فصل هفتم (قسمت دوم: مغناطیس ساکن)

میدان مغناطیسی و قانون بیوساوار

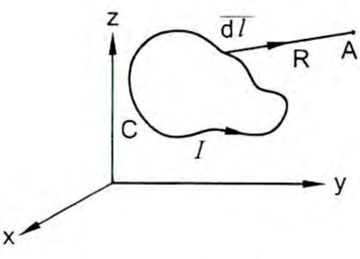
همانطوریکه قبلاً بیان گردید منشا کلیه پدیده‌های الکترومغناطیس بارهای الکتریکی هستند مطالعات تاکنون به بارهای الکتریکی ساکن محدوده بوده و این نتیجه کلی را در برداشته که بارهای ساکن فقط تولید میدان الکتریکی می‌کنند میدان الکتریکی در واقع یک میدان نیرو است بطوریکه اگر بار نقطه‌ای q در آن قرارگیرد نیروئی برابر حاصلضرب شدت میدان در اندازه بار و در جهت میدان به آن وارد می‌شود. حرکت بارهای الکتریکی منجر به بروز پدیده دیگری بنام میدان مغناطیسی می‌شود میدان مغناطیسی نیز مانند میدان الکتریکی میدان نیرو است بطوریکه اگر بار الکتریکی متحرکی در آن قرارگیرد نیرویی بغیر از نیروی کولمب (که عامل آن میدان الکتریکی است) متناسب با سرعت بار و در جهت عمود بر میدان بر آن وارد می‌شود مطالب این فصل به بررسی میدانهای مغناطیسی ساکن که از حرکت بارهای الکتریکی با سرعت یکنواخت ناشی می‌شوند اختصاص می‌یابند در واقع ما از بارهای الکتریکی ساکن شروع کردیم و ثابت کردیم که آنها مولد میدانهای الکتریکی ساکن هستند در این فصل نشان خواهیم داد که حرکت یکنواخت بارهای الکتریکی پدیده دومی را که همان میدان مغناطیسی است باعث می‌گردد. میدانهای متغیر با زمان و پدیده تشعشع را که از حرکت شتاب دار بارهای الکتریکی ناشی می‌شوند پس از دست یافتن به معادلات ماکسول در فصول بعدی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

حرکت بارهای الکتریکی تولید جریان الکتریکی می‌کند بنابراین میتوان گفت که جریان‌های الکتریکی منشاء میدان مغناطیسی هستند مبنا محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی قانون بیوساوار می‌باشد همانطوریکه در محاسبه میدان الکتریکی قانون مبنا قانون کولمب بود در ادامه به کاربرد قانون بیوساوار در محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از بار الکتریکی (جریان) می‌پردازیم.

۷-۱- قانون بیوساوار

مطابق شکل (۷-۱) اگر جریان I در یک مدار C برقرارباشد میدان مغناطیسی ناشی از این جریان در نقطه A از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\overline{H} = \oint_C \frac{I\,\overline{d\ell} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \qquad (۷-۱)$$



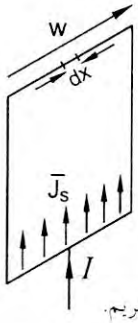
شکل (۷-۱) محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از جریان در مدار C

که $\overline{R}$ بردار فاصله عنصر جریان $\overline{d\ell}$ از نقطه A می‌باشد.

رابطه (۷-۱) میدان مغناطیسی ناشی از جریانهائیکه مثلاً در رشته‌ای نازک سیمی باشند و ما از آنها بعنوان جریان الکتریکی با توزیع خطی نام می‌بریم را بدست می‌دهد جریان الکتریکی ممکن است بصورت سطحی با چگالی $\overline{J}_s$ و یا بصورت حجمی با چگالی $\overline{J}$ توزیع شده باشد.

اگر جریان الکتریکی I از یک سیم به یک صفحه با عرض w مطابق شکل (۷-۲) متصل شود در آنصورت با چگالی $\overline{J}_s$ روی این صفحه پخش می‌شود اگر چگالی $\overline{J}_s$ یکنواخت نباشد در اینصورت جریان I را میتوان از رابطه زیر بدست آورد.

$$I = \int_0^w J_s\,dx \qquad (۷-۲)$$



که dx عنصر طول در جهت عرض w می‌باشد در اینصورت اگر یک نوار بضخامت dx از این صفحه در نظر بگیریم جریان آن $dI=J_s\ dx$ می‌باشد در اینصورت میدان ناشی از این نوار طبق رابطه (۷-۱) عبارتست از:

$$d\overline{H}=\int \frac{(J_s\, dx)\ \overline{d\ell} \times \hat{a}_R}{۴\pi R^{۲}}$$

شکل (۷-۲) توزیع سطحی جریان

حال برای محاسبه کل میدان ناشی از صفحه لازم است از dH روی عرض صفحه انتگرال بگیریم.

$$\overline{H}=\int_{۰}^{w}\int \frac{\overline{J}_s\, dx\, d\ell \times \hat{a}_R}{۴\pi R^{۲}}=\int_s \frac{\overline{J}_s \times \hat{a}_R}{۴\pi R^{۲}}\, ds$$

بعبارت دیگر میدان معناطیسی ناشی از صفحه‌ای با چگالی سطحی جریان $\overline{J}_s$ عبارتست از

$$\overline{H}=\int_s \frac{\overline{J}_s \times \hat{a}_R}{۴\pi R^{۲}}\, ds \qquad (۷-۳)$$

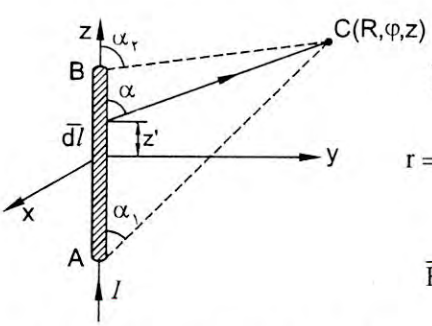
به همین ترتیب میدان ناشی از توزیع حجمی جریان با چگالی $\overline{J}$ عبارتست از:

$$\overline{H}=\int_v \frac{\overline{J} \times \hat{a}_R}{۴\pi R^{۲}}\, dv \qquad (۷-۴)$$

۷-۲- میدان ناشی از یک سیم حامل جریان

سیمی منطبق بر محور zها حامل جریان I می‌باشد میدان مغناطیسی ناشی از طولی از این سیمی که بین دو نقطه A و B قرار گرفته در نقطه C را بدست آورید.

طبق رابطه (۷-۱) داریم:



$$\overline{H}=\int \frac{I\,\overline{d\ell} \times \hat{a}_r}{۴\pi r^{۲}}$$

که

$$r=(z-z')\,\hat{a}_z+R\,\hat{a}_R$$

بنابراین

$$\overline{H}=\int \frac{I\, dz'\,\hat{a}_z \times \left[(z-z')\,\hat{a}_z+R\,\hat{a}_R\right]}{۴\pi\left[(z-z')^{۲}+R^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

شکل (۷-۳) محاسبه میدان سیم AB در نقطه C

از طرفی

$$\cot g\ \alpha=\frac{z-z'}{R}$$

$$dz'=R\, d\alpha\ \left[۱+\cot g^{۲}\alpha\right]$$

$$\overline{H}=\int_{\alpha_۱}^{\alpha_۲}\frac{IR^{۲}\left[۱+\cot g^{۲}\alpha\right] d\alpha\ \hat{a}_\phi}{۴\pi R^{۳}\left[۱+\cot g^{۲}\alpha\right]^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{I}{۴\pi R}\,\hat{a}_\phi\int_{\alpha_۱}^{\alpha_۲}\sin\alpha\, d\alpha$$

$$\overline{H}=\frac{I}{4\pi R}\left[\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right]\,\hat{a}_\phi \qquad (۵-۷)$$

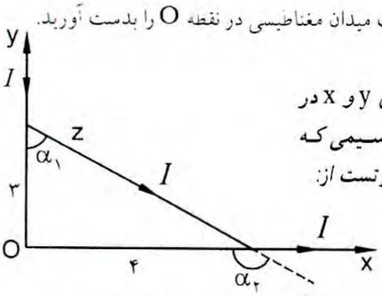
رابطه (۷-۵) یک رابطه بسیار مهم و اساسی جهت محاسبه میدان ناشی از تکه‌ای از سیم حاصل جریان I می‌باشد دقت کنید که در رابطه فوق R فاصله عمودی نقطه C از سیم می‌باشد همانطوریکه ملاحظه می‌شود میدان در جهت $\hat{a}_\phi$ است و این از قاعده دست راست نیز بدست می‌آید بطوریکه اگر جهت انگشت شصت راست در جهت جریان باشد جهت بسته شدن انگشتان جهت میدان را نشان می‌دهد زاویای α_1 و α_2 روی شکل نشان داده شده‌اند. در صورتی که سیم بی نهایت بلند باشد در اینصورت $\alpha_1 \to 0$ و $\alpha_2 \to \pi$ و رابطه (۷-۵) به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$\overline{H}=\frac{I}{2\pi R}\,\hat{a}_\phi \qquad (۶-۷)$$

با استفاده از رابطه (۷-۶) میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم بی نهایت بلند بدست می‌آید.

نکته مهم: اگر نقطه C در امتداد سیم حامل جریان باشد در اینصورت $\overline{d\ell}\times\hat{a}_R=0$ می‌شود یعنی میدان مغناطیسی ناشی از هر سیم در امتداد آن سیم صفر است.

