فصل دوازدهم

میدانهای متغیر با زمان و قانون فاراده

یکی از نظریات مهم در الکترومغناطیس توسط مایکل فاراده انجام گرفت وی در سال (۱۸۳۱) به طور تجربی کشف کرد که وقتی شارمغناطیسی در حال پیوند با یک حلقه هادی تغییر کند جریانی در این حلقه القاء می‌شود و رابطه کمی بین نیروی محرکه القائی (emf) و نرخ تغییر پیوند شار براساس مشاهدات تجربی به قانون فاراده معروف است و بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\xi = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (۱ - ۱۲)$$

علامت منفی در رابطه (۱۲ - ۱) بعلت این مطلب است که جریان القائی در حلقه در جهتی است که میدان مغناطیسی حاصله از آن با تغییر شار مغناطیسی مخالفت می‌کند این مسئله بنام قانون لنز شناخته شده است. در حقیقت فاراده با استفاده از نظریه «ارستد» که نشان داد جریان الکتریکی باعث چرخش عقربه قطب نما میشود نتیجه گرفت که اگر جریان الکتریکی قادر به ایجاد میدان مغناطیسی است پس یک میدان مغناطیسی نیز قادر به تولید جریان الکتریکی میباشد در آزمایش انجام گرفته شده بوسیله فاراده یک باطری در یک حلقه یک جریان الکتریکی ایجاد می‌کند در مجاورت این حلقه یک حلقه دیگر شامل گالوانومتر قرار داده می‌شود ملاحظه میشود که با دور و نزدیک کردن حلقه شامل باطری گالوانومتر جریانی را نشان می‌دهد این جریان ناشی از تغییر شار الکتریکی ایجاد شده در حلقه شامل گالوانومتر است که توسط حلقه شامل باطری ایجاد شده است. شار مغناطیسی ایجاد شده توسط باطری را نیز میتوان توسط یک آهنربا نیز ایجاد کرد در اینصورت با دور و نزدیک کردن آهنربا به حلقه، گالوانومتر جریانی را نشان می‌دهد از آنجا که شار مغناطیسی عبور کننده از یک حلقه تابع دو پارامتر B چگالی شار و S (سطح حلقه) میباشد بنابراین تغییر شار را می‌توان ناشی از دو عامل دانست یکی تغییر B با زمان و دیگری تغییر S از آنجا که نیروی محرکه القائی در یک حلقه را میتوان از روی میدان الکتریکی نیز به دست آورد بنابراین رابطه (۱۲ - ۱) را میتوان بصورت زیر نوشت.

$$\oint \overline{E}\cdot\overline{d\ell} = -\frac{d}{dt}\int \overline{B}\cdot\overline{ds} \qquad (۲ - ۱۲)$$

در حالتیکه تغییر شار ناشی از تغییر زمانی B است رابطه (۱۲ - ۲) را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\oint \overline{E}\cdot\overline{d\ell} = -\int \frac{\partial \overline{B}}{dt}\cdot\overline{ds} \qquad (۳ - ۱۲)$$

اگر عبارت سمت چپ را با استفاده از قانون استوک به انتگرال روی سطح حلقه تبدیل کنیم داریم

$$\int_s (\overline{\nabla}\times\overline{E})\cdot\overline{ds} = -\int_s \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\cdot\overline{ds} \qquad (۴ - ۱۲)$$

رابطه (۱۲ - ۴) را میتوان به صورت زیر نوشت.

$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad (۵ - ۱۲)$$

رابطه (۱۲ - ۵) معادل اول ماکسول میباشد.

مثال ۱: حلقه دایره‌ای N دور سیم هادی در صفحه xy قرار دارد به طوری که مرکز آن در مبدا می‌باشد چگالی شار

مغناطیسی با رابطه $B = B_\circ \sin\frac{\pi R}{3a} \cos\omega t$ داده شده است که a شعاع حلقه است اگر مقاومت حلقه R' باشد جریان القائی در حلقه را بدست آورید.

حل: ابتدا شار مغناطیسی عبوری از حلقه را بدست آورید.

$$\phi = \int_s \overline{B}.\overline{ds} = \int_\circ^a \int_\circ^{2\pi} B_\circ \sin\frac{\pi R}{3a} \cos\omega t \; R\, dR\, d\phi = 2\pi B_\circ \int_\circ^a R \sin\frac{\pi R}{3a}\, dR \cos\omega t$$

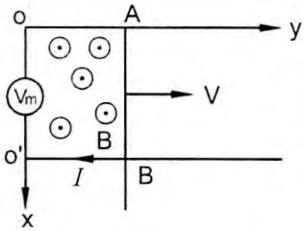
$$= 2\pi B_\circ \left\{ \left[-R\frac{3a}{\pi} \cos\frac{\pi R}{3a} \right]_\circ^a + \int_\circ^a \frac{3a}{\pi} \cos\frac{\pi R}{3a}\, dR \right\} \cos\omega t$$

$$a = 2\pi B_\circ \cos\omega t \left\{ -\frac{3a^2}{2\pi} + \frac{9a^2}{\pi^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\} = B_\circ \cos\omega t \left[-3a^2 + \frac{9\sqrt{3}}{\pi} a^2 \right]$$

$$\phi = 1/96\, a^2 B_\circ \cos\omega t \qquad \Psi = N\phi$$

$$\xi = -\frac{d\Psi}{dt} = 1/96\, a^2 B_\circ \omega N \sin\omega t$$

$$I = \frac{\xi}{R'} = \frac{1/96\, a^2 B_\circ \omega N \sin\omega t}{R'} \sin\omega t$$



حال میله‌ای بطول L را در نظر بگیرید که روی ریل موازی مطابق شکل زیر قرار گرفته است و ولتمتر V_m جهت قرائت ولتاژ القایی دو سر میله بکار میرود فرض کنید که میله با سرعت v به سمت راست حرکت میکند در اینصورت میتوان تصور کرد که بارهای موجود در میله با سرعت v حرکت میکند حال فرض کنید چگالی شار مغناطیسی ثابت $B_\circ$ عمود بر صفحه میله وجود دارد مطابق آنچه در فصل قبل گفته شد به بار متحرک q در میله که با سرعت v در میدان مغناطیسی حرکت میکند نیروی زیر وارد میشود.

$$\overline{F}_m = q\overline{v} \times \overline{B} \qquad (۱۲ - ۶)$$

اگر بار $q > \circ$ باشد در اینصورت چون $v = v_\circ \hat{a}_y$, $B = B_\circ \hat{a}_z$ در اینصورت داریم

$$F_m = qV_\circ B_\circ \hat{a}_x \qquad (۱۲ - ۷)$$

یعنی بر بارهای مثبت q در جهت $\hat{a}_x$ نیرو وارد میشود بارهای مثبت در پایین میله (نقطه B) و بارهای منفی در بالای میله جمع می‌شوند بنابراین در سر میله AB ولتاژ القاء میشود این ولتاژ القائی را میتوان با تغییر شار مغناطیسی عبوری از مستطیل $OABO'$ و بصورت زیر بدست آورد

$$\xi = -\frac{d}{dt}(BS) = BL\frac{d(OA)}{dt} = -BLV$$

چون بارهای مثبت در B جمع میشوند بنابراین جهت جریان القائی از B به سمت O' میباشد ملاحظه میشود که میدان مغناطیسی ناشی از جریان القائی I بسمت داخل صفحه است (عکس میدان مغناطیس اولیه) حال اگر به رابطه (۱۲-۶) دقت کنیم میتوان $\overline{E}_m = \frac{\overline{F}_m}{q} = \overline{v} \times \overline{B}$ را بصورت میدان الکتریکی که همان نیرو وارد بر واحد بار است تعریف کنیم در نتیجه نیروی محرک القائی در حلقه $OABO'$ را میتوان بصورت زیر محاسبه کرد.

