فصل نهم

نیروی مغناطیسی و گشتاور

همانطوریکه در بحث میدان الکتریکی بیان کردیم از طرف میدان الکتریکی بر بار ساکن نیرویی وارد میشود که متناسب با میدان الکتریکی در محل بار ساکن و مقدار بار ساکن گفته شده میباشد بنابراین میدان الکتریکی، میدان نیرو میباشد. بعبارت دیگر از طرف بار ساکن (مولد میدان الکتریکی) بر بار ساکن دیگر نیرو وارد میشود. در میدان مغناطیسی نیز بر بار متحرک نیرو وارد میشود که متناسب است با اندازه میدان مغناطیسی در محل بار متحرک و سرعت بار متحرک میباشد از آنجائیکه میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک (جریان) میباشد بنابراین میتوان گفت که از طرف بار متحرک بر بار متحرک دیگر نیرو وارد میباشد بنابراین میدان مغناطیسی نیز میدان نیرو است. فرض کنید بار q با سرعت v در میدان مغناطیسی $\overline{H}$ حرکت کند در اینصورت از طرف میدان $\overline{H}$ بر این بار نیروی

$$\overline{F}_m = q\,\overline{v}\times\overline{B} \qquad (۱-۹)$$

وارد میشود که $\overline{B}=\mu_{۰}\overline{H}$ برخلاف نیروی الکتریکی که همجهت با میدان الکتریکی است و باداشتن آن میتوان میدان الکتریکی را بدست آورید نیروی مغناطیسی $\overline{F}_m$ بر میدان مغناطیسی عمود است و با داشتن آن نمیتوان میدان مغناطیسی را بدست آورد. همانطوریکه از رابطه (۹-۱) پیداست نیروی $\overline{F}_m$ بر سرعت $\overline{v}$ عمود است بنابراین کار انجام شده توسط نیروی مغناطیسی صفر است در نتیجه میدان مغناطیسی باعث افزایش انرژی ذره نمیشود یعنی سرعت ذره ثابت میماند. اگر بار متحرک q در هر دو میدان الکتریکی و مغناطیسی قرار گیرد بر آن نیروی

$$\overline{F} = q\left[\overline{v}\times\overline{B}+\overline{E}\right] \qquad (۲-۹)$$

وارد میشود رابطه (۹-۲) به رابطه لورنتز معروف است و برای محاسبه اوربیتهای ذرات باردار (الکترون) در مگنترون و مسیر پروتون در سیکلوترون بکار میرود.

مثال ۱: بار $q=۰/۲^{C}$ با سرعت $\overline{v}=۴\hat{a}_x-۲\hat{a}_y+۳\hat{a}_z$ در

الف) میدان الکتریکی $\overline{E}=۲۰\left(\hat{a}_x+\hat{a}_z\right)$

ب) میدان مغناطیسی $B=۳\hat{a}_x-۵\hat{a}_y-۶\hat{a}_z$

ج) در هر دو میدان فوق حرکت میکند در هر حال نیروی وارد بر بار q را بدست آورید؟

حل:

الف) $\overline{F}_e=q\overline{E}=۰/۲\times۲۰\left(\hat{a}_x+\hat{a}_z\right)=۴\hat{a}_x+۴\hat{a}_z \rightarrow \left|\overline{F}_e\right|=۴\sqrt{۲}=۵/۶^{N}$

ب) $\overline{F}_m=\overline{q}\,\overline{v}\times\overline{B}=۰/۲\left[۴\hat{a}_x-۲\hat{a}_y+۳\hat{a}_z\right]\times\left[۳\hat{a}_x-۵\hat{a}_y-۶\hat{a}_z\right]=۵/۴\hat{a}_x+۶/۶\hat{a}_y-۲/۸\hat{a}_z$

$\rightarrow \left|\overline{F}_m\right|=۸/۹۸^{N}$

ج) $\overline{F}=q\left[\overline{E}+\overline{v}\times\overline{B}\right]=\overline{F}_e+\overline{F}_m=۹/۴\hat{a}_x+۶/۶\hat{a}_y+۱/۲\hat{a}_z \rightarrow \left|\overline{F}\right|=۱۱/۵۵^{N}$

۹-۱- نیروی وارد بر سیم حامل جریان

فرض کنید در سیم جریان I برقرار است اگر بار dq در مدت dt مسافت $d\ell$ را در سیم طی کند در اینصورت بر بار dq مطابق رابطه (۹-۱) نیروی

$$\overline{dF} = dq\,\bar{v} \times \overline{B}$$

وارد می‌شود اگر از تعریف $I = \dfrac{dq}{dt}$ استفاده خواهیم داشت

$$\overline{dF} = I\,dt\,\bar{v} \times \overline{B}$$

که $\overline{d\ell} = \bar{v}\,dt$ بنابراین

$$\overline{dF} = I\,\overline{d\ell} \times \overline{B}$$

که نشاندهندهٔ نیروی وارد بر عنصر جریان $\overline{d\ell}$ می‌باشد بنابراین نیروی وارد بر سیمی بطول l برابر است با:

$$\overline{F} = \int_{\ell} I\,\overline{d\ell} \times \overline{B} \qquad (۹-۳)$$

اگر میدان $\overline{B}$ ثابت باشد در اینصورت بر سیمی به طول L حامل جریان I نیروی

$$\overline{F} = I\overline{L} \times \overline{B} \qquad (۹-۴)$$

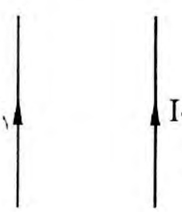
وارد می‌شود که بردار $\overline{L}$ همجهت با جریان I می‌باشد.

اگر جریان I از یک سیم به شکل حلقه (مسیر بسته) عبور کند در اینصورت نیروی وارد بر آن در میدان مغناطیسی ثابت عبارتست از:

$$\overline{F}_m = \oint_C I\,\overline{d\ell} \times \overline{B} = -I\overline{B} \times \oint_C \overline{d\ell} = ۰$$

بنابراین نیروی وارد از طرف میدان ثابت B بر حلقه بسته جریان صفر است. لازم به ذکر است که میدان ساکن به میدانی اطلاق می‌شود که با زمان ثابت باشد و میدان ثابت به میدانی گفته می‌شود که با مکان ثابت باشد.

مثال ۲: دو سیم حامل جریان $I_۱$ و $I_۲$ به موازات هم و به فاصله d از هم قرار دارند نیروی وارد از طرف سیم اول بر واحد طول سیم دوم را بدست آورید؟



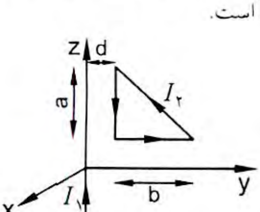
حل: میدان ناشی از سیم اول در محل سیم دوم عبارتست از $\overline{H} = \dfrac{I_۱}{۲\pi d}\hat{a}_\phi$ *که در سر تا سر سیم ۲ ثابت است*

بنابراین داریم:

$$\overline{F}_{۲۱} = I_۲\overline{L} \times \mu_۰\overline{H}_۱ = I_۲\hat{a}_z \times \mu_۰\frac{I_۱}{۲\pi d}\hat{a}_\phi = \frac{-\mu_۰ I_۱ I_۲}{۲\pi d}\hat{a}_R$$

که نشاندهندهٔ این مسئله است که نیروی جاذبه است.