مثال ۱: سیمی حامل جریان I به شکل نشان داده شده در آورده شده است میدان مغناطیسی در نقطه O را بدست آورید.



***حل:** میدان‌های مغناطیسی ناشی از سیم‌های واقع بر محورهای y و x در نقطه O صفر هستند زیرا نقطه O در امتداد این سیم‌ها می‌باشد ولی سیمی که منطبق بر وتر مثلث است میدانی در O ایجاد می‌کند که طبق رابطه (۷-۵) عبارتست از:*

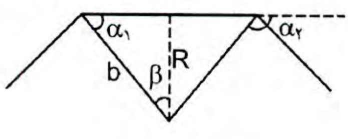
$$H=\frac{I}{4\pi\left[\frac{12}{5}\right]}\left[\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right]=\frac{7I}{48\pi}$$

جهت میدان طبق قانون دست راست در جهت عمود بر صفحه و بطرف داخل (جهت $-\hat{a}_z$) می‌باشد لذا:

$$\overline{H}=\frac{-7I}{48\pi}\,\hat{a}_z$$

مثال ۲: میدان در مرکز یک N ضلعی منتظم به ضلع a را بدست آورید.

حل: ابتدا میدان ناشی از یک ضلع را بدست آورده و در N ضرب می‌کنیم تا میدان ناشی از تمام اضلاع بدست آید.



$$H_1=\frac{I}{4\pi R}\left[\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right]=\frac{I}{2\pi R}\cos\alpha_1$$

$$\cos\alpha_1=\sin\beta=\sin\frac{\pi}{N}$$

$$H_1=\frac{I}{2\pi b\cos\beta}\sin\beta=\frac{I}{2\pi b}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{N}$$

بنابراین

$$H=NH_1=\frac{NI}{2\pi b}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{N}$$

در رابطه بالا b شعاع دایره محیطی N ضلعی است.

مثال ۳: میدان مغناطیسی در مرکز یک مربع به ضلع a و جریان را I بدست آورید.

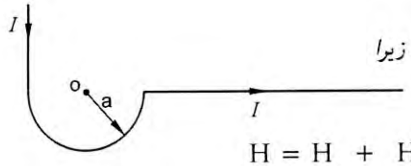
حل: در اینحالت $N=۴$ و $b = a\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$H = \frac{۴I}{۲\pi a \frac{\sqrt{۲}}{۲}} \, tg\frac{\pi}{۴} = \frac{۲I\sqrt{۲}}{\pi a}$$

نکته جالب اینکه اگر $N \to \infty$ میل کند N ضلعی منتظم به دایره‌ای بشعاع b تبدیل می‌شود بنابراین میدان ناشی از یک دایره بشعاع b در مرکز آن عبارتست از:

$$H = \lim_{N \to \infty} \frac{NI}{۲\pi b} \, tg\frac{\pi}{N} = \frac{NI}{۲\pi b} \times \frac{\pi}{N} = \frac{I}{۲b}$$

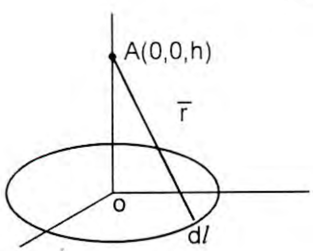
مثال ۴: در شکل زیر میدان در نقطه o را بدست آورید.



حل: در اینجا میدان ناشی از سیم افقی در نقطه o صفر است زیرا نقطه o در امتداد سیم افقی است پس

$$H = H_{\text{سیم عمودی}} + H_{\text{نیم دایره}} = \frac{I}{۴\pi a}\left[\cos ۰ - \cos\frac{\pi}{۲}\right] + \frac{I}{۴a} = \frac{I}{۴a}\left[۱ + \frac{۱}{\pi}\right]$$

مثال ۵: میدان در روی محور یک حلقه جریان به شعاع a را بدست آورید؟



$$\overline{H}_A = \int \frac{I\,\overline{d\ell} \times \hat{a}_r}{۴\pi r^۲} = \int_۰^{۲\pi} \frac{I\,a\,d\phi\,\hat{a}_\phi \times \left(h\,\hat{a}_z - a\,\hat{a}_R\right)}{۴\pi\left[h^۲ + a^۲\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= \int_۰^{۲\pi} \frac{I\,a\,h\,\hat{a}_R\,d\phi}{۴\pi\left[h^۲ + a^۲\right]^{\frac{۳}{۲}}} + \int_۰^{۲\pi} \frac{I\,a^۲\,d\phi\,\hat{a}_z}{۴\pi\left[h^۲ + a^۲\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

از آنجائیکه $\hat{a}_R = \hat{a}_x \cos\phi + \hat{a}_y \sin\phi$ در نتیجه انتگرال اول صفراست و انتگرال دوم به سادگی محاسبه می‌شود که خواهیم داشت:

$$\overline{H}_A = \frac{I\,a^۲}{۲(h^۲ + a^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,\hat{a}_z \qquad (۷-۷)$$

برای محاسبه میدان در مرکز دایره کافیست $h=۰$ قرار دهیم که در اینصورت میدان در نقطه o مرکز دایره عبارتست از $\overline{H}_O = \frac{I}{۲a}\,\hat{a}_z$ و این همان رابطه‌ای است که قبلاً از میدان ناشی از N ضلعی منتظم با میل دادن N به سمت بی نهایت بدست آوریم. همانطوریکه از روابط بالا ملاحظه می‌شود میدان در مرکز حلقه با طول حلقه متناسب است یعنی اگر بجای حلقه یک نیم حلقه داشتیم در انتگرال دوم حدود انتگرال بین ۰ تا π بود و حاصل انتگرال نصف می‌شود این مسئله برای میدان روی محور حلقه صادق نیست زیرا اگر چه انتگرال دوم با طول حلقه متناسب است ولی اگر $h \neq ۰$ باشد حاصل انتگرال اول برای نیم حلقه صفر نیست یعنی میدان در روی محور یک نیم حلقه نصف میدان در روی محور یک حلقه کامل نیست.

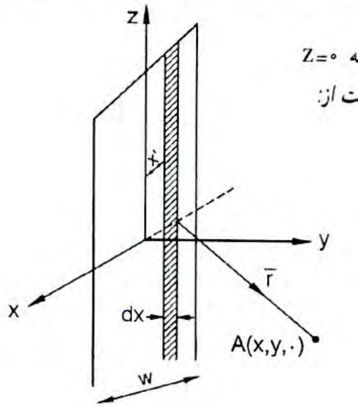
حال با استفاده از روابط بیان شده تاکنون میدان ناشی از یک صفحه و دیسک حاصل جریان با چگالی سطحی J_S را بدست می‌آوریم.

مثال ۶: صفحه‌ای به عرض w و طول بی نهایت حامل جریان با چگالی سطحی $\overline{J}_S = J_{S_۰}\,\hat{a}_z$ مطابق شکل

می‌باشد میدان مغناطیسی در نقطه A را بدست آورید.

حل: اگر نواری بضخامت dx' از صفحه در نظر بگیریم این نوار را میتوان معادل یک سیم بسیار بلند با جریان $dI = J_{s_0}\, dx'$ در نظر گرفت.

چون صفحه در جهت z بی نهایت است میتوان نقطه A را در صفحه $z=0$ گرفت مطابق رابطه (۷-۶) میدان ناشی از نوار هاشور خورده در نقطه A عبارتست از:



$$dH_A = \frac{dI}{2\pi r}\,\hat{a}_\phi$$

که

$$\bar{r} = (x-x')\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y$$

$$\hat{a}_\phi = \frac{\left[-y\,\hat{a}_x + (x-x')\,\hat{a}_y\right]}{r}$$

بنابراین

$$dH_A = \frac{J_{s_0}\, dx'}{2\pi r^2}\left[-y\,\hat{a}_x + (x-x')\,\hat{a}_y\right]$$

$$H_A = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{J_{s_0}\, dx'}{2\pi}\; \frac{\left[-y\,\hat{a}_x + (x-x')\,\hat{a}_y\right]}{y^2 + (x-x')^2}$$

$$H_A = \frac{J_{s_0}}{2\pi}\left[tg^{-1}\frac{x-x'}{y}\right]_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\hat{a}_x + \left[-\frac{J_{s_0}}{4\pi}\ln\left(y^2+(x-x')^2\right)\right]_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}$$

$$H_A = \frac{J_{s_0}}{2\pi}\left[tg^{-1}\frac{x-\frac{w}{2}}{y} - tg^{-1}\frac{x+\frac{w}{2}}{y}\right]\hat{a}_x - \frac{J_{s_0}}{4\pi}\ln\frac{y^2+\left(x-\frac{w}{2}\right)^2}{y^2+\left(x+\frac{w}{2}\right)^2}\,\hat{a}_y$$

حال پاسخ را برای دو حالت خاص در نظر می‌گیریم.

