فصل ششم

معادله لاپلاس و پواسان

مسائلی که تاکنون مورد مطالعه قرار داده‌ایم به محاسبه میدانهای الکتریکی ساکن که از توزیع بار نسبتاً ساده ناشی می‌شوند محدود بوده است. در این مسائل به علت وجود تقارنهای گوناگون و یا ویژگیهای دیگری در توزیعهای بار تغییرات میدان‌ها اغلب تابعی از یک مختصه بوده و لذا محاسبات میدانها از نوعی سهولت برخوردار بوده است. در این فصل نیز همچون فصول گذشته به مطالعه میدانهای الکتریکی ساکن ادامه داده و روشهای جدیدی را برای تجزیه و تحلیل میدانهای پیچیده‌تر ارائه می‌دهیم مطالب این فصل در حقیقت به بررسی روشهای مختلف حل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر رفتار تابع پتانسیل اختصاص دارد. همانطوریکه قبلاً دیدیم قانون گوس را بشرط ثابت بودن ε بر حسب مکان میتوان بصورت زیر نوشت.

$$\nabla . \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (۱-۶)$$

اگر بجای بردار $\overline{E}$ از معادلش یعنی $\overline{\nabla} V$ - استفاده شود خواهیم داشت:

$$\overline{\nabla} . \overline{E} = \overline{\nabla} . (- \overline{\nabla} V) = -\nabla^{2} V = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

و یا

$$\nabla^{2} V = \frac{-\rho}{\varepsilon} \qquad (۲-۶)$$

معادله (۶-۲) را معادله پواسان می‌نامند. در این معادله که از نوع دیفرانسیل جزئی است ρ چگالی حجمی بار الکتریکی آزاد در محیطی با ضریب دی الکتریک ε می‌باشد در محیطی که $\rho = 0$ است معادله (۶-۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$\nabla^{2} V = 0 \qquad (۳-۶)$$

معادله (۶-۳) بنام معادله لاپلاس شناخته می‌شود.

معادلات لاپلاس و پواسان معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هستند که توام با شرایط مرزی معینی باید حل شوند شرایط مرزی عموماً بصورت صفر بودن پتانسیل در بی نهایت برای توزیعهای بار محدود، پتانسیل‌های معلومی روی سطوح هادی بیان می‌شوند قبل از اینکه به بررسی روشهای حل این معادلات بپردازیم قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم مبنی بر اینکه اگر جوابی یافت شود که در معادله لاپلاس و یا پواسان صدق نماید و شرایط مرزی را نیز برآورده سازد آن جواب تنها جواب ممکن معادله است با اثبات این قضیه که آنرا قضیه یگانگی جواب معادله لاپلاس و یا پواسان می‌نامیم می‌توان اطمینان حاصل کرد که هر گاه جوابی به هر ترتیب حتی از روی حدس برای معادله لاپلاس یا پواسان بیابیم که شرایط مرزی مسئله مورد نظر را نیز برآورده سازد آن تنها جواب ممکن مسئله است و اگر جوابهای دیگری به طرق دیگر یافت شوند با این جواب مساوی خواهند بود.

۶-۱- اثبات یکتایی (یگانگی) جواب معادله پواسان یا لاپلاس

فرض کنید برای یک مسئله با شرایط مرزی معلومی دو جواب V_1 و V_2 یافت شده باشند که هر دو جواب در معادله پواسان (یا در معادله لاپلاس اگر $\rho = 0$ باشد) صدق کند و هر دو شرایط مرزی معینی را ارضاء کنند می‌خواهیم ثابت کنیم که V_1 و V_2 باید یکی باشند. اگر هر دو V_1 و V_2 پاسخ معادله پواسان باشند میتوان نوشت:

$$\nabla^{2} V_1 = \frac{-\rho}{\varepsilon} \qquad \nabla^{2} V_2 = \frac{-\rho}{\varepsilon} \qquad (۴-۶)$$

حال اختلاف V_1 و V_2 را V_d می‌نامیم یعنی $V_d=V_1-V_2$ و لاپلاس V_d را محاسبه می‌کنیم

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 (V_1-V_2) = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = \frac{-\rho}{\varepsilon} - \left(\frac{-\rho}{\varepsilon}\right) = 0$$

از طرفی چون V_1 و V_2 هر دو جواب یک مسئله فرض می‌شود باید شرایط مرزی یکسانی را برآورده سازند به عبارت دیگر $[V_2]_s = [V_1]_s$ که s بیانگر سطح مرزی است آنگاه برای V_d داریم:

$$[V_d]_s = [V_1 - V_2]_s = [V_1]_s - [V_2]_s = 0 \qquad (۶-۵)$$

حال با استفاده از اتحاد برداری $\bar{\nabla}.(V\bar{A}) = V\bar{\nabla}.\bar{A} + \bar{A}.\nabla V$ میتوان نوشت:

$$\bar{\nabla}.\left[V_d \bar{\nabla} V_d\right] = V_d \bar{\nabla}.\left(\bar{\nabla} V_d\right) + \bar{\nabla} V_d . \bar{\nabla} V_d = V_d \nabla^2 V_d + \left|\bar{\nabla} V_d\right|^2$$

با توجه به اینکه $\nabla^2 V_d$ صفر است داریم:

$$\bar{\nabla}.\left(V_d \bar{\nabla} V_d\right) = \left|\bar{\nabla} V_d\right|^2 \qquad (۶-۶)$$

از طرفین روی حجم V انتگرال می‌گیریم.

$$\int_v \bar{\nabla}.\left(V_d \bar{\nabla} V_d\right) = \int_v \left|\bar{\nabla} V_d\right|^2 dv \qquad (۶-۷)$$

طرف سمت چپ رابطه (۶-۷) طبق قضیه دیورژانس به انتگرال روی سطح بسته تبدیل می‌شود.

$$\oint_s V_d \bar{\nabla} V_d . \overline{ds} = \int \left|\bar{\nabla} V_d\right|^2 dv \qquad (۶-۸)$$

سمت چپ معادله (۶-۸) طبق رابطه (۶-۵) صفر است زیرا $[V_d]_s = 0$ می‌باشد پس باید طرف راست همواره صفر باشد چون $\left|\bar{\nabla} V_d\right|^2$ همواره مثبت است این عبارت موقعی صفر است که $\bar{\nabla} V_d$ در همه جای حجم v صفر شود پس:

$$\bar{\nabla} V_d = 0$$

یا

$$V_d = V_1 - V_2 = \text{مقدار ثابت} \qquad (۶-۹)$$

اما چون V_d روی سطح مرزی صفر است مقدار ثابت در سمت راست رابطه (۶-۹) صفر است یعنی $V_1=V_2$ و قضیه یکتایی پاسخ معادله پواسان با لاپلاس اثبات می‌شود.

چون لاپلاس همان دیورژانس گرادیان است و با توجه به تعاریفی که برای دیوژانس و گرادیان در دستگاههای مختلف در فصول قبل داشتیم می‌توان لاپلاس را در دستگاههای مختلف به صورت زیر نوشت:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{دستگاه قائم} \qquad (۶-۱۰\ \text{الف})$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R\frac{\partial V}{\partial R}\right] + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{دستگاه استوانه‌ای} \qquad (۶-۱۰\ \text{ب})$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{دستگاه کروی} \qquad (۶-۱۰\ \text{ج})$$

با حل معادلات بالا در دستگاه مربوطه میتوان پتانسیل را محاسبه و از روی آن میدان و سپس توزیع بار را با استفاده از شرط مرزی بدست آورد. در این فصل توجه خود را به حل معادلات لاپلاس یک متغیره و دو متغیره در دستگاههای مختلف معطوف خواهیم کرد.

۶-۲- حل معادلات لاپلاس یک متغیره در دستگاه قائم

وقتی صحبت از دستگاه مختصات خاص می‌کنیم و معادله لاپلاس و یا پواسان را در آن دستگاه حل می‌کنیم بدین معنی است که مرزهایی که روی آن مرزها پتانسیل دارای مقدار معینی است به شکل آن دستگاه می‌باشد مثلاً در دستگاه قائم سطوح هم پتانسیل و یا مرزی که روی آن مرز پتانسیل مقدار معینی دارد به شکل صفحات مسطح می‌باشد و در دستگاه استوانه این سطوح و یا مرز بشکل استوانه و یا در دستگاه کروی سطوح هم پتانسیل بشکل کره هستند. ساده‌ترین مثالی که میتوان با استفاده از حل معادله لاپلاس در دستگاه قائم حل کرد بدست آوردن معادله پتانسل بین صفحات خازن مسطح است فرض کنید صفحات خازنی در $z=0$ و $z=d$ قرار دارند و صفحه $z=0$ به پتانسیل صفر و صفحه $z=d$ به پتانسیل V_0 متصل شده است واضح است که چون روی هر صفحه پتانسیل ثابت است و روی آن صفحه x و y متغیر است پس پتانسیل تابع x و y نیست بلکه فقط تابع z است.

با توجه به اینکه بین صفحات خازن عایق کامل داریم که در نتیجه $\rho = 0$ پس معادله (۶-۱۰ الف) بصورت زیر در می‌آید.

$$\frac{d^2V}{dz^2}=0 \qquad (۶-۱۱)$$

زیرا همانطوریکه گفتیم پتانسیل فقط تابع z می‌باشد با دو بار انتگرال‌گیری پاسخ معادله (۶-۱۱) بفرم زیر خواهد شد.

$$V = Az + B \qquad (۶-۱۲)$$

با توجه به شرط مرزی $V=(z=0)=0$ و $V(z=d)=V_0$ ثابت‌های A و B بدست می‌آیند که عبارتند از:

$$B = 0$$

$$A=\frac{V_0}{d} \qquad (۶-۱۳)$$

بنابراین پاسخ معادله لاپلاس (۶-۱۱) با شرایط مرزی داده شده، عبارتست از:

$$V = \frac{V_0}{d} z \qquad (۶-۱۴)$$

حال میتوان با استفاده از رابطه بین پتانسیل و میدان ابتدا میدان و سپس چگالی بار و از آنجا ظرفیت خازن را حساب می‌کنیم.

$$\overline{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z = \frac{-V_0}{d}\hat{a}_z$$

$$\rho_s = -\varepsilon E = \frac{V_0}{d}\varepsilon$$

$$\frac{Q}{A}=\varepsilon\frac{V_0}{d} \rightarrow C=\frac{Q}{V_0}=\varepsilon\frac{A}{d}$$

که A سطح صفحات و d فاصله بین صفحات است همانطوریکه دیده می‌شود ظرفیت خازن با استفاده از حل معادله لاپلاس براحتی بدست می‌آید بعلت اینکه هر سه جمله معادله (۶-۱۰ - الف) یکسان هستند اگر پتانسیل فقط تابع x و یا y باشند پاسخ معادله لاپلاس همان رابطه (۶-۱۲) فقط با جایگزینی z به جای x و یا y خواهد بود.

۶-۳- حل معادله لاپلاس یک متغیره در دستگاه استوانه‌ای

اگر پتانسیل فقط تابع R باشد یعنی $V=f(R)$ معادله لاپلاس (۶-۱۰ - ب) به فرم زیر در خواهد آمد.

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial V}{\partial R}\right)=0 \qquad (۶-۱۵)$$

پاسخ معادله (۶-۱۵) با دو بار انتگرال‌گیری از این رابطه بصورت زیر خواهد بود.

$$V = A\ln R + B \qquad (۶-۱۶)$$

مثال عملی این حالت خازن استوانه‌ای می‌باشد اگر دو استوانه هادی هم محور را در نظر بگیریم و باطری به پتانسیل $V_\circ$ را بین دو هادی متصل کنیم چون هادی داخلی دارای پتانسیل $V_\circ$ است و روی این هادی z و ϕ متغیر است اما پتانسیل ثابت است پس پتانسیل تابع z و ϕ نیست و فقط تابع R است که رابطه پتانسیل با R بوسیله معادله (۶-۱۶) بیان می‌شود حالا شرط مرزی پتانسیل را در R=a و R=b اعمال می‌کنیم.

$$V(R=a) = A\ln a + B = V_\circ$$
$$V(R=b) = A\ln b + B = \circ$$

از دو معادله دو مجهولی بالا A و B به دست می‌آیند که عبارتند از:

$$B = \frac{-V_\circ \ln b}{\ln\frac{a}{b}} \quad \text{و} \quad A = \frac{V_\circ}{\ln\frac{a}{b}}$$

با جایگزینی A و B دو معادله (۶-۱۶) خواهیم داشت.

$$V = \frac{V_\circ \ln\frac{b}{R}}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (۶-۱۷)$$

حال میتوان میدان الکتریکی بین صفحات خازن را از رابطه $\overline{E} = -\overline{\nabla} V$ بدست آورد.

$$\overline{E} = -\overline{\nabla} V = \frac{-\partial V}{\partial R}\hat{a}_R = \frac{V_\circ}{R\ln\frac{b}{a}}\hat{a}_R$$

$$\rho_s = \varepsilon E \Big|_{R=a} = \frac{\varepsilon V_\circ}{a\ln\frac{b}{a}}$$

$$Q = \rho_s 2\pi a l = \frac{2\pi\varepsilon V_\circ l}{\ln\frac{b}{a}}$$

یا

$$C = \frac{Q}{V_\circ} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$$

که همان رابطه ظرفیت خازن استوانه‌ای است.