مثال ۳: نیروی وارد از طرف سیمی حامل جریان $I_۱$ و منطبق بر محور zها بر یک سیم مثلثی شکل که مطابق شکل در صفحه yz قرار دارد را بدست آورید فرض کنید که سیم مثلث شکل حامل جریان $I_۲$ است.



حل:

$$\overline{F} = \oint I_۲\,\overline{d\ell}_۲ \times \overline{B}_۱$$

که $\overline{B}_۱ = \dfrac{\mu_۰ I_۱}{۲\pi R}\hat{a}_\phi$ *ناشی از سیم منطبق بر محور zها می‌باشد با توجه به اینکه مثلث در صفحه zy است لذا* $\hat{a}_\phi = -\hat{a}_x$ *بنابراین:*

$$\overline{F} = \int_{d}^{d+b} I_2\, dy\, \hat{a}_y \times \frac{-\mu_\circ I_1}{2\pi y}\hat{a}_x + \int_{d+b}^{d} I_2\, \left(dy\, \hat{a}_y + dz\, \hat{a}_z\right) \times \frac{-\mu_\circ I_1}{2\pi y}\hat{a}_x$$

$$+ \int_{z+a}^{z} I_2\, dz\, \hat{a}_z \times \frac{-\mu_\circ I_1}{2\pi d}\hat{a}_x = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\hat{a}_z \ln\frac{d+b}{d} + \int_{d+b}^{d} I_2\, (dy\, \hat{a}_y - dy\frac{a}{b}\hat{a}_z) \times \frac{-\mu_\circ I_1}{2\pi y}\hat{a}_x$$

$$+ \frac{\mu_\circ I_1 I_2 a}{2\pi d}(-\hat{a}_y) \Rightarrow \overline{F} = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}\hat{a}_z - \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}\hat{a}_z - \frac{\mu_\circ I_1 I_2 a}{2\pi b}\ln\frac{d+b}{d}\hat{a}_y$$

$$+ \frac{\mu_\circ I_1 I_2 a}{2\pi d}\hat{a}_y \Rightarrow \overline{F} = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\left[-\frac{a}{b}\ln\frac{d+b}{d} + \frac{a}{d}\right]\hat{a}_y$$

۹-۲- نیروی وارد از طرف میدان مغناطیسی بر صفحه حامل جریان

فرض کنید صفحه‌ای دارای جریان سطحی با چگالی $\overline{J}_s\,(\frac{A}{m})$ می‌باشد اگر نواری بضخامت dx و موازی با چگالی جریان $\overline{J}_s$ در نظر بگیریم جریان آن $dI = J_s\ ds$ می‌باشد در اینصورت نیروی وارد بر طول $\overline{d\ell}$ از این نوار از طرف میدان مغناطیسی عبارتست از:

$$\overline{dF} = dI\, \overline{d\ell} \times \overline{B}$$

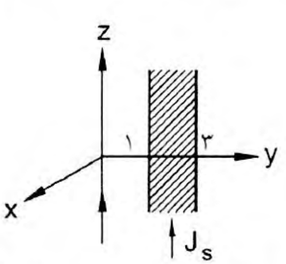
و یا

$$\overline{dF} = J_s\, dx\, \overline{d\ell} \times \overline{B}$$

که با جایگزینی $ds = dx\, d\ell$ خواهیم داشت

$$\overline{F} = \int_s \overline{J}_s \times \overline{B}\, ds \qquad (۴-۹)$$

مثال ۴: جریان I از سیمی منطبق بر محور zها می‌گذرد در صفحه zy صفحه‌ای مطابق شکل حامل جریان $J_s = J_{s_\circ}\hat{a}_z$ می‌باشد نیروی وارد بر یک متر از صفحه جریان چقدر است؟



حل:

$$\overline{F} = \int \overline{J}_s \times \overline{B}\, ds = \int_{z=\circ}^{1}\int_{y=1}^{3} J_{s_\circ}\hat{a}_z \times \frac{-\mu_\circ I}{2\pi y}\hat{a}_x\, dy\, dz$$

$$\overline{F} = \frac{-\mu_\circ I J_{s_\circ}}{2\pi}\ln 3\,\hat{a}_y$$

مثال ۵: دو صفحه بسیار بزرگ موازی در $z=\circ$ و $z=d$ قرار دارند و به ترتیب حامل جریانی سطحی $J_{s_\circ}\hat{a}_y$ و $-J_{s_\circ}\hat{a}_y$ می‌باشند نیروی وارد بر یک متر مربع از صفحه پائینی از طرف صفحه بالایی چقدر است؟

حل: میدان ناشی از صفحه بالایی در محل صفحه پائینی عبارتست از:

$$B_2 = \mu_\circ \frac{1}{2}\overline{J}_s \times -\hat{a}_z = \mu_2\frac{1}{2}(-J_{s_\circ}\hat{a}_y) \times -\hat{a}_z = \frac{\mu_\circ}{2}J_{s_\circ}\hat{a}_x$$

$$\overline{F}_{12} = \int_s \overline{J}_{s_1} \times \overline{B}_2\, ds = J_{s_\circ}\hat{a}_y \times \frac{\mu_\circ}{2}J_{s_\circ}\hat{a}_x = \frac{-\mu_\circ}{2}J_{s_\circ}^2\hat{a}_z$$

که نشاندهندهٔ این مطلب است که نیرو دافعه است

۹-۳- نیروی وارد از طرف میدان مغناطیسی بر توزیع حجمی جریان

اگر سیمی به سطح مقطع S حامل جریان به چگالی $J\left[\frac{A}{m^2}\right]$ باشد در اینصورت اگر سیمی با سطح مقطع ds از این سیم انتخاب کنیم جریان موجود در این سیم $dI=J\ ds$ می‌باشد. نیروی وارد بر طول $d\ell$ از این سیم عبارتست از:

$$\overline{dF} = dI\,\overline{d\ell}\times\overline{B}$$

و یا

$$\overline{dF} = \overline{J}\,ds\,\overline{d\ell}\times\overline{B}$$

که با توجه به اینکه $dv = ds\,d\ell$ نیروی وارد بر سیم به سطح مقطع S عبارتست از:

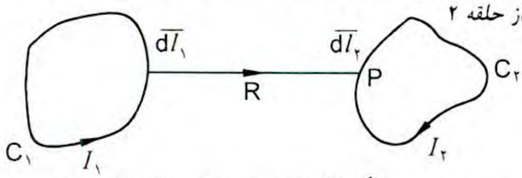
$$\overline{F} = \int_v \overline{J}\times\overline{B}\,dv \qquad (۵-۹)$$