الف) اگر $x=0$ یعنی نقطه A روی خط عمود منصف صفحه باشد.

$$H_A = \frac{-J_{s_0}}{\pi}\, tg^{-1}\frac{w}{2y}\,\hat{a}_x$$

ب) اگر $w \rightarrow \infty$ یعنی صفحه بی نهایت بزرگ باشد.

$$\bar{H}_A = \begin{cases} \dfrac{-J_{s_0}}{2}\,\hat{a}_x & y>0 \\[2mm] \dfrac{J_{s_0}}{2}\,\hat{a}_x & y<0 \end{cases}$$

حالت ب) را میتوان با رابطه کلی زیر بیان کرد:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\,\bar{J}_s \times \hat{a}_n \qquad (۷-۸)$$

در رابطه (۷-۸)، $\hat{a}_n$ برداریکه عمود بر صفحه و در جهت نقطه‌ای است که می‌خواهیم میدان را در آن نقطه حساب کنیم (در مثال قبل برای جلو صفحه $\hat{a}_n = \hat{a}_y$ و برای پشت صفحه $\hat{a}_n = -\hat{a}_y$ می‌باشد) مسئله قبل و میدان ناشی از یک صفحه به چگالی جریان سطحی $\bar{J}_s$ را میتوان از قانون بیوساوار که با رابطه (۷-۳) بیان شده نیز بدست آورد.

حال اگر یک دیسک به شعاع a که حامل جریان سطحی به چگالی $\bar{J}_s = J_{s_0}\,\hat{a}_\phi$ است را در نظر بگیریم می‌توانیم با

استفاده از میدان ناشی از یک حلقه میدان این دیسک را بدست آوریم فرض کنید حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr از این دیسک در نظر گرفته شود در اینصورت جریان معادل این حلقه عبارتست از $dI = J_{s_\circ}\, dr$ بنابراین میدان در روی محور دیسک به فاصله h در مرکز حلقه ناشی از حلقه به شعاع r و ضخامت dr مطابق رابطه (۷-۷) عبارتست از:

$$d\overline{H}_A = \frac{dI r^2}{2(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

بنابراین میدان ناشی از دیسک روی محور دیسک عبارتست از:

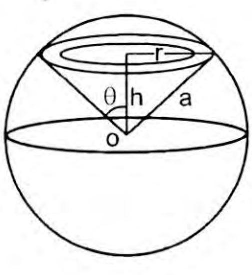
$$\overline{H}_A = \int_0^a \frac{\left(J_{s_\circ}\, dr\right) r^2}{2\left[h^2+r^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z = \left\{\frac{J_{s_\circ}}{2}\ln\left[\frac{a}{h}+\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2+1}\right] - \frac{J_{s_\circ}}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right\}\hat{a}_z$$

اگر پارامتر $\frac{a}{h}$ را x فرض کنیم رابطه بالا بصورت زیر خواهد شد.

$$\overline{H}_A = \frac{J_{s_\circ}}{2}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]\hat{a}_z$$

مثال ۷: کره‌ای بشعاع a دارای جریان با چگالی سطحی $\overline{J}_s = J_{s_\circ}\,\hat{a}_\phi$ می‌باشد با استفاده از میدان ناشی از یک حلقه جریان، میدان در مرکز کره را بدست آورید.

حل: اگر یک حلقه روی این کره مطابق شکل و به شعاع r در نظر بگیریم در اینصورت جریان معادل این حلقه عبارتست از $dI = J_{s_\circ}\, a\, d\theta$ که $a d\theta$ ضخامت حلقه است در اینصورت طبق رابطه (۷-۷) میدان ناشی از این حلقه در روی محور آن عبارتست از:



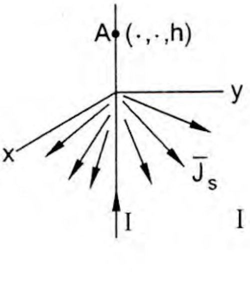
$$\overline{dH_o} = \frac{\left(J_{s_\circ}\, a\, d\theta\right) r^2}{2\left[h^2+r^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

که $r = a\sin\theta$ و $h = a\cos\theta$ *بنابراین:*

$$\overline{dH_o} = \frac{J_{s_\circ}\sin^2\theta\, d\theta}{2}\hat{a}_z$$

$$\overline{H}_o = \int_0^\pi \frac{J_{s_\circ}}{2}\sin^2\theta\, d\theta\,\hat{a}_z = \frac{J_{s_\circ}\pi}{4}\hat{a}_z$$

مثال ۸: جریان I که در قسمت منفی محور z وجود دارد به صفحه xy برخورد کرده و بطور یکنواخت روی ربع اول صفحه xy بطور یکنواخت و شعاعی پخش می‌شود میدان مغناطیسی روی محور z و در نقطه $(0,0,h)$ که $h>0$ است بدست آورید.



حل: فرض کنید که چگالی سطحی جریان روی صفحه xy برابر با $\overline{J}_s = J_{s_\circ}\,\hat{a}_R$ باشد در اینصورت خواهیم داشت:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{s_\circ} R\, d\phi \;\rightarrow\; J_{s_\circ} = \frac{2I}{R\pi} \;\rightarrow\; \overline{J}_s = \frac{2I}{R\pi}\hat{a}_R$$

حال از رابطه (۷-۳) میدان در نقطه A را بدست می‌آوریم.

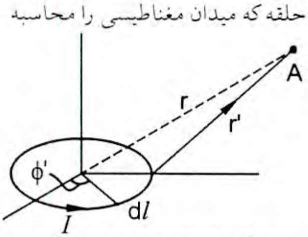
$$\overline{H}_A = \int_s \frac{\overline{J}_s \times \hat{a}_r}{4\pi r^2} ds = \int_s \frac{2I}{R\pi} \hat{a}_R \times \frac{\left(h\,\hat{a}_z - R\,\hat{a}_R\right) ds}{4\pi\left[h^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$H_A = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{I\,(-h\,\hat{a}_\phi)\,R\,d\phi\,dR}{2\pi^2 R\left[h^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-Ih}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\hat{a}_x\ \sin\phi + \hat{a}_y \cos\phi)\,dR\,d\phi}{\left[h^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{Ih}{2\pi^2}\left(\hat{a}_x - \hat{a}_y\right) \int_0^\infty \frac{dR}{\left[h^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{2\pi^2 h}\left(\hat{a}_x - \hat{a}_y\right)$$

۷-۳ - دو قطبی مغناطیسی

یک حلقه جریان به شعاع a و جریان I که شعاع آن در مقابل فاصله نقطه‌ای از حلقه که میدان مغناطیسی را محاسبه می‌کنیم خیلی کوچک است دو قطبی مغناطیسی می‌نامیم حال میدان ناشی از این دو قطبی را در نقطه A به فاصله r از مرکز این دو قطبی $(r \gg a)$ را بدست می‌آوریم طبق قانون بیوساوار خواهیم داشت



شکل (۷-۴) میدان ناشی از یک دو قطبی مغناطیسی

$$\overline{H}_A = \oint \frac{I\,\overline{d\ell} \times \hat{a}_{r'}}{4\pi r'^2}$$

$$\overline{r'} = \left[r\sin\theta\cos\phi - a\cos\phi'\right]\hat{a}_x + \left[r\sin\theta\sin\phi - a\sin\phi'\right]\hat{a}_y + r\cos\theta\,\hat{a}_z$$

$$\overline{H}_A = \int \frac{I\,a\,d\phi'\,\hat{a}_\phi \times \left\{\left[r\sin\theta\cos\phi - a\cos\phi'\right]\hat{a}_x + \left[r\sin\theta\sin\phi - a\sin\phi'\right]\hat{a}_y + r\cos\theta\,\hat{a}_z\right\}}{4\pi\left[r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos(\phi - \phi')\right]^{\frac{3}{2}}}$$

با توجه به اینکه $r \gg a$ مخرج را می‌توانیم بصورت زیر ساده کنیم.

$$\text{مخرج} = 4\pi r^3\left[1 - 2\frac{a}{r}\sin\theta\cos(\phi - \phi')\right]^{\frac{3}{2}}$$

که با جایگزینی در رابطه $\overline{H}_A$ خواهیم داشت:

$$\overline{H}_A = \frac{Ia}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\frac{a}{r}\sin\theta\cos(\phi - \phi')\right]^{-\frac{3}{2}} d\phi' \left[-\hat{a}_x \sin\phi' + \hat{a}_y \cos\phi'\right] \times \overline{r'}$$

که طبق بسط نیوتن $(1+x)^n = 1 + nx$ اگر $x \ll 1$ باشد داریم:

$$\overline{H}_A = \frac{Ia}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 3\frac{a}{r}\sin\theta\cos(\phi - \phi')\right) d\phi' \left[-a_x \sin\phi' + a_y \cos\phi'\right] \times \overline{r'}$$

انتگرال بالا به انتگرال توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس زاویه ϕ' محدود می‌شود که بسادگی قابل محاسبه است که پس از ساده شدن خواهیم داشت:

$$\overline{H}_A = \frac{\pi a^2 I}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right) \qquad (۹-۷)$$

البته در رابطه (۷-۹) از تبدیل بردارهای یکه قائم به کروی استفاده کرده‌ایم عبارت $\pi a^2 I$ که حاصلضرب مساحت

حلقه در جریان آن می‌باشد را ممان دو قطبی مغناطیسی می‌نامیم بطوریکه $m = \pi a^۲ I$ که m ممان حلقه است بنابراین:

$$\overline{H}_A = \frac{m}{۴\pi r^۳}\left[۲\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right] \qquad (۱۰\text{-}۷)$$

این رابطه بسیار شبیه میدان الکتریکی ناشی از دو قطبی الکتریکی (رابطه (۲-۳۲)) می‌باشد.

برای محاسبه میدان روی محور دو قطبی باید $\theta = ۰$ قرار دهیم در اینصورت $\hat{a}_r = \hat{a}_z$ و خواهیم داشت:

$$\overline{H} = \frac{m}{۲\pi r^۳}\hat{a}_z = \frac{I a^۲}{۲r^۳}\hat{a}_z$$

که این همان میدان ناشی از حلقه روی محور حلقه با فرض $h = r \gg a$ می‌باشد.