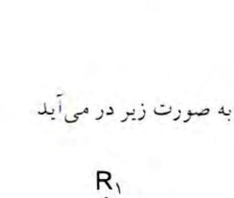
در حالتی که در دستگاه استوانه‌ای پتانسیل تابع ϕ می‌باشد رابطه (۶-۱۰ - ب) به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \circ \qquad (۶-۱۸)$$

که پاسخ آن با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه (۶-۱۸) به صورت زیر خواهد بود.

$$V = A\phi + B \qquad (۶-۱۹)$$

یک مثال عملی از اینحالت اتصال یک باطری به پتانسیل $V_\circ$ بین دو صفحه شعاعی مطابق شکل زیر می‌باشد همانطوریکه ملاحظه می‌شود در روی صفحه سمت چپ پارامتر R از R_1 تا R_2 و z از z=۰ تا z=h متغیر است ولی پتانسیل $V_\circ$ و ثابت است پس پتانسیل تابع R و z نیست و فقط تابع ϕ می‌باشد حال با شرایط مرزی زیر میتوان ضرایب A و B را در (۶-۱۹) بدست آورد.



شکل (۶-۱): پتانسیل بین صفحات شعاعی تابع ϕ است

$$V(\phi=\phi_1) = A\phi_1 + B = V_\circ$$
$$V(\phi=\phi_2) = A\phi_2 + B = \circ$$

که با حل این دو معادله مجهولی ضرایب A و B بدست می‌آیند که عبارتند از:

$$A=\frac{V_{\circ}}{(\phi_{1}-\phi_{2})} \quad , \quad B=-\frac{V_{\circ}}{\phi_{1}-\phi_{2}}\phi_{2}$$

که با جایگزینی A و B در (۶-۱۹) خواهیم داشت:

$$V=\frac{V_{\circ}}{(\phi_{1}-\phi_{2})}(\phi-\phi_{2}) \qquad (۲۰-۶)$$

حال میتوان ظرفیت خازن سیستم را با محاسبه میدان الکتریکی بین صفحات بدست آورد.

$$\overline{E}=-\overline{\nabla}V=\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial\phi}\widehat{a}_{\phi}=-\frac{V_{\circ}}{(\phi_{1}-\phi_{2})R}\widehat{a}_{\phi}$$

$$\rho_{s}=\varepsilon E_{n}=\frac{V_{\circ}\varepsilon}{(\phi_{2}-\phi_{1})R}$$

$$Q=\int_{\circ}^{h}\int_{R_{1}}^{R_{2}}\rho_{s}\,dR\,dz=\frac{V_{\circ}\varepsilon h}{(\phi_{2}-\phi_{1})}\ln\frac{R_{2}}{R_{1}}$$

$$C=\frac{Q}{V_{\circ}}=\frac{\varepsilon h\ln\frac{R_{2}}{R_{1}}}{(\phi_{2}-\phi_{1})} \qquad (۲۱-۶)$$

رابطه (۶-۲۱) ظرفیت بین دو صفحه شعاعی به ارتفاع h را بدست می‌دهد همانطوریکه ملاحظه می‌شود با استفاده از معادله لاپلاس ظرفیت بین انواع صفحات براحتی قابل محاسبه است.

۶-۴- حل معادله لاپلاس یک متغیره در دستگاه کروی

در حالتی که پتانسیل فقط تابع r باشد معادله لاپلاس (۶-۱۰ - ج) به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{2}\frac{\partial V}{\partial r}\right]=\circ \qquad (۲۲-۶)$$

که با دو بار انتگرال‌گیری از معادله (۶-۲۲) پاسخ V بصورت زیر خواهد شد.

$$V=\frac{A}{r}+B \qquad (۲۳-۶)$$

ثابتهای معادله (۶-۲۳) را با دو شرط اولیه میتوان بدست آورد مثال عملی از اینحالت خازن کروی می‌باشد که بین دو هادی کروی هم مرکز باطری به پتانسیل $V_{\circ}$ متصل شده است.

اگر شعاع کره داخلی a و شعاع کره خارجی b باشد شرایط اولیه به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$V(r=a)=\frac{A}{a}+B=V_{\circ}$$

$$V(r=b)=\frac{A}{b}+B=\circ$$

که از دو معادله دو مجهولی زیر ضرایب A و B به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$A=\frac{V_{\circ}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

$$B=-\frac{V_{\circ}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\frac{1}{b}$$

با جایگزینی A و B در رابطه (۶-۲۳) خواهیم داشت.

$$V = \frac{V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right] \qquad (۶-۲۴)$$

میدان الکتریکی بین صفحات خازن با استفاده از پتانسیل بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\overline{E} = -\overline{\nabla} V = \frac{V_0}{\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]} \frac{\hat{a}_r}{r^2}$$

چگالی سطحی بار روی کره داخلی برابر است با:

$$\rho_s = \varepsilon E \Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon V_0}{\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]} \frac{1}{a^2}$$

$$Q = \rho_s 4\pi a^2 = \frac{4\pi \varepsilon V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

ظرفیت خازن با استفاده از تعریف $C = \frac{Q}{V_0}$ عبارت است از:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

که همان رابطه ظرفیت برای خازن کروی می‌باشد.

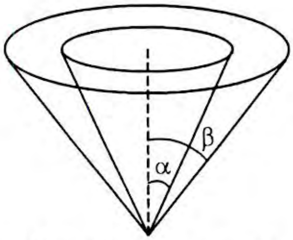
اگر پتانسیل فقط تابع θ باشد رابطه (۶-۱۰ -ج) بصورت زیر خواهد شد.

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right] = 0 \qquad (۶-۲۵)$$

با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه (۶-۲۵) جواب این معادله به صورت زیر در خواهد آمد.

$$V = A \ln \left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right] + B \qquad (۶-۲۶)$$

ثابتهای A و B را میتوان با داشتن دو شرایط اولیه برای پتانسیل بدست آورد. مثال عملی در اینحالت پیدا کردن تابع پتانسیل بین دو قیف فلزی مطابق شکل زیر می‌باشد فرض کنید برای قیف داخلی $\theta=\alpha$ و برای قیف بیرونی $\theta=\beta$ باشد اگر بین دو قیف اختلاف پتانسیل V_0 را برقرار کنیم شرایط اولیه بصورت زیر خواهد شد.



شکل (۶-۲): پتانسیل بین دو قیف فلزی تابع θ است

$$V(\alpha) = A \ln \left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right] + B = V_0$$

$$V(\beta) = A \ln \left[\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right] + B = 0$$

که با حل دو معادله دو مجهولی بالا خواهیم داشت.

$$A = \frac{V_0}{\ln\left[\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right]}$$

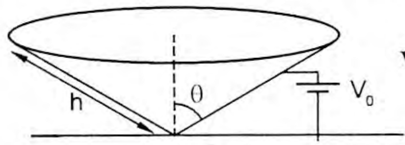
$$B = \frac{-V_0 \ln\left[\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right]}{\ln\left[\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right]}$$

که با جایگزینی A و B در (۶-۲۶) خواهیم داشت.

$$V=\frac{\ln\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{۲}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{۲}}\right]}{\ln\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{۲}}\right]}V_{\circ} \qquad (۶-۲۷)$$

مثال ۱: یک قیف هادی با زاویه $\theta=۶۰^{\circ}$ روی یک صفحه هادی بزرگ مطابق شکل قرار دارد باطری به ولتاژ $V_{\circ}$ را بین قیف و صفحه هادی مطابق شکل متصل می‌کنیم اگر طول قیف h باشد ظرفیت خازن بین قیف و صفحه مسطح را بدست آورید؟

***حل:** با جایگزینی $\beta=۹۰^{\circ}$ و $\alpha=۶۰^{\circ}$ در رابطه (۶-۲۷) تابع پتانسیل بین قیف و صفحه مسطح عبارتست از:* $\theta=60^{\circ}$



$$V=\frac{\ln\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{۲}\right]}{\ln\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{۶}\right]}V_{\circ}$$

میدان الکتریکی بین قیف و صفحه زمین عبارتست از:

$$\overline{E}=-\nabla V=\frac{V_{\circ}}{r\ln\sqrt{۳}\sin\theta}\hat{a}_{\theta}$$

$$\rho_s=\varepsilon E=\frac{\varepsilon V_{\circ}}{r\ln\sqrt{۳}\sin\theta}$$

$$Q=\iint\rho_s\,ds=\int_{\circ}^{h}\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{\varepsilon V_{\circ}\,(r\sin\theta\,d\phi\,dr)}{r\ln\sqrt{۳}\sin\theta}=\frac{۲\pi\varepsilon V_{\circ}h}{\ln\sqrt{۳}}$$

$$C=\frac{Q}{V_{\circ}}=\frac{۲\pi\varepsilon h}{\ln\sqrt{۳}}$$

مثال ۲: مقدار E را در نقطه (۱و۱و۱) در هوا برای

الف) ۲ استوانه هادی هم محور $V=۱۰۰^{V}$ در $R=۰/۵$ و $V=۰$ در $R=۲^{m}$

ب) ۲ صفحه هادی شعاعی $V=۱۰۰^{V}$ در $\phi=\frac{\pi}{۲}$ و $V=۰$ در $\phi=۰$

ج) ۲ کره هادی هم مرکز $V=۱۰۰^{V}$ در $r=۰/۵$ و $V=۰$ در $r=۲^{m}$

د) ۲ مخروط هم محور هادی $V=۱۰۰^{V}$ در $\theta=۳۰^{\circ}$ و $V=۰$ در $\theta=۶۰^{\circ}$

***حل:** الف: پتانسیل در دستگاه استوانه‌ای فقط تابع R است بنابراین معادله آن بصورت رابطه (۶-۱۶) می‌باشد.*

$$V=A\ln R+B$$

$$V(R=۰/۵)=A\ln ۰/۵+B=۱۰۰^{V}$$

$$V(R=۲)=A\ln ۲+B=۰$$

که با حل این دو معادله دو مجهولی خواهیم داشت.

$B=۵۰$ و $A=-۷۲/۱۳$

بنابراین معادله پتانسیل بفرم زیر خواهد بود.

$$V=-۷۲/۱۳\ln R+۵۰$$

میدان الکتریکی از رابطه $E=-\nabla V$ بدست می‌آید.

$$\overline{E} = -\frac{\partial V}{\partial R}\hat{a}_R = \frac{۷۲/۱۳}{R}\hat{a}_R$$

$$\left|E(۱,۱,۱)\right| = \frac{۷۲/۱۳}{\sqrt{۱+۱}} = ۵۱\frac{V}{m}$$

ب: پتانسیل در دستگاه استوانه‌ای فقط تابع ϕاست و معادله آن بصورت رابطه (۶-۱۹) می‌باشد.

$$V = A\phi + B$$

$$V(\phi=۰) = ۰ \Rightarrow B=۰$$

$$V(\phi=\frac{\pi}{۲}) = ۱۰۰ \Rightarrow A=\frac{۲۰۰}{\pi}$$

بنابراین معادله پتانسیل بفرم زیر خواهد بود.

$$V = \frac{۲۰۰}{\pi}\phi$$

حال میدان الکتریکی را با داشتن پتانسیل بدست می‌آوریم.

$$\overline{E} = -\nabla V = -\frac{۱}{R}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi = \frac{-۲۰۰}{\pi R}\hat{a}_\phi$$

$$\left|E(۱,۱,۱)\right| = \frac{۲۰۰}{\pi\sqrt{۱+۱}} = ۴۵\frac{V}{m}$$

ج: پتانسیل در دستگاه کروی فقط تابع r است و معادله آن بصورت رابطه (۶-۲۳) می‌باشد.

$$V=\frac{A}{r}+B$$

$$V(r=۰/۵)=\frac{A}{۰/۵}+B=۱۰۰$$

$$V(r=۲)=\frac{A}{۲}+B=۰$$

که از دو معادله دو مجهولی بالا خواهیم داشت:

$$A=\frac{۲۰۰}{۳}$$

$$B=\frac{-۱۰۰}{۳}$$

بنابراین معادله پتانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$V=\frac{۲۰۰}{۳r}-\frac{۱۰۰}{۳}$$

حال میدان الکتریکی را با داشتن معادله پتانسیل بدست می‌آوریم.

$$\overline{E} = -\nabla V = \frac{۲۰۰}{۳r^۲}\hat{a}_r$$

$$\left|E(۱,۱,۱)\right| = \frac{۲۰۰}{۳(۱^۲+۱^۲+۱^۲)} = \frac{۲۰۰}{۹} = ۲۲/۳\frac{V}{m}$$

د: در اینحالت پتانسیل در دستگاه کروی فقط تابع θاست و بفرم معادله (۶-۲۶) خواهد بود.

$$V = A\ln\left[tg\frac{\theta}{۲}\right] + B$$

$$V\left[\theta=\frac{\pi}{۶}\right] = A\ln\left[tg\frac{\pi}{۱۲}\right] + B = ۱۰۰$$

$$V\left[\theta=\frac{\pi}{۳}\right] = A\ln\left[tg\frac{\pi}{۶}\right] + B = ۰$$

که از دو معادله دو مجهولی بالا خواهیم داشت:

$A=-۱۳۰/۲۷$ و $B=-۷۱/۵۶$

بنابراین معادله پتانسیل به صورت زیر خواهد بود.