مثال ۶: یک پوسته استوانه‌ای بشعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای جریانی به چگالی $J = J_\circ \frac{R}{a}\hat{a}_z$ می‌باشد در محور این پوسته سیمی حامل جریان I قرار دارد نیروی وارد بر یک متر از پوسته استوانه‌ای را بدست آورید؟

حل:

$$\overline{F} = \int \overline{J}\times\overline{B}\,dv = \int_\circ^{2\pi}\int_\circ^1\int_a^b J_\circ\frac{R}{a}\hat{a}_z\times\frac{\mu_\circ I}{2\pi R}\hat{a}_\phi\,R\,dR\,dz\,d\phi = -\frac{\mu_\circ I J_\circ}{2a}\left(b^2-a^2\right)\hat{a}_R$$

حال دو حلقه جریان I_1 و I_2 را مطابق شکل در نظر بگیرید در اینصورت اگر بخواهیم نیروی وارد از طرف حلقه ۱ را بر حلقه ۲ بدست آوریم ابتدا میدان ناشی از حلقه ۱ را در نقطه P از حلقه ۲ بدست می‌آوریم که عبارتست از:



شکل (۹-۱): نیروی بین دو حلقه حامل جریان

$$\overline{H}_{21} = \oint_{c_1}\frac{I_1\,\overline{d\ell_1}\times\hat{a}_R}{4\pi R^2}$$

نیروی وارد بر عنصر $\overline{d\ell_2}$ از حلقه ۲ از طرف حلقه ۱ عبارتست از:

$$d\overline{F}_{21} = I_2\overline{d\ell_2}\times\overline{B}_{21} = \mu_\circ I_2\overline{d\ell_2}\times\overline{H}_{21}$$

بنابراین

$$\overline{F}_{21} = \oint_{C_2}\mu_\circ I_2\overline{d\ell_2}\times\oint_{C_1}\frac{I_1\overline{d\ell_1}\times\hat{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$\overline{F}_{21} = \oint_{C_2}\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{4}\oint_{C_1}\frac{\overline{d\ell_2}\times\left(\overline{d\ell_1}\times\hat{a}_R\right)}{R^2}$$

حال از رابطه

$$\overline{d\ell_2}\times\left(\overline{d\ell_1}\times\hat{a}_R\right) = \overline{d\ell_1}\left(\overline{d\ell_2}.\hat{a}_R\right) - \hat{a}_R\left(\overline{d\ell_2}.\overline{d\ell_1}\right)$$

خواهیم داشت

$$\overline{F}_{21} = \frac{\mu_\circ I_1 I_2}{4\pi}\left\{\oint_{C_1}d\ell_1\oint_{C_2}\frac{\overline{d\ell_2}.\hat{a}_R}{R^2} - \oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\hat{a}_R\left(d\ell_2.d\ell_1\right)}{R^2}\right\}$$

با توجه به اینکه $\overline{d\ell_2}.\hat{a}_R = dR$ *بنابراین* $\oint_{C_2}\frac{\overline{d\ell_2}.\hat{a}_R}{R^2} = \oint_{C_2}\frac{dR}{R^2} = \circ$ **در نتیجه**

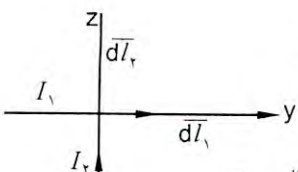
$$\overline{F}_{21} = -\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\hat{a}_R\left(\overline{d\ell_2}.\overline{d\ell_1}\right)}{R^2} \qquad (۵-۹)$$

حال اگر بخواهیم F_{12} را بدست آوریم کافیست جای اندیس‌ها ۱ و ۲ را با هم عوض کنیم در اینصورت جهت بردار یکه $\hat{a}_R$ را باید عوض کنیم بنابراین $F_{12}=-F_{21}$

که همان اصل عمل و عکس العمل میباشد.

اگر جهت جریان در حلقه‌ها یکی باشد در اینصورت $d\ell_1 . d\ell_2 > 0$ و نیرو جاذبه است اگر جهت جریانها در حلقه‌ها عکس هم باشند در اینصورت $d\ell_1 . d\ell_2 < 0$ و نیرو در جهت $\hat{a}_R$ و دافعه است.

مثال ۷: دو سیم در فضای آزاد روی محور y و z قرار گرفته‌اند سیم اول حامل جریان 5^A در جهت $\hat{a}_y$ و سیم دوم حامل جریان 5^A در جهت $\hat{a}_z$ است نیروی dF بر عنصر دیفرانسیلی بطول 1^{mm} در a) (۱و۰و۰) بوسیله یک عنصر 1^{mm} در (۰و۱و۰) b) بر عنصر 1^{mm} واقع در (۰و۱و۰) بوسیله عنصر واقع در (۱و۰و۰) چقدر است؟



حل: $d\overline{F}_{21}=I_2\,\overline{d\ell}_2\times\overline{B}_1$ (a

که dF_{21} نیروی وارد بر عنصر 1^{mm} واقع روی محور z از طرف سیم واقع روی محور y است

$$R=-\hat{a}_y+\hat{a}_z$$

$$\overline{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{c_1}\frac{I_1\,\overline{d\ell}_1\times\hat{a}_R}{R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{5dy\,\hat{a}_y\times(-\hat{a}_y+\hat{a}_z)}{(\sqrt{2})^3}$$

$$\overline{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\times\frac{5}{2\sqrt{2}}\hat{a}_x\,(10^{-3})=\frac{5}{2\sqrt{2}}\,10^{-10}\,\hat{a}_x$$

$$d\overline{F}_{21}=I_2\,\overline{d\ell}_2\times\overline{B}_1=5\times10^{-3}\times\frac{5}{2\sqrt{2}}\,10^{-10}\,\hat{a}_x=0/884\,\hat{a}_y\,^{(pN)}$$

$$d\overline{F}_{12}=I_1\,\overline{d\ell}_1\times\overline{B}_2 \qquad \text{(b}$$

$$\overline{B}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I_2\,d\ell_2\times(\hat{a}_y-\hat{a}_z)}{(\sqrt{2})^3}=\frac{-\mu_0 I_2}{8\pi\sqrt{2}}\times10^{-3}\,\hat{a}_x$$

$$d\overline{F}_{12}=5\times10^{-3}\,\hat{a}_y\times\frac{-\mu_0\times5}{8\pi\sqrt{2}}\times10^{-3}\,\hat{a}_x=0/884\,\hat{a}_z\,^{(pN)}$$

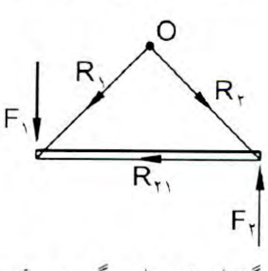
۹-۴-گشتاور وارد بر حلقه بسته از طرف میدان مغناطیسی

اگر برآیند نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد در اینصورت میتوان ثابت کرد که گشتاور وارد بر این جسم نسبت به تمام نقاط ثابت است.