مثال ۹: یک حلقه به شعاع ۱^{cm} دارای جریان ۱۰^{A} می‌باشد میدان مغناطیسی در نقطه $A(۳,۴,۵)$ بدست آورید که مختصات A بر حسب متر می‌باشد.

حل:

$$r = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}^{m} \gg ۱^{cm}$$

چون فاصله r بسیار از a شعاع حلقه بزرگتر است بنابراین باید از فرمول میدان ناشی از دو قطبی مغناطیسی استفاده شود.

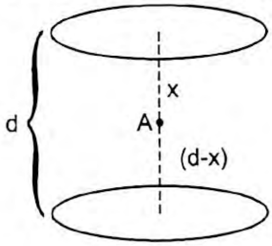
$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{۵}{۵\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\overline{H} = \frac{m}{۴\pi r^۳}\left[۲\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

$$m = \pi a^۲ I = \pi \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰ = ۱۰^{-۳}\pi$$

$$\overline{H} = \frac{۱۰^{-۳}\pi}{۴\pi \times (۵\sqrt{۲})^۳}\left[\sqrt{۲}\,\hat{a}_r + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{a}_\theta\right] = ۱۰^{-۶}\left[\hat{a}_r + \frac{۱}{۲}\hat{a}_\theta\right]$$

مثال ۱۰: دو حلقه بشعاع a حامل جریان I می‌باشند و بفاصله d و بموازات هم قرار گرفته‌اند در چه نقطه‌ای روی محور و بین دو حلقه میدان H حداکثر است.



حل: **میدان در نقطه‌ای بین دو حلقه از اصل جمع آثار بدست می‌آید.**

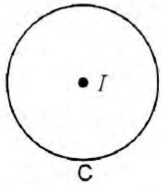
$$H_A = \frac{I a^۲}{۲\left[x^۲+a^۲\right]^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{I a^۲}{۲\left[(d-x)^۲+a^۲\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\frac{dH_A}{dx} = \frac{I a^۲}{۲}\left[-۲x \times \frac{۳}{۲}\left[x^۲+a^۲\right]^{-\frac{۵}{۲}} + ۲(d-x)\frac{۳}{۲}\left[(d-x)^۲+a^۲\right]^{\frac{-۵}{۲}}\right] = ۰$$

$$\rightarrow \quad \frac{-۳x}{\left[x^۲+a^۲\right]^{\frac{۵}{۲}}} + \frac{۳(d-x)}{\left[(d-x)^۲+a^۲\right]^{\frac{۵}{۲}}} = ۰ \quad \rightarrow x = \frac{d}{۲}$$

۷-۴- قانون آمپر

در قسمت قبل با نحوه محاسبه میدان مغناطیسی ساکن با استفاده از قانون بیوساوار آشنا شدیم اکنون قانون دیگری موسوم به قانون آمپر را مورد بررسی قرار می‌دهیم که کاربردی نظیر کاربرد قانون گوس در مبحث میدان الکتریکی ساکن دارد این قانون بطوریکه بعداً خواهیم دید برای محاسبه میدان مغناطیسی برخی توزیعهای جریان متقارن بسیار مفیدتر از قانون بیوساوار است. برای استخراج قانون مداری آمپر از میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم جریان بطول بی نهایت شروع می‌کنیم فرض می‌کنیم که این سیم حامل جریان I و منطبق بر محور z می‌باشد مسیر دایره‌ای C را مطابق شکل (۷-۵) طوری در نظر می‌گیریم که اگر پیچ راستگردی در آن جهت چرخانده شود پیشروی پیچ در جهت جریان I باشد میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم جریان بی نهایت طویل را قبلاً محاسبه کردیم حالا انتگرال $\oint_c \overline{H}.\overline{d\ell}$ را بدست می‌آوریم.



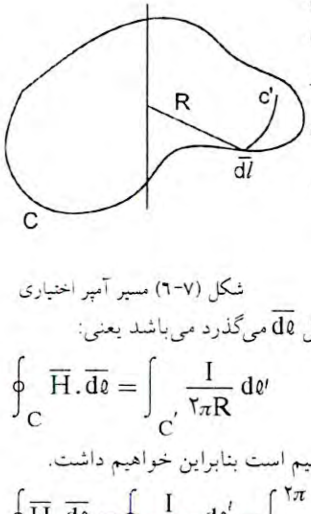
شکل (۷-۵) محاسبه انتگرال آمپر

$$\oint_c \overline{H}.\overline{d\ell} = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi R}\,\hat{a}_\phi . R\,d\phi\,\hat{a}_\phi$$

و یا

$$\oint_c \overline{H}.\overline{d\ell} = I \qquad (۷-۱۱)$$

رابطه (۷-۱۱) بیان می‌کند که انتگرال $\overline{H}$ روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع دلخواه R که در صفحه عمود بر سیم بی‌نهایت طویل حامل جریان I قرار گرفته و در عین حال مرکز آن بر سیم منطبق است همواره مساوی با I می‌باشد اکنون مسیر بسته دلخواه C که سیم حامل جریان را در بر می‌گیرد مطابق شکل (۷-۶) در نظر بگیرید میدان روی مسیر و در محل عنصر $\overline{d\ell}$ بصورت $H = \frac{I}{2\pi R}\,\hat{a}_\phi$ که $\hat{a}_\phi$ برداریکه مماس بر دایره گذرانیده شده از محل $\overline{d\ell}$ و به شعاع R می‌باشد اگر انتگرال آمپر را بنویسیم خواهیم داشت.



شکل (۷-۶) مسیر آمپر اختیاری

$$\int \overline{H}.\overline{d\ell} = \int \frac{I}{2\pi R}\,\hat{a}_\phi . \overline{d\ell}$$

اما $\hat{a}_\phi . \overline{d\ell} = d\ell'$ که $d\ell'$ تصویر عنصر $d\ell$ روی دایره‌ای بشعاع R که از محل $\overline{d\ell}$ می‌گذرد می‌باشد یعنی:

$$\oint_C \overline{H}.\overline{d\ell} = \int_{C'} \frac{I}{2\pi R}\,d\ell'$$

که C' دایره‌ای است که شعاع آن فاصله عنصر $\overline{d\ell}$ در هر نقطه از مسیر C تا سیم است بنابراین خواهیم داشت.

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = \oint \frac{I}{2\pi R}\,d\ell' = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi R}\,R\,d\phi = I$$

بنابراین همواره $\oint_C \overline{H}.\overline{d\ell}$ روی هر مسیر بسته‌ای که جریان I را در برمی‌گیرد برابر جریان I می‌باشد.

مثال ۱۱: سیمی بشعاع a حامل جریان I می‌باشد که بطور یکنواخت در سطح مقطع سیم توزیع شده است با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی در داخل و خارج سیم را بدست آورید.

حل: ***برای نقطه‌ای در داخل سیم و بفاصله R از محور سیم میدان را بدست می‌آوریم یک مسیر دایره‌ای که از این نقطه می‌گذرد در نظر می‌گیریم (دایره بشعاع R) در اینصورت خواهیم داشت.***

$$\oint_C \overline{H}.\overline{d\ell} = I' = \frac{I}{\pi a^2}\,\pi R^2$$

$$H\,۲\pi R = I\frac{R^۲}{a^۲} \rightarrow \overline{H} = \frac{IR}{۲\pi a^۲}\hat{a}_\phi \qquad R<a$$

که I' جریان عبور کننده از دایره‌ای به شعاع R می‌باشد. حال برای نقطه‌ای خارج سیم (R>a) قانون آمپر را بکار می‌بریم مسیر آمپر را دایره‌ای بشعاع R>a در نظر می‌گیریم در اینصورت خواهیم داشت.

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = I \rightarrow H\,۲\pi R = I \rightarrow \overline{H} = \frac{I}{۲\pi R}\hat{a}_\phi \qquad R>a$$

بنابراین

$$\overline{H} = \begin{cases} \dfrac{IR}{۲\pi a^۲}\hat{a}_\phi & R<a \\ \dfrac{I}{۲\pi R}\hat{a}_\phi & R>a \end{cases}$$

نکته مهم اینست که استفاده از قانون آمپر برای محاسبه میدان مغناطیسی منوط به کسب اطلاعات اولیه‌ای دربارهٔ جهت و اندازه میدان می‌باشد زیرا بردار $\overline{H}$ باید مماس یا عمود بر مسیر انتگرال‌گیری باشد و اندازه $\overline{H}$ در جاهایی که مماس بر مسیر است باید ثابت باشد این اطلاعات اولیه را بکمک قانون بیوساوار و با در نظر گرفتن تقارن توزیع جریان بدست می‌آوریم.

مثال ۱۲: سیمی به شعاع a حامل جریان غیر یکنواخت به چگالی $\overline{J} = J_۰\frac{R}{a}\hat{a}_z$ می‌باشد میدان مغناطیسی در داخل و خارج سیم را بدست آورید.