با داشتن پتانسیل میتوان E را بدست آورد.

$$V = -۱۳۰/۲۷\ln\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{۲}\right] - ۷۱/۵۶$$

$$\overline{E} = -\nabla V = \frac{۱۳۰/۲۷}{r\sin\theta}\,\hat{a}_\theta$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

$$r = \sqrt{۳}$$

$$\left|E(۱,۱,۱)\right| = \frac{۱۳۰/۲۷}{\sqrt{۲}} = ۹۲/۱\,\frac{V}{m}$$

مثال ۳: بین دو صفحه شعاعی $\phi = \frac{\pi}{۳}$ و $\phi = \frac{\pi}{۲}$ پتانسیل $V_۰$ برقرار شده است بطوریکه قطب منفی باطری به صفحه $\phi = \frac{\pi}{۲}$ متصل است اگر فضای بین دو صفحه از مادهای با ضریب هدایت الکتریکی $\sigma = ۰/۱$ پر شده باشد مقاومت بین دو صفحه را بدست آورید ارتفاع صفحات را ۲m و عرض صفحات را از R=۰/۱ تا R=۰/۴ بگیرید.

حل: ابتدا از حل معادله لاپلاس معادله پتانسیل را بین صفحات بدست میآوریم.

$$V = A\phi + B$$

$$V\left[\frac{\pi}{۲}\right] = A\frac{\pi}{۲} + B = ۰$$

$$V\left[\frac{\pi}{۳}\right] = A\frac{\pi}{۳} + B = V_۰$$

که با حل دو معادله دو مجهولی بالا خواهیم داشت:

$$A = -\frac{۶}{\pi}V_۰ \quad , \quad B = ۳V_۰$$

$$V = \frac{-۶}{\pi}V\phi + ۳V_۰$$

حال میدان و از روی آن چگالی جریان را بدست میآوریم.

$$\overline{E} = -\nabla V = -\frac{۱}{R}\frac{\partial V}{\partial R}\hat{a}_\phi = \frac{۶V_۰}{\pi R}\hat{a}_\phi$$

$$\overline{J} = \sigma\overline{E} = \frac{۶\sigma V_۰}{\pi R}\hat{a}_\phi$$

$$I = \iint J\,ds = \int_۰^۲\int_{۰/۱}^{۰/۴}\frac{۶\sigma V_۰}{\pi R}\,dR\,dz$$

$$I = \frac{۱۲\sigma V_۰}{\pi}\ln ۴$$

$$R = \frac{V_۰}{I} = \frac{\pi}{۱۲\sigma\ln ۴} = \frac{\pi}{۰/۱۲\ln ۴} = ۱۸/۹^{\Omega}$$

مثال ۴: با استفاده از حل معادله لاپلاس مقاومت بین دو کره فلزی هم مرکز بشعاع داخلی a و شعاع خارجی b را بدست آورید؟

حل: باطری به ولتاژ $V_۰$ را بین دو کره متصل میکنیم پتانسیل بین دو کره همانطوریکه گفتیم از رابطه

$$V = \frac{A}{r} + B$$

بدست می‌آید.

حال با شرایط اولیه A و B را بدست می‌آوریم.

$$\frac{A}{a}+B=V_0,\quad \frac{A}{b}+B=0 \quad\rightarrow\quad A=\frac{V_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

$$B=-\frac{1}{b}\frac{V_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

$$V=\frac{V_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right]$$

حال میدان و چگالی جریان را بدست می‌آوریم.

$$\overline{E}=-\nabla V=\frac{V_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\frac{1}{r^2}\hat{a}_r$$

$$\overline{J}=\sigma\overline{E}=\frac{\sigma V_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\frac{1}{r^2}\hat{a}_r$$

$$I=\iint J\,ds=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma V_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$I=\frac{4\pi\sigma V_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{4\pi\sigma}$$

۶-۵- رابطه مقاومت و خازن

مقاومت و خازن از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{\int_s \rho_s\,ds}{V_0}$$

$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{V_0}{\int_s J\,ds}$$

$$RC=\frac{\int_s \rho_s\,ds}{\int_s J\,ds}$$

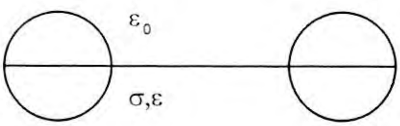
با توجه به اینکه $\rho_s=\varepsilon E$ و $J=\sigma E$ رابطه بالا به فرم زیر درمی‌آید.

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma} \qquad (۲۸-۶)$$

رابطه فوق یک رابطه مهم بین R و C می‌باشد همانطوریکه قبلاً گفته شد $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ زمان آسودگی و در حقیقت ثابت زمانی تخلیه بار الکتریکی می‌باشد باید دقت کرد که رابطه بالا در حالتی که ε و σ ثابت باشند صادق است.

مثال ۵: دو استوانه طویل به شعاع a بفاصله $d \gg a$ تا نیمه در خاک با ضریب هدایت الکتریکی σ و ضریب دی الکتریک ε فرو رفته‌اند خازن و مقاومت بین دو استوانه را بدست آورید.

حل: ظرفیت بین دو نیم استوانه در خاک و هوا به ترتیب عبارتند از:



$$C=\frac{\frac{1}{2}\pi\varepsilon}{\ln\frac{d}{a}}$$

$$C_{0}=\frac{\frac{1}{2}\pi\varepsilon_{0}}{\ln\frac{d}{a}}$$

چون دو خازن C و C_{0} با هم موازی هستند بنابراین:

$$C_t=C+C_{0}=\frac{\pi\left(\varepsilon+\varepsilon_{0}\right)}{2\ln\frac{d}{a}}$$

حال با استفاده از رابطه (۶-۲۸) مقاومت هر قسمت را بدست می‌آوریم.

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}\quad\rightarrow\quad R\times\frac{\frac{1}{2}\pi\varepsilon}{\ln\frac{d}{a}}=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$R=\frac{2\ln\frac{d}{a}}{\pi\sigma}$$ *مقاومت بین دو نیم استوانه در خاک*

$$R.C.=\frac{\varepsilon_{0}}{\sigma_{0}}=\frac{\varepsilon_{0}}{0}\quad\Rightarrow\quad R_{0}=\infty$$ *مقاومت بین دو نیم استوانه در هوا*

$$R_t=R\parallel R_{0}=R=\frac{2\ln\frac{d}{a}}{\pi\sigma}$$

بنابراین پاسخ بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases}C_t=\dfrac{\pi\left(\varepsilon+\varepsilon_{0}\right)}{2\ln\frac{d}{a}}\\[2ex] R_t=\dfrac{2\ln\frac{d}{a}}{\pi\sigma}\end{cases}$$

۶-۶- حل معادله لاپلاس دو متغیره در دستگاه قائم

در دستگاه قائم اگر پتانسیل تابع x و y باشد یعنی $V=f(x,y)$ در صورتیکه مرزهای سیستمی که هدف بدست آوردن پتانسیل در آن سیستم است مرزهای مسطح باشند (مثل سطوح مکعب مستطیل) میتوان تابع پتانسیل را بصورت حاصلضرب دو تابع نوشت بطوریکه $V=f_1(x)\ f_2(y)$

با جایگزینی V در معادله لاپلاس (۶-۱۰ - الف) خواهیم داشت.

$$f_2(y)\ \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}+f_1(x)\ \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2}=0$$

که با تقسیم کردن طرفین بر $f_1(x)\ f_2(y)$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{f_1(x)}\cdot\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}+\frac{1}{f_2(y)}\frac{d^2 f_2(y)}{dy^2}=0\qquad(۲۹-۶)$$

جمله اول معادله (۶-۲۹) فقط تابع x و جمله دوم فقط تابع y است و مجموع این دو جمله فقط موقعی صفر است که هر کدام ثابت باشند بنابراین دو دسته جواب بصورت زیر برای هر کدام از توابع f_1 و f_2 بدست خواهد آمد.

$$\begin{cases} \frac{1}{f_1(x)}\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} = +\alpha^2 \\ \frac{1}{f_2(y)}\frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} = -\alpha^2 \end{cases} \qquad (۶-۳۰ \text{ - الف})$$

و دیگری

$$\begin{cases} \frac{1}{f_1(x)}\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} = -\alpha^2 \\ \frac{1}{f_2(y)}\frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} = \alpha^2 \end{cases} \qquad (۶-۳۰ \text{ - ب})$$

پاسخ معادله (۶-۳۰ - الف) بصورت زیر خواهد بود.

$$f_1(x) = A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x}$$

$$f_2(y) = C_1 \sin\alpha y + D_1 \cos\alpha y$$

بنابراین پاسخ معادله لاپلاس با توجه به اینکه پتانسیل تابع x و y است برای معادله (۶-۳۰ - الف) به صورت زیر می‌باشد.

$$V = \left[A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x}\right] \left[C_1 \sin\alpha y + D_1 \cos\alpha y\right]$$

و یا (۶-۳۱)

$$V = \left[A \sinh\alpha x + D\cosh\alpha x\right] \left[C\sin\alpha y + D\cos\alpha y\right]$$

و برای معادله (۶-۳۰ - ب) پاسخ به صورت زیر است

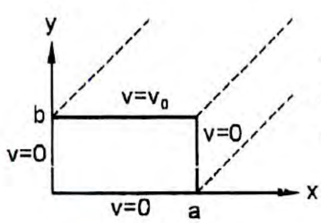
$$V = \left[A_1 \sin\alpha x + B_1 \cos\alpha x\right] \left[C_1 e^{\alpha y} + D_1 e^{-\alpha y}\right]$$

و یا (۶-۳۲)

$$V = \left[A\sin\alpha x + B\cos\alpha x\right] \left[C\sinh\alpha y + D\cosh\alpha y\right]$$

انتخاب یکی از دو دسته جواب بالا بستگی به شرط مرزی دارد.

مثال ۶: یک تونل به مقطع مستطیل به ابعاد a×b دارای پتانسیل‌های داده شده در زیر است طول این تونل در جهت z بی نهایت است مطلوبست معادله پتانسیل در داخل تونل.



حل: چون پتانسیل در دو محل در جهت x صفر شده است (یعنی در x=۰ و x=a) و تنها تابعی که می‌تواند این شرط مرزی را ارضاء کند تابع سینوسی است پس تابعیت x سینوسی است از طرفی در y=۰ پتانسیل صفر است بنابراین در جهت y تابعیت پتانسیل باید سینوس هیپربولیک باشد بنابراین.

$$V = K\sin\alpha x \ \sinh\alpha y \qquad (۶-۳۳)$$

حال دو مجهول k و α باید حساب شوند.

$$V(x=a) = K\sin\alpha a \sinh\alpha y = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}$$

$$V(y=b) = K\sin\frac{m\pi}{a} x \pi \sinh\frac{m\pi}{a} b = V_0$$

رابطه بالا امکان ندارد برقرار باشد زیرا سمت چپ تابع x و سمت راست مقدار ثابت V_0 است پس جهت برآوردن

این شرط باید رابطه (۶-۳۳) را باید بصورت مجموعه بنویسیم یعنی:

$$V=\sum_{m=0}^{\infty} K_m \sin\frac{m\pi}{a}x \sinh\frac{m\pi}{a}y \qquad (۶-۳۴)$$

حال شرط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$V_0=\sum_{m=0}^{\infty} K_m \sin\frac{m\pi}{a}x \ \sinh\frac{m\pi}{a}b$$

که پس از ساده کردن بصورت زیر درمی آید.

$$V_0=\sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{a}x \qquad (۶-۳۵)$$

بطوریکه

$$A_m=K_m \sinh\frac{m\pi}{a}b \qquad (۶-۳۶)$$

اگر طرفین رابطه (۶-۳۵) را در $\sin\frac{n\pi}{a}x$ ضرب کرده و از طرفین بین صفر تا a انتگرال بگیریم خواهیم داشت.

$$\int_0^a V_0 \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx=\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$

عبارت سمت راست به ازای همه mها صفر است بجز m=n یعنی:

$$\int_0^a V_0 \sin\frac{n\pi}{a}x=\int_0^a A_n \sin^2\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

و یا

$$-V_0\times\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{a}\Big]_0^a=A_n\frac{a}{2}$$

$$A_n=\begin{cases}\dfrac{4V_0}{n\pi} & \text{فرد } n\\ 0 & \text{زوج } n\end{cases}$$

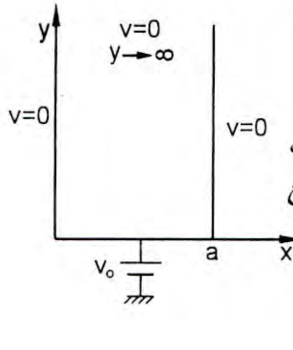
حال با داشتن A_m میتوان K_m را از رابطه (۶-۳۶) بدست آورد که برابر است با

$$K_m=\frac{4V_0}{m\pi\sinh\frac{m\pi}{a}b} \qquad (۶-۳۷)$$

که با جایگزینی K_m در (۶-۳۴) خواهیم داشت

$$V=\sum_{\substack{m=1\\ m=\text{فرد}}}^{\infty}\frac{4V_0}{m\pi\sinh\frac{m\pi}{a}b}\sin\frac{m\pi}{a}x\sinh\frac{m\pi}{a}y \qquad (۶-۳۸)$$

معادله (۶-۳۸) معادله پتانسیل در هر نقطه داخل تونل را بدست می‌دهد چون مخرج با افزایش m زیاد می‌شود کافیست چند جمله اول در محاسبه مورد استفاده قرار گیرد (مثلاً تا m=5)



مثال ۷: در شکل زیر که چاه پتانسیل نامیده می‌شود پتانسیل دیواره‌ها و سرچاه صفر است و پتانسیل ته چاه V_0 می‌باشد تابع پتانسیل داخل چاه را بدست آورید.