$$\xi = \oint \overline{E}\,.\overline{d\ell} = \oint (\overline{V}\times\overline{B}).\overline{d\ell} \qquad (\text{۸ - ۱۲})$$

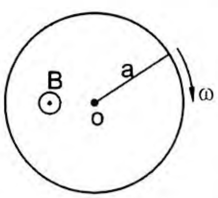
رابطه (۱۲ - ۸) برای حالتی است که نیروی محرکه القائی ناشی از تغییر سطح حلقه باشد در حالی که رابطه (۱۲-۳) برای حالتی است که نیروی محرکه القائی ناشی از تغییر B باشد حال اگر هم میدان و هم سطح حلقه تغییر کند در اینصورت نیروی محرکه القائی عبارتست از

$$\xi = \oint (\overline{V}\times\overline{B})\,.\overline{d\ell} + \int_s \frac{-d\overline{B}}{dt}\,.\overline{ds} \qquad (\text{۹ - ۱۲})$$

به جمله اول رابطه (۱۲ - ۹) القای حرکتی (motional induction) و به جمله دوم رابطه (۱۲ - ۹) القای انتقالی (transformer induction) می‌گویند.

مثال ۲: در یک صفحه دایره‌ای میدان مغناطیسی یکنراخت با چگالی شار مغناطیسی $B = B_\circ \hat{a}_z$ وجود دارد یک سیم بطول a (a شعاع دایره) با سرعت زاویه ω حول O مرکز دایره می‌چرخد نیروی محرکه القائی دو سر سیم چقدر است؟

حل:

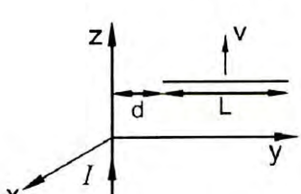


$$\xi = \int (\overline{v}\times\overline{B})\,.\overline{d\ell} = \int_\circ^a (r\omega\ \hat{a}_\phi \times B_\circ \hat{a}_z)\,.dr\hat{a}_r$$

$$\xi = \int_\circ^a B_\circ\, r\omega\, dr = \frac{۱}{۲} B_\circ\, a^۲\omega$$

مثال ۳: یک سیم منطبق بر محور zها حامل جریان I میباشد سیمی بطول L در صفحه yz با سرعت v در جهت محور z حرکت میکند نیروی محرکه القائی دو سر سیم بطول L را بدست آورید.

*حل: **میدان در فاصله R از سیم منطبق بر محور و روی سیم بطول L عبارتست از***



$$H = \frac{I}{۲\pi R}\ \hat{a}_\phi$$

$$\xi = \int (\overline{v}\times\overline{B})\,.\overline{d\ell} = \int v\hat{a}_z \times \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\ \hat{a}_\phi\ .\overline{d\ell}$$

$$= \int_d^{d+L} -\frac{\mu_\circ Iv}{۲\pi R}\ \hat{a}_R\,.dR\,\hat{a}_R = -\frac{\mu_\circ Iv}{۲\pi}\ln\left(۱+\frac{L}{d}\right)$$

علامت منفی نشاندهنده این مطلب است که جهت ولتاژ القائی خلاف جهت $\hat{a}_R$ است (سر نزدیکتر سیم بطول L به سیم بلند مثبت است)

مثال ۴: سیمی بطول L و مقاومت R روی یک ریل با سرعت v حرکت میکند توان مصرفی در سیم را بدست آورید و ثابت کنید این توان با توان مکانیکی لازم جهت به حرکت درآوردن سیم مساوی است فرض کنید میدان مغناطیسی بر صفحه حرکت سیم عمود است؟

*حل: **همانطوریکه قبلا دیدیم نیروی محرکه القائی در سیم بطول L که با سرعت v در میدان B حرکت میکند برابر است با***

BLv یعنی جریان القائی برابر است با $I=\frac{BLv}{R}$ در اینصورت نیروی وارد بر سیم از طرف میدان عبارتست از

$$\overline{F}=I\overline{L}\times\overline{B}=\frac{BLv}{R}L\hat{a}_x\times B\hat{a}_z=-\frac{B^2L^2v}{R}\hat{a}_y$$

در نتیجه نیروی لازم جهت به حرکت درآوردن میله باید F- باشد یعنی

$$\overline{F}'=-F=\frac{B^2L^2v}{R}\hat{a}_y$$

حال می‌توان مکانیکی را بصورت زیر بدست آوریم

$$P_m=\overline{F'}.\overline{v}=\frac{B^2L^2v}{R}\hat{a}_y.v\hat{a}_y=\frac{B^2L^2v^2}{R}$$

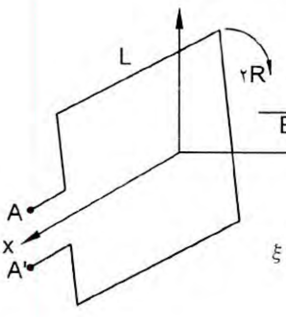
و توان الکتریکی (مصرفی) عبارتست از

$$P_e=\frac{\xi^2}{R}=\frac{(BLv)^2}{R}=\frac{B^2L^2v^2}{R}$$

همانطوریکه ملاحظه میشود $P_e=P_m$

۱۲-۱- یک کاربرد عملی از قانون فاراده

در نیروگاههای تولید برق از قانون فاراده جهت ایجاد القاء استفاده می‌شود یک حلقه مستطیلی به اضلاع $L\times 2R$ را در نظر بگیرید که حول محور x مطابق شکل با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد فرض کنید میدان مغناطیسی ناشی از یک آهنربا در جهت $\hat{a}_y$ میباشد زاویه بین بردار $\hat{B}$ و بردار مساحت $\hat{S}$ در لحظه t عبارتست از ωt بنابراین شار مغناطیسی عبوری از حلقه عبارتست از:



$$\phi=\hat{B}.\overline{S}=BS\cos\omega t$$

$$\phi=B(2RL)\cos\omega t \qquad (۱۲-۱۰)$$

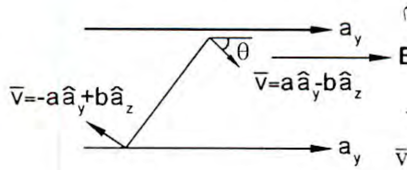
نیروی محرکه القائی در حلقه عبارتست از

$$\xi=-\frac{d\phi}{dt}=B(2RL)\omega\sin\omega t=2BLR\omega\sin\omega t \qquad (۱۲-۱۱)$$

