

* ۱-۱۹ (الف) ثابت کنید $\mathbf{P}=\cos\theta_1\mathbf{a}_x+\sin\theta_1\mathbf{a}_y$ و $\mathbf{Q}=\cos\theta_2\mathbf{a}_x+\sin\theta_2\mathbf{a}_y$ بردارهای یکه‌ای در صفحهٔ xy هستند که به ترتیب با محور x زاویهٔ θ_1 و θ_2 می‌سازند.

(ب) با استفاده از ضرب نقطه‌ای فرمولی برای $\cos(\theta_2-\theta_1)$ بیابید. با استفاده از همین بیان بردارهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ فرمولی برای $\cos(\theta_2+\theta_1)$ بیابید.

(پ) اگر θ زاویهٔ بین $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ باشد ، $\frac{1}{2}|\mathbf{P}-\mathbf{Q}|$ را بر حسب θ بیابید.

۱-۲۰ یک جسم صلب در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابتی که از نقطهٔ O شکل ۱-۱۴ می‌گذرد ، دوران می‌کند. فرض کنید $\mathbf{r}$ بردار مکان از O به P ، محل یک ذره از جسم ، است .



شکل ۱-۱۴ مسئلهٔ ۱-۲۰.

اندازهٔ سرعت $\mathbf{u}$ جسم در نقطهٔ P عبارت است از $|\mathbf{u}|=d\omega=|\mathbf{r}|\sin\theta|\boldsymbol{\omega}|$ یا $\mathbf{u}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. اگر جسم صلب با تندی $3\,\mathrm{rad/s}$ حول محوری موازی با $\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$ که از نقطهٔ $(2,-3,1)$ می‌گذرد ، بچرخد ، سرعت جسم در نقطهٔ $(1,3,4)$ چقدر است ؟

۱-۲۱ بردارهای $\mathbf{T}=2\mathbf{a}_x-6\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{S}=\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$ داده شده‌اند . (الف) تصویر اسکالر $\mathbf{T}$ روی $\mathbf{S}$ را بیابید. (ب) تصویر برداری $\mathbf{S}$ روی $\mathbf{T}$ را بیابید . (پ) زاویهٔ کوچک‌تر بین $\mathbf{T}$ و $\mathbf{S}$ را بیابید.

بخش ۱-۸ مولفه‌های بردار

۱-۲۲ برای بردار $\mathbf{H}=2xy\,\mathbf{a}_x-(x+z)\mathbf{a}_y+z^2\mathbf{a}_z$

(الف) یک بردار یکه به موازات $\mathbf{H}$ در نقطهٔ $P(1,3,-2)$ بیابید.

(ب) معادلهٔ رویه‌ای را بیابید که روی آن $|\mathbf{H}|=10$.

۱-۲۳ فرض کنید $\mathbf{A}=-3\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y-2\mathbf{a}_z$ ، $\mathbf{B}=2\mathbf{a}_x-5\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{C}=\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$.

(الف) زاویهٔ کوچکتر بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را بیابید. (ب) مولفهٔ $\mathbf{A}$ در امتداد $\mathbf{C}$ را بیابید.

(پ) $\mathbf{D}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}-3\mathbf{C}$ را بیابید. (ت) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ را بیابید.

۱-۲۴ داریم $\mathbf{A}=2x\,\mathbf{a}_x+y\,\mathbf{a}_y-z^2\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=3x^2\mathbf{a}_x+6\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$. در نقطهٔ $(1,2,-4)$: (الف) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ را بیابید. (ب) زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را بیابید. (پ) مولفهٔ برداری $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{B}$ را بیابید.

۱-۲۵ مولفهٔ اسکالر بردار $\mathbf{H}=y\mathbf{a}_x-x\,\mathbf{a}_z$ در نقطهٔ $P(1,0,3)$ را که به سمت نقطهٔ $Q(-2,1,4)$ است ، بیابید.

۱-۲۶ $\mathbf{E}$ و $\mathbf{F}$ میدانهای برداری توصیف شده با $\mathbf{E}=2x\,\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y+yz\,\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{F}=xy\mathbf{a}_x-y^2\mathbf{a}_y+xyz\mathbf{a}_z$ هستند . این مقادیر را بیابید

(الف) $|\mathbf{E}|$ در $(1,2,3)$ (ب) مولفهٔ $\mathbf{E}$ در امتداد $\mathbf{F}$ ، در نقطهٔ $(1,2,3)$

(پ) برداری بیابید که در نقطهٔ $(3,1,0)$ هم بر $\mathbf{E}$ و هم بر $\mathbf{F}$ عمود باشد و اندازه‌اش یک واحد باشد.