حل: *با توجه به اینکه پتانسیل در x=0 و x=a صفر است پس تابعیت پتانسیل بر حسب x سینوسی است اما در جهت y چون در y → ∞ پتانسیل صفر می‌شود هیچگونه تابع هیپربولیک نمی‌تواند باشد بلکه برحسب y پتانسیل بصورت $e^{-\alpha y}$ خواهدبود بنابراین:*

$$V=K\sin\alpha x\ e^{-\alpha y} \qquad (۶-۳۹)$$

حال برای بدست آوردن α و K شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$V(x=a) = 0 = K\sin\alpha a\, e^{-\alpha y}$$

یا

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}$$

$$V(y=0) = K\sin\alpha x = V_0$$

رابطه بالا امکانپذیر نیست زیرا سمت چپ تابع x و سمت راست ثابت است پس باید پتانسیل را بر حسب مجموعه و بصورت زیر در نظر بگیریم.

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} K_m \sin\frac{m\pi}{a}x\, e^{\frac{-m\pi}{a}y} \qquad (۴۰-۶)$$

حال شرط مرزی در $y=0$ را اعمال می‌کنیم.

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} K_m \sin\frac{m\pi}{a}x \qquad (۴۱-۶)$$

طرفین رابطه (۶-۴۱) را در $\sin\frac{n\pi}{a}x$ ضرب کرده از طرفین بین صفر تا a انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^a V_0 \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx = \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sum_{m=0}^{\infty} K_m \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$

عبارت سمت راست به ازای همه mها صفر است بجز $m=n$ یعنی

$$\int_0^a V_0 \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx = \int_0^a K_n \sin^2\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

و یا

$$-V_0 \times \frac{a}{n\pi}\cos n\pi \Big|_0^a = K_n \times \frac{a}{2}$$

که K_n بصورت زیر بدست می‌آید.

$$K_n = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

بنابراین با جایگزینی K_n در (۶-۴۰) خواهیم داشت:

$$V = \sum_{m=1\ \text{فرد}}^{\infty} \frac{4V_0}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{a}x\, e^{\frac{-m\pi}{a}y}$$

۶-۷- حل معادله لاپلاس دو متغیره در دستگاه استوانه‌ای

اگر پتانسیل تابع R و ϕ باشد یعنی $V = f(R,\phi)$ در اینصورت در شرایط خاص میتوان پتانسیل را بصورت حاصلضرب دو تابع R و ϕ بصورت $V = f_1(R)f_2(\phi)$ نوشت که با جایگزینی در معادله (۶-۱۰ - ب) خواهیم داشت (پس از ساده کردن)

$$\frac{1}{f_1(R)}\left[R\frac{\partial f_1}{\partial R} + R^2\frac{d^2 f_1(R)}{dR^2}\right] + \frac{1}{f_2(\phi)}\frac{d^2 f_2(\phi)}{d^2\phi^2} = 0 \qquad (۴۳-۶)$$

قسمت اول معادله بالا فقط تابع R و قسمت دوم معادله فقط تابع ϕ است و مجموع این دو جمله موقعی صفر است که هر دو ثابت باشند یعنی:

$$\frac{1}{f_1(R)}\left[R\frac{df_1(R)}{dR} + R^2\frac{d^2 f_1(R)}{dR^2}\right] = k^2$$

$$\frac{1}{f_2(\phi)}\frac{d^2 f_2(\phi)}{d\phi^2} = -k^2$$

که پاسخ معادله دیفرانسیل بالا بصورت زیر خواهد بود:

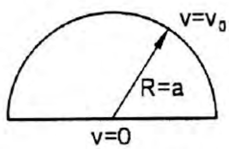
$$f_1(R) = AR^k + BR^{-k} \qquad (۶-۴۴)$$

$$f_2(\phi) = C\sin k\phi + D\cos k\phi$$

بنابراین پتانسیل V بصورت زیر خواهد بود. $V = (AR^k + BR^{-k})(C\sin k\phi + D\cos k\phi)$

مثال ۸: شکل زیر سطح مقطع یک نیم استوانه بسیار طویل در جهت z را نشان می‌دهد تابع پتانسیل در داخل نیم استوانه را بدست آورید.

*حل: **شرایط مرزی داده شده را به معادله (۶-۴۴) اعمال می‌کنیم.***



$$V(\phi = 0) = 0 \;\rightarrow\; D = 0$$

$$V(r = 0) = 0 \;\rightarrow\; B = 0$$

$$V(\phi = \pi) = 0 \;\rightarrow\; k = \text{عدد صحیح}$$

$$V(R = a) = Aa^k \times C\sin\phi = V_0$$

رابطه آخر امکان ارضاء شدن ندارد زیرا سمت چپ آن تابع ϕ و سمت راست آن V_0 و ثابت است پس باید رابطه پتانسیل را بصورت مجموعه بنوسیم

$$V(R,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k \sin k\phi \qquad (۶-۴۵)$$

اگر طرفین رابطه (۶-۴۵) را در $\sin m\phi$ ضرب کرده و از صفر یا π انتگرال بگیریم خواهیم داشت (با فرض $R=a$ و $V=V_0$)

$$\int_0^{\pi} V_0 \sin m\phi \, d\phi = \int_0^{\pi} \sin m\phi \sum_{k=0}^{\infty} A_k a^k \sin k\phi \, d\phi$$

طرف دوم معادله بالا به ازای جمیع مقادیر k صفر است مگر $k=m$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^{\pi} V_0 \sin m\phi \, d\phi = \int_0^{\pi} A_m a^m \sin^2 m\phi \, d\phi$$

یا

$$\frac{-V_0}{m} \cos m\phi \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} A_m a^m$$

که پس از ساده شدن A_m برابر خواهد شد با:

$$A_m = \frac{4V_0}{m\pi a^m}$$

بنابراین تابع پتانسیل در داخل نیم استوانه برابر است با:

$$V = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{4V_0}{k\pi} \left[\frac{R}{a}\right]^k \sin k\phi \qquad (۶-۴۶)$$

مثال ۹: یک استوانه فلزی رسانای زمین شده در فضایی که میدان یکنواخت و ثابت $E = E_0 \hat{a}_x$ وجود دارد قرار می‌گیرد معادله پتانسیل و میدان را در اطراف استوانه بدست آورید؟

*حل: **ابتدا معادله پتانسیل را که ناشی از میدان ثابت $\overline{E} = E_0 \hat{a}_x$ است بدست می‌آوریم.***

$$\overline{E} = E_0 \hat{a}_x = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x$$

$V = -E_{\circ}\, x = -E_{\circ}\, R \cos\phi$

در حقیقت معادله بالا معادله پتانسیل اطراف استوانه در حالت $R \to \infty$ می‌باشد بعبارت دیگر در $R \to \infty$ اثر استوانه از بین می‌رود و پتانسیل همان رابطه بالا خواهد شد پتانسیل در اطراف استوانه را بصورت کلی زیر می‌نویسیم.

$$V = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[A_k R^k + B_k R^{-k}\right] \left[C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi\right]$$

در $R \to \infty$ باید این پتانسیل به $V = -E_{\circ} R \cos\phi$ تبدیل شود پس

$$\lim_{R\to\infty} V \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[A_k R^k + B_k R^{-k}\right] \left[C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi\right] = -E_{\circ} R \cos\phi$$

با توجه به معادله بالا نتیجه می‌گیریم که تعداد جملات مجموعه فقط یک می‌باشد ($k=1$) می‌باشد پس

$$A_1 R D_1 \cos k\phi = -E_{\circ} R \cos\phi$$
$$C_k = 0$$

بنابراین پتانسیل اطراف استوانه بصورت زیر خواهد بود.

$$V = \left[A_1 R + \frac{B_1}{R}\right] \cos\phi$$

$$V\,(R \to \infty) = A_1 R \cos\phi = -E_{\circ} R \cos\phi$$

و یا

$$A_1 = -E_{\circ}$$

$$V\,(R=a) = \left[A_1 a + \frac{B_1}{a}\right] \cos\phi = 0$$

$$\Rightarrow\ B_1 = +a^2 E_{\circ}$$

بنابراین

$$V = -E_{\circ} \left[R - \frac{a^2}{R}\right] \cos\phi \qquad (۴۷-۶)$$

رابطه (۶-۴۷) معادله پتانسیل اطراف رسانا می‌باشد که زمین شده است برای بدست آوردن چگالی بار سطحی روی استوانه ابتدا میدان را حساب می‌کنیم.

$$\overline{E} = -\overline{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial R}\hat{a}_R - \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi$$

$$\overline{E} = E_{\circ}\left[1 + \frac{a^2}{R^2}\right] \cos\phi\, \hat{a}_R - E_{\circ}\left[1 - \frac{a^2}{R^2}\right] \sin\phi\, \hat{a}_\phi$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود مولفهٔ مماسی میدان (E_ϕ) در $R=a$ صفر است و مولفه عمودی میدان در $R=a$ برابراست با:

$$E_n = E_{\circ}\left[1 + \frac{a^2}{a^2}\right] \cos\phi = 2E_{\circ} \cos\phi$$

$$\rho_s = \varepsilon_{\circ} E_n = 2\varepsilon_{\circ} E_{\circ} \cos\phi$$

مثال ۱۰: استوانه عایقی به ضریب دی الکتریک نسبی ε_r که در جهت Z بی نهایت بزرگ است در فضایی که میدان الکتریکی $E = E_{\circ}\, \hat{a}_y$ وجود دارد قرار داده می‌شود میدان و پتانسیل اطراف استوانه را بدست آورید

حل: ***پاسخ کلی پتانسیل در داخل و خارج استوانه بصورت زیر است.***

$$V^i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[A_k R^k + B_k R^{-k}\right] \left[C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi\right] \qquad R<a$$

$$V^o=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[A'_k R^k+B'_k R^{-k}\right]\left[C'_k \sin k\phi+D'_k \cos K\phi\right] \qquad R>a$$

حال پتانسیل قبل از قرار دادن استوانه در فضا را با داشتن میدان بدست می‌آوریم.

$$\overline{E}=E_{\circ}\,\hat{a}_y=-\overline{\nabla}V=-\frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{a}_y$$

و یا

$$V=-E_{\circ}\,y=-E_{\circ}\,R\sin\phi$$

حال شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم:

$$\lim_{R\to\infty} V^o=\lim_{R\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[A'_k R^k+B'_k R^{-k}\right]\left[C'_k \sin k\phi+D'_k \cos k\phi\right]=-E_{\circ}\,R\sin\phi$$

که از روابط بالا به نتایج زیر می‌رسیم

$D'_k=\circ$ برای همه مقادیر

$A'_۱\,C'_۱=-E_{\circ}$

۱= تعداد جملات مجموعه

بنابراین پتانسیل در خارج استوانه بصورت زیر خواهد شد.

$$V^o=\left[-E_{\circ}R+BR^{-۱}\right]\sin\phi \qquad R>a \quad (۶-۴۸)$$

پیوستگی پتانسیل در $R=a$ بصورت زیر خواهد بود.

$$V^o(R=a)=V^i(R=a)$$

و یا

$$\left[-E_{\circ}\,a+\frac{B}{a}\right]\sin\phi=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[A_k\,a^k+B_k\,a^{-k}\right]\left[C_k \sin k\phi+D_k \cos k\phi\right]$$

از معادله بالا نتیجه می‌گیریم که اولاً تعداد جملات طرف راست معادله بالا باید ۱ باشد و ثانیاً ضرایب $\cos k\phi$ یعنی D_k باید صفر باشد پس پتانسیل داخل استوانه را با توجه به شرایط گفته شده و شرط صفر بودن ضرایب B_k (زیرا پتانسیل در $R=\circ$ نباید بی نهایت شود) بصورت زیر خواهد بود.

$$V^i=A_۱\,R\sin\phi \qquad R<a \qquad (۶-۴۹)$$

حالا شرایط مرزی را نوشته و ثابتهای B و $A_۱$ را در معادلات (۶-۴۸) و (۶-۴۹) بدست می‌آوریم.