چون سرعت خطی حلقه $V=R\omega$ میباشد لذا

$$\xi=2BLV\sin\omega t \qquad (۱۲-۱۲)$$

رابطه (۱۲ - ۱۲) را میتوان از رابطه $\oint(\overline{v}\times\overline{B})\overline{d\ell}$ نیز بدست آورد اگر سیم بالایی بطول L را در نظر بگیریم مطابق شکل زیر بردار $\overline{v}$ بصورت $\overline{v}=a\hat{a}_y-b\hat{a}_z$ و اگر سیم پائینی بطول L را در نظر بگیریم مطابق شکل زیر بردار $\overline{v}$ بصورت $\overline{v}=-a\hat{a}_y-b\hat{a}_z$ میباشد در اینصورت برای سیم بالایی داریم



$$\overline{v}\times\overline{B}=(a\hat{a}_y-b\hat{a}_z)\times B\hat{a}_y=bB\hat{a}_x \qquad (۱۲-۱۳)$$

یعنی بارها مثبت در جهت $\hat{a}_x$ حرکت میکند برای سیم پائینی داریم.

$$\overline{v}\times\overline{B}=(-a\hat{a}_y+b\hat{a}_z)\times B\hat{a}_y=-bB\hat{a}_x \qquad (۱۳-۱۴)$$

یعنی پلاریته ولتاژ القایی دو سر سیم پائینی خلاف پلارتیه ولتاژ القایی دو سر سیم بالائی است پس اختلاف پتانسیل دو سر AA' برابر است با $2V'$ که V' ولتاژ دو سر هرکدام از سیم‌های بطول L (سیم بالا و سیم پایین) میباشد حال مقدار V' را با فرمول زیر محاسبه می‌کنیم.

$$v'=\int(\overline{v}\times\overline{B}).\overline{d\ell}=\int_0^L vB\sin\omega t\,dx=vBL\sin\omega t \qquad (۱۲-۱۵)$$

که ωt زاویه بردار $\overline{B}$, $\overline{V}$ در لحظه t میباشد.بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر سیم AA' برابر است با

$$\xi = ۲V' = ۲\,VLB\,\sin\omega t \qquad (۱۶-۱۲)$$

که همان رابطه (۱۲ - ۱۲) بالا میباشد.

مثال ۵: در یک دایره به شعاع $a = ۸^{cm}$ که در صفحه $z=۰$ قرار دارد چگالی شار مغناطیسی از رابطه $B = \frac{۱۰^{-۳}}{R}\cos ۱۲۰\pi t\,\hat{a}_z$ بدست می‌آید مطلوبست

الف) E_ϕ در دایره ب) جریانی که این میدان در دایره ایجاد میکند اگر مقاومت دایره ۱۰^{Ω} باشد

ج) مقدار دامنه چگالی شار مغناطیسی که این جریان در مرکز دایره ایجاد میکند.

حل:

$$\text{(الف)}\ \overline{\nabla}\times\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} = \frac{۱۰^{-۳}}{R}\,۱۲۰\pi\sin ۱۲۰\pi t\,\hat{a}_z$$

$$\frac{۱}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,(R\,E_\phi)\,\hat{a}_z = \frac{۱۰^{-۳}}{R}\,۱۲۰\,\pi\sin\,۱۲۰\pi t\,\hat{a}_z$$

$$E_\phi = ۰/۳۷۷\sin\,۱۲۰\pi t\ \ V/m$$

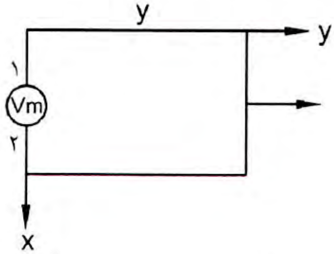
$$\xi = \oint \overline{E}\,.\,\overline{d\ell} = E\,۲\pi a = ۰/۳۷۷\sin\,۱۲۰\pi t\times ۲\pi\times ۰/۰۸\times ۰/۳۷۷\sin(۲۰\pi t)$$

$$\xi = ۰/۱۸۹۵\sin\,۱۲۰\pi t$$

$$I = \frac{\xi}{R} = \frac{۰/۱۸۹۵\sin\,۱۲۰\pi t}{۱۰} = ۱۸/۹۵^{mA}\sin\,۱۲۰\pi t$$

$$B = \mu_\circ H = \mu_\circ\frac{I}{۲a} = \frac{\mu_\circ\times ۱۸/۹۵^{mA}}{۲\times/۰۸} = ۱/۴۸۸\times۱۰^{-۷}\,wb_{/m^۲}$$

مثال ۶: سیمی بطول $L = ۰/۲^{m}$ مطابق شکل بصورت نوسانی و با معادله $y = ۰/۱\sin ۵\pi t$ در میدان یکنواخت $B = ۲\hat{a}_z$ حرکت میکند ولتاژ القائی $V_{۱۲}$ را بدست آورید.



حل: از راه $\varepsilon = V_{۱۲} = -\frac{d\phi}{dt}$ *مسئله را حل می‌کنیم.*

$$\phi = \overline{B}\,_\circ\,\overline{S} = ۲\times Ly = ۲\times ۰/۲\times ۰/۱\,\sin ۵\pi t$$

$$\phi = ۰/۰۴\sin ۵\pi t \ \rightarrow\ V_{۱۲} = \frac{-d\phi}{dt} = -۰/۶۲۸\cos ۵\pi t$$

میتوان مسئله را از طریق زیر نیز حل کرد

$$V_{۱۲} = \xi = \oint(\overline{v}\times\overline{B})\,.\,d\ell = \int_{۰/۲}^{۰}\left(\frac{dy}{dt}\hat{a}_y\times ۲\hat{a}_z\right).\,dx\,\hat{a}_x$$

$$V_{۱۲} = \int_{۰/۲}^{۰} ۰/۵\pi\cos ۵\pi t\,\hat{a}_y\times ۲\hat{a}_z\,.dx\,\hat{a}_x = \pi\cos ۵\pi t\int_{۰/۲}^{۰} dx$$

$$V_{۱۲} = -۰/۶۲۸\,\cos ۵\pi t$$

۱۲-۲- قانون دوم ماکسول

همانطوریکه که در بحث قانون آمپر دیدیم شکل نقطه‌ای قانون آمپر بصورت

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} \qquad (۱۷ - ۱۲)$$

میباشد این رابطه برای میدانهای متغیر با زمان با تناقض مواجه میشود زیرااگر ازطرفین رابطه(۱۲-۱۷) دیورژانس بگیریم خواهدداشت.

$$\nabla . (\nabla \times \overline{H}) = \nabla . \overline{J} \qquad (۱۸ - ۱۲)$$

چون دیورژانس کرل هر بردار صفراست لذا سمت چپ رابطه (۱۲ - ۱۸) صفر در حالی که سمت راست این رابطه صفر نبوده و برابر $\frac{-\partial \rho}{\partial t}$ میباشد که قبلاً در مبحث پیوستگی جریان و اصل بقای بارگفتیم. برای حل این تناقض به سمت راست (۱۲ - ۱۷) جمله G را بصورت زیر اضافه می‌کنیم.