مسائل

بخش‌های ۲-۳ و ۲-۴ دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی

۲-۱ نقاط زیر را در مختصات دکارتی بیان کنید:

(الف) $P_1(2,30^\circ,5)$ (ب) $P_2(1,90^\circ,-3)$

(پ) $P_3(10,\pi/4,\pi/3)$ (ت) $P_4(4,30^\circ,60^\circ)$

۲-۲ نقاط زیر را در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی بیان کنید:

(الف) $P(1,-4,-3)$ (ب) $Q(3,0,5)$

(پ) $R(-2,6,0)$

۲-۳ مختصات قائم نقطهٔ P به صورت $(x=2,y=6,z=-4)$ داده شده است . (الف) مختصات استوانه‌ای ، و (ب) مختصات کروی این نقطه را بیابید.

۲-۴ مختصات استوانه‌ای نقطهٔ Q به صورت $\rho=5$ ، $\phi=120^\circ$ ، $z=1$ داده شده است . مختصات این نقطه را در دستگاه‌های قائم و کروی پیدا کنید.

۲-۵ یک نقطه در مختصات کروی به صورت $P(4,\pi/2,\pi/3)$ بیان شده است . مختصات این نقطه را در دستگاه‌های قائم و استوانه‌ای بیان کنید.

۲-۶ (الف) داریم $V=xz-xy+yz$. V را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

(ب) داریم $U=x^2+2y^2+3z^2$. U را در دستگاه مختصات کروی بیان کنید.

۲-۷ بردارهای زیر را به دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی ببرید :

(الف) $$\mathbf{F}=\frac{x\mathbf{a}_x+y\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(ب) $$\mathbf{G}=(x^2+y^2)\left[\frac{x\mathbf{a}_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{z\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$$

۲-۸ داریم $\mathbf{F}=\dfrac{10(x\mathbf{a}_x+y\,\mathbf{a}_y)}{x^2+y^2}$.

(الف) $\mathbf{F}$ را در مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

(ب) $\mathbf{F}$ را در نقطهٔ $P(1,\pi/2,4)$ بیابید و نتیجه را در دستگاه‌های مختصات قائم و استوانه‌ای بیان کنید.

۲-۹ بردار $\mathbf{A}=2\,\mathbf{a}_\rho+3\,\mathbf{a}_\phi+4\mathbf{a}_z$ داده شده است . $\mathbf{A}$ را در نقطهٔ $(2,\pi/2,-1)$ در مختصات قائم بیان کنید.

۲-۱۰ بردارهای زیر را به دستگاه مختصات قائم ببرید :

(الف) $\mathbf{A}=\rho\sin\phi\mathbf{a}_\rho+\rho\cos\phi\mathbf{a}_\phi-2z\,\mathbf{a}_z$

(ب) $\mathbf{B}=4r\cos\phi\mathbf{a}_r+r\mathbf{a}_\theta$

۲-۱۱ داریم $\mathbf{H}=\rho z\sin\phi\mathbf{a}_\rho-\rho(z+1)\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi+\rho^2z\mathbf{a}_z$. این میدان برداری را در دستگاه قائم بیان کنید.

۲-۱۲ داریم $\mathbf{F} = yz\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y + x^2\mathbf{a}_z$. این میدان برداری را در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی بیان کنید.

۲-۱۳ روابط زیر را اثبات کنید :

(الف)
$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos\phi$$
$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = -\sin\phi$$
$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = \sin\phi$$
$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = \cos\phi$$

(ب)
$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \sin\theta\cos\phi$$
$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi$$
$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \sin\theta\sin\phi$$

(پ)
$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos\theta\sin\phi$$
$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos\theta$$
$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin\theta$$

۲-۱۴ (الف) نشان دهید که تبدیل نقطه از دستگاه مختصات استوانه‌ای به کروی و برعکس با استفاده از روابط زیر انجام می‌شود

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{\rho}{z} \quad , \quad \phi = \phi$$

یا

$$\rho = r\sin\theta \quad , \quad z = r\cos\theta \quad , \quad \phi = \phi$$

(ب) نشان دهید که تبدیل بردار از دستگاه مختصات استوانه‌ای به کروی و بر عکس با استفاده از روابط زیر انجام می‌شود

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

(*راهنمایی* : از شکلهای ۲-۵ و ۲-۶ استفاده کنید.)

۲-۱۵ بردار $\mathbf{F}$ در مختصات قائم به صورت $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ بیان شده است . نمایش این بردار بر حسب بردارهای یکهٔ زیر را پیدا کنید.

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z) \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) \quad , \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_y$$

۲-۱۶ نشان دهید که میدانهای برداری زیر در تمام نقاط بر هم عمودند

$$\mathbf{A} = \rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi - \rho\,\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{B} = \rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi + \rho\,\mathbf{a}_z$$

۲-۱۷ داریم $\mathbf{A}=3\mathbf{a}_\rho+2\mathbf{a}_\phi+\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=5\mathbf{a}_\rho-8\,\mathbf{a}_z$. (الف) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ، (ب) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ ، (پ) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ، و (ت) زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را بیابید.