$$V^i(R=a)=V^o(R=a)$$

و یا

$$A_۱\,a\sin\phi=\left[-E_{\circ}\,a+\frac{B}{a}\right]\sin\phi$$

شرط پیوستگی مولفه عمودی (شعاعی) D بصورت زیر است.

$$\varepsilon_{\circ}\,E^o_R\Big|_{R=a}=\varepsilon_{\circ}\,\varepsilon_r\,E^i_R\Big|_{R=a}$$

$$\frac{\partial V^o}{\partial R}\Big|_{R=a}=\varepsilon_r\frac{\partial V^i}{\partial r}\Big|_{R=a}$$

و یا

$$-E_{\circ}-\frac{B}{a^۲}=\varepsilon_r\,A_۱$$

از معادلات بالا به دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 + \dfrac{B}{a^2} \\ \varepsilon_r A_1 = -E_0 - \dfrac{B}{a^2} \end{cases}$$

که خواهیم داشت:

$$A_1 = \frac{-2E_0}{1+\varepsilon_r}$$

$$B = \frac{\varepsilon_r - 1}{1+\varepsilon_r} E_0 a^2$$

که با جایگزینی A_1 ، B در معادلات (۶-۴۷) و (۶-۴۸) توابع پتانسیل داخل و خارج استوانه بدست می‌آید.

$$\begin{cases} V^i = -\dfrac{2E_0 R}{1+\varepsilon_r} \sin\phi & R<a \\ V^o = -E_0 R \left[1 - \dfrac{\varepsilon_r - 1}{1+\varepsilon_r} \dfrac{a^2}{R^2} \right] \sin\phi & R>a \end{cases}$$

حال با استفاده از رابطه $\overline{E} = -\nabla V$ میدان داخل و خارج استوانه را بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} \overline{E}^i = \dfrac{2E_0}{1+\varepsilon_r} \hat{a}_y & R>a \\ \overline{E}^o = E_0 \hat{a}_y + E_0 \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \dfrac{a^2}{R^2} \left(-\sin\phi \hat{a}_R + \cos\phi \hat{a}_\phi \right) & R>a \end{cases}$$

همانطوریکه ملاحظه می‌شود میدان در داخل استوانه موازی با میدان اولیه است.

۶-۸- حل معادله لاپلاس دو متغیره در دستگاه کروی

اگر پتانسیل تابع r و θ باشد تحت شرایط خاصی میتوان آنرا بصورت حاصل دو تابع r و θ بصورت $V = f_1(r) f_2(\theta)$ نوشت. با جایگزینی این تابع در معادله لاپلاس (۶-۱۰ -ج) خواهیم دانست (پس از ساده کردن)

$$\frac{1}{f_1(r)} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{df_1(r)}{dr} \right] + \frac{1}{\sin\theta f_2(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{df_2(\theta)}{d\theta} \right] = 0$$

چون جمله اول رابطه بالا فقط تابع r و جمله دوم فقط تابع θ می‌باشد برای اینکه رابطه بالا برقرار باشد باید هر کدام از جملات ثابت باشند یعنی:

$$\frac{1}{f_1(r)} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{df_1(r)}{dr} \right] = k_r$$

$$\frac{1}{\sin\theta f_2(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{df_2(\theta)}{d\theta} \right] = -k_r$$

که جواب معادلات دیفرانسیل بالا بصورت زیر خواهد بود.

$$f_1(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}$$

$$f_2(\theta) = C\, P_n(\cos\theta)$$

که در روابط بالا $k_r = n(n+1)$ و P_n تابع لژاندر می‌باشد که به ازای $n=1$ برابر است با $\cos\theta$ و به ازای $n=2$ برابر

است با $\frac{1}{4}\left[1+3\cos 2\theta\right]$

بنابراین پاسخ معادله لاپلاس در دستگاه کروی عبارتست از:

$$V=\left[Ar^{n}+Br^{-(n+1)}\right]P_n\left(\cos\theta\right) \qquad (۶-۵۰)$$

مثال ۱۱: کره‌ای از جنس عایق بشعاع a و ضریب دی الکتریک نسبی ε_r در معرض میدان الکتریکی $\overline{E}=E_\circ\,\hat{a}_z$ قرار می‌گیرد مطلوبست میدان الکتریکی در خارج و داخل کره

حل: با توجه به رابطه (۶-۵۰) پتانسیل در داخل و خارج عبارتند از:

$$V^{i}=\left[Ar^{n}+Br^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta) \qquad r<a \qquad (۶-۵۱ - \text{الف})$$

$$V^{o}=\left[A'r^{n}+B'r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta) \qquad r>a \qquad (۶-۵۱ - \text{ب})$$

با داشتن میدان در خارج کره بدون حضور کره عایق میتوان پتانسیل بدون حضور عایق را بدست آورد.

$$\overline{E}=E.\hat{a}_z=-\nabla V=\frac{-\partial V}{\partial Z}\hat{a}_z$$

و یا

$$V=-E_\circ z=-E_\circ r\cos\theta$$

این پتانسیل باید با پتانسیل در خارج کره به ازای $r\to\infty$ برابر باشد یعنی:

$$\lim_{r\to\infty}V^{o}=\lim_{r\to\infty}\left[A'r^{n}+B'r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta)=-E_\circ r\cos\theta$$

که با حل این معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases}A'=-E_\circ\\ n=1 \;\rightarrow\; P_n(\cos\theta)=\cos\theta\end{cases}$$

حال شرط مرزی (پیوستگی پتانسیل در $r=a$ و مولفه عمودی D در $r=a$) را اعمال می‌کنیم.

$$V^{i}(r=a)=V^{o}(r=a)$$
$$D_r^{i}(r=a)=D_r^{o}(r=a)$$

این دو معادله به معادلات زیر تبدیل می‌شوند.

$$\left[Aa^{n}+Ba^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta)=\left[-E_\circ a+B'a^{-2}\right]\cos\theta$$

$$\varepsilon_r\frac{\partial V^{i}}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\frac{\partial V^{o}}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

که پس از جایگزینی و نتیجه‌گیری اینکه در سمت چپ معادله اول n باید یک باشد و برای اینکه پتانسیل در مرکز کره بی نهایت نشود باید $B=\circ$ باشد خواهیم داشت.

$$Aa=-E_\circ a+B'a^{-2}$$

$$\varepsilon_r A=A'-\frac{2B'}{a^{3}}=-E_\circ-\frac{2B'}{a^{3}}$$

که با حل دو معادله دو مجهولی بالا خواهیم داشت

$$\begin{cases}A=-\dfrac{3}{\varepsilon_r+2}E_\circ\\[2ex] B'=\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}a^{3}\end{cases}$$

که پس از جایگزینی در معادلات (۵۱-۶) خواهیم داشت:

$$V^i = -\frac{۳E_{\circ}}{\varepsilon_r + ۲} r\cos\theta \qquad r<a \qquad (\text{الف} - ۵۲-۶)$$

$$V^o = E_{\circ}\left[-r + \frac{\varepsilon_r - ۱}{\varepsilon_r + ۲}\frac{a^۳}{r^۲}\right]\cos\theta \qquad r>a \qquad (\text{ب} - ۵۲-۶)$$

برای محاسبه میدان میتوان از رابطه $\overline{E} = -\overline{\nabla}V$ استفاده کرد بنابراین میدان در داخل و خارج کره عبارتند از:

$$\overline{E}^i = \frac{۳E_{\circ}}{\varepsilon_r + ۲}\hat{a}_z$$

$$\overline{E}^o = E_{\circ}\left[۱ + \frac{۲(\varepsilon_r - ۱)}{\varepsilon_r + ۲}\frac{a^۳}{r^۳}\right]\cos\theta\,\hat{a}_r + E_{\circ}\left[-۱ + \frac{\varepsilon_r - ۱}{\varepsilon_r + ۲}\frac{a^۳}{r^۳}\right]\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

که میدان خارج کره پس از ساده شدن عبارت خواهد شد از:

$$\bar{E}^o = E_{\circ}\,\hat{a}_z + E_{\circ}\frac{\varepsilon_r - ۱}{\varepsilon_r + ۲}\frac{a^۳}{r^۳}\left[۲\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

نکته جالب اینکه در فاصله دور جمله دوم میدان E^o همان میدان ناشی از یک دو قطبی الکتریکی می‌باشد. در اینجا هم مانند حالت استوانه عایق میدان داخل کره با میدان اولیه موازی است اما با شدت کمتر باید دقت کرد که اگر فضا دی‌الکتریک با ضریب ε_r باشد و یک حفره کروی در آن ایجاد کنیم یعنی برای کره $\varepsilon_r = ۱$ باشد برای بدست آوردن میدان داخل حفره باید ε_r را تبدیل به $\frac{۱}{\varepsilon_r}$ در معادلات بالا بکنیم.

مثال ۱۲: در یک فضای دی الکتریک لایتناهی با $\varepsilon_r = ۵$ حفره‌ای کروی ایجاد می‌کنیم اگر میدان $\bar{E} = ۳۳.\hat{a}_z$ در داخل فضا (دی الکتریک) برقرار باشد (قبل از ایجاد حفره) در اینصورت میدان داخل حفره را بدست آورید.

***حل:** کافیست در فرمول میدان داخل کره در مثال قبل ε_r را تبدیل به $\frac{۱}{\varepsilon_r}$ کنیم.*

$$\bar{E}_{in} = \frac{۳}{\frac{۱}{\varepsilon_r} + ۲}E.\hat{a}_z = \frac{۳\varepsilon_r}{۲\varepsilon_r + ۱}E.\hat{a}_z = \frac{۳ \times ۵}{۱۱} \times ۳۳.\hat{a}_z = ۴۵.\hat{a}_z$$

ملاحظه می‌شود که میدان در محیطی که ε_r کمتری دارد بزرگتر از میدان در محیطی است که ε_r بیشتری دارد.

مثال ۱۳: یک کره فلزی زمین شده در فضایی که میدان الکتریکی یکنواخت $E = E_{\circ}\,\hat{a}_z$ موجود است قرار داده می‌شود، میدان الکتریکی در اطراف کره و چگالی بار سطحی روی سطح کره را بدست آورید.

***حل:** ابتدا پتانسیل را قبل از قرار دادن کره با داشتن میدان بدست می‌آوریم.*

$$\overline{E} = -\overline{\nabla}V = \frac{-\partial V}{\partial Z}\hat{a}_z = E.\hat{a}_z \;\rightarrow\; V = -E_{\circ}z = -E_{\circ}\,r\cos\theta$$

این پتانسیل باید با پتانسیل اطراف کره در حالتی که $r \rightarrow \infty$ میل میکند برابر باشد حال فرم کلی پتانسیل اطراف کره را که پاسخ معادله لاپلاس است همانطوریکه در مثال قبل مورد بحث قرار گرفت به شکل زیر می‌نویسیم.

$$V = \left[Ar^n + Br^{-(n+۱)}\right]P_n(\cos\theta)$$

$$\lim_{r\rightarrow\infty} V_{\infty} = \lim\left[Ar^n + Br^{-(n+۱)}\right]P_n(\cos\theta) = -E_{\circ}\,r\cos\theta$$

از حل معادله بالا نتیجه می‌گیریم که $n=1$ و $A=-E_{\circ}$ بنابراین پتانسیل در اطراف کره با رابطه زیر بیان خواهد شد.

$$V=\left[-E_{\circ}\, r+\frac{B}{r^{2}}\right]\cos\theta$$

حال شرط مرزی پتانسیل صفر روی کره را اعمال می‌کنیم.

$$V(r=a)=\left[-E_{\circ}\, a+\frac{B}{a^{2}}\right]\cos\theta=0 \;\rightarrow\; B=E_{\circ}\, a^{3}$$

بنابراین

$$V=E_{\circ}\left[-r+\frac{a^{3}}{r^{2}}\right]\cos\theta$$

$$\overline{E}=-\overline{\nabla}V=E_{\circ}\left[1+\frac{2a^{3}}{r^{3}}\right]\cos\theta\,\widehat{a}_{r}+E_{\circ}\left[-1+\frac{a^{3}}{r^{3}}\right]\sin\theta\,\widehat{a}_{\theta}$$

چگالی بار روی کره برابر است با مولفه عمودی D یعنی E_r $\varepsilon_{\circ}$ روی کره یعنی:

$$\rho_{s}=\varepsilon_{\circ}\, E_{\circ}\left[1+2\frac{a^{3}}{r^{3}}\right]\cos\theta\;\Big|_{r=a}=3\varepsilon_{\circ}\, E_{\circ}\cos\theta$$