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \overline{G} \qquad (۱۹ - ۱۲)$$

حال اگر از طرفی رابطه (۱۲ - ۱۹) دیوژانس بگیریم خواهیم داشت

$$\nabla . (\nabla \times \overline{H}) = \nabla . \overline{J} + \nabla . \overline{G} \qquad (۲۰ - ۱۲)$$

با توجه با اینکه $\nabla . \overline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ خواهیم داشت.

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \overline{G} = 0 \qquad (۲۱ - ۱۲)$$

و یا

$$\nabla . \overline{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (۲۲ - ۱۲)$$

چون $\nabla . \overline{D} = \rho$ و اپراتور ∇ و مشتق جابجایی‌پذیرند لذا

$$\nabla . \overline{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla . \overline{D}) = \nabla . \left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\right) \qquad (۲۳ - ۱۲)$$

بنابراین

$$\overline{G} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \qquad (۲۴ - ۱۲)$$

که با جایگزینی $\overline{G}$ در رابطه (۱۲ - ۲۹) خواهیم داشت.

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \qquad (۲۵ - ۱۲)$$

که $\overline{J}$ چگالی جریان هدایتی و $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$ چگالی جریان جابجایی می‌باشد.

$\overline{J}$ در اجسام هادی $(\overline{J} = \sigma \overline{E})$, $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$ در اجسام عایق وجود دارد با آنچه گفته شد و با توجه به مطالب قبل معادلات ماکسول بصورت زیر درمی‌آید

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad (۱۲ - ۲۶ \text{ الف})$$

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \qquad (۱۲ - ۲۶ \text{ ب})$$

$$\nabla . \overline{D} = \rho \qquad (۱۲ - ۲۶ - \text{پ})$$

$$\nabla . \overline{B} = 0 \qquad (۱۲ - ۲۶ - \text{ت})$$

معادلات بالا اساس حل معادلات موج در محیط‌های مختلف هستند.

مثال ۷: یک فاز توسط یک سیم به منبع ولتاژ $V = V_m \cos \omega t$ متصل شده است جریان در سیم بصورت جریان

هدایتی و بین صفحات خازن بصورت جریان جابجایی است ثابت کنید جریان هدایتی و جابجایی مساوی هستند.

حل: جریان هدایتی که در سیم جاری است بصورت

$$i_c = C\frac{dV_c}{dt} = CV_m\,\omega\cos\omega t$$

خواهد بود حال با توجه به ولتاژ دو سر خازن میدان الکتریکی بین صفحات خازن عبارست از $E = \frac{V_c}{d}$ *در نتیجه چگالی جریان جابجایی عبارتست از:*

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{d}\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d}V_m\,\omega\cos\omega t$$

و در نتیجه جریان جابجایی عبارتست از:

$$i_d = J_d A = \varepsilon\frac{A}{d}V_m\omega\cos\omega t$$

که چون $C = \varepsilon\frac{A}{d}$ *لذا*

$$i_d = CV_m\,\omega\cos\omega t$$

که همان جریان هدایتی i_c *میباشد.*

۱۲-۳- فرم فازوری معادلات ماکسول

اگر میدان الکتریکی و مغناطیسی را بصورت فازوری و بشکل $E = \mathrm{Re}\,(\underline{E}\,e^{J\omega t})$ و $H = \mathrm{Re}(\underline{H}\,e^{J\omega t})$ نشان دهیم که $\underline{E} = E_m\,e^{J\phi_E}$ و $\underline{H} = H_m\,e^{J\phi_H}$ به ترتیب فازورهای میدان الکتریکی و مغناطیسی هستند و این میدانها را در روابط (۱۲ - ۲۶ - الف) (۱۲ - ۲۶ - ب) جایگزین کنیم خواهیم داشت (Re معرف قسمتی حقیقی یک عبارت است)

$$\nabla\times(\mathrm{Re}\,\underline{E}\,e^{J\omega t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Re}(\mu\,\underline{H}\,e^{J\omega t})$$

چون اپراتورهای Re، مشتق و کرل جابجایی‌پذیر هستند لذا خواهیم داشت

$$\mathrm{Re}(\nabla\times\underline{E}\,e^{J\omega t}) = \mathrm{Re}\,(-\frac{\partial}{\partial t}\mu\,\underline{H}\,e^{J\omega t})$$

و یا

$$\mathrm{Re}\,(\nabla\times\underline{E}\;e^{J\omega t}) = \mathrm{Re}(-J\omega\mu\;\underline{H}\,e^{J\omega t})$$

با استفاده از رابطه $\mathrm{Re}\,(A\;e^{J\omega t}) = \mathrm{Re}\,(B\;e^{J\omega t})$ که منجر به $A = B$ میشود داریم.

$$\nabla\times\underline{E} = -J\omega\mu\,\underline{H} \qquad (۱۲ - ۲۷)$$

$$\nabla\times(\mathrm{Re}\;\underline{H}\,e^{J\omega t}) = \mathrm{Re}(J\,e^{J\omega t}) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Re}\,\varepsilon\;\underline{E}\,e^{J\omega t})$$

و یا

$$\mathrm{Re}\,(\nabla\times\underline{H}\,e^{J\omega t}) = \mathrm{Re}\;\left[(J + J\omega\varepsilon\,\underline{E})\,e^{J\omega t})\right]$$

بنابراین

$$\nabla\times\underline{H} = \underline{J} + J\omega\varepsilon\,\underline{E} \qquad (۱۲ - ۲۸)$$

رابطه (۱۲ - ۲۷) و (۱۲ - ۲۸) فرمهای فازوری معادلات ماکسول هستند

۱۲-۴- معادلات موج در فضای آزاد

در فضای آزاد جریان هدایتی وجود ندارد و فقط جریان جابجایی خواهیم داشت بنابراین معادلات ماکسول بصورت زیر درمی‌آیند.

$$\nabla\times\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} \qquad (۱۲ - ۲۹)$$

$$\nabla\times\overline{H}=\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\qquad (۱۲ - ۳۰)$$

اگر از طرفین رابطه (۱۲ - ۲۹) کرل بگیریم خواهیم داشت

$$\nabla\times\nabla\times\overline{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\ (\nabla\times\overline{H})$$

$$\nabla\times\nabla\times\overline{E}=-\mu\frac{\partial^2\overline{D}}{\partial t^2}=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}$$

با استفاده از رابطه $\nabla\times\nabla\times\overline{E}=\nabla(\nabla.\overline{E})-\nabla^2\overline{E}$ و چون در فضای آزاد $\rho=0$ است بنابراین $\nabla.\overline{E}=0$ است داریم

$$\nabla\times\nabla\times\overline{E}=-\nabla^2\overline{E}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\nabla^2\overline{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2}=0\qquad (۱۲ - ۳۱)$$