۲-۱۸ داریم $\mathbf{A}=\rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho+\rho z^2\sin\phi\,\mathbf{a}_z$.

(الف) $\mathbf{A}$ را به دستگاه مختصات قائم ببرید و آن را در نقطهٔ $(3,-4,0)$ حساب کنید.

(ب) $\mathbf{A}$ را به دستگاه مختصات کروی ببرید و اندازهٔ آن را در نقطهٔ $(3,-4,0)$ حساب کنید.

۲-۱۹ تبدیل $(A_\rho,A_\phi,A_z)\rightarrow(A_x,A_y,A_z)$ بیان شده در معادلهٔ (۲-۱۵) کامل نیست . با بیان $\cos\phi$ و $\sin\phi$ بر حسب x ، y ، و z این بیان را کامل کنید. برای تبدیل $(A_r,A_\theta,A_\phi)\rightarrow(A_x,A_y,A_z)$ معادلهٔ (۲-۲۸) نیز همین کار را انجام دهید.

۲-۲۰ در تمرین ۲-۲ ، $\mathbf{A}$ را در دستگاه کروی و $\mathbf{B}$ را در دستگاه استوانه‌ای بیان کنید. $\mathbf{A}$ را در نقطهٔ $(10,\pi/2.3\pi/4)$ ، و $\mathbf{B}$ را در نقطهٔ $(2,\pi/6.1)$ حساب کنید.

۲-۲۱ فاصلهٔ بین زوج نقطه‌های داده شده را حساب کنید :

(الف) $(2,1,5)$ و $(6,-1,2)$

(ب) $(3,\pi/2,-1)$ و $(5,3\pi/2,5)$

(پ) $(10,\pi/4,3\pi/4)$ و $(5,\pi/6,7\pi/4)$

۲-۲۲ دو نقطهٔ $P(10,\pi/4,0)$ و $Q(4,\pi/2,\pi/2)$ داده شده است . فاصلهٔ بین Q و P را بیابید.

۲-۲۳ محل برخورد رویه‌های زیر را توصیف کنید :

(الف) $y=5$, $x=2$ (ب) $z=10$, $y=-1$, $x=2$

(پ) $\theta=30^\circ$, $r=10$ (ت) $\phi=40^\circ$, $\rho=5$

(ث) $\phi=60^\circ$, $z=10$ (ج) $\phi=90^\circ$, $r=5$

۲-۲۴ در نقطهٔ $T(2,3,-4)$ ، $\mathbf{a}_z$ را در مختصات کروی و $\mathbf{a}_r$ را در مختصات قائم بیان کنید.

۲-۲۵ داریم $\mathbf{A}=(2z-\sin\phi)\mathbf{a}_\rho+(4\rho+2\cos\phi)\mathbf{a}_\phi-3\rho z\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=\rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho+\sin\phi\,\mathbf{a}_\phi+\mathbf{a}_z$.

(الف) کوچکترین زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در نقطهٔ $(1,60^\circ,-1)$ را بیابید.

(ب) بردار یکهٔ عمود بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در نقطهٔ $(1,90^\circ,0)$ را بیابید.

۲-۲۶ بردارهای $\mathbf{A}=2\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y+10\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{B}=-5\mathbf{a}_\rho+\mathbf{a}_\phi-3\mathbf{a}_z$ داده شده است .

(الف) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ را در $P(0,2,-5)$ حساب کنید.

(ب) زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در P را بیابید.

(پ) مولفهٔ اسکالر $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{B}$ را در P بیابید.

۲-۲۷ $\mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_y$ را به ازای $\mathbf{G}=6r^2\sin\phi\,\mathbf{a}_r+r^2\mathbf{a}_\phi$ در نقطهٔ $(2,-3,1)$ بیابید.

۲-۲۸ میدان برداری زیر بر حسب متغیرهای مختصاتی آمیخته بیان شده است

$$\mathbf{G}=\frac{x\cos\phi}{\rho}\mathbf{a}_x+\frac{2yz}{\rho^2}\mathbf{a}_y+\left(1-\frac{x^2}{\rho^2}\right)\mathbf{a}_z$$

$\mathbf{G}$ را به طور کامل در مختصات کروی بیان کنید.