حل:

$$R<a \qquad \oint \overline{H}.\overline{d\ell} = \int_۰^R\int_۰^{۲\pi}\overline{J}.\overline{ds} = \int_۰^R\int_۰^{۲\pi} J_۰\frac{R}{a}R\,dR\,d\phi$$

$$H(۲\pi R) = \frac{J_۰}{a}۲\pi \times \frac{۱}{۳}R^۳ \rightarrow \overline{H} = \frac{J_۰R^۲}{۳a}\hat{a}_\phi \quad , \quad R<a$$

$$R>a \qquad \oint \overline{H}.\overline{d\ell} = \int_۰^a\int_۰^{۲\pi}\overline{J}.\overline{ds} = \int_۰^a\int_۰^{۲\pi} J_۰\frac{R}{a}R\,dR\,d\phi$$

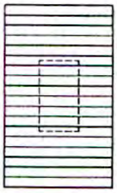
$$\rightarrow \quad H(۲\pi R) = J_۰\,۲\pi \times \frac{۱}{۳}a^۳ \rightarrow \overline{H} = \frac{J_۰a^۲}{۳R}\hat{a}_\phi \qquad R>a$$

بنابراین

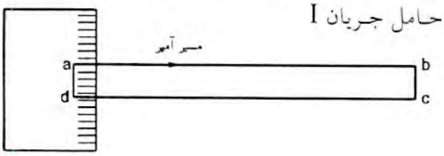
$$\overline{H} = \begin{cases} \dfrac{J_۰R^۲}{۳a}\hat{a}_\phi & R<a \\ \dfrac{J_۰a^۲}{۳R}\hat{a}_\phi & R>a \end{cases}$$

مثال ۱۳: یک سیم پیچ بسیار طویل بطور پیوسته و یکنواخت سیم پیچی شده است شعاع این سیم پیچ برابر a و جریان گذرنده از سیم پیچ برابر I و تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول برابر n است میدان مغناطیسی را در داخل و خارج سیم پیچ بدست آورید محور سیم پیچ را محور z فرض کنید.

*حل: **بدلیل وجود تقارن استوانه‌ای نسبت به محور z و بی نهایت بودن طول سیم پیچ میدان مغناطیسی مستقل از ϕ و z است بعلاوه به کمک قانون دست راست نشان داده می‌شود که میدان فقط مولفه H_z دارد. مطالب گفته شده را میتوان توسط قانون آمپر نیز ثابت کرد:***



اگر مسیر بسته مستطیل شکل را بعنوان مسیر بسته آمپر داخل سیم پیچ در نظر بگیریم چون هیچ جریانی از این مسیر عبور نمی‌کند پس $\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = ۰$ و چون H فقط مولفه z دارد $\oint \overline{H}.\overline{d\ell}$ روی خطهای افقی صفر است و نتیجه می‌شود H_z روی ضلعهای عمودی مساوی است بعبارت دیگر H_z تابع R نیست (R فاصله از محور استوانه است) حال مسیر آمپر را یک مستطیل فرض می‌کنیم که یک ضلع آن مطابق شکل در بی نهایت قرار دارد (ضلع bc در ∞ است) حال رابطه آمپر را می‌نویسیم چون ضلع ad بطول l می‌باشد در اینصورت تعداد سیم‌های موجود در طول ad برابر است با nl پس nl سیم که هر کدام حامل جریان I می‌باشد مستطیل را قطع کرده است بنابراین داریم:



$$\oint_{adcda} \overline{H}.\overline{d\ell} = (nl)\,I$$

$$\int_a^b \overline{H}.\overline{d\ell} + \int_b^c \overline{H}.\overline{d\ell} + \int_c^d \overline{H}.\overline{d\ell} + \int_d^a \overline{H}.\overline{d\ell} = (nl)\,I$$

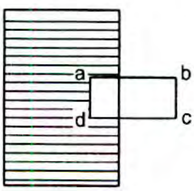
چون تنها مولفه H_z موجود است پس انتگرال $\int_a^b \overline{H}.\overline{d\ell}$ و $\int_c^d \overline{H}.\overline{d\ell}$ صفر هستند چون $\overline{d\ell} \perp \overline{H}$ از طرفی چون H در بی نهایت صفر است پس H روی ضلع bc صفر است $\int_b^c \overline{H}.\overline{d\ell}$ صفر است و چون H روی ضلع ad ثابت است رابطه بالا بصورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\int_d^a \overline{H}.\overline{d\ell} = (H.l) = nl\,I$$

و یا

$$\overline{H} = nI\,\hat{a}_z$$

حال میدان در خارج سیم پیچ را بدست می‌آوریم برای اینکار ضلع bc را بجای اینکه در ∞ قرار گیرد در خارج و نزدیک سیم پیچ قرار داده می‌شود.



$$\oint \overline{H}.d\ell = (n\ell)\,I$$

$$\oint_a^b H.d\ell + \int_b^c H.d\ell + \int_c^d H.d\ell + \int_d^a H.d\ell = (n\ell)\,I$$

انتگرال اول و سوم صفر است چون $\overline{d\ell} \perp \overline{H}$ عمود است بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_b^c H.d\ell + \int_d^a H.d\ell = (nl)\,I \;\rightarrow\; \int_b^c H.d\ell + \int_d^a (nI)\,d\ell = (n\ell)\,I$$

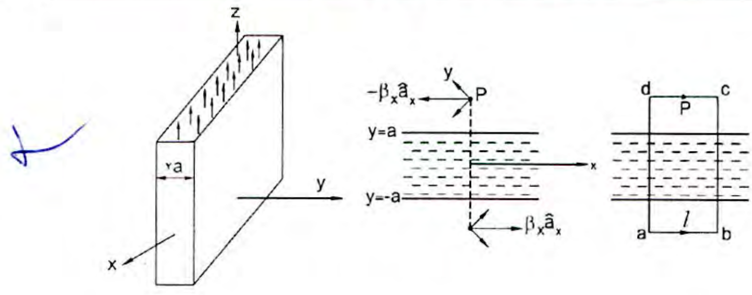
و یا

$H = ۰$ روی مسیر bc

یعنی H در خارج سیم پیچ صفر است بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{H} = \begin{cases} nI\,\hat{a}_z & R<a \\ ۰ & R>a \end{cases}$$

مثال ۱۴: جریان الکتریکی در امتداد محور z و با چگالی یکنواخت $J_۰$ در ناحیه‌ای از فضا که بین دو صفحه y=a و y=-a محصور شده است می‌گذرد مطلوبست میدان مغناطیسی ناشی از این توزیع جریان در تمام نقاط فضا



شکل (۷-۷) الف) جریان الکتریکی با چگالی $J = J_\circ\ \hat{a}_z$ در ناحیه $a > |\,y\,|$ توزیع شده است ب) در ناحیه $y<\circ$ میدان در جهت $\hat{a}_x$ در ناحیه $y>\circ$ میدان در جهت $\hat{a}_x$ - است. ج) محاسبه میدان بکمک قانون آمپر.

فرض کنید که بخواهیم میدان را درنقطه‌ای مثل P بدست آوریم محورهای مختصات را طوری در نظر می‌گیریم که محور y از آن نقطه بگذرد حال اگر لایه مسطح جریان را بمنزله یک مجموعه جریان رشته‌ای تلقی کنیم که موازی محور z هستند در اینصورت میدانی که هر دو رشته متقارن واقع در (x', y') و $(-x', y')$ در نقطه P بوجود می‌آورند همانطوریکه در شکل(۷-۷) نشان داده شده است فقط دارای مولفه x می‌باشد البته اگر $y_P>\circ$ باشد میدان در جهت $\hat{a}_x$ - است و اگر $y_P<\circ$ باشد میدان در جهت $\hat{a}_x$ خواهد بود از طرف دیگر چون توزیع جریان در امتداد محورهای x و z بی نهایت ادامه دارد میدان تابعی از x و z نخواهد بود. در نتیجه میدان کل حاصل از لایه مسطح جریان فقط مولفه H_x داشته و در هر صفحه عمود بر محور y اندازه‌ای ثابت دارد با در نظرگرفتن این ویژگی‌های میدان، مسیر بسته abcd را مطابق شکل (۷-۷) برای محاسبه میدان با استفاده از قانون آمپر انتخاب می‌کنیم در این مسیر که نسبت به محور x متقارن است، $ab=cd=l$ و cd بفاصله y از محور x فرض می‌شود. با بکار بردن قانون آمپر میتوان نوشت:

$$\oint_{abcd} \overline{H}.\overline{\ell} = \int_a^b \overline{H}.\overline{d\ell} + \int_b^c \overline{H}.\overline{d\ell} + \int_c^d \overline{H}.\overline{d\ell} + \int_d^a \overline{H}.\overline{d\ell} = I$$

که I جریان عبور کننده از مسیر بسته adcb است در رابطه بالا انتگرال‌های دوم و چهارم صفر هستند زیرا $\overline{H} \perp \overline{d\ell}$ (میدان بر اضلاع bc و da عمود است) بعلاوه اندازه $\overline{H}$ روی اضلاع ab و cd که بفواصل مساوی از محور x می‌باشند یکسان است بالاخره جریان I برای حالاتی که $a < |\,y\,|$ و $|\,y\,| < a$ مقادیر متفاوتی دارد که میتوان بصورت زیر خلاصه نمود.

$$I = \begin{cases} J_\circ\ (\text{۲}al) & |\,y\,| > a \\ J_\circ\,(\text{۲}yl) & |\,y\,| < a \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\oint_{abcd} \overline{H}.\overline{d\ell} = \int_a^b H_x\ \hat{a}_x\,.dx\,\hat{a}_x + \int_c^d - H_x\,\hat{a}_x\,.(-dx\,\hat{a}_x) = \text{۲}\ell H_x = \begin{cases} J_\circ\ \text{۲}a\ell & |\,y\,| > a \\ J_\circ\ \text{۲}y\,\ell & |\,y\,| < a \end{cases}$$

$$\rightarrow\ H_x = \begin{cases} -J_\circ y & |\,y\,| < a \\ -J_\circ a & y>a \\ J_\circ a & y<-a \end{cases}$$