فرض کنید بخواهیم گشتاور دو نیروی F_1 و F_2 را نسبت به نقطه O بدست آوریم در اینصورت خواهیم داشت

$$\overline{T}_O=\overline{R}_1\times\overline{F}_1+\overline{R}_2\times\overline{F}_2 \Rightarrow \overline{T}_O=(\overline{R}_1-\overline{R}_2)\times\overline{F}_1=\overline{R}_{21}\times\overline{F}_1$$

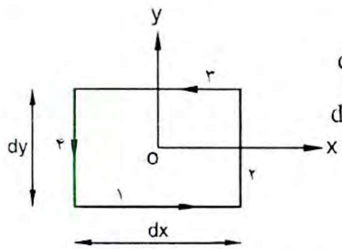
$$\overline{F}_1+\overline{F}_2=0$$



شکل (۹-۲): گشتاور نیروهای F_1,F_2 حول نقطه P

چون $\overline{R}_{21}$ بردار ثابتی است و بستگی به محل نقطه O ندارد نتیجه می‌گیریم که گشتاور نیروها بستگی به موقعیت نقطه O ندارد و اگر برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد گشتاور نیروها ثابت است.

حال حلقه کوچکی مطابق شکل به ابعاد dx و dy را در میدان مغناطیسی در نظر بگیرید چون حلقه کوچک است بنابراین میدان را میتوان روی آن ثابت فرض کرد و با توجه به اینکه نیروی وارد بر حلقه بسته ناشی از میدان ثابت صفر است میتوان گشتاور رانسبت به هر نقطه‌ای بدست آورد و این گشتاور همواره ثابت است حال گشتاور را نسبت به نقطه O (مرکز حلقه) بدست می‌آوریم



$$dF_1 = I\,dx\,\hat{a}_x \times \overline{B} = I\,dx\,\hat{a}_x \times \left(B_x\,\hat{a}_x + B_y\,a_y + B_z\,\hat{a}_z\right)$$

$$d\overline{F}_1 = I\,dx\,\left(B_y\,\hat{a}_z - B_z\,\hat{a}_y\right)$$

که $d\overline{F}_1$ نیروی وارد بر ضلع ۱ به طول dx می‌باشد.

شکل (۹-۳): محاسبه گشتاور وارد بر حلقه کوچک جریان

$$d\overline{T}_1 = \overline{R}_1 \times d\overline{F}_1 = -\frac{1}{2}dy\,\hat{a}_y \times I\,dx\,\left(B_y\,\hat{a}_z - B_z\,\hat{a}_y\right) = -\frac{1}{2}dx\,dy\,I\,B_y\,\hat{a}_x$$

که $d\overline{T}_1$ گشتاور وارد بر ضلع ۱ می‌باشد به همین ترتیب نیروی وارد بر ضلع ۳ و گشتاور وارد بر ضلع ۳ را مطابق روابط زیر بدست می‌آوریم.

$$d\overline{F}_3 = I\,\left(-dx\,\hat{a}_x\right) \times \overline{B} = I\,dx\,\left(B_z\,\hat{a}_y - B_y\,\hat{a}_z\right) = -d\overline{F}_1$$

$$d\overline{T}_3 = R_3 \times d\overline{F}_3 = \frac{1}{2}dy\,\hat{a}_y \times d\overline{F}_3 = -\frac{1}{2}dx\,dy\,I\,B_y\,\hat{a}_x$$

حال مجموع گشتاور وارد بر دو ضلع ۱ و ۳ را بدست می‌آوریم

$$d\overline{T}_1 + d\overline{T}_3 = -dx\,dy\,I\,B_y\,\hat{a}_x$$

به همین ترتیب گشتاور وارد بر اضلاع ۲ و ۴ را بدست می‌آوریم.

$$d\overline{T}_2 = d\overline{T}_4 = dx\,dy\,I\,B_x\,\hat{a}_y$$

بنابراین گشتاور کل عبارتست از:

$$d\overline{T} = d\overline{T}_1 + d\overline{T}_2 + d\overline{T}_3 + d\overline{T}_4 = I\,dx\,dy\,\left(B_x\,\hat{a}_y - B_y\,\hat{a}_x\right)$$

و یا

$$d\overline{T} = I\,dx\,dy\,\hat{a}_z \times \left(B_x\,\hat{a}_x + B_y\,\hat{a}_y + B_z\,\hat{a}_z\right) = I\,ds\,\hat{a}_z \times \overline{B}$$

$$d\overline{T} = d\overline{m} \times \overline{B}$$

که $d\overline{m}$ ممان مغناطیسی می‌باشد حال میتوان گشتاور وارد بر حلقه به مساحت S را مطابق رابطه زیر بدست آورید.

$$\overline{T} = \int_s d\overline{m} \times \overline{B} \qquad (۹-۶)$$

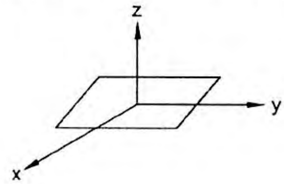
حال اگر میدان ثابت باشد رابطه به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\overline{T} = \overline{m} \times \overline{B} \qquad (۹-۷)$$

مثال ۸: جریان I=۵A از حلقه‌ای مستطیل شکل به ابعاد ۰/۴m×۰/۶m که مطابق شکل در صفحه z=۰ قرار دارد می‌گذرد اگر میدان یکنواخت باعث گشتاور ۰/۵N.m بر حلقه شود B چقدر است اگر

a) $B_y = ۰$ b) $B_y = B_x$ c) $B_y = -۰/۳$

حل: چون میدان ثابت است پس گشتاور از رابطه (۹-۷) حساب می‌شود.



$$\overline{T} = \overline{m}\times\overline{B} = IS\hat{a}_z \times [B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z]$$

$$\overline{T} = ۵\times ۰/۲۴\,[B_x \hat{a}_y - B_y \hat{a}_x]$$

$$\overline{T} = ۰/۱۲\,[B_x \hat{a}_y - B_y \hat{a}_x]$$

$$|\overline{T}| = ۰/۱۲\sqrt{B_x^{۲} + B_y^{۲}}$$

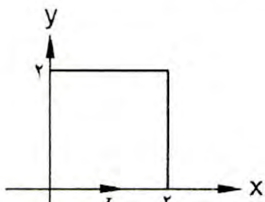
a) $B_y = ۰ \Rightarrow |\overline{T}| = ۰/۱۲\,|B_x| = ۰/۵ \Rightarrow |B_x| = ۰/۴۱۷ \Rightarrow \overline{B} = \pm ۰/۴۱۷\hat{a}_x$

b) $B_y = B_x \Rightarrow |\overline{T}| = ۰/۱۲\sqrt{۲}\,|B_x| \Rightarrow B_x = \pm ۰/۲۹۵ = B_y$

$$B = \pm ۰/۲۹۵\,(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

$$B_y = ۰/۳ \Rightarrow |\overline{T}| = ۰/۱۲\sqrt{۰/۳^{۲} + B_x^{۲}} = ۰/۵ \Rightarrow B_x = \pm ۰/۲۸۹$$

$$\rightarrow B = \pm ۰/۲۸۹\hat{a}_x - ۰/۳\hat{a}_y$$



مثال ۹: حلقه‌ای مربع شکل به ضلع ۲m در صفحه xy مطابق شکل قرار دارد میدان $H = \frac{۲}{\mu_۰} x y \hat{a}_x$ در فضا موجود است گشتاور وارد بر حلقه اگر حامل جریان ۱۰A باشد را بدست آورید؟