۶-۹- حل معادله لاپلاس بروش عددی

در حالاتی که مرزهای هم پتانسیل در هادی بشکل ساده گفته شده نباشند دیگر نمی‌توان از روش جدا کردن متغیرها یعنی روش تحلیلی استفاده کرد برای بدست آوردن پاسخ معادله لاپلاس در این حالت از روش دیگری مبتنی بر محاسبات عددی استفاده می‌کنیم این روش‌ها با توجه به کامپیوترهای دیجیتال که انجام محاسبات عددی با حجم زیاد را امکانپذیر می‌سازد اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده‌اند برای نشان دادن اصول این روش فرض کنید که پتانسیل V_1 , V_2 ,..... V_6 در شش نقطه از فضا که بفواصل مساوی از نقطه $P(0,0,0)$ روی محورهای دو بدو عمود بر هم گذرنده از P (که آنها را محورهای x و y و z می‌نامیم) قرار دارند معلوم باشند برای یافتن مقدار تقریبی پتانسیل در نقطه P میتوان چنین نوشت:

$$\left[\nabla^{2}V\right]_{P}=\left[\nabla^{2}V\right]_{(0,0,0)}=\left[\frac{\partial^{2}V}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}V}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}V}{\partial z^{2}}\right]_{(0,0,0)}=0 \qquad (53-6)$$

$$\left[\frac{\partial^{2}V}{\partial x^{2}}\right]_{(0,0,0)}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\right]_{(0,0,0)}=\frac{1}{h}\left\{\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\left(\frac{h}{2},0,0\right)-\frac{\partial V}{\partial x}\left[\frac{-h}{2},0,0\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{h}\left\{\frac{[V]_{(h,0,0)}-[V]_{(0,0,0)}}{h}-\frac{[V]_{(0,0,0)}-[V]_{(-h,0,0)}}{h}\right\}$$

$$=\frac{1}{h^{2}}\left[V_{1}+V_{2}+2V_{\circ}\right]$$

به همین ترتیب

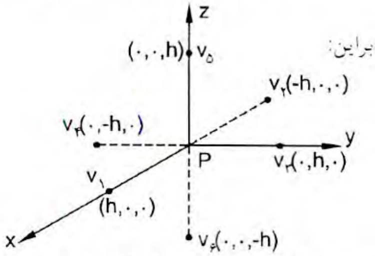
$$\left[\frac{\partial^{2}V}{\partial y^{2}}\right]_{(0,0,0)}=\frac{1}{h^{2}}\left[V_{3}+V_{4}-2V_{\circ}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^{2}V}{\partial z^{2}}\right]_{(0,0,0)}=\frac{1}{h^{2}}\left[V_{5}+V_{6}-2V_{\circ}\right]$$

پس از جایگزین نمودن مشتق دوم V نسبت به z,y,x در معادله (۶-۵۳) خواهیم داشت

$$V_{\circ} = \frac{۱}{۶}\left[V_۱ + V_۲ + V_۳ + V_۴ + V_۶\right]$$

بنابراین پتانسیل نقطه P تقریباً برابر متوسط پتانسیل‌های شش نقطه‌ای است که بفواصل مساوی از P و واقع روی محورهای دو بدو عمود بر هم گذرنده از P قرار دارند.



شکل(۶-۳): مختصات و پتانسیل‌های شش نقطه بفاصله مساوی از P و واقع روی محورهای متعامد

اگر پتانسیل تابعی از فقط دو متغیر y,x باشند آنگاه $V_۵=V_۶=V_{\circ}$ بنابراین:

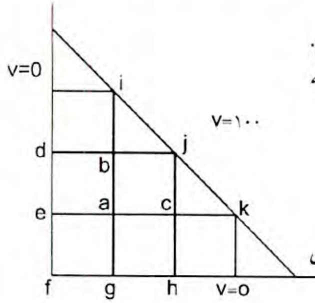
$$V_{\circ} = \frac{۱}{۶}\left[V_۱ + V_۲ + V_۳ + V_۴ + V_{\circ} + V_{\circ}\right]$$

که پس از ساده شدن خواهیم داشت.

$$V_{\circ} = \frac{۱}{۴}\left[V_۱ + V_۲ + V_۳ + V_۴\right]$$

برای نشان دادن کاربرد این روش به بررسی مثال زیر می‌پردازیم:

مثال ۱۴: جعبه‌ای بطول بی نهایت و با سطح مقطعی بشکل مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را در نظر می‌گیریم پتانسیل سطح مجاور زاویه قائمه برابر صفر و از آن سطح مقابل زاویه قائمه برابر ۱۰۰ می‌باشد مطلوبست پتانسیل نقاط c,b,a داخل جعبه.



حل: ابتدا شکل را به تعدادی مربع و مثلث مطابق شکل تقسیم بندی می‌کنیم.
اگر نقطه a را در نظر بگیریم با معدل گرفتن پتانسیل نقاط d و f و h و j که بفاصله مساوی از a قرار دارند مقدار پتانسیل a بدست می‌آید.

$$V_a = \frac{۱}{۴}\left[V_d + V_f + V_h + V_j\right] = \frac{۱}{۴}\left[۰+۰+۰+۱۰۰\right] = ۲۵^V$$

حال با داشتن پتانسیل نقاط j,d,i,a که بفاصله مساوی از b و روی محورهای عمود بر هم گذرنده از b قرار دارند مقدار پتانسیل نقطه b بدست می‌آید.

$$V_b = \frac{۱}{۴}\left[V_a + V_i + V_d + V_j\right] = \frac{۱}{۴}\left[۲۵+۱۰۰+۰+۱۰۰\right] = ۵۶/۲۵^V$$

به همین ترتیب پتانسل نقطه c را با استفاده از پتانسیل نقاط h,j,k,a میتوان بدست آورد.

$$V_c = \frac{۱}{۴}\left[V_a + V_k + V_j + V_h\right] = \frac{۱}{۴}\left[۲۵+۱۰۰+۱۰۰+۰\right] = ۵۶/۲۵^V$$

حال با داشتن پتانسیل نقاط g,b,e,c که به a نسبت به نقاط j,h,f,d نزدیکترند پتانسیل نقطه a بدست می‌آید.

$$V_a = \frac{۱}{۴}\left[V_e + V_c + V_b + V_g\right] = \frac{۱}{۴}\left[۰+۵۶/۲۵+۵۶/۲۵+۰\right] = ۲۸/۱^V$$

حال مجدداً پتانسیل نقاط c,b را با داشتن پتانسیل جدید نقطه a بدست می‌آوریم.

$$V_b = \frac{۱}{۴}\left[V_a + V_i + V_d + V_j\right] = \frac{۱}{۴}\left[۲۸/۱+۱۰۰+۰+۱۰۰\right] = ۵۷$$

$$V_c = \frac{۱}{۴}\left[V_a + V_k + V_j + V_h\right] = \frac{۱}{۴}\left[۲۸/۱+۱۰۰+۱۰۰+۰\right] = ۵۷$$

$$V_a = \frac{۱}{۴}\left[V_e + V_c + V_b + V_g\right] = \frac{۱}{۴}\left[۰+۵۷+۵۷+۰\right] = ۲۵/۵$$

به همین ترتیب این پروسه را آنقدر تکرار می‌کنیم تا تفاوت مقادیر متوالی نهایی برای پتانسیل هر نقطه از میزان معینی کمتر شود حال میتوان با داشتن پتانسیل نقاط j,c,b,a پتانسیل نقطه مرکز مربعی که رئوس آن این نقاط هستند بدست آورد و برای سایر رئوس نیز میتوان به همین ترتیب پتانسیل مرکز مربع تشکیل شده با این نقاط بدست آورده شده و با تقسیم ریزتر و با روش گفته شده میتوان پتانسیل تمام نقاط داخل مثلث را بدست آورد.

۶-۱۰- معادله پواسان

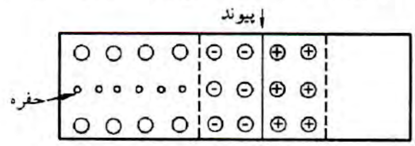
در صورتیکه پتانسیل در ناحیه‌ای از فضا که حاوی بار الکتریکی است مطلوب باشد از معادله پواسان استفاده می‌کنیم حل معادله پواسان در حالت کلی از حل معادله لاپلاس پیچیده‌تر است ولی خوشبختانه در اکثر موارد عملی استفاده از حالت یک بعدی این معادله که بسادگی قابل حل است کفایت می‌کند برای نشان دادن کاربرد معادله پواسان به بررسی یک نوع دیود نیمه هادی که در آن چگالی بار الکتریکی در ناحیه پیوند خطی تغییر می‌کند می‌پردازیم. شکل زیر پیوند P-n و تغییرات چگالی بار را برای این دیود نشان می‌دهد با فرض آنکه چگالی توزیع بار در سطح مقطع دیود یکنواخت و تغییرات آن در فاصله $|x| \le \frac{w}{2}$ توسط رابطه $\rho = ax$ بیان شود، آنگاه معادله پواسان بشکل زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{ax}{\varepsilon} \qquad (۵۴-۶)$$

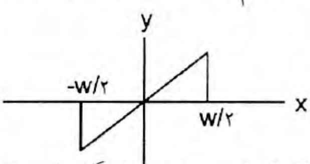
که ε ضریب دی الکتریک نیمه هادی است پس از یکبار انتگرال گرفتن از طرفین معادله داریم.

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{a}{2\varepsilon}x^2 + C_1 \qquad (۵۵-۶)$$

ثابت C_1 را میتوان با استفاده از این شرط حدی که میدان الکتریکی باید در $x = \pm\frac{w}{2}$ صفر باشد بدست آورد.



شکل(۶-۴) الف: نمایش شماتیک پیوند P-n



شکل(۶-۴)ب: منحنی تغییرات چگالی بار در ناحیه پیوند

در واقع میدان الکتریکی فقط در ناحیه پیوند (لایه تهی) که بارهای مثبت و منفی پس از نفوذ حفره‌ها و الکترونها از یکطرف پیوند بطرف دیگر تشکیل می‌شوند وجود دارد خطوط میدان از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم می‌شوند با اعمال شرط مزبور $C_1 = \frac{aw^2}{8\varepsilon}$ محاسبه می‌گردد یادآوری می‌شود که در محاسبه این ثابت از $E_x = \frac{-dV}{dx}$ استفاده شده است پس از جایگزین نمودن مقدار این ضریب در رابطه (۶-۵۵) و یکبار انتگرال گرفتن داریم.

$$V = -\frac{a}{6\varepsilon}x^3 + \frac{aw^2}{8\varepsilon}x + C_2 \qquad (۵۶-۶)$$

اگر پتانسیل در x=۰ را بدلخواه برابر صفر بگیریم ثابت $C_2=0$ خواهد شد افت پتانسیل روی پیوند عبارتست از:

$$V_j = V\left[+\frac{w}{2}\right] - V\left[-\frac{w}{2}\right] = \frac{aw^3}{12\varepsilon} \qquad (۵۷-۶)$$

با داشتن ولتاژ پیوند میتوان ظرفیت خازن تشکیل شده در لایه تهی را که از رابطه $C = \frac{dQ}{dV_j}$ بدست می‌آید محاسبه کرد برای این منظور ابتدا Q را بدست می‌آوریم.

$$Q = A\int_0^{\frac{w}{2}} \rho\, dx \quad \Rightarrow \quad Q = A\int_0^{\frac{w}{2}} ax\, dx = A\frac{aw^2}{8} \qquad (۵۸-۶)$$

که A مساحت سطح مقطع پیوند است.

$$C=\frac{dQ}{dV_j}=\frac{dQ}{dw}\frac{dw}{dV_j}=\frac{dQ}{dw}\left[\frac{dV_j}{dw}\right]^{-۱}=\left[\frac{Aaw}{۴}\right]\left[\frac{aw^۲}{۴\varepsilon}\right]^{-۱}=\varepsilon\frac{A}{w}$$

که پس از جایگزین نمودن w بر حسب V_j داریم.

$$C=A\left[\frac{a\varepsilon^۲}{۱۲V_j}\right]^{\frac{۱}{۳}} \qquad (۵۸-۶)$$

بنابراین یکی از کاربردهای معادله پواسان بدست آوردن خازن اتصال (Junction) در دیود P-n می‌باشد.