بخش ۲-۵ رویه‌های مختصه

۲-۲۹ داریم $\mathbf{J} = r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_r - \cos 2\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_\theta + \tan\frac{\theta}{2}\ln r\,\mathbf{a}_\phi$. در $T(2,\pi/2,3\pi/2)$ مولفهٔ برداری $\mathbf{J}$ را بیابید که (الف) با $\mathbf{a}_z$ موازی باشد ، (ب) بر رویهٔ $\phi = 3\pi/2$ عمود باشد ، (پ) بر رویهٔ کروی $r = 2$ مماس باشد ، (ت) با خط $y = -2$ ، $z = 0$ موازی باشد.

۲-۳۰ داریم $\mathbf{H} = 5\rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho - \rho z\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi + 2\rho\,\mathbf{a}_z$. در نقطهٔ $P(2,30^\circ,-1)$

(الف) یک بردار یکهٔ موازی با $\mathbf{H}$ بیابید.

(ب) مولفهٔ $\mathbf{H}$ موازی با $\mathbf{a}_x$ را بیابید.

(پ) مولفهٔ $\mathbf{H}$ عمود بر $\rho = 2$ را بیابید.

(ت) مولفهٔ $\mathbf{H}$ مماس بر $\phi = 30^\circ$ را بیابید.

۲-۳۱ به ازای $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ رویه‌های تعریف شده در زیر را توصیف کنید :

(الف) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}_x + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a}_y = 5$

(ب) $|\mathbf{r}\times\mathbf{a}_z| = 10$

مسائل

بخش ۳-۲ طول، سطح، و حجم دیفرانسیلی

۳-۱ طول هر یک از خمهای داده شده را با انتگرالگیری به دست آورید.

(الف) $\rho=3$ ، $\pi/4<\phi<\pi/2$ ، ثابت $z=$

(ب) $r=1$ ، $\theta=30^\circ$ ، $0^\circ<\phi<60^\circ$

(پ) $r=4$ ، $30^\circ<\theta<90^\circ$ ، ثابت $\phi=$

۳-۲ مساحت هر یک از رویه‌های داده شده را با انتگرالگیری از عنصر سطح dS مناسب به دست آورید.

(الف) $\rho=2$ ، $0<z<5$ ، $\pi/3<\phi<\pi/2$

(ب) $z=1$ ، $1<\rho<3$ ، $0<\phi<\pi/4$

(پ) $r=10$ ، $\pi/4<\theta<2\pi/3$ ، $0<\phi<2\pi$

(ت) $r=4$ ، $0<r<0$ ، $60^\circ<\theta<90^\circ$ ، ثابت $\phi=$

۳-۳ حجم هر یک از نواحی داده شده را با انتگرالگیری به دست آورید.

(الف) $0<x<1$ ، $1<y<2$ ، $-3<z<3$

(ب) $2<\rho<5$ ، $\pi/3<\phi<\pi$ ، $-1<z<4$

(پ) $1<r<3$ ، $\pi/2<\theta<2\pi/3$ ، $\pi/6<\phi<\pi/2$

۳-۴ سطحی به صورت $\rho=2$ ، $\pi/6<\phi<\pi/3$ ، $0<z<1$ تعریف شده است. مساحت این سطح را بیابید.

۳-۵ حجم محصور در $\rho=1$ ، $\rho=4$ ، $\phi=0$ ، $\phi=\pi$ ، $z=0$ ، و $z=2$ را بیابید.

بخش ۳-۳ انتگرال خط، سطح، و حجم

۶-۳ داریم $\mathbf{H}=x^2\mathbf{a}_x+y^2\mathbf{a}_y$. $\int_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$ را برای L تعریف شده با خم $y=x^2$ از $(0,0)$ تا $(1,1)$ حساب کنید.

۷-۳ داریم $\rho_s=x^2+xy$. $\int_S \rho_s dS$ را روی رویهٔ $y\le x^2$ ، $0<x<1$ حساب کنید.

۸-۳ اگر انتگرال $\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$ کار انجام شده برای بردن یک ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B باشد ، کار انجام شده توسط میدان نیروی زیر

$$\mathbf{F}=2xy\mathbf{a}_x+(x^2-z^2)\mathbf{a}_r-3xz^2\mathbf{a}_z$$

از نقطهٔ $A(0,0,0)$ به نقطهٔ $B(2,1,3)$ روی مسیرهای زیر را حساب کنید.