معادله (۱۲ - ۳۱) معادله موج میباشد که با حل آن میدان الکتریکی در فضای آزاد بدست می‌آید که البته در فضای آزاد $\mu=\mu_0$ و $\varepsilon=\varepsilon_0$ میباشد و $\mu\varepsilon=\frac{1}{v^2}$ بوده که v سرعت موج در فضای آزاد است که برابر است با $3\times10^8\ \frac{m}{sin}$ فرم فازوری معادله (۱۲ - ۳۱) بصورت زیر خواهد بود

$$\nabla^2\underline{E}+k^2\underline{E}=0\qquad (۱۲ - ۳۲)$$

که $k=\frac{\omega}{v}$ میباشد (در حقیقت معادل فازوری مشتق ضریب $J\omega$ و معادل فازوری مشتق دوم $-\omega^2$ میباشد) در (۱۲ - ۳۲) ثابت k را ثابت فاز یا ثابت انتشار میگویند. پاسخ معادله (۱۲ - ۳۲) برای موج صفحه‌ای که تنها یک مولفه E_x و یا E_y دارد و در جهت Z حرکت میکند بصورت

$$\underline{E}=\underline{E}_m\,e^{-Jkz}\qquad (۱۲ - ۳۳)$$

میباشد در نتیجه پاسخ میدان که در رابطه (۱۲ - ۳۱) صدق میکند عبارتست از

$$E=E_m\cos(\omega t-kz)\qquad (۱۲ - ۳۴)$$

بروش مشابه میتوان معادله موج را برای میدان مغناطیسی H بصورت زیر نوشت

$$\nabla^2\overline{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial t^2}=0\qquad (۱۲ - ۳۵)$$

و یا بفرم فازوری

$$\nabla^2\underline{H}+k^2\underline{H}=0\qquad (۱۲ - ۳۶)$$

با توجه به اینکه $\omega=2\pi f$ است خواهیم داشت.

$$k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{v/f}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

۱۲-۵- شرایط مرزی برای میدان مغناطیسی

از آنچه درباره معادلات ماکسول گفته شد میتوان نتیجه گرفت که در هادی کامل چون میدان الکتریکی صفر است و میدان مغناطیسی نیز با میدان الکتریکی رابطه مستقیم دارد لذا میدان مغناطیسی هم صفر است در نتیجه میتوان نتیجه گرفت که برای میدانهای متغیر با زمان هر دو میدان الکتریکی و مغناطیسی در داخل هادی کامل صفر هستند بنابراین اگر محیط ۱ فضای آزاد و محیط ۲ هادی کامل باشد با توجه به آنچه گفته شد خواهیم داشت.

$$E_{t_1}=0\qquad (۱۲ - ۳۷ - \text{الف})$$

$$\hat{a}_n\times\overline{H}_1=\overline{J}_s\qquad (۱۲ - ۳۷ - \text{ب})$$

$$\hat{a}_n . \overline{D}_1 = \rho \qquad (۱۲ - ۳۷ - پ)$$

$$B_{n_1} = 0 \qquad (۱۲ - ۳۷ - ت)$$

برای حالتی که هر دو محیط عایق غیر کامل باشند روابط بالا بصورت زیر خواهد بود

$$E_{t_1} = E_{t_2} \qquad (۱۲ - ۳۸ - الف)$$

$$\hat{a}_n \times (\overline{H}_1 - \overline{H}_2) = \overline{J}_s \qquad (۱۲ - ۳۸ - ب)$$

$$\hat{a}_n . (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) = \rho \qquad (۱۲ - ۳۸ - پ)$$

$$B_{n_1} = B_{n_2} \qquad (۱۲ - ۳۸ - ت)$$

که همان حالت میدان ساکن میباشد.

مثال ۸: فضای $z>0$ ازعایق کاملی با $\mu_{r1}=2, \varepsilon_{r1}=8$ پرشده و فضای $z<0$ هادی کامل است اگر میدان الکتریکی در $z>0$ از رابطه $E_1 = 200\pi \sin 10^8 t \sin\beta z \hat{a}_x$ بدست آید مطلوبست

الف) میدان مغناطیسی در $z>0$

ب) مقدار β

ج) چگالی سطحی جریان روی مرز مشترک دو محیط

حل: از معادل اول ماکسول داریم.

$$\nabla \times \overline{E}_1 = -\frac{\partial \overline{B}_1}{\partial t} = -\mu_1 \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial Ex_1}{\partial z} \hat{a}_y = -\mu_0 \mu_{r1} \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial t}$$

$$200\pi\beta \sin 10^8 \pi t \cos \beta z \, \hat{a}_y = -2\mu_0 \frac{\partial H_1}{\partial t}$$

و یا

$$H_1 = -\frac{10\beta \cos \beta z}{4\pi} \cos 10^8 \pi t \, \hat{a}_y$$

حال از معادله دوم ماکسول استفاده میکنیم.

$$\nabla \times \overline{H}_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial \overline{E}_1}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial Hy_1}{\partial z} \hat{a}_x = 8\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (200\pi \sin 10^8 \pi t \sin \beta z \, \hat{a}_x)$$

$$\frac{10\beta^2 \cos\beta z}{4\pi} \cos 10^8 \pi t \, \hat{a}_x = 400\pi\varepsilon_0 \times 10^8 \pi \cos 10^8 \pi t \sin \beta z$$

$$\Rightarrow \frac{10\beta^2}{4\pi} = 1600\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 10^8 \pi$$

و یا

$$\beta = \frac{4\pi}{3}$$

بنابراین میدانهای H,E در $z>0$ عبارتند از

$$\overline{E}_1 = 200\pi \sin 10^8 \pi t \sin \frac{4\pi}{3} z \hat{a}_x$$

$$\overline{H}_1 = \frac{-10}{3} \cos 10^8 \pi t \cos \frac{4\pi}{3} z \hat{a}_y$$

$$J_s = \hat{a}_z \times -H_1 \Big|_{z=0} = -\frac{10}{3}\cos 10^8 \pi t\, \hat{a}_x$$

دقت کنید که β در حقیقت همان k میباشد که از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\beta = k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\beta = 10^8\pi \times \sqrt{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{8}{36\pi} \times 10^{-9}}$$

$$\beta = 10^8\pi \times \frac{8}{6} \times 10^{-8} = \frac{4\pi}{3}$$

مثال ۹: در یک فلز نسبت چگالی جریان جابجایی به هدایتی در فرکانس $100\,\mathrm{GHz}$ چقدر است اگر ضریب هدایت الکتریکی $\sigma = 5/7 \times 10^7$ باشد

حل:

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} \rightarrow \underline{J_d} = J\omega\varepsilon \underline{E}$$

$$J_c = \sigma E \qquad \underline{J_c} = \sigma \underline{E}$$

بنابراین

$$\left|\frac{\underline{J_d}}{\underline{J_c}}\right| = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{2\pi \times 10^{11} \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}{5/7 \times 10^7} = \frac{10^{-5}}{5/7 \times 18} = 9/7 \times 10^{-8}$$

مثال ۱۰: با فرض اینکه شدت میدان الکتریکی یک موج کروی در فضای آزاد برابر با

$$\overline{E} = \hat{a}_\theta \frac{E_0}{r}\sin\theta\cos(\omega t - kr)$$

باشد شدت میدان مغناطیسی $\overline{H}$ و مقدار k را بدست آورید.