حل: چون میدان متغیر است پس گشتاور از رابطه (۹-۶) بدست می‌آید.

$$\overline{T} = \int d\overline{m}\times\overline{B} = \int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۲} I\,dx\,dy\,\hat{a}_z \times \mu_۰ \frac{۲}{\mu_۰} xy\,\hat{a}_x$$

$$\overline{T} = \int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۲} ۲۰\,dx\,dy\,xy\,(\hat{a}_y) = ۵x^{۲}y^{۲}\Big]_{۰}^{۲}\Big]_{۰}^{۲}\hat{a}_y = ۸۰\hat{a}_y$$

مثال ۱۰: جریان I=۵A از یک حلقه مثلثی مطابق شکل می‌گذرد میدان مغناطیسی ثابت $H = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}\mu_۰}\hat{a}_y$ در فضا موجود است گشتاور وارد بر حلقه را بدست آورید؟

حل: چون میدان ثابت است پس از رابطه (۹-۷) استفاده می‌کنیم.

$$\overline{T} = \overline{m}\times\overline{B} = IS(-\hat{a}_z)\times B$$

$$S = ۲^{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \sqrt{۳} \rightarrow \overline{T} = ۵\times\sqrt{۳}(-\hat{a}_z)\times\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}\hat{a}_y = ۵۰\,\hat{a}_x$$

سوالهای گشتاور و نیرو

۱. یک دیسک بشعاع a حول محورش با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد اگر این دیسک دارای بار سطحی به چگالی ρ_s باشد اندازه ممان این دیسک چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{4}\rho_s \omega a^4$ ۲) $\frac{\pi}{2}\rho_s \omega a^3$ ۳) $\pi \rho_s \omega a^4$ ۴) $\pi \rho_s^2 \omega a^2$

۲. قطعه‌ای سیم با جرم واحد طول $75\frac{g}{m}$ در هوا به صورت افقی عمود بر یک میدان مغناطیسی قرار دارد جریان معادل $6/2^{A}$ سبب می‌شود که سیم در هوا معلق بماند میدان مغناطیسی چقدر است؟

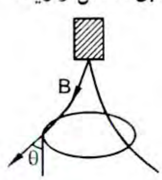
۱) $\frac{0/82}{\mu_0}$ ۲) $\frac{0/25}{\mu_0}$

۳) $\frac{0/12}{\mu_0}$ ۴) $\frac{0/32}{\mu_0}$

۳. یک حلقه به جرم ده گرم و شعاع ۱۰cm حامل جریان ۲ آمپر می‌باشد بصورت افقی زیر یک آهنربای دائمی قرار دارد که خطوط چگالی فلوی B تولید شده توسط ان با خط عمود بر حلقه مطابق شکل زاویه 30° می‌سازد اگر حلقه در هوا معلق باشد مطلوبست مقدار B

۱) ۰/۱۸ ۲) ۰/۳۲

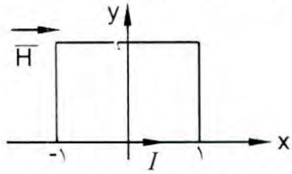
۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۴



۴. حلقه مستطیل شکل مطابق شکل در معرض میدان $H=\frac{2}{\mu_0}x^2y^3\hat{a}_x$ قرار دارد گشتاور وارد بر حلقه کدام است جریان حلقه 10^{A} است؟

۱) $270\hat{a}_y$ ۲) $140\hat{a}_y$

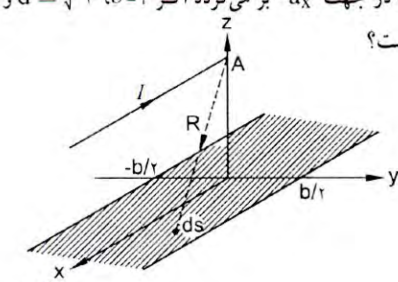
۳) $150\hat{a}_y$ ۴) $120\hat{a}_y$



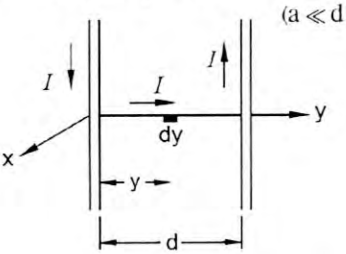
۵. از نواری که در فاصله $\frac{b}{2}<y<\frac{b}{2}$ قرار دارد در صفحه z=۰ جریان قرار دارد کل I بصورت یکنواخت در جهت $\hat{a}_x$ عبور می‌کند این جریان از سیمی در صفحه y=۰ که در z=d قرار دارد در جهت $-\hat{a}_x$ بر می‌گردد اگر b=۲، $d=\sqrt{3}$ و $I=1^{A}$ باشد نیروی وارد بر یک متر از سیم از طرف نوار چقدر است؟

۱) $\frac{\mu_0}{8}\hat{a}_z$ ۲) $\frac{\mu_0}{12}\hat{a}_z$

۳) $\frac{3\mu_0}{16}\hat{a}_z$ ۴) صفر

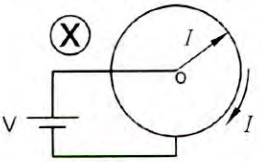


۶. دو سیم موازی بفاصله d از هم قرار دارند جریان I از سیم اول عبور کرده و توسط یک میله افقی به سیم دوم متصل می‌شود نیروی وارد بر میله افقی کدام است (شعاع سیم‌ها a می‌باشد و $a \ll d$)



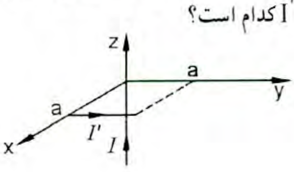
۱) $\frac{-\mu_{\circ} I^{2}}{4\pi} \ln \frac{d}{a} \hat{a}_z$
۲) $\frac{-\mu_{\circ} I^{2}}{2\pi} \ln \frac{d}{a} \hat{a}_z$
۳) $\frac{-\mu_{\circ} I^{2}}{\pi} \ln \frac{2d}{a}$
۴) $\frac{-\mu_{\circ} I^{2}}{2\pi} \ln \frac{2d}{a} \hat{a}_z$