(الف) پاره‌خطهای $(2,1,3)\rightarrow(2,1,0)\rightarrow(0,1,0)\rightarrow(0,0,0)$

(ب) روی یک خط راست از $(0,0,0)$ به $(2,1,3)$

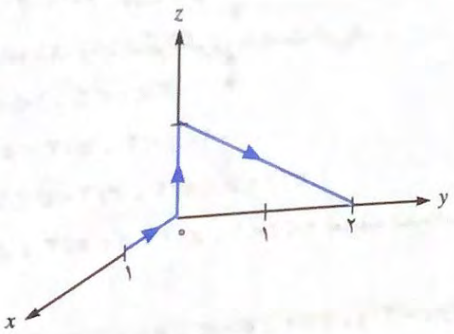
۹-۳ یک میدان برداری به صورت $\mathbf{F}=\rho^2\,\mathbf{a}_\rho+z\,\mathbf{a}_\phi+\cos\phi\,\mathbf{a}_z$ (بر حسب نیوتن) داده شده است . کاری که این نیرو در بردن یک جسم از نقطهٔ $P(2,0^\circ,0)$ به نقطهٔ $Q(2,\pi/4,3)$ انجام می‌دهد چقدر است؟ مسیر را متشکل از کمان $\rho=2$ ، $0<\phi<\pi/4$ ، $z=0$ و خط $\rho=2$ ، $\phi=\pi/4$ ، $0<z<3$ در نظر بگیرید.

۱۰-۳ (الف) میدان $\mathbf{F}=\frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{a}_x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{a}_y$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کنید.

(ب) $\oint_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl}$ را حساب کنید ، L مسیر دایروی $x^2+y^2=4$ است .

۱۱-۳ به ازای میدان زیر $\int H\cdot d\mathbf{l}$ را روی مسیر نشان داده شده در شکل ۳-۲۸ حساب کنید.

$$\mathbf{H}=(x-y)\mathbf{a}_x+(x^2+zy)\mathbf{a}_y+5yz\mathbf{a}_z$$



شکل ۳-۲۸ مربوط به مسئلهٔ ۳-۱۱.

بخش ۳-۵ گردایان میدان‌های اسکالر

۳-۱۲ گرادیان میدانهای اسکالر زیر را بیابید.

(الف) $V_1 = 6xy - 2xz + z$

(ب) $V_2 = 10\rho\cos\phi - \rho z$

(پ) $V_3 = \frac{2}{r}\cos\phi$

۳-۱۳ گرادیان میدانهای زیر را بیابید.

(الف) $U = e^{x+2y}\cosh z$

(ب) $T = \frac{3z}{\rho}\cos\phi$

(پ) $W = \frac{5\cos\phi}{r} + 2r^2\sin\phi$

۳-۱۴ $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\,\mathbf{a}_y + z\,\mathbf{a}_z$ بردار مکان نقطهٔ (x,y,z) است ، $r = |\mathbf{r}|$ ، و n یک عدد صحیح است. نشان دهید که $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

۳-۱۵ دما در یک تالار به صورت $T = x^2 + y^2 - z$ داده شده است . پشه‌ای در نقطهٔ (۱,۱,۲) قرار دارد و می‌خواهد در جهتی حرکت کند که بیشترین افزایش دما را حس کند . باید در چه جهتی بپرد؟

۳-۱۶ یک دسته رویه با معادلهٔ $F = x - 2y + z$ توصیف شده‌اند. بردار عمود بر سطح این رویه‌ها را بیابید.

بخش ۳-۶ دیورژانس یک بردار و قضیهٔ دیورژانس

۳-۱۷ دیورژانس میدانهای برداری زیر را بیابید:

(الف) $\mathbf{A} = xy\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y - xz\mathbf{a}_z$

(ب) $\mathbf{B} = \rho z^2\mathbf{a}_\rho + \rho\sin^2\phi\,\mathbf{a}_\phi + 2\rho z\sin^2\phi\,\mathbf{a}_z$

(پ) $\mathbf{C} = r\mathbf{a}_r + r\cos^2\theta\,\mathbf{a}_\phi$

۳-۱۸ بردار انتقال حرارت $\mathbf{H} = k\nabla T$ است ، که در آن T دما و k رسانایی گرمایی است . نشان دهید در محلی که

$$T = 50\sin\frac{\pi x}{2}\cosh\frac{\pi y}{2}$$

داریم $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$.

۳-۱۹ (الف) ثابت کنید که

$$\nabla\cdot(\nabla\mathbf{A}) = V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V$$

که در آن V یک میدان اسکالر و $\mathbf{A}$ یک میدان برداری است .

(ب) $\nabla\cdot(\nabla\mathbf{A})$ را به ازای $\mathbf{A} = 2x\mathbf{a}_x + 3y\mathbf{a}_y - 4z\mathbf{a}_z$ و $V = xyz$ حساب کنید.

۳-۲۰ به ازای $U = xz - x^2y + y^2z^2$ ، دیورژانس گرادیان U را بیابید.

۳-۲۱ به ازای $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{T} = 2zy\mathbf{a}_x + xy^2\mathbf{a}_y + x^2yz\mathbf{a}_z$ ، عبارتهای زیر را بیابید

(الف) $(\nabla\cdot\mathbf{r})\mathbf{T}$

(ب) $(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{T}$

(پ) $\nabla\cdot\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{T})$

(ت) $(\mathbf{r}\cdot\nabla)r^2$

۲۲-۳ به ازای $\mathbf{A}=2x\mathbf{a}_x-z^2\mathbf{a}_y+3xy\mathbf{a}_z$ شار $\mathbf{A}$ گذرنده از رویهٔ $\rho=2$ ، $0<\phi<\pi/2$ ، $0<z<1$ را بیابید.