حل:

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)\hat{a}_\phi = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\hat{a}_\phi \frac{1}{r} \times kE_0 \sin\theta \sin(\omega t - kr) = -\mu_0 \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \overline{H} = \frac{-kE_0}{r}\frac{1}{\omega\mu_0}\sin\theta\cos(\omega t - kr)\hat{a}_\phi$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\ H\phi)\hat{a}_\theta = -\varepsilon_0 \frac{E_0}{r}\sin\theta\,\omega\sin(\omega t - kr)\hat{a}_\theta$$

$$\frac{-k}{r}\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\sin\theta\sin(\omega t - kr)\hat{a}_\phi = -\frac{\varepsilon_0 E_0}{r}\omega\sin\theta\sin(\omega t - kr)\hat{a}_\phi$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{k^2}{\omega\mu_0} = \varepsilon_0\omega \rightarrow k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

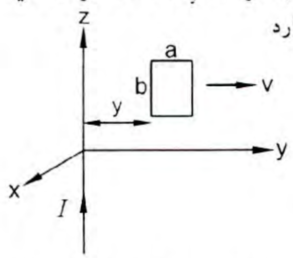
که چون $\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{1}{v}$ در نتیجه

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

بنابراین با معلوم بودن فرکانس ω میتوان k را بدست‌آورد زیرا $v = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ سرعت موج درفضای آزاد معلوم است.

سوالهای میدانهای متغیر با زمان و قانون فاراده

۱. مقدار emf در حلقه چهارگوش با ابعاد $a \times b$ واقع در صفحه $x=0$ که با سرعت $v = v_0\,\hat{a}_y$ حرکت میکند چقدر است فرض کنید سیمی با جریان I منطبق بر محور zها وجود دارد

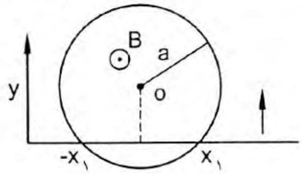


۱) $\frac{\mu_0 I v_0}{4\pi^2} \ln \frac{b}{a}$ ۲) $\frac{\mu_0 I v_0 ab}{2\pi y (y+a)}$

۳) $\frac{\mu_0 I v_0 ab}{y (y+a)}$ ۴) صفر

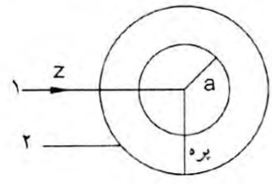
۲. یک سیم فلزی عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت B که در داخل یک دایره بشعاع $r=a$ وجود دارد با سرعت ثابت v مطابق شکل حرکت میکند اگر در لحظه $t=0$ سیم فلزی بر دایره مماس باشد مقدار emf القائی در سیم کدام است؟

۱) صفر ۲) $2vB\sqrt{2at - v^2}$



۳) $2vB\sqrt{2at - vt^2}$ ۴) $2vB\sqrt{2avt - v^2t^2}$

۳. یک چرخ فلزی با یک پره عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت مطابق شکل زیر میچرخد میدان در محدوده $r<a$ میباشد مقدار emf بین نقاط ۱ و ۲ اگر چرخ N دور در ثانیه بچرخد چقدر است؟



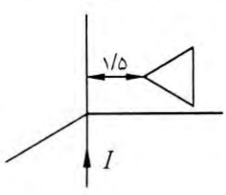
۱) $2\pi\, Na^2B$ ۲) $\pi\, Na^2B$

۳) $\frac{Na^2B}{2\pi}$ ۴) $\frac{NaB}{\pi}$

۴. میله‌ای به طول 2^m حول یک استوانه بشعاع $1/5^m$ با سرعت ۱۲۰۰ دور در دقیقه میچرخد اگر شار مغناطیسی شعاعی و بصورت $B_0\,\hat{a}_R$ باشد به ازای $B_0 = 0/1$ مقدار emf القائی در میله چقدر است؟

۱) 12π ۲) 6π ۳) 4π ۴) 2π

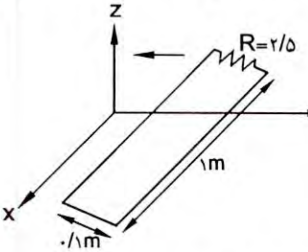
۵. سیمی حامل جریان $I = 2\sin 20\pi t$ منطبق بر محور zها قرار دارد در صفحه yz حلقه‌ای به شکل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ متر مطابق شکل قرار دارد اگر مقاومت واحد طول 2^{Ω} حلقه باشد حداکثر جریان القائی در حلقه کدام است؟



۱) $5\mu_0$ ۲) $3\mu_0$

۳) $1/5\mu_0$ ۴) $2\mu_0$

۶. حلقه نشان داده شده با سرعت $250\ m/s$ بسمت مبدا حرکت می‌کند اگر $B = 0/8\ \hat{a}_z$ باشد مقدار جریان القائی در حلقه کدام است؟



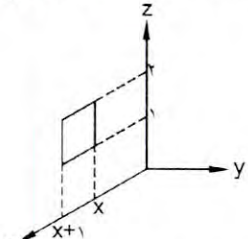
۱) 2^A ۲) 1^A

۳) 3^A ۴) صفر

۷. در مسئله قبل اگر $B = 0/8 e^{-0/5y}\ \hat{a}_z$ باشد جریان القائی در حلقه هنگامی که مرکز حلقه بـر مـبدا مختصات منطبق شود کدام است؟

۱) 5^A ۲) 4^A ۳) $2/5^A$ ۴) $1/5^A$

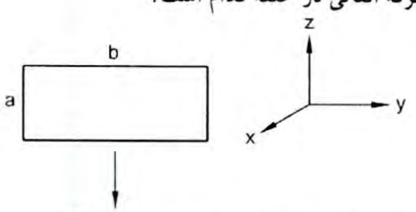
۸. یک میدان مغناطیسی در صفحه xz با رابطه $B = 2\cos\pi(x - \pi t)\ \hat{a}_y$ داده شده است یک حلقه مربعی واقع در صفحه xz مطابق شکل قرار دارد نیروی محرکه القائی در حلقه کدام است؟



۱) $4\cos\pi(x - \pi t)$ ۲) $2\cos\pi(x - \pi t)$

۳) $4\sin\pi(x - \pi t)$ ۴) $2\sin\pi(x - \pi t)$

۹. یک حلقه مستطیل شکل به ابعاد $a \times b$ مطابق شکل با سرعت v_0 بسمت پایین سـقوط مـیکند اگـر مـیدان مغناطیس $B = B_0 z \hat{a}_y$ در فضا وجود داشته باشد نیروی محرکه القائی در حلقه کدام است؟



۱) $B_0 ab^2 V_0$ ۲) $B_0 a(a+b) v_0$

۳) $B_0 abV_0$ ۴) $\frac{1}{2} B_0 ab\, v_0$

۱۰. یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع 2^m حامل جریان $i = 2\cos 1000t$ می‌باشد یک حلقه دایروی به شعاع 1^{cm} بطور هم مرکز با این شش ضلعی قرار دارد نیروی محرکه القائی در حلقه دایروی چقدر است؟