۷. جریان I مطابق شکل از عقربه‌ای که در دایره‌ای بشعاع a قرار دارد می‌گذرد میدان H عمود بر صفحه و در داخل دایره وجود دارد مقدار گشتاور وارد بر عقربه حول مرکز دایره کدام است؟



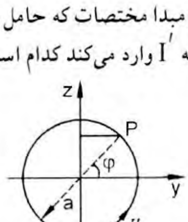
۱) $\frac{1}{3}\mu_{\circ} I a^{2} H$
۲) $\mu_{\circ} I a^{2} H$
۳) $\frac{1}{2}\mu_{\circ} I a^{2} H$
۴) صفر

۸. سیم حامل جریان I' در $z=0$، $x=a$ و $0<y<a$ با جهت نشان داده مفروض است سیمی منطبق بر محور z حامل جریان I می‌باشد و طول آن بی نهایت است نیرو بر سیم حامل جریان I' کدام است؟



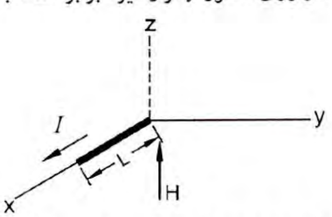
۱) $\frac{\mu_{\circ} II'}{4\pi} \ln 2\hat{a}_z$
۲) $\frac{-\mu_{\circ} II'}{4\pi} \ln 2\hat{a}_z$
۳) $\frac{\mu_{\circ} II'}{2\pi} \ln 2\hat{a}_z$
۴) $\frac{-\mu_{\circ} II'}{2\pi} \ln 2\hat{a}_z$

۹. سیمی منطبق بر محور z حامل جریان I می‌باشد در صفحه zy حلقه‌ای بشعاع a به مرکز مبدا مختصات که حامل جریان I' در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد وجود دارد نیروئی که جریان I به I' وارد می‌کند کدام است؟



۱) $-\mu_{\circ} I I' \hat{a}_z$
۲) $-\mu_{\circ} I I \hat{a}_y$
۳) $-\mu_{\circ} I I' \hat{a}_z$
۴) صفر

۱۰. قطعه‌ای از یک مدار به شکل یک هادی به طول L در امتدد محور x با جریان I در جهت $\hat{a}_x$ قرار دارد. کار لازم برای اینکه میله فوق در میدان یکنواخت $H = H_{\circ}\,\hat{a}_z$ بچرخد و روی محور y قرار گیرد برابر است با:



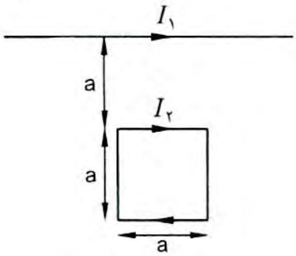
۱) صفر
۲) $\frac{\mu_{\circ} H_{\circ} L^{2} \pi I}{2}$
۳) $\frac{\mu_{\circ} H_{\circ} L^{2} \pi I}{3}$
۴) $\frac{\mu_{\circ} H_{\circ} L^{2} \pi I}{4}$

۱۱. دو صفحه بسیار بزرگ موازی به ترتیب در $z=0$ و $z=d$ قرار دارند از صفحه $z=0$ جریان سطحی با چگالی

$\overline{J}_{s_1} = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$ و از صفحه $z=d$ جریان سطحی به چگالی $\overline{J}_{s_2} = -\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$ می‌گذرد نیروی وارد بر واحد سطح صفحه پایین از طرف صفحه بالا کدام است؟

۱) $\mu_0 \frac{5}{2}\hat{a}_z$ ۲) $-\mu_0 \frac{7}{2}\hat{a}_z$ ۳) $\mu_0 \frac{7}{2}\hat{a}_z$ ۴) $\mu_0 \frac{3}{2}\hat{a}_z$

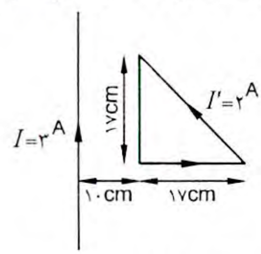
۱۲. سیم بلندی با جریان ثابت I_1 و مدار سیمی بصورت مربع با ضلع a و جریان ثابت I_2 مطابق شکل مفروض است مدار I_2 هم صفحه با سیم I_1 بوده و زیر آن قرار دارد اگر وزن مدار مربعی شکل P باشد مقدار I_1 چقدر باید باشد تا سیم مربعی آویزان بماند؟



۱) $\frac{4\pi P}{\mu_0 I_2}$ ۲) $\frac{2\pi P}{\mu_0 I_2}$

۳) $\frac{2\pi P}{\mu_0 a^2 I_2}$ ۴) $\frac{4\pi a^2 P}{\mu_0 I_2}$

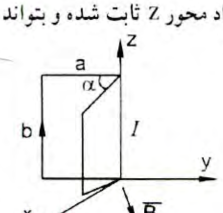
۱۳. از یک سیم مثلثی شکل جریان 2^A می‌گذرد این سیم در صفحه zy بوده و در مجاورت آن جریان 3^A از سیمی منطبق بر محور zها می‌گذرد نیروی وارد بر سیم منطبق بر محور zها کدام است؟



۱) $\frac{-18}{\pi}\mu_0 \hat{a}_y$ ۲) $\frac{24}{\pi}\mu_0 \hat{a}_y$

۳) $\frac{21}{\pi}\mu_0 \hat{a}_y$ ۴) $\frac{-27\mu_0}{\pi}\hat{a}_y$

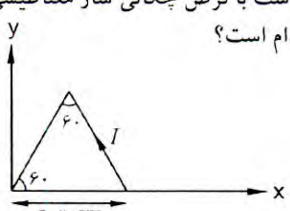
۱۴. یک سیم پیچ مستطیلی $(a\times b)$ دارای N دور حامل جریان I می‌باشد و در صفحه xz قرار دارد یک میدان مغناطیسی با چگالی $\overline{B} = B_0\left(\hat{a}_x + \hat{a}_y\right)$ در فضا وجود دارد اگر یک ضلع مستطیل در امتداد محور z ثابت شده و بتواند حول آن بچرخد در اینصورت اگر سیم پیچ رها شود چه زاویه‌ای طی می‌کند تا بایستد؟



۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۱۵. جریان 2^A در حلقه مثلثی واقع در صفحه xy مطابق شکل زیر برقرار است با فرض چگالی شار مغناطیسی یکنواخت $B = \frac{20}{\sqrt{3}}\hat{a}_x$ در این ناحیه، گشتاور اعمال شده بر حلقه کدام است؟