۲۳-۳ فرض کنید $\mathbf{D}=2\rho z^2\mathbf{a}_\rho+\rho\cos^2\phi\mathbf{a}_z$. عبارتهای زیر را

(الف) $\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$ (ب) $\int_v \nabla\cdot\mathbf{D}\,dv$

روی ناحیهٔ تعریف شده با $2\le\rho\le5$ ، $-1\le z\le1$ ، $0<\phi<2\pi$ ، حساب کنید.

۲۴-۳ داریم $\mathbf{H}=10\cos\theta\mathbf{a}_r$. $\int\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$ را روی نیمکرهٔ توصیف شده با $r=1$ ، $0<\phi<2\pi$ ، $0<\theta<\pi/2$ حساب کنید.

۲۵-۳ (الف) داریم $\mathbf{A}=xy\mathbf{a}_x+yz\mathbf{a}_y+xz\mathbf{a}_z$. $\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ را روی سطح S معکبی تعریف شده با $0\le x\le1$ ، $0\le y\le1$ ، $0\le z\le1$ حساب کنید.

(ب) بند (الف) را به ازای $\mathbf{A}=yz\mathbf{a}_x+xz\mathbf{a}_y+xy\mathbf{a}_z$ و همان سطح تکرار کنید.

۲۶-۳ هر دو طرف قضیهٔ دیورژانس را برای میدان برداری

$$\mathbf{H}=2xy\mathbf{a}_x+(x^2+z^2)\mathbf{a}_y+2yz\mathbf{a}_z$$

و ناحیهٔ مکعبی تعریف شده با $0<x<1$ ، $1<y<2$ ، $-1<z<3$ حساب کنید.

۲۷-۳ میدان $\mathbf{B}=\rho\mathbf{a}_\rho+10z\,\mathbf{a}_z$ داده شده است . دو طرف قضیهٔ دیورژانس را روی ناحیهٔتعریف شده به صورت $0\le\rho\le3$ ، $0\le\phi\le2\pi$ ، $0\le z\le4$ حساب کنید.

۲۸-۳ فرض کنید $\mathbf{F}=10\rho\sin\phi\mathbf{a}_\rho+4\rho\cos\phi\mathbf{a}_\phi+z\mathbf{a}_z$. دو طرف قضیهٔ دیورژانس را در ناحیهٔ $\rho=0$ ، $\rho=1$ ، $\phi=0$ ، $\phi=\pi/2$ ، $z=-1$ ، و $z=2$ حساب کنید.

۲۹-۳ دو طرف قضیهٔ دیورژانس را برای تابع $\mathbf{A}=r^2\mathbf{a}_r+r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta$ و ربع نیم‌کرهٔ تعریف شده با $0<r<3$ ، $0<\phi<\pi/2$ ، $0<\theta<\pi/2$ حساب کنید.

۳۰-۳ شار متناظر با بردار زیر

$$\mathbf{F}=\rho^2\sin\phi\mathbf{a}_\rho+z\cos\phi\mathbf{a}_\phi+\rho z\mathbf{a}_z$$

که از استوانهٔ تو خالی $2\le\rho\le3$ ، $0\le z\le5$ خارج می‌شود ، چقدر است ؟

بخش ۳-۷ کرل میدان برداری و قضیهٔ استوکس

۳۱-۳ کرل میدانهای بردای زیر را حساب کنید :

(الف) $\mathbf{A}=xy\mathbf{a}_x+y^2\mathbf{a}_y-xz\mathbf{a}_z$

(ب) $\mathbf{B}=\rho z^2\mathbf{a}_\rho+\rho\sin^2\phi\mathbf{a}_\phi+2\rho z\sin^2\phi\mathbf{a}_z$

(پ) $\mathbf{C}=r\mathbf{a}_r+r\cos^2\theta\mathbf{a}_\phi$

۳-۳۲ $\nabla\times\mathbf{A}$ و $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})$ را به ازای میدانهای برداری زیر بیابید :

(الف) $\mathbf{A}=x^{۲}y\mathbf{a}_x+y^{۲}z\mathbf{a}_y-۲xz\mathbf{a}_z$

(ب) $\mathbf{A}=\rho^{۲}z\mathbf{a}_\rho+\rho^{۳}\mathbf{a}_\phi+۳\rho z^{۲}\mathbf{a}_z$

(پ) $\mathbf{A}=\dfrac{\sin\phi}{r^{۲}}\mathbf{a}_r-\dfrac{\cos\phi}{r^{۲}}\mathbf{a}_\theta$

* ۳-۳۳ داریم $\mathbf{F}=x^{۲}y\mathbf{a}_x-y\mathbf{a}_y$.