مثال ۱۵: چگالی حجمی بار در فاصله بین دو هادی کابل هم محور به شعاع داخلی ۲^{cm} و شعاع خارجی ۵^{cm} برابر است با $\rho=-۱۰^{-۸}\left(۱+۱۰R\right)$ که R فاصله تا محور کابل است اگر E_R و V هر دو روی استوانه داخلی صفر باشند V در روی هادی خارجی چقدر است؟

حل: ***چون V روی هادی داخلی صفر است و روی این هادی ϕ و z تغییر می‌کند پس پتانسیل تابع ϕ و z نیست و فقط تابع R است (از رابطه پواسان هم معلوم است که با توجه به اینکه ρ فقط تابع R است V فقط تابع R است)***

$$\nabla^۲V=\frac{-\rho}{\varepsilon}=\frac{۱۰^{-۸}}{\varepsilon_۰}\left(۱+۱۰R\right)=۳۶۰\pi\left(۱+۱۰R\right)$$

$$\frac{۱}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R\frac{\partial V}{\partial R}\right]=۳۶۰\pi\left(۱+۱۰R\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[R\frac{\partial V}{\partial R}\right]=۳۶۰\pi\left[R+۱۰R^۲\right]$$

$$R\frac{\partial V}{\partial R}=۳۶۰\pi\left[\frac{۱}{۲}R^۲+\frac{۱۰}{۳}R^۳\right]+C_۱$$

$$\frac{dv}{dR}=۳۶۰\pi\left[\frac{۱}{۲}R+\frac{۱۰}{۳}R^۲\right]+\frac{C_۱}{R}$$

$$V=۳۶۰\pi\left[\frac{۱}{۴}R^۲+\frac{۱۰}{۹}R^۳\right]+C_۱\ln R+C_۲$$

$$E=-\frac{dV}{dR}=-۳۶۰\pi\left[\frac{۱}{۲}R+\frac{۱۰}{۳}R^۲\right]-\frac{C_۱}{R}$$

$$E\left(R=۰/۰۲۰\right)=-۳۶۰\pi\left[\frac{۱}{۲}\times۰/۰۲+\frac{۱۰}{۳}\times۴\times۱۰^{-۴}\right]-۵۰C_۱=۰$$

$$\Rightarrow C_۱=-۰/۲۵۶$$

$$V(R=۰/۰۲)=۳۶۰\pi\left[\frac{۱}{۴}\times۴\times۱۰^{-۴}+\frac{۱۰}{۹}\times۸\times۱۰^{-۶}\right]-۰/۲۵۶\ln۰/۰۲+C_۲=۰$$

$$\Rightarrow C_۲=-۱/۱۲۴$$

بنابراین با داشتن $C_۱$ و $C_۲$ تابع پتانسیل بدست می‌آید.

$$V=۳۶۰\pi\left[\frac{۱}{۴}R^۲+\frac{۱۰}{۹}R^۳\right]-۰/۲۵۶\ln R-۱/۱۲۴$$

$$V\left(R=۰/۰۵\right)=۳۶۰\pi\left[\frac{۱}{۴}\times۲۵\times۱۰^{-۴}+\frac{۱۰}{۹}\times۱۲۵\times۱۰^{-۶}\right]-۰/۲۵۶\ln۰/۰۵-۱/۱۲۴$$

$$V\left(R=۰/۰۵\right)=۰/۵^V$$

بنابراین پتانسیل روی هادی بیرونی $۰/۵^V$ خواهد بود. دقت کنید که برای بار نقطه‌ای که در $r=r_۰$ قرار گرفته چگالی حجمی بار $\rho=q\delta\left(r-r_۰\right)$ تعریف می‌شود که q اندازه بار و δ تابع ضربه می‌باشد.

سوالهای لاپلاس و پواسان

۱. بین دو صفحه $z=0$ و $z=2$ بار الکتریکی به چگالی $\rho = \varepsilon_0 (1-z)$ قرار گرفته است اگر پتانسیل در $z=0$ برابر صفر و در $z=2$ برابر ۴ باشد تابع پتانسیل بین دو صفحه کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3+\frac{4}{3}z$ ۲) $\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3+\frac{5}{3}z$ ۳) $\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{3}z$ ۴) $\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3+\frac{4}{3}z$

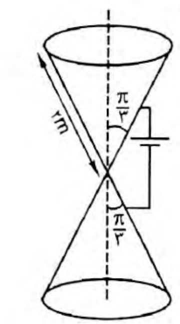
۲. بین دو صفحه شعاعی که در $\phi=0$ و $\phi=\frac{\pi}{2}$ قرار دارند باطری به اختلاف پتانسیل 100^V متصل می‌کنیم اگر صفحه $\phi=\frac{\pi}{2}$ به قطب منفی باطری وصل شده باشد پتانسل روی صفحه $\phi=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\frac{100}{3}$ ۲) $\frac{50}{3}$ ۳) $\frac{200}{3}$ ۴) 60

۳. صفحه $z=0$ دارای بار الکتریکی به چگالی بار سطحی ρ_s می‌باشد فضای $z>0$ دارای دی‌الکتریکی با ضریب ε_1 و فضای $z<0$ دارای دی الکتریکی با ضریب ε_2 می‌باشد میدان در $z>0$ کدام است؟

۱) $\frac{\rho_s}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ ۲) $\frac{\rho_s}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$ ۳) $-\frac{\rho_s}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ ۴) $\frac{3\rho_s}{2\varepsilon_1+4\varepsilon_2}$

۴. بین دو قیف مطابق شکل ماده‌ای با ضریب هدایت الکتریکی $\sigma = 2\times10^{-3}$ پر شده است مقاومت الکتریکی بین دو قیف را بدست آورید؟



۱) $28/4^{\Omega}$
۲) $35/6^{\Omega}$
۳) $31/4^{\Omega}$
۴) $43/7^{\Omega}$

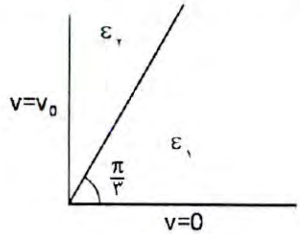
۵. بین دو پوسته کروی فلزی هم مرکز اختلاف پتانسیل 270^V برقرار شده است شعاع کره کوچک $a=10^{cm}$ و شعاع کره بزرگتر 40^{cm} می‌باشد اگر کره بزرگتر زمین شده باشد پتانسیل در $r=30^{cm}$ چقدر است؟

۱) ۱۳۵ ۲) 30^V ۳) 80^V ۴) 15^V

۶. مقاومت و خازن بین دو صفحه $\phi=\frac{\pi}{6}$ و $\phi=\frac{\pi}{2}$ که بین $R=0/1^m$ و $R=0/4^m$ و $z=0$ و $z=2^m$ واقع شده‌اند کدام است (ماده بین دو صفحه دارای ضریب دی الکتریک ε و ضریب هدایت الکتریکی σ می‌باشد)

۱) $C=\frac{2\varepsilon}{\pi}\ln 4$ ، $R=\frac{\pi}{2\sigma\ln 4}$
۲) $C=\frac{\varepsilon}{4\pi}$ ، $R=\frac{4\pi}{\sigma}$
۳) $C=\frac{6\varepsilon\ln 4}{\pi}$ ، $R=\frac{\pi}{6\sigma\ln 4}$
۴) $C=\frac{\varepsilon\ln 4}{2\pi}$ ، $R=\frac{2\pi}{\sigma\ln 4}$

۷. دو نیم رسانا واقع در $\phi = \circ$ و $\phi = \frac{\pi}{۲}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به ترتیب دارای پتانسیلهای صفر و $V_\circ$ می‌باشند ناحیه $\circ < \phi < \frac{\pi}{۳}$ را عایق کامل باضریب دی الکتریک $\varepsilon_۱ = ۳\varepsilon_\circ$ و ناحیه $\frac{\pi}{۳} < \phi < \frac{\pi}{۲}$ را عایق دیگری با ضریب دی الکتریک $\varepsilon_۲ = ۵\varepsilon_\circ$ فرا گرفته است (شکل زیر) چگالی سطحی بارهای پلاریزه (مقید) را در $\phi = \frac{\pi}{۳}$ به دست آورید. $\left[\nabla = \frac{\partial}{\partial R}\hat{a}_R + \frac{۱}{R}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial Z}\hat{a}_Z\right]$

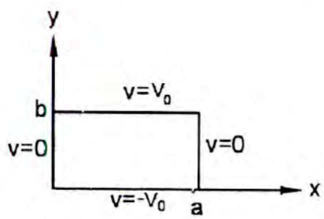


۱) $\frac{۴V_\circ\varepsilon_\circ}{\pi R}$
۲) $\frac{۲V_\circ\varepsilon_\circ}{\pi R}$
۳) $\frac{۴۱V_\circ\varepsilon_\circ}{۱۲\pi R}$
۴) $\frac{۷۲V_\circ\varepsilon_\circ}{۱۳\pi R}$

۸. در مختصات استوانه‌ای ناحیه $۰/۵^m < R < ۳^m$ و $\circ \le Z \le ۱۰$ و $\circ \le \phi \le ۲\pi$ از ماده‌ای با ضریب هدایت الکتریکی $\sigma = ۲\circ \frac{℧}{m}$ پر شده است باطوری به پتانسیل $V_\circ$ بین دو صفحه $R = \circ/۵$ و $R = ۳$ متصل شده است اگر بخواهیم توان ۲۵^{kw} در ماده بصورت حرارت تلف شود مقدار $V_\circ$ چقدر است؟

۱) $۱۵/۶^V$
۲) $۱۸/۹^V$
۳) $۱۲/۴^V$
۴) $۲۸/۲^V$

۹. یک تونل فلزی بسیار طویل و به سطح مقطع مستطیل به ابعاد $a \times b$ مطابق شکل دارای پتانسیل دیواره داده شده زیر است تابع پتانسیل در داخل تونل کدام است؟



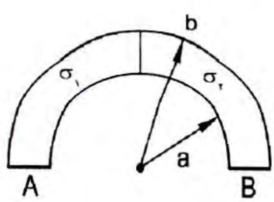
۱) $V = \sum_{n=۱,۳,...}^{\infty} \frac{۴V_\circ}{n\pi}\sinh\left[\frac{n\pi}{a}\left(y - \frac{b}{۲}\right)\right]\sin\frac{n\pi}{a}x$

۲) $V = \sum_{n=۱,۳,...}^{\infty} \frac{۴V_\circ}{n\pi}\cosh\left[\frac{n\pi}{a}\left(y - \frac{b}{۲}\right)\right]\sin\frac{n\pi}{a}x$

۳) $V = \sum_{n=۱,۳,...}^{\infty} \frac{۴V_\circ}{n\pi}\sinh\left[\frac{n\pi}{a}\left(y - \frac{b}{۲}\right)\right]\cos\frac{n\pi}{a}x$

۴) $V = \sum_{n=۱,۳,...} \frac{۴V_\circ}{n\pi}\sinh\frac{n\pi}{a}y\sin\frac{n\pi}{a}x$

۱۰. دو رسانا با ضریب هدایت الکتریکی $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ تشکیل یک مقاومت بشکل نیم استوانه مطابق شکل به ضخامت d را داده‌اند. مقاومت الکتریکی بین سطوح A و B کدام است؟



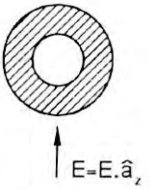
۱) $\frac{۲(\sigma_۱ + \sigma_۲)\ln\frac{b}{a}}{d(b-a)}$
۲) $\frac{۲\ln\frac{b}{a}}{d}\left(\frac{۱}{\sigma_۱} + \frac{۱}{\sigma_۲}\right)$
۳) $\frac{(b-a)}{(\sigma_۱ + \sigma_۲)\pi(b+a)}$
۴) $\frac{\pi}{۲d\ln\frac{b}{a}}\left(\frac{۱}{\sigma_۱} + \frac{۱}{\sigma_۲}\right)$

۱۱. صفحات شعاعی هادی کامل در $\phi = ۴۵^\circ$ و $\phi = ۳۰^\circ$ که از $R = \circ/\circ۲^m$ تا $R = \circ/۲^m$ ادامه دارند در دست

است اگر E_ϕ در $R=۰/۱^{m}$ و $\phi=۳۶°$ برابر $۱۵۰\frac{v}{m}$ و پتانسیل در $\phi=۴۵°$ برابر صفر باشد اختلاف پتانسیل بین دو صفحه کدام است؟

۱) $۳\frac{\pi}{۴}$ ۲) π ۳) $۵\frac{\pi}{۴}$ ۴) $۷\frac{\pi}{۴}$

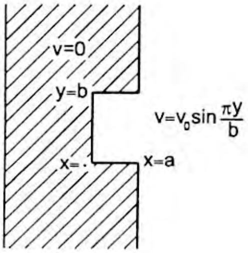
۱۲. یک پوسته عایق به شعاع داخلی $a=۰/۱^{cm}$ و شعاع خارجی $b=۳^{cm}$ در محیطی که میدان الکتریکی یکنواخت $E=۳۰۰\,\hat{a}_z$ وجود دارد قرار می‌گیرد اگر ضریب دی الکتریک نسبی پوسته $\varepsilon_r=۸$ باشد میدان در $r<a$ کدام است؟



۱) $۱۲۷\hat{a}_z$ ۲) $۹۰\hat{a}_z$

۳) $۲۴۰\hat{a}_z$ ۴) $۱۱۰\hat{a}_z$

۱۳. شکافی مستطیل شکل به پهنای b و عمق a مطابق شکل در یک قطعه فلز بی نهایت بزرگ به پتانسیل صفر اینجا می‌گردد پتانسیلی که توزیع آن بصورت $۰<y<b$ و $V=V_\circ \sin\frac{\pi y}{b}$ می‌باشد در دهانه شکاف در $x=a$ ایجاد می‌شود تابع پتانسیل در درون شکاف کدام است؟



۱) $V=\frac{V_\circ}{\cosh\frac{\pi}{b}a}\sinh\frac{\pi}{b}x\sin\frac{\pi}{b}y$

۲) $V=\frac{V_\circ}{\sinh\frac{\pi}{b}a}\sinh\frac{\pi}{b}x\sin\frac{\pi}{b}y$

۳) $V=\frac{V_\circ}{b\sinh\frac{\pi}{b}a}\sinh\frac{\pi}{b}x\sin\frac{\pi}{b}y$

۴) $V=\frac{V_\circ}{\cosh\frac{\pi}{b}a}\cosh\frac{\pi}{b}x\sin\frac{\pi}{b}y$

پاسخ سوالهای لاپلاس و پواسان

۱. گزینهٔ ۲) از معادله پواسان استفاده می‌کنیم.