همین مسئله را میتوان از تعمیم میدان ناشی از یک صفحه بی‌نهایت بزرگ به چگالی جریان سطحی J_S بدست آورد میتوان فضای بین $y=a$ و $y=-a$ را به بی نهایت صفحات بسیار بزرگ به ضخامت dy در نظر گرفت که اگر طول این صفحه را در جهت x برابر X بگیریم در اینصورت کل جریان در هرکدام از این صفحات برابر است با $J_\circ Xdy$ که اگر این

جریان را بر X تقسیم کنیم برابر $J_{\circ}dy$ می‌شود که این همان جریان سطحی معادل می‌باشد پس ناحیه بین a و $-a$ را میتوان به بی نهایت صفحات عمود بر محور y و با چگالی جریان سطحی $J_{\circ}dy$ و ضخامت dy در نظر گرفت حال میدان ناشی از هر کدام از این صفحات عبارتست از:

$$\overline{dH} = \frac{1}{2}\bar{J}_s \times \hat{a}_n = \frac{1}{2}J_{s_\circ}\hat{a}_z \times \hat{a}_n = \frac{1}{2}J_{\circ}dy\,\hat{a}_z \times \begin{cases} \hat{a}_y = -\frac{1}{2}J_{\circ}dy\,\hat{a}_x & y>0 \\ -\hat{a}_y = \frac{1}{2}J_{s_\circ}dy\,\hat{a}_x & y<0 \end{cases}$$

$$\text{یا } dH_x = \begin{cases} -\frac{1}{2}J_{\circ}dy \\ \frac{1}{2}J_{\circ}dy \end{cases}$$

حال برای $y>a$ داریم:

$$H_x = \int_{-a}^{a} dH = \int_{-a}^{a} -\frac{1}{2}J_{\circ}dy = -J_{\circ}a$$

برای $y<-a$ داریم:

$$H_x = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}Js_{\circ}dy = J_{\circ}a$$

برای $0<y<a$ داریم:

$$H_x = \int_{-a}^{y} -\frac{1}{2}J_{\circ}dy + \int_{y}^{a}\frac{1}{2}J_{\circ}dy = -J_{\circ}y$$

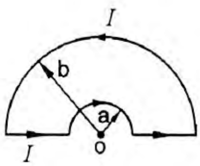
و برای $-a<y<0$ داریم:

$$H_x = \int_{-a}^{y} -\frac{1}{2}J_{\circ}dy + \int_{y}^{a}\frac{1}{2}J_{\circ}dy = -J_{\circ}y$$

که همان نتایج استفاده از قانون آمپر می‌باشد.

سوالهای قانون بیوساوار و آمپر

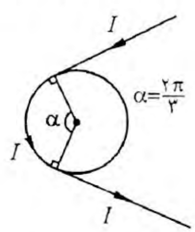
۱. در شکل زیر میدان در نقطه o کدام است؟



۱) $\frac{I}{۴a}-\frac{I}{۴b}$ ۲) $\frac{I}{۴a}+\frac{I}{۴b}$

۳) $\frac{I}{۲a}-\frac{I}{۲b}$ ۴) $\frac{I}{۲a}+\frac{I}{۲b}$

۲. سیم بلندی حامل جریان I در صفحه z=۰ مطابق شکل قرار دارد میدان الکتریکی در مرکز دایره کدام است؟



۱) $I\left[\frac{۱}{۲\pi a}+\frac{۳}{۲a}\right]$

۲) $I\left[\frac{۱}{۲\pi a}+\frac{۱}{۶a}\right]$

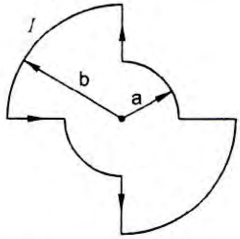
۳) $\frac{۲I}{۳a}$

۴) $\frac{I}{۴\pi a}$

۳. کره‌ای بشعاع a و چگالی بار حجمی ρ بار سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد میدان در مرکز کره را بدست آورید؟

۱) $\frac{\rho\omega\pi a^{۲}}{۸}\hat{a}_z$ ۲) $\frac{\rho a^{۲}\omega}{۲}\hat{a}_z$ ۳) $\frac{\rho\omega a^{۲}}{۳}\hat{a}_z$ ۴) صفر

۴. در شکل زیر میدان در نقطه o کدام است؟



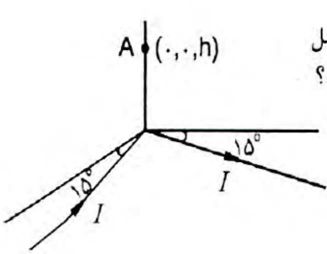
۱) صفر ۲) $I\left[\frac{۱}{۴a}-\frac{۱}{۴b}\right]$

۳) $I\left[\frac{۱}{۲a}+\frac{۱}{۲b}\right]$ ۴) $I\left[\frac{۱}{۴a}+\frac{۱}{۴b}\right]$

۵. یک دیسک بشعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی ρ_s می‌باشد این دیسک با سرعت زاویه ω حول محورش می‌چرخد میدان مغناطیسی در مرکز حلقه را بدست آورید؟

۱) $\rho_s\omega\frac{a}{۲}$ ۲) $\rho_s\omega a$ ۳) $\frac{۱}{۳}\rho_s\omega a$ ۴) صفر

۶. دو سیم مطابق شکل در صفحه xy با هم زاویه °۶۰ می‌سازند و حامل جریان I می‌باشند میدان در روی محور z بفاصله h از مبدا کدام است؟



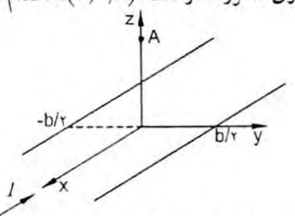
۱) $\frac{I}{۴\pi h}\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{I}{۴\pi h}\sqrt{۳}$

۳) $\frac{I}{۴\pi h}$ ۴) صفر

۷. یک استوانه بسیار بلند به شعاع a دارای بار حجمی یکنواخت با چگالی ρ است این استوانه حول محور z با سرعت زاویه ω رادیان بر ثانیه می‌چرخد میدان در $R=\frac{a}{۲}$ کدام است؟

۱) $۳\rho\,\frac{\omega a^{۲}}{۸}$ ۲) $\frac{\rho\omega a^{۲}}{۸}$ ۳) $\rho\omega\,\frac{a^{۲}}{۴}$ ۴) $۳\rho\,\omega\,\frac{a^{۲}}{۴}$

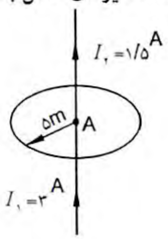
۸. نواری به پهنای b در صفحه xy مطابق شکل حامل جریان کل I می‌باشد که بطور یکنواخت روی آن پخش شده است طول نوار در جهت x بی نهایت است میدان مغناطیسی روی محور z در نقطه $A(۰,۰,h)$ کدام است؟



۱) $\frac{I}{۲\pi b}\,tg^{-۱}\,\frac{b}{h}\,\hat{a}_y$ ۲) $\frac{I}{\pi b}\,tg^{-۱}\,\frac{b}{۲h}$

۳) $\frac{I}{\pi b}\,tg^{-۱}\,\frac{b}{h}$ ۴) صفر

۹. روی سیم بی نهایت بلند نقطه A با قابلیت ذخیره سازی بار الکتریکی مفروض است بطوریکه جریان ۳^{A} به آن وارد و جریان $۱/۵^{A}$ از آن خارج می‌شود مقدار $\oint \overline{H}\,.\,\overline{d\ell}$ را روی مسیر بسته دایره‌ای شکل به مرکز A و شعاع ۵^{m} واقع در صفحه عمود بر سیم چقدر است؟



۱) ۲

۲) ۳

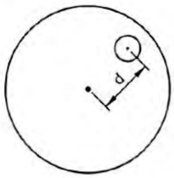
۳) ۱/۵

۴) ۲/۲۵

۱۰. یک پوسته استوانه‌ای بشعاع داخلی a و شعاع خارجی ۲a دارای جریان با چگالی $J=J_۰\,\frac{R}{a}\,\hat{a}_z$ می‌باشد سیمی حامل جریان I در محور این پوسته قرار داده می‌شود جریان I چقدر باشد تا میدان در $R>۲a$ صفر باشد؟

۱) $\frac{-۸J_۰\,\pi a^{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{-۷J_۰\,\pi a^{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{-۱۳J_۰\,\pi a^{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{-۱۴J_۰\,\pi a^{۲}}{۳}$

۱۱. یک استوانه بسیار طویل بشعاع a که محور آن بر محور z منطبق است حامل جریان با چگالی $J=J_۰\,\hat{a}_z$ مفروض است حفره‌ای استوانه‌ای به شعاع b به موازات محور آن استوانه و بفاصله d از محور این استوانه ایجاد می‌کنیم بطوریکه محور آن از خط $\phi=\frac{\pi}{۴}$ مطابق شکل می‌گذرد میدان مغناطیسی در داخل این حفره کدام است؟

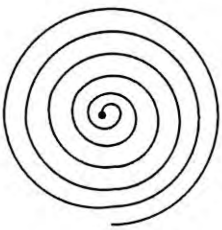


۱) $\frac{J_۰\sqrt{۲}\,d}{۲}\left(\hat{a}_y-\hat{a}_x\right)$ ۲) $\frac{J_۰\sqrt{۲}\,d}{۴}\left(\hat{a}_y-\hat{a}_x\right)$

۳) $\frac{J_۰\sqrt{۲}\,d}{۲}\left(\hat{a}_x-\hat{a}_y\right)$ ۴) $J_۰\sqrt{۲}\,d\left(\hat{a}_x-\hat{a}_y\right)$

۱۲. یک سیم پیچ مسطح شامل N دور مطابق شکل در صفحه xy قرار گرفته است شعاع داخلی سیم پیچ R_i و

شعاع خارجی آن R_O می‌باشد میدان مغناطیسی در مرکز O کدام است فرض کنید جریان سیم پیچ I می‌باشد.