(الف) $\oint_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$ را روی L نشان داده شده در شکل ۳-۲۹ بیابید.

(ب) $\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$ را بیابید . S سطح داخل مسیر L است .

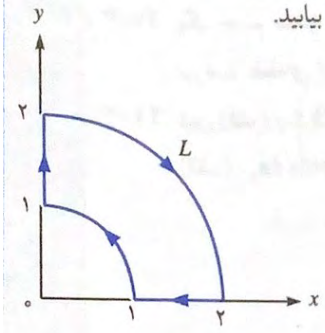
(پ) آیا قضیهٔ استوکس برقرار است ؟

۳-۳۴ فرض کنید $\mathbf{A}=\rho\sin\phi\mathbf{a}_\rho+\rho^{۲}\mathbf{a}_\phi$. $\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ را روی مسیر L نشان داده شده در شکل ۳ حساب کنید.

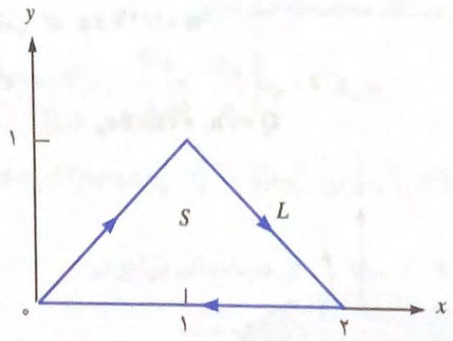
۳-۳۵ به ازای $\mathbf{F}=۲xy\mathbf{a}_x+y\mathbf{a}_y$ ، $\oint_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$ را روی مسیر L نشان داده شده در شکل ۳-۳۱ حـ کنید.

۳-۳۶ داریم $\mathbf{F}=۲\rho z\mathbf{a}_\rho+۳z\sin\phi\mathbf{a}_\phi-۴\rho\cos\phi\mathbf{a}_z$. درستی قضیهٔ استوکس را برای این میدان و رویهٔ تعریف شده با $z=۱$ ، $۰<\rho<۲$ ، $۰<\phi<۴۵^\circ$ نشان دهید.

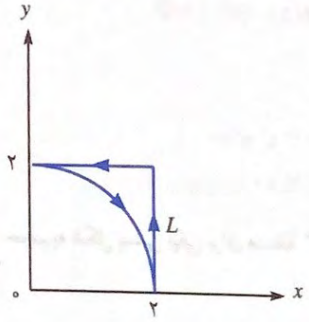
۳-۳۷ فرض کنید $\mathbf{A}=۴x^{۲}e^{-y}\mathbf{a}_x-۸xe^{-y}\mathbf{a}_y$. $\nabla\times[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})]$ را بیابید.



شکل ۳-۳۵ مسئلهٔ ۳-۳۴



شکل ۳-۲۹ مسئلهٔ ۳-۳۳ .



شکل ۳-۳۱ مسئلهٔ ۳-۳۵.

۳-۳۸ فرض کنید $V=\frac{\sin\theta\cos\phi}{r}$. عبارتهای زیر را بیابید:

(الف) ∇V (ب) $\nabla\times\nabla V$ (پ) $\nabla\cdot\nabla V$

۳-۳۹ یک میدان برداری به صورت زیر داده شده است

$$\mathbf{Q}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}[(x-y)\mathbf{a}_x+(x+y)\mathbf{a}_y]$$

انتگرال های زیر را حساب کنید :

(الف) $\int_L \mathbf{Q}\cdot d\mathbf{l}$ که L لبهٔ دایروی حجم به شکل بستنی قیفی شکل ۳-۳۲ است .

(ب) $\int_{S_1}(\nabla\times\mathbf{Q})\cdot d\mathbf{S}$ که در آن S_1 رویهٔ بالایی این حجم است .

(پ) $\int_{S_2}(\nabla\times\mathbf{Q})\cdot d\mathbf{S}$ ، که در آن S_2 بخش مخروطی حجم است .

(ت) $\int_{S_1}\mathbf{Q}\cdot d\mathbf{S}$

(ث) $\int_{S_2}\mathbf{Q}\cdot d\mathbf{S}$

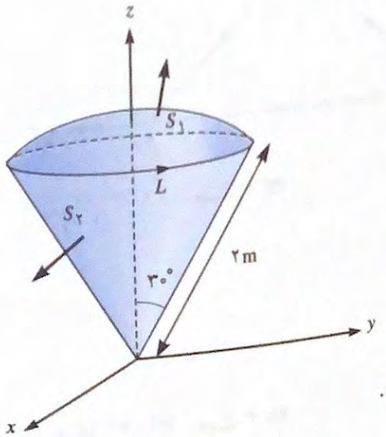
(ج) $\int_v \nabla\cdot\mathbf{Q}\,dv$

نتایج بندهای (الف) و (ج) را مقایسه کنید.