۱) $0/35\mu_0$ ۲) $0/17\mu_0$ ۳) $0/25\mu_0$ ۴) $0/47\mu_0$

۱۱. یک کره حامل جریان سطحی به چگالی $J_s = 40\ \hat{a}_\phi$ و به شعاع 1^m می‌باشد بطور هم مرکز با این کره یک مربع به ضلع 2^{cm} قرار دارد بطوریکه عمود بر سطح مربع با محور z هم جهت است این مربع با چه سرعتی حول خط گذرانیده شده از وسط دو ضلع مقابلش می‌چرخد تا حداکثر ولتاژ القائی در آن $0/1^{\mu v}$ گردد؟

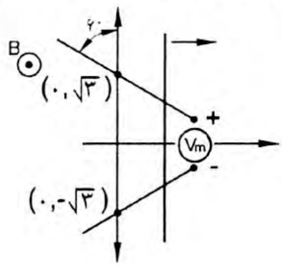
۱) ۵۴rpm ۲) ۴۸rpm ۳) ۳۸۰rpm ۴) ۲۷۴rpm

۱۲. یک حلقه دایره‌ای به شعاع 8^{cm} در صفحه $z=0$ قرار دارد و چگالی شار مغناطیسی ثابت $B = 40\ \hat{a}_z$ در

فضا موجود است اگر شعاع این حلقه با سرعت $۲\frac{cm}{sec}$ زیاد شود ولتاژ القایی در لحظه $t=۲^{sec}$ چقدر است؟

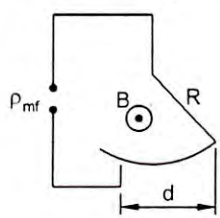
۱) $۰/۴^{V}$ ۲) $۰/۲^{V}$ ۳) $۰/۳^{V}$ ۴) $۰/۶^{V}$

۱۳. در میدان مغناطیسی ثابت $B = ۲\,\hat{a}_z$ میله‌ای مطابق شکل با سرعت $۵\frac{m}{sec}$ از محور y به سمت راست حرکت می‌کند در لحظه‌ای که میله به فاصله $۱/۵^{m}$ از محور yها قرار دارد ولتمتر چه ولتاژی را قرائت می‌کند؟



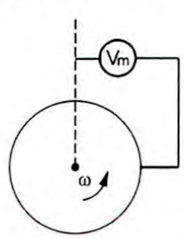
۱) ۱۲/۴
۲) ۱۷/۳
۳) ۱۳/۸
۴) ۱۵/۲

۱۴. یک سیم نازک پاندول بطول $R=۴^{m}$ با اتصال لغزان در یک طرف بصورت شکل زیر مفروض است چگالی شار مغناطیسی ثابت $B=۲۵۰^{mt}$ عمود بر صفحه سیم وجود دارد پریودیک نوسان کامل پاندول از رابطه $T = ۲\pi\sqrt{\frac{R}{۹/۸}}$ بدست می‌آید ماکزیمم انحراف افقی $d=۱۰^{cm}$ می‌باشد حداکثر ولتاژ القائی چقدر است؟



۱) $۷۸/۲۶^{mv}$
۲) $۵۴/۳۶^{mv}$
۳) $۹۴/۱۸^{mv}$
۴) $۳۷/۲۴^{mv}$

۱۵. یک دیسک با سرعت ۲۴۰۰ دور در دقیقه حول محورش در میدان یکنواخت $۰/۲\frac{wb}{m^۲}$ می‌چرخد قرائت ولتمتر چقدر است شعاع دیسک را ۱۰^{cm} فرض کنید



۱) $۰/۴۷^{V}$
۲) $۰/۳۶^{V}$
۳) $۰/۱۵^{V}$
۴) $۰/۲۵^{V}$

پاسخ سوالهای میدانهای متغیر با زمان و قانون فاراده

۱. گزینه (۲) صحیح است.

$$\xi=\oint(\overline{v}\times\overline{B})\cdot\overline{d\ell}=\oint\left(v_{۰}\hat{a}_y\times-\frac{\mu_{۰}I}{۲\pi y}\hat{a}_x\right)\cdot\overline{d\ell}$$

$$=\int\frac{v_{۰}\mu_{۰}I}{۲\pi y}\hat{a}_z\cdot\overline{d\ell}=\int_{۰}^{b}\frac{\mu_{۰}v_{۰}I}{۲\pi y}dz+\int_{b}^{۰}\frac{\mu_{۰}v_{۰}I}{۲\pi(y+a)}dz$$

$$\xi=\frac{\mu_{۰}IV_{۰}b}{۲\pi}\left(\frac{۱}{y}-\frac{۱}{y+a}\right)=\frac{\mu_{۰}Iv_{۰}ab}{۲\pi y(y+a)}$$

۲. گزینه ۴)

$$emf=\oint(\overline{v}\times\overline{B})\cdot\overline{d\ell}=\int_{-x_۱}^{x_۱}(v\hat{a}_y\times B\hat{a}_z)\cdot dx\hat{a}_x$$

$$=۲vBx_۱=۲vB\sqrt{a^۲-(a-vt)^۲}=۲vB\sqrt{۲avt-v^۲t^۲}$$

۳. گزینه ۲)

$$emf=\int(\overline{v}\times\overline{B})\cdot\overline{d\ell}=\int_{۰}^{a}(۲\pi Nr\hat{a}_\phi\times B\hat{a}_z)\cdot dr\hat{a}_r$$

$$emf=\int^{a}۲\pi NB\,r\,dr=\pi NBa^۲$$

۴. گزینه ۱)

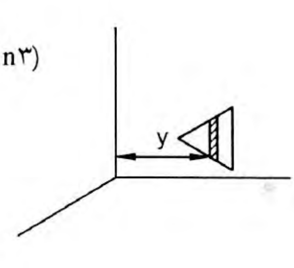
$$emf=\int^{\ell}(\overline{v}\times\overline{B})\cdot\overline{d\ell}=\int(a\omega\hat{a}_\phi\times B\cdot\hat{a}_r)\cdot dz\hat{a}_z$$

$$=\int_{۰}^{۲}\left(۱/۵\times۲\pi\times\frac{۱۲۰۰}{۶۰}\times۰/۱\right)dz=۱۲\pi$$

۵. گزینه ۳) ابتدا شار مغناطیسی گذرانیده شده از حلقه مثلث را بدست می‌آوریم

$$\phi=\int\overline{B}\cdot\overline{ds}=\int\frac{\mu_{۰}I}{۲\pi y}z\,dy=\int_{۱/۵}^{۴/۵}\frac{\mu_{۰}I}{۲\pi y}\frac{۲}{\sqrt{۳}}(y-۱/۵)dy$$

$$\phi=\frac{\mu_{۰}I}{\sqrt{۳}\pi}(۳-۱/۵\ln۳)=\frac{۲\mu_{۰}\sin۲۰\pi t}{\sqrt{۳}\pi}(۳-۱/۵\ln۳)$$



$$\xi=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{۴۰\mu_{۰}}{\sqrt{۳}}(۳-۱/۵\ln۳)\cos۲۰\pi t$$

$$i=-\frac{\xi}{R}=\frac{۴۰\mu_{۰}}{\sqrt{۳}}\frac{(۳-۱/۵\ln۳)}{۱۲\sqrt{۳}}\cos۱۲۰\pi t$$

$$i=\frac{۱۰\mu_{۰}}{۹}(۳-۱/۵\ln۳)\cos۱۲۰\pi t=۱/۵\mu_{۰}\cos۱۲۰\pi t$$

۶. گزینه ۴) چون $\bar{v}\times\bar{B} = vB\hat{a}_x$ است لذا روی اضلاع موازی محور x ولتاژ القا می‌شود.