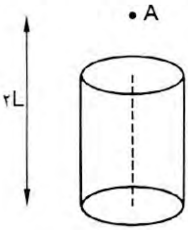
۱) $\frac{NI}{(R_o - R_i)} \ln \frac{R_o}{R_i}$

۲) $\frac{NI}{R_o + R_i} \ln \frac{R_o}{R_i}$

۳) $\frac{NI}{۲(R_o + R_i)} \ln \frac{R_o}{R_i}$

۴) $\frac{NI}{R_o R_i} \ln \frac{R_o}{R_i}$

۱۳. یک سیم پیچ شامل N دور بطول L که محور آن بر محور z منطبق است مفروض است میدان مغناطیسی در روی محور آن و در z=۲L کدام است اگر جریان سیم پیچ I باشد. شعاع سیم پیچ را a فرض کنید (L=a).

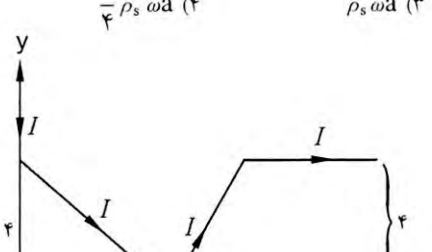


۱) $۰/۱۹ \frac{NI}{L}$ ۲) $۰/۱۴ \frac{NI}{L}$

۳) $۰/۲۴ \frac{NI}{L}$ ۴) $۰/۴۲ \frac{NI}{L}$

۱۴. کره‌ای بشعاع a و چگالی بار سطحی ρ_s با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد میدان مغناطیسی در مرکز کره کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳} \rho_s \omega a$ ۲) $\frac{۲}{۳} \rho_s \omega a$ ۳) $\rho_s \omega a$ ۴) $\frac{۱}{۴} \rho_s \omega a$



۱۵. در شکل زیر میدان در نقطه O کدام است؟

۱) $۰/۲۴ \frac{I}{\pi}$ ۲) $۰/۱۴ \frac{I}{\pi}$

۳) $۰/۴۲ \frac{I}{\pi}$ ۴) $۰/۱۲ \frac{I}{\pi}$

پاسخ سوالهای قانون بیوساوار و آمپر

۱. گزینهٔ ۱) میدان ناشی از قطعه‌های شعاع در O صفر است زیرا O در امتداد این قطعه‌ها می‌باشد پس میدان ناشی از دو نیم دایره بشعاع b,a داریم که میدان هرکدام به ترتیب $\frac{I}{4a}$ و $\frac{I}{4b}$ می‌باشد ولی چون جریانها عکس هم هستند میدان کل تفاضل این میدانها است یعنی

$$H=\frac{I}{4a}-\frac{I}{4b}$$

۲. گزینهٔ ۲) میدان در نقطه O ناشی از سه سیم است دو سیم مماس بر دایره و قسمت $\frac{1}{3}$ دایره میدان ناشی از هر کدام از سیم‌ها مماس بر دایره برابر است با $\frac{I}{4\pi a}$ (برای سیم بالایی $\alpha_1=0$ و $\alpha_2=90^\circ$ و برای سیم پائینی $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$ و $\alpha_2=\pi$) و برای قسمت $\frac{1}{3}$ دایره میدان عبارتست از $\frac{I}{2a}\times\frac{1}{3}$ پس میدان کل عبارتست از:

$$H=\frac{I}{4\pi a}\times 2+\frac{1}{3}\times\frac{I}{2a}=I\left[\frac{1}{2\pi a}+\frac{1}{6a}\right]$$

۳. گزینهٔ ۳) اگر نقطه‌ای بفاصله r از مرکز کره و در داخل کره درنظر بگیریم سرعت خطی آن $\omega(r\sin\theta)$ می‌باشد پس چگالی حجمی جریان معادل آن عبارتست از $J=\rho v=\rho r\sin\theta\,\omega$ حال از فرمول بیوساوار برای جریان حجمی استفاده می‌کنیم.

$$\overline{H}_O=\int_v\frac{\overline{J}\times\hat{a}_R}{4\pi R^2}dv=\int_v\frac{(\rho r\sin\theta\omega)\,\hat{a}_\phi\times(-\hat{a}_r)}{4\pi r^2}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr$$

$$=\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\omega\rho r\sin^2\theta\,d\theta\,d\phi\,(-\hat{a}_\theta)}{4\pi}=\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\omega\rho r\sin^2\theta\,d\theta\,d\phi\,(\hat{a}_z\sin\theta)}{4\pi}$$

$$=\frac{\rho\omega}{2}a^2\times 2\pi\times\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\hat{a}_z\sin^3\theta\,d\theta=\frac{a^2}{4}\times\rho\omega\times\frac{4}{3}\hat{a}_z=\frac{\rho a^2\omega}{3}\hat{a}_z$$

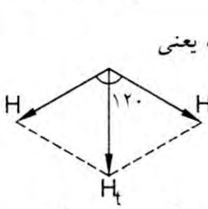
۴. گزینهٔ ۴) ۴ قطعه شعاع، میدان صفر در O ایجاد می‌کنند زیرا O در راستا این قطعه‌ها است پس کلاً دو نیم دایره بشعاع a و b داریم پس

$$H_0=\frac{I}{4a}+\frac{I}{4b}$$

۵. گزینهٔ ۱) اگر نوار حلقوی بضخامت dr و بشعاع r در نظر می‌گیریم جریان معادل موجود در این نوار دایروی برابر است با $\rho_s(2\pi r\,dr)\frac{\omega}{2\pi}$ یعنی $dI=\rho_s\,\omega r dr$ میدان در مرکز این حلقه همانطوریکه قبلاً دیدیم عبارتست از $dH=\frac{dI}{2r}$ یعنی $dH=\rho_s\omega\frac{dr}{2}$ پس $H=\int_0^a dH=\rho_s\omega\frac{a}{2}$

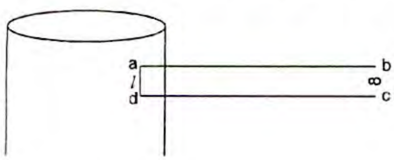
۶. گزینهٔ ۳) میدان ناشی از هر سیم در نقطه A برابر است با $H=\frac{I}{4\pi h}$ زیرا برای سیم اول $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ و

برای سیم دوم $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2=\pi$ می‌باشد حالا زاویه بین دو میدان برابر °۱۲۰ است یعنی



$$H_t=\sqrt{H^2+H^2+2H.H\cos 120^\circ}=\sqrt{H^2+H^2-H^2}=H=\frac{I}{4\pi h}$$

۷. گزینهٔ ۱) چگالی جریان معادل برابراست با $\bar{J}=\rho\bar{v}=\rho R\omega\hat{a}_\phi$ حال قانون آمپر را با گرفتن مسیر آمپر مستطیل شکل که یک ضلع آن در $R=\frac{a}{2}$ و ضلع مقابل در ∞ است مطابق زیر در نظر می‌گیریم چون جریان در جهت $\hat{a}_\phi$ است میدان فقط مولفه H_z دارد که نسبت به z ثابت است زیرا طول استوانه بسیار بزرگ است.



$$\oint_{abcd}\bar{H}.\bar{dl}=I=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\int_{0}^{l}J\,ds$$

$$H_z l=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\int_{0}^{l}\rho R\omega\,dR\,dz$$

$$H_z l=\rho\omega\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{a^2}{4}\right]l\rightarrow$$

$$H_z=\rho\omega\frac{1}{2}\times\frac{3a^2}{4}=\frac{3\rho\omega a^2}{8}$$

۸. گزینهٔ ۲) چگالی سطحی معادل برابر است با $\bar{J}_s=\frac{-I}{b}\hat{a}_x$ می‌باشد حالا از قانون بیوساوار استفاده می‌کنیم.

$$\bar{H}=\int_s\frac{\bar{J}_s\times\hat{a}_R}{4\pi R^2}ds\qquad \bar{R}=h\hat{a}_z-x\hat{a}_x-y\hat{a}_y$$

$$\bar{J}_s\times\hat{a}_R=\frac{\left[+h\frac{I}{b}\hat{a}_y+y\frac{I}{b}\hat{a}_z\right]}{R}$$

$$\bar{H}=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[h\frac{I}{b}\hat{a}_y+y\frac{I}{b}\hat{a}_z\right]dx\,dy}{4\pi\left[h^2+x^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