۳-۴۰ یک جسم صلب حول محور ثابتی که از مرکزش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد . اگر $\mathbf{u}$ سرعت نقطه‌ای از جسم باشد ، نشان دهید که $\omega=1/2\nabla\times\mathbf{u}$.

۳-۴۱ دیورژانس و کرل توابع بردار زیر را بیابید:

(الف) $\mathbf{H}=3\rho z\mathbf{a}_\rho-4\rho\cos\phi\mathbf{a}_z$ (ب) $\mathbf{Q}=r\mathbf{a}_r+r\sin\theta\mathbf{a}_\theta$



شکل ۳-۳۲ حجم به شکل بستنی قیفی برای مسئلهٔ ۳-۳۸ .

۴۲-۳ به ازای میدان برداری $\mathbf{A}$ و میدان اسکالر V روابط زیر را در دستگاه مختصات قائم ثابت کنید.

(الف) $\nabla\cdot(V\nabla V)=V\nabla^2V+|\nabla V|^2$

(ب) $\nabla\times(V\mathbf{A})=V\nabla\times\mathbf{A}+\nabla V\times\mathbf{A}$

۴۳-۳ داریم $\mathbf{F}=(2z^2-5y)\mathbf{a}_x+6xz^2\mathbf{a}_y+(2x+y)\mathbf{a}_z$. $\nabla\times\nabla\times\mathbf{F}$ را در $(1,2,-3)$ حساب کنید.

بخش ۳-۸ لاپلاسین میدان‌های اسکالر

۴۴-۳ به ازای میدانهای اسکالر داده شده ∇^2V را بیابید.

(الف) $V_1=x^3+y^3+z^3$

(ب) $V_2=\rho z^2\sin 2\phi$

(پ) $V_3=r^2(1+\cos\theta\sin\phi)$

۴۵-۳ لاپلاسین میدانهای اسکالر زیر را یافته ، آن را در نقطهٔ داده شده حساب کنید.

(الف) $U=x^3y^2e^{xz}$ ، $(1,-1,1)$

(ب) $V=\rho^2z\,(\cos\phi+\sin\phi)$ ، $(5,\pi/6,-2)$

(پ) $W=e^{-r}\sin\theta\cos\phi$ ، $(1,\pi/3,\pi/6)$

۴۶-۳ $\mathbf{r}=x\mathbf{a}_x+y\mathbf{a}_y+z\mathbf{a}_z$ بردار مکان متناظر با نقطهٔ (x,y,z) ، است و $r=|\mathbf{r}|$. نشان دهید که اگر n یک عدد صحیح باشد ، آنگاه

(الف) $\nabla(\ln r)=\dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$

(ب) $\nabla^2(\ln r)=\dfrac{1}{r^2}$

۴۷-۳ فرض کنید $V=xy^2z^3$ و ∇V و ∇^2V را در $P(1,2,3)$ حساب کنید.

۴۸-۳ به ازای $V=\dfrac{5\cos\phi}{r^2}$: (الف) ∇V ، (ب) $\nabla\cdot\nabla V$ ، و (پ) $\nabla\times\nabla V$ را حساب کنید.

* ۴۹-۳ در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2\mathbf{A}=\left(\nabla^2A_\rho-\frac{2\partial A_\phi}{\rho^2\partial\phi}-\frac{A_\rho}{\rho^2}\right)\mathbf{a}_\rho+\left(\nabla^2A_\phi-\frac{2\partial A_\rho}{\rho^2\partial\phi}-\frac{A_\phi}{\rho^2}\right)\mathbf{a}_\phi+\nabla^2A_z\,\mathbf{a}_z$$

$\nabla^2\mathbf{G}$ را به ازای $\mathbf{G}=2\rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho+4\rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi+(z^2+1)\rho\mathbf{a}_z$ به دست آورید.

بخش ۳-۹ دسته بندی میدانهای برداری

۵۰-۳ میدان برداری زیر داده شده است

$$\mathbf{G}=(16xy-z)\mathbf{a}_x+8x^2\mathbf{a}_y-x\mathbf{a}_z$$

(الف) آیا $\mathbf{G}$ بی‌چرخش (یا پایستار) است ؟

(ب) شار خالص $\mathbf{G}$ روی مکعب $0<x,y,z<1$ را بیابید.

(پ) چرخش $\mathbf{G}$ روی لبهٔ مربع $z=0$ ، $0<x,y<1$ را بیابید.