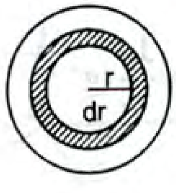


۱) $0/1\hat{a}_y$ ۲) $0/2\hat{a}_y$

۳) $0/4\hat{a}_y$ ۴) $0/2\hat{a}_y$

پاسخ سوالهای گشتاور و نیرو

۱. گزینهٔ ۱) اگر نواری به شعاع r و ضخامت dr در نظر بگیریم جریان دراین نوار عبارتست از



$$dI = (\rho_s \, ۲\pi r \, dr) \times \frac{\omega}{۲\pi} = \rho_s \omega r \, dr$$

$$dm = s dI = \pi r^۲ \rho_s \omega r \, dr = \rho_s \omega r^۳ \pi dr$$

$$m = \int_۰^a dm = \frac{۱}{۴} \rho_s \omega a^۴ \pi$$

۲. گزینهٔ ۳)

$$F_m = I \overline{L} \times \overline{B} = I (L \hat{a}_y) \times (-B \hat{a}_x) = I L B \hat{a}_z$$

$$ILB = mg = ۰/۰۷۵ Lg \Rightarrow ۶/۲B = ۰/۷۵ \rightarrow B = ۰/۱۲^T$$

$$H = \frac{B}{\mu_۰} = \frac{۰/۱۲}{\mu_۰}$$

۳. گزینهٔ ۲) میتوان $\overline{B}$ را به دو مولفه $\hat{a}_z$ و $\hat{a}_R$ بفرم زیر تجزیه کرد.

$$\overline{B} = -B \cos\theta \, \hat{a}_z - B \sin\theta \, \hat{a}_R$$

$$\overline{F} = \int I \overline{d\ell} \times \overline{B} = \int_۰^{۲\pi} I R \, d\phi \, \hat{a}_\phi \times \left(-B \cos\theta \, \hat{a}_z - B \sin\theta \, \hat{a}_R\right)$$

$$= -IRB \int_۰^{۲\pi} \cos\theta \, \hat{a}_R \, d\phi + IRB \int_۰^{۲\pi} \sin\theta \, \hat{a}_z \, d\phi$$

چون $\hat{a}_R = a_x \cos\phi + \hat{a}_y \sin\phi$ پس انتگرال $\int_۰^{۲\pi} \hat{a}_R \, d\phi = ۰$ است بنابراین

$$F = IRB \sin\theta \int_۰^{۲\pi} d\phi \, \hat{a}_z = ۲\pi \, IRB \sin\theta \hat{a}_z$$

این نیرو باید مساوی وزن حلقه باشد.

$$۲\pi \, IRB \sin\theta = mg \rightarrow B = \frac{mg}{۲\pi R \, I \sin\theta} = \frac{۰/۰۱ \times ۱۰}{۲\pi \times ۰/۱ \times ۲ \times \frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{\pi} = ۰/۳۲^T$$

۴. گزینهٔ ۱)

$$\overline{T} = \int d\overline{m} \times \overline{B} = \int_{-۱}^{۱} \int_۰^{۳} I dx dy \hat{a}_y \hat{a}_z \times ۲x^۲ y^۳ \hat{a}_x = \hat{a}_y \int_{-۱}^{۱} \int_۰^{۳} ۲۰ x^۲ y^۳ dx dy$$

$$T = \hat{a}_y \left[۲۰ \times \frac{۱}{۳} x^۳ \right]_{-۱}^{۱} \left[\frac{۱}{۴} y^۴ \right]_۰^{۳} = \hat{a}_y \frac{۲۰}{۳} \times \frac{۱}{۴} (۲)(۸۱) = ۲۷۰ \, \hat{a}_y$$

۵. گزینهٔ ۲) چون نوار در جهت x بی نهایت است میدان تابع x نیست و میتوان میدان روی سیم و روی محور z را بدست آورد. (نقطه A)

$$H_A = \int_{\frac{-b}{۲}}^{\frac{b}{۲}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{J}_s \times \hat{a}_R \, dx \, dy}{۴\pi R^۲} = \int_{\frac{-b}{۲}}^{\frac{b}{۲}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-J_s \hat{a}_x \times \left(-x \hat{a}_x - y \hat{a}_y + d \hat{a}_z\right)}{۴\pi \left(x^۲ + y^۲ + d^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}} dx \, dy$$

$$\overline{H}_A \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_s\, y\, \hat{a}_z + J_s\, d\, \hat{a}_y}{4\pi \left[x^2 + y^2 + d^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx\, dy$$

چون مولفه $\hat{a}_z$ تابع فردی از y است پس حاصل انتگرال صفر است.

$$\overline{H}_A = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_s\, d\, \hat{a}_y}{4\pi \left[x^2 + y^2 + d^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{J_s d\, \hat{a}_y}{(y^2 + d^2)} dy = \frac{J_s}{2\pi} tg^{-1} \frac{y}{d} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \hat{a}_y = \frac{J_s}{\pi} tg^{-1} \frac{b}{2d} \hat{a}_y$$

$$\overline{H}_A = \frac{1}{2\pi} tg^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{a}_y = \frac{1}{12} \hat{a}_y \qquad F = I\overline{L}\,(\hat{a}_x) \times \mu_\circ \overline{H}_A = \frac{\mu_\circ}{12} \hat{a}_z$$

۶. گزینهٔ ۴)

$$d\overline{F} = I\, dy\, \hat{a}_y \times \left[\frac{\mu_\circ I}{4\pi y} + \frac{\mu_\circ I}{4\pi (d-y)}\right] \hat{a}_x$$

$$d\overline{F} = \frac{\mu_\circ I^2}{4\pi} (-\hat{a}_z) \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y}\right] dy$$

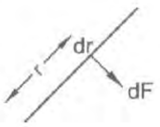
$$\overline{F} = \int_{\frac{a}{2}}^{d - \frac{a}{2}} dF = -\frac{\mu_\circ I^2}{2\pi} \ln \frac{d - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \hat{a}_z = -\frac{\mu_\circ I^2}{2\pi} \ln \frac{2d}{a} \hat{a}_z$$

۷. گزینهٔ ۳) اگر عنصر dr بفاصله r از O، مرکز عقربه را در نظر بگیریم نیروی وارد بر این عنصر عبارتست از:

$$d\overline{F} = I\, dr\, \hat{a}_R \times -B\hat{a}_z = I\, B\, dr\, \hat{a}_\phi$$

$$d\overline{T} = \overline{r} \times d\overline{F} = -r\, \hat{a}_R \times IB\, dr\, \hat{a}_\phi = -Ir\,Br\, \hat{a}_z$$

$$\overline{T} = \int_\circ^a dT = \int_\circ^a -IrB\, dr\, \hat{a}_z = \frac{-1}{2} I a^2 B\, \hat{a}_z = \frac{-\mu_\circ I a^2 B}{2} \hat{a}_z$$