چون انتگرال نسبت به y فرد است حاصل جمله $\hat{a}_z$ صفر است پس

$$\bar{H}=\int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{hI\hat{a}_y\,dx\,dy}{4\pi b\left[h^2+x^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{hI}{4\pi b}\int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{2dy\,\hat{a}_y}{h^2+y^2}=\frac{I}{4\pi b}\times 4\,tg^{-1}\frac{b}{2h}$$

$$\rightarrow\ \bar{H}=\frac{I}{\pi b}tg^{-1}\frac{b}{2h}\hat{a}_y$$

۹. گزینهٔ ۴) میدان در روی دایره به شعاع R ناشی از دو جریان I_1 و I_2 است که برابر است با:

$$\bar{H}=\frac{I_1}{4\pi R}+\frac{I_2}{4\pi R}=\frac{I_1+I_2}{4\pi R}$$

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = H\,۲\pi R = \frac{I_۱ + I_۲}{۲} = ۲/۲۵$$

۱۰. گزینهٔ ۴) *طبق قانون آمپر داریم:*

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = I + \int_a^{۲a}\int_۰^{۲\pi} J_۰\,\frac{R}{a}\,R\,dR\,d\phi$$

اگر H بخواهیم صفر باشد پس:

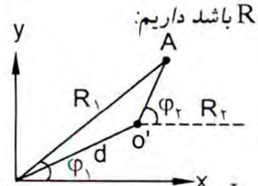
$$I = -\int_a^{۲a}\int_۰^{۲\pi} J_۰\,\frac{R^۲}{a}\,dR\,d\phi = -J_۰\,\frac{۲\pi}{a}\times\frac{۱}{۳}\left[(۲a)^۳ - a^۳\right] = \frac{-J_۰\,۱۴\pi a^۲}{۳}$$

$$I = \frac{-۱۴J_۰\,\pi a^۲}{۳}$$

۱۱. *مسئله را میتوان با استفاده از جمع آثار حل کرد یعنی ابتدا میدان ناشی از استوانه با چگالی $J_۰$ را بدست آورده و با میدان ناشی از چگالی $J_۰-$ در حفره جمع کنیم. هرکدام از این میدانها را میتوان با استفاده از قانون آمپر به دست آورد. میدان در فاصله R از محور استوانه به چگالی $J_۰$ برابر است با:*

$$\oint \overline{H}.\overline{d\ell} = I' \;\Rightarrow\; H\,۲\pi R = J_۰\,\pi R^۲ \;\rightarrow\; \overline{H} = \frac{J_۰}{۲}\,R\,\hat{a}_\phi$$

بنابراین اگر فاصله نقطه داخل حفره از محور استوانه $R_۱$ و از محور حفره $R_۲$ باشد داریم:



$$\overline{H} = \frac{J_۰ R_۱}{۲}\,\hat{a}_{\phi_۱} - \frac{J_۰ R_۲}{۲}\,\hat{a}_{\phi_۲}$$

که H میدان داخل حفره است (در نقطه A)

$$\overline{H} = \frac{J_۰}{۲}\left(-R_۱ a_x \sin\phi_۱ + R_۱\hat{a}_y\cos\phi_۱ + R_۲\hat{a}_x\sin\phi_۲ - R_۲\hat{a}_y\cos\phi_۲\right)$$

که $\phi_۱$ زاویه OA با محور x و $\phi_۲$ زاویه $O'A$ با محور x می‌باشد.

$$\overline{H} = \frac{J_۰}{۲}\;\hat{a}_x\left[\hat{a}_x\left(\underbrace{R_۲\sin\phi_۲ - R_۱\sin\phi_۲}_{-d\sin\phi}\right) + \hat{a}_y\left(\underbrace{R_۱\cos\phi_۱ - R_۲\cos\phi_۲}_{d\cos\phi}\right)\right]_{\phi=۴۵^\circ}$$

$$\overline{H} = \frac{J_۰}{۲}\left[-\frac{d\sqrt{۲}}{۲}\,\hat{a}_x + d\,\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,\hat{a}_y\right] = \frac{J_۰\sqrt{۲}}{۴}\left(\hat{a}_y - \hat{a}_x\right)$$

۱۲. *اگر حلقه‌ای بضخامت dR و شعاع R و به مرکز o انتخاب کنیم تعداد سیم پیچ‌ها در ضخامت dR برابر است با $\frac{N\,dR}{R_o - R_i}$ بنابراین جریان موجود در این ضخامت برابراست با $\frac{N\,dR}{R_o - R_i}\,I$ حال میدان در مرکز این حلقه بشعاع R برابراست با* $dH = \dfrac{\left[\frac{N\,dR}{R_o - R_i}\,I\right]}{۲R}$ *بنابراین*

$$H = \int_{R_i}^{R_o} dH = \frac{NI}{۲\left(R_۰ - R_i\right)}\,\ln\frac{R_o}{R_i}$$

۱۳. گزینهٔ ۱) *حلقه‌ای به ضخامت dz از سیم پیچ را که به فاصله z از نقطه A قرارگرفته در نظر می‌گیریم می‌دانیم میدان ناشی از این حلقه در نقطه A همانطوریکه در درس دیدیم عبارتست از:*

$$dH = \frac{dI\, a^{۲}}{۲\left[a^{۲}+z^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\left[\frac{N}{L}dz\right] I\, a^{۲}}{۲\left[a^{۲}+z^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$z = a\,tg\alpha \;\rightarrow\; dz = a\,d\alpha\left[۱+tg^{۲}\alpha\right] \;\rightarrow\; dH = \frac{\frac{N}{L}\,a\,d\alpha\left[۱+tg^{۲}\alpha\right] I\, a^{۲}}{۲a^{۳}\left[۱+tg^{۲}\alpha\right]^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$dH = \frac{NI}{L}\,d\alpha\cos\alpha \;\rightarrow H = \int_{L}^{۲L}\frac{NI}{L}\,d\alpha\cos\alpha = \frac{NI}{L}\sin\alpha\Big]_{L}^{۲L} = \frac{NI}{L}\times\frac{z}{\sqrt{z^{۲}+a^{۲}}}\Big]_{L}^{۲L}$$

$$= \frac{NI}{L}\left[\frac{۲L}{\sqrt{۴L^{۲}+a^{۲}}} - \frac{L}{\sqrt{L^{۲}+a^{۲}}}\right] = \frac{NI}{L}\left[\frac{۲}{\sqrt{۴L^{۲}+a^{۲}}} - \frac{۱}{\sqrt{L^{۲}+a^{۲}}}\right] = \frac{NI}{L}\times ۰/۱۹$$

۱۴. *گزینهٔ ۲) چگالی جریان سطحی معادل برابر است با $\overline{J}_s = \rho_s\,\omega a\sin\theta\,\hat{a}_\phi$ حال اگر یک حلقه روی کره در نظر بگیریم جریان معادل این حلقه عبارتست از $(J_s\, a\, d\theta)$ و شعاع این حلقه $(a\sin\theta)$ می‌باشد پس طبق رابطه میدان روی محور حلقه میدان ناشی از این حلقه عبارتست از:*

$$dH = \frac{(J_s\, a\, d\theta)\,(a\sin\theta)^{۲}}{۲\left[a^{۲}\sin^{۲}\theta + a^{۲}\cos^{۲}\theta\right]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{J_s\, a^{۳}\sin^{۲}\theta\, d\theta}{۲a^{۳}} = \frac{(\rho_s\,\omega a\sin\theta)\sin^{۲}\theta\, d\theta}{۲}$$

$$dH = \frac{\rho_s\,\omega a}{۲}\sin^{۳}\theta\, d\theta \;\rightarrow\; H = \int_{۰}^{\pi} dH = \frac{\rho_s\,\omega a}{۲}\int_{۰}^{\pi}\sin^{۳}\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\rho_s\,\omega a}{۲}\times\frac{۴}{۳} = \frac{۲}{۳}\rho_s\,\omega a$$

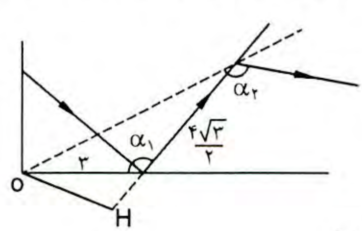
۱۵. *گزینهٔ ۴) میدان ناشی از قطعه سیم واقع روی محور y در نقطه o صفر است زیرا o در امتداد این قطعه سیم است قطعه سیم وتر مثلث میدانی که ایجاد می‌کند قبلاً در درس حساب شده که برابر با $\hat{a}_z\,\frac{VI}{۴\Lambda\pi}$ - میدان سیمی که با محور x زاویه ۶۰° می‌سازد با محاسبه $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و فاصله عمودی o تا این سیم بصورت زیر بدست می‌آید.*

$\alpha_۱ = ۱۲۰^{\circ}$

$oH = ۳\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\alpha_۲ = ۲۱۰/۷$

$$H = \frac{I\,\hat{a}_z}{۴\pi\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}\left[\cos ۱۲۰ - \cos ۲۱۰/۷\right]$$



برای سیم افقی داریم:

$$\begin{array}{l}\alpha_۱ = ۱۵۰/۷\\ \alpha_۲ = \pi\\ oH = ۴\end{array} \;\rightarrow\; H = \frac{I}{۴\pi(۴)}\left[\cos ۱۵۰/۷ - \cos\pi\right]\hat{a}_z = ۰/۰۳۲\frac{I}{۴\pi}\hat{a}_z$$

$$H = -\frac{VI}{۴\Lambda\pi} + \frac{۰/۱۴۱ I}{۴\pi} + \frac{۰/۳۲۱ I}{۴\pi} = -۰/۱۲\frac{I}{\pi}$$