$$V_1=\int(\bar{v}\times\bar{B}).d\ell=vBL=250\times0/8\times1=200\,v$$

$$V_2=\int(\bar{v}\times\bar{B}).d\ell=vBL=250\times0/8\times1=200\,v$$

که V_1, V_2 ولتاژهای القائی روی اضلاع موازی محور x است.

$$I=\frac{V_1-V_2}{R}=0$$

لذا از روی شکل هم معلوم است چون شار گذرانیده شده از حلقه همواره ثابت است پس $\frac{d\phi}{dt}=0$ است لذا جریان القائی نداریم.

۷. گزینه ۲) در اینحالت V_1, V_2 به صورت زیر محاسبه میشود:

$$V_1=VLB_1=250\times1\times0/8\,e^{-0/5\times/05}=205$$

$$V_2=VLB_2=250\times1\times0/8\,e^{-0/5\times/05}=195$$

$$I=\frac{V_1-V_2}{R}=\frac{205-195}{2/5}=4^A$$

۸. گزینه ۱)

$$\phi=\int_x^{x+1}2\cos\pi(x-\pi t)dx=\frac{2}{\pi}\sin(x-\pi t)]_x^{x+1}$$

$$\phi=\frac{2}{\pi}\left[\sin\pi(x+1-\pi t)-\sin\pi(x-\pi t)\right]=\frac{-4}{\pi}\left[\cos\pi(x-\pi t)\right]$$

$$\xi=-\frac{d\phi}{dt}=4\cos\pi(x-\pi t)$$

۹. گزینه ۳)

$$\phi=\int\bar{B}.\overline{ds}=\int_z^{z+a}\int_0^b b.zd\,zdy=B_0\,b\frac{1}{2}(a^2+2az)$$

$$\phi=\frac{1}{2}B_0\,ab(2z+a)$$

$$\xi=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{d\phi}{dz}\frac{dz}{dt}=-B_0ab\times V=B_0abv$$

۱۰. ۲) می‌دانیم میدان در مرکز یک N ضلعی منتظم برابر است با $H=\frac{NI}{2\pi a}\mathrm{tg}\frac{\pi}{N}$ بنابراین برای ۶ ضلعی منتظم داریم

$$H=\frac{6I}{2\pi\times2}\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{6I}{4\pi}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{I\sqrt{3}}{2\pi}$$

چون دایره کوچک است میتوان میدان را در سر تا سر دایره همان میدان در مرکز آن فرض کرد پس

$$\phi = BS = \mu_\circ H\pi a^۲ = \frac{i\sqrt{۳}}{۲\pi}\mu_\circ \pi \times ۱۰^{-۴}$$

$$\phi = \sqrt{۳}\mu_\circ \times ۱۰^{-۴}\cos ۱۰۰۰t \rightarrow \xi = -\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{۳}\mu_\circ \times ۱۰^{-۱} = ۰/۱۷\mu_\circ$$

۱۱. گزینه ۳) میدان در مرکز کره به چگالی سطحی $J_s\hat{a}_\phi$ را قبلاً در فصول قبل بدست می‌آوریم که عبارت بود از

$$H = \frac{\pi}{۴}J_{s_\circ}\hat{a}_Z = \frac{\pi}{۴}\times ۴۰\hat{a}_Z = ۱۰\pi\hat{a}_Z$$

$$\phi = \overline{B}.\overline{S} = \mu_\circ HS\cos\omega t = ۱۰\pi\mu_\circ \times ۴\times ۱۰^{-۴}\cos\omega t = ۴۰\pi\mu_\circ \times ۱۰^{-۴}\cos\omega t$$

$$\xi = -\frac{d\phi}{dt} = ۴۰\pi\omega\mu_\circ \times ۱۰^{-۴}\sin\omega t \rightarrow \varepsilon_{max} = ۴۰\pi\omega\mu_\circ \times ۱۰^{-۴} = ۰/۱^{\mu v} = ۱۰^{-۷}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{۱۰^۴}{۱۶۰\pi^۲} = ۶/۳۳ \rightarrow \omega = ۳۸۰\,rpm$$

۱۲. گزینه ۴)

$$\phi = \overline{B}.\overline{S} = B\pi r^۲ = ۴۰\pi r^۲$$

$$\xi = -\frac{d\phi}{dt} = -۴۰\pi\times ۲r\frac{dr}{dt} \Rightarrow |\varepsilon| = ۸۰\pi\times(۸+۲\times۲)\times ۲\times ۱۰^{-۴}$$

$$|\xi| = ۱۹۲۰\pi\times ۱۰^{-۴} = ۰/۶^{v}$$

۱۳. گزینه ۲) با توجه به شکل داریم

$$\phi(t) = ۵t\,B(۲\sqrt{۳} - ۵\frac{\sqrt{۳}}{۳}t)$$

در حقیقت ضریب B همان مساحت ذوزنقه تشکیل شده توسط میله و محور y می‌باشد. که t مدت زمانی است که میله $۱/۵^m$ طی می‌کند یعنی $t = \frac{۱/۵}{۵} = ۰/۳$ بنابراین

$$\xi = -\frac{d\phi}{dt} = ۵B\left[-۲\sqrt{۳} + ۱۰\frac{\sqrt{۳}}{۳}t\right] = ۵\times ۲\left[-۲\sqrt{۳} + \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}\times ۰/۳\right] = -۱۷/۳$$

۱۴. گزینه ۱)

$$emf = \int_\circ^R \left[\overline{v}\times\overline{B}\right].\overline{d\ell} = \int_\circ^R \frac{r}{R}d\omega\,\hat{a}_\phi \times B\,\hat{a}_Z.dr\,\hat{a}_r$$

$$emf = \frac{\omega Bd}{R}\int_\circ^R rdr = \frac{۱}{۲}\omega BR\,d = \frac{\pi}{T}BR\,d = \frac{\pi}{۲\pi\sqrt{\frac{۴}{۹/۸}}}\,۰/۲۵\times ۴\times ۰/۱$$

$$emf = ۷۸/۲۶^{mv}$$

۱۵. گزینه ۴)

$$\omega = ۲\pi f = ۲\pi\,۳۹\frac{۲۴۰۰}{۶۰} = ۸۰\pi$$

$$emf = \oint(\overline{v}\times\overline{B}).\overline{d\ell}$$

$$emf = \int_\circ^{۰/۱}\left[r\omega\,\hat{a}_\phi \times ۰/۲\hat{a}_Z\right].dr\,\hat{a}_R = \int_\circ^{۰/۱} ۱۶\pi r\,dr = ۸\pi(۰/۱)^۲ = ۰/۲۵^{v}$$