۸. گزینهٔ ۱)

$$\overline{F} = \int I' \overline{d\ell} \times \overline{B} = \int I'\, dy\, \hat{a}_y \times \frac{\mu_\circ I}{2\pi R} \hat{a}_\phi = \int \frac{\mu_\circ I I'}{2\pi R} \hat{a}_y \times \left(-\hat{a}_x \sin\phi + \hat{a}_y \cos\phi\right) dy$$

$$= \int \frac{\mu_\circ I I'}{2\pi R} \hat{a}_z \sin\phi\, dy = \int_\circ^a \frac{\mu_\circ I I'}{2\pi R} \times \frac{y}{R} dy\, \hat{a}_z = \frac{\mu_\circ I I'}{2\pi} \int_\circ^a \frac{y}{y^2 + a^2} dy\, \hat{a}_z$$

$$= \frac{\mu_\circ I I'}{4\pi} \hat{a}_z \ln \left[y^2 + a^2\right] \Big|_\circ^a = \frac{\mu_\circ I I'}{4\pi} \ln 2\, \hat{a}_z$$

۹. گزینهٔ ۲) نیروی وارد بر عنصر جریان در نقطه P عبارتست از:

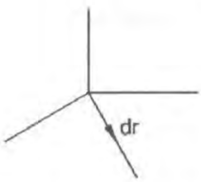
$$d\overline{F} = I' a\, d\phi\, \hat{a}_\phi \times B$$

$$\overline{B} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi a \cos\theta} \left(-\hat{a}_x\right) \quad \rightarrow \quad d\overline{F} = I' a\, d\phi\, \hat{a}_\phi \times \frac{-\mu_\circ I}{2\pi a \cos\phi} \hat{a}_x$$

$$\hat{a}_\phi = -\hat{a}_y \sin\phi + \hat{a}_z \cos\phi \;\rightarrow\; \overline{F} = \int_0^{2\pi} I' a\, d\phi\, [-\hat{a}_y \sin\phi + \hat{a}_z \cos\phi] \times \frac{-\mu_0 I}{2\pi a \cos\phi}\hat{a}_x$$

$$\overline{F} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I I' a}{2\pi a \cos\phi}[\hat{a}_z \sin\phi - \hat{a}_y \cos\phi]\, d\phi = -\mu_0 I I' \hat{a}_y$$

۱۰. گزینهٔ ۴) اگر در حالتی که میله در جهت $\hat{a}_R$ قرار گرفته مطابق شکل در نظر بگیریم خواهیم داشت



$$\overline{dF} = I\, dr\, \hat{a}_R \times B\, \hat{a}_z = -IB\, dr\, \hat{a}_\phi$$

$$dW = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{dF}\cdot\overline{d\ell} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -IB\, dr\, \hat{a}_\phi \cdot r\, d\phi\, \hat{a}_\phi$$

$\Rightarrow dW = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} IBr\, dr\, d\phi = -\frac{\pi}{2} IBr\, dr$ $= dW$ کار لازم جهت انتقال عنصر dr به اندازه °۹۰

کار انجام شده توسط میدان $W = \int_0^L dW = \int_0^L \frac{-\pi}{2} IBr\, dr = -\frac{IB\pi L^2}{4}$

علامت منفی نشان دهندهٔ کار میدان است بنابراین کار عامل خارجی مثبت است یعنی

$$W = \frac{IB\pi L^2}{4} = \frac{I\mu_0 H_0 \pi L^2}{4}$$

۱۱. گزینهٔ ۳) میدان ناشی از صفحه $z=d$ در محل صفحه $z=0$ عبارتست از:

$$H_2 = \frac{1}{2}\overline{J}_{s_2} \times \hat{a}_n = \frac{1}{2}[-\hat{a}_x + 3\hat{a}_y] \times [-\hat{a}_z] = -\frac{1}{2}\hat{a}_y - \frac{3}{2}\hat{a}_x$$

$$F_{12} = \int \overline{J}_{s_1} \times \overline{B}_2\, ds = [2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y] \times \left[-\frac{1}{2}\hat{a}_y - \frac{3}{2}\hat{a}_x\right]\mu_0 = \frac{7}{2}\mu_0 \hat{a}_z$$

۱۲. گزینهٔ ۱) نیروی وارد بر اضلاع عمودی سیم مربعی عکس یکدیگر بوده و برآیند نیروی وارد بر این دو ضلع صفر است.

$$\overline{F} = \int_0^a I_2\, dy\, \hat{a}_y \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\hat{a}_x + \int_a^0 I_2\, dy\, \hat{a}_y \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2a)}\hat{a}_x = \frac{-a\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\hat{a}_z + \frac{a\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}\hat{a}_z$$

$$\overline{F} = -\frac{1}{4}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \;\rightarrow\; F+P = 0 \;\rightarrow\; \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} = P \;\rightarrow\; I_1 = \frac{4\pi P}{\mu_0 I_2}$$

۱۳. گزینهٔ ۴) ابتدا نیروی وارد بر سیم مثلثی را بدست می‌آوریم.

$$\overline{F} = \oint I'\, \overline{d\ell} \times \overline{B} = \int_{0.1}^{0.27} I'\, dy\, \hat{a}_y \times \frac{-\mu_0 I}{2\pi y}\hat{a}_x + \int_{0.27}^{0.1} I'[dy\, \hat{a}_y - dy\, \hat{a}_z] \times \frac{-\mu_0 I}{2\pi y}\hat{a}_x$$

$$+\int_{0.17}^{0} I'\, dz\, \hat{a}_z \times \frac{-\mu_0 I}{2\pi(0.1)} a_x = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi}\ln 2.7\, \hat{a}_z - \frac{\mu_0 I I'}{2\pi}\ln 2.7\, \hat{a}_z$$

$$+\frac{\mu_\circ II'}{۲\pi}\ln\frac{۱}{۲/۷}\hat{a}_y+\frac{۱۰\mu_\circ II'}{۲\pi}\hat{a}_y=\frac{\mu_\circ II'}{۲\pi}\left(۱۰-۱\right)\hat{a}_y=\frac{۹\mu_\circ II'}{۲\pi}\hat{a}_y=\frac{۲۷}{\pi}\mu_\circ\hat{a}_y$$

نیروی وارد بر سیم مستقیم در جهت مخالف این نیرو است.

۱۴. گزینهٔ ۲) *سیم پیچ آنقدر می‌چرخد تا گشتاور وارد بر آن از طرف میدان مغناطیسی صفر شود در اینحالت حداکثر شار مغناطیسی از حلقه می‌گذرد یعنی میدان* $\overline{B}$ *بر صفحه مستطیل عمود می‌شود پس باید سیم پیچ به اندازه* $\alpha=۴۵^\circ$ بچرخد.

۱۵. گزینهٔ ۳) چون میدان *ثابت است* پس $\overline{T}=\overline{m}\times\overline{B}\qquad \overline{m}=SI\,\hat{a}_z$

$$S=a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=(۰/۲)^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=۰/۱\sqrt{۳}\ \rightarrow\ \overline{T}=۰/۱\sqrt{۳}\times ۲\hat{a}_z\times\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}\hat{a}_x$$

$$\overline{T}=۰/۴\,\hat{a}_y$$