$$\nabla^2 V=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}=1-z$$

$$\frac{d^2V}{dz^2}=1-z \rightarrow \frac{dV}{dz}=z-\frac{1}{2}z^2+C_1 \rightarrow V=\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3+C_1z+C_2$$

$$V(z=0)=0 \rightarrow C_2=0 \quad V(z=2)=\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{6}(2)^3+2C_1=4 \rightarrow C_1=\frac{5}{3}$$

$$V=\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3+\frac{5}{3}z$$

۲. گزینهٔ ۳) پتانسیل فقط تابع ϕاست.

$$\nabla^2 V=\frac{d^2V}{d\phi^2}=0 \rightarrow V=A\phi+B$$

$$V\left[\frac{\pi}{2}\right]=A\frac{\pi}{2}+B=0 \qquad \rightarrow \qquad B=100 \qquad V=\frac{-200}{\pi}\phi+100$$

$$V(0)=A\times 0+B=100 \qquad A=\frac{-200}{\pi} \qquad V\left[\frac{\pi}{6}\right]=\frac{-100}{3}+100=\frac{200}{3}$$

۳. گزینهٔ ۱) اگر پتانسیل در $z>0$ را V_1 و پتانسیل در $z<0$ را V_2 بگیریم داریم:

$$V_1=A_1z+B_1 \qquad D_{z_1}-D_{z_2}=\rho_s$$

$$V_2=A_2z+B_2 \qquad \varepsilon_1\left(-\nabla V_1\right)-\varepsilon_2\left(-\nabla V_2\right)=\rho_s$$

$$\varepsilon_2A_2-\varepsilon_1A_1=\rho_s \rightarrow \quad A_2=\frac{\rho_s}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \quad A_1=\frac{-\rho_s}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$V_1(z=0)=V_2(z=0) \rightarrow B_1=B_2$$

$$V_1(z=h)=V_2(z=-h) \Rightarrow A_1=-A_2$$

$$\overline{E}_1=-\nabla V_1=-A_1\hat{a}_z=\frac{\rho_s}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\hat{a}_z$$

۴. گزینهٔ ۴) پتانسیل فقط تابع θاست.

$$\nabla^2 V=0 \rightarrow V=A\ln\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right]+B$$

$$V\left[\theta=\frac{\pi}{3}\right]=V_0=A\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+B$$

$$V\left[\theta=\frac{2\pi}{3}\right]=0=A\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+B \quad \rightarrow B=\frac{V_0}{2}$$

$$A=\frac{-V_0}{2\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}=-\frac{V_0}{2\ln\sqrt{3}}$$

$$V=\frac{-V_0\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{2\ln\sqrt{3}}+\frac{V_0}{2} \qquad \overline{E}=-\nabla V=\frac{V_0}{2r\sin\theta\ln\sqrt{3}}\hat{a}_\theta$$

$$J = \sigma E = \frac{\sigma V_\circ}{۲r \sin\theta \ln\sqrt{۳}} \qquad I = \iint J\, ds = \int_\circ^۲ \int_\circ^{۲\pi} \frac{\sigma V_\circ}{۲r\sin\theta \ln\sqrt{۳}} r\sin\theta\, d\phi\, dr$$

$$I = \frac{۲\pi\sigma V_\circ}{\ln\sqrt{۳}} \quad \rightarrow \quad R = \frac{V_\circ}{I} = \frac{\ln\sqrt{۳}}{۲\pi\sigma} = \frac{۲۵\circ}{\pi}\ln\sqrt{۳} = ۴۳/۷^{\Omega}$$

۵. گزینهٔ ۲) پتانسیل تابع r است پاسخ معادله لاپلاس بصورت زیر است.

$$V = \frac{A}{r} + B \qquad \begin{matrix} V(r=\circ/۱) = ۱\circ A + B = ۲۷\circ \\ V(r=\circ/۴) = ۲/۵A + B = \circ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} A = ۳۶ \\ B = -۹\circ \end{matrix}$$

$$V = \frac{۳۶}{r} - ۹\circ \quad \rightarrow V(r=\circ/۳) = \frac{۳۶}{\circ/۳} - ۹\circ = ۳\circ^{V}$$

۶. گزینهٔ ۳) پاسخ معادله لاپلاس در حالتی که پتانسیل تابع ϕ است عبارتست از:

$$V = A\phi + B$$

$$\begin{matrix} V\left[\frac{\pi}{۶}\right] = A\frac{\pi}{۶} + B = V_\circ \\ V\left[\frac{\pi}{۲}\right] = A\frac{\pi}{۲} + B = \circ \end{matrix} \qquad \begin{cases} A = -\frac{۳}{\pi}V_\circ \\ B = \frac{۳}{۲}V_\circ \end{cases} \rightarrow \quad V = -\frac{۳}{\pi}V_\circ\phi + ۳\frac{V_\circ}{۲}$$

$$\overline{E} = -\nabla V = \frac{۳V_\circ}{R\pi}\hat{a}_\phi \qquad \rho_s = \varepsilon E_n = \frac{۳\varepsilon V_\circ}{R\pi}$$

$$Q = \iint \rho_s\, ds = \int_{\circ/۲}^{\circ/۴}\int_\circ^۲ \frac{۳\varepsilon V_\circ}{R\pi}\, dz\, dR = \frac{۴\varepsilon V_\circ}{\pi}\ln۴$$

$$C = \frac{Q}{V_\circ} = \frac{۶\varepsilon}{\pi}\ln۴ \qquad RC = \frac{\varepsilon}{\sigma} \rightarrow \quad R = \frac{\pi}{۶\sigma\ln۴}$$

۷. گزینهٔ ۴) پاسخ معادله لاپلاس در دو محیط با توجه به اینکه V فقط تابع ϕ است عبارتست از:

$$\begin{matrix} V_۱ = A_۱\phi_۱ + B_۱ \\ V_۲ = A_۲\phi_۲ + B_۲ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} V_۱(\phi=\circ) = \circ \rightarrow B_۱ = \circ \\ V_۱(\phi=\frac{\pi}{۳}) = V_۲(\phi=\frac{\pi}{۳}) \rightarrow A_۱\frac{\pi}{۳} = A_۲\frac{\pi}{۳} + B_۲ \\ V_۲(\phi=\frac{\pi}{۲}) = A_۲\frac{\pi}{۲} + B_۲ = V_\circ \end{matrix}$$

$$\varepsilon_۱\frac{\partial V_۱}{\partial R} = \varepsilon_۲\frac{\partial V_۲}{\partial R} \quad \Rightarrow \quad ۳A_۱ = ۵A_۲$$

از حل معادلات بالا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_۱ = \frac{۳\circ}{۱۳\pi}V_\circ\phi \\ V_۲ = \frac{۱۸}{۱۳\pi}V_\circ\phi + \frac{۴}{۱۳}V_\circ \end{cases}$$

$$\overline{E}_۱ = -\nabla V_۱ = -\frac{۱}{R}\left[\frac{۳\circ}{۱۳\pi}V_\circ\right]\hat{a}_\phi \qquad \overline{E}_۲ = -\nabla V_۲ = -\frac{۱}{R}\left[\frac{۱۸}{۱۳\pi}V_\circ\right]\hat{a}_\phi$$

$$\rho_{sb_۱} = \overline{P_۱}\cdot\overline{n} = \varepsilon_\circ\left(\varepsilon r_۱ - ۱\right)\overline{E}_۱\cdot\hat{a}_\phi = -\frac{۶\circ V_\circ\varepsilon_\circ}{۱۳\pi R}$$

$$\rho_{sb_۲} = \overline{P_۲}\cdot\overline{n} = \varepsilon_\circ\left(\varepsilon r_۲ - ۱\right)\overline{E}_۲\cdot\left(\hat{a}_\phi\right) = \frac{۷۲V_\circ\varepsilon_\circ}{۱۳\pi R}$$

$$\rho_{sb}=\rho_{sb_1}+\rho_{sb_2}=\frac{12V_0\varepsilon_0}{13\pi R}$$

۸. گزینهٔ ۲) پاسخ معادله لاپلاس بشرح زیر است:

$$V=A\ln R+B \qquad \begin{matrix} V(R=0/5)=V_0=A\ln 0/5+B \\ V(R=3)=0=A\ln 3+B \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A=\frac{-V_0}{\ln 6} \\ B=V_0\frac{\ln 3}{\ln 6} \end{cases}$$

$$V=\frac{-V_0}{\ln 6}\ln R+V_0\frac{\ln 3}{\ln 6}=\frac{V_0}{\ln 6}\ln\frac{3}{R}$$

$$\overline{E}=-\nabla V=\frac{V_0}{R\ln 6}\hat{a}_R \qquad J=\frac{\sigma V_0}{R\ln 6} \qquad I=\int_0^{10}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma V_0}{R\ln 6}R\,d\phi\,dz$$

$$I=\frac{20\pi\sigma V_0}{\ln 6} \qquad \rightarrow \qquad R=\frac{\ln 6}{2\pi\sigma}=\frac{\ln 6}{40\pi}$$

$$\frac{V_0^2}{R}=25000 \qquad \rightarrow \qquad V_0=50\sqrt{10}\times\left(\frac{\ln 6}{40\pi}\right)^{\frac{1}{2}}=18/9$$

۹. گزینهٔ ۱) با توجه به متن درس و شرایط مرزی داده شده. معلوم است که پتانسیل بر حسب y تابع فرد است پس بصورت $\sinh y$ می‌باشد و در جهت x تابع سینوسی دارد.

۱۰. گزینهٔ ۴) فرض کنیم $V_A=V_0$ و $V_B=0$ در اینصورت پتانسیل فقط تابع ϕ است.

$$V_1=A_1\phi+B_1 \qquad 0<\phi<\frac{\pi}{2}$$

$$V_2=A_2\phi+B_2 \qquad \frac{\pi}{2}<\phi<\pi$$

$$V_1(0)=V_0 \quad \rightarrow \quad B_1=V_0$$

$$V_1(\pi)=0 \quad \rightarrow \quad A_2\pi+B_2=0 \qquad \rightarrow A_2=\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\frac{V_0}{\pi} \quad \rightarrow I=\iint\sigma_1E_1\,ds$$

$$V_1\left[\frac{\pi}{2}\right]=V_2\left[\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow A_1\frac{\pi}{2}+B_1=A_2\frac{\pi}{2}B_2 \qquad A_1=\frac{2\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\frac{V_0}{\pi} \quad I=\int_a^b\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\frac{V_0}{R\pi}d(dR)$$

$$J_1=J_2\Rightarrow\sigma_1E_1=\sigma_2E_2\rightarrow\sigma_1A_1=\sigma_2A_2$$

$$\overline{E}_1=-\nabla V=-\frac{A_1}{R}$$

$$I=\frac{2\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1+\sigma_2)}V_0\,d\ln\frac{b}{a} \rightarrow \frac{V_0}{I}=R=\frac{\pi}{2d\ln\frac{b}{a}}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)$$

۱۱. گزینهٔ ۳) با توجه به صورت مسئله پتانسیل فقط تابع ϕ است و پاسخ معادله لاپلاس به صورت زیر می‌باشد.

$$V=A\phi+B \qquad \overline{E}=-\nabla V=-\frac{A}{R}\hat{a}_\phi$$

$$E=(R=0/1)=\frac{-A}{0/1}=150 \Rightarrow A=-15 \qquad V(\phi=\frac{\pi}{4})=A\frac{\pi}{4}+B=0$$

$$V=-15\frac{\pi}{4}+B=0 \rightarrow B=+15\frac{\pi}{4}$$

$V = -۱۵\phi + ۱۵\frac{\pi}{۴}$ $\qquad V(\phi=۳۰) - V(\phi=۴۵) = ۱۵\left[\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۶}\right] = ۵\frac{\pi}{۴}$

۱۲. گزینهٔ ۱) همانطوریکه در متن درس گفتیم میدان در $a<r<b$ برابر است با:

$$\overline{E}_\circ' = \frac{۳}{۲+\varepsilon_r} E_\circ \hat{a}_z = \frac{۳}{۲+۸} \times ۳۰۰ \hat{a}_z = ۹۰ \hat{a}_z$$

حال میدان در $r<۰/۱$ را با تبدیل ε_r به $\frac{۱}{\varepsilon_r}$ مطابق فرمول زیر بدست می‌آوریم.

$$\overline{E}_\circ'' = \frac{۳}{۲+\frac{۱}{\varepsilon_r}} \overline{E}_\circ' = \frac{۳\varepsilon_r}{۲\varepsilon_r + ۱} \overline{E}_\circ' = \frac{۳\times۸}{۲\times۸+۱} \times ۹۰ \hat{a}_z = ۱۲۷\hat{a}_z$$

مطالب بالا وقتی صحیح است که $a \ll b$ باشد

۱۳. گزینهٔ ۲) پتانسیل در جهت y همانطوریکه دیده می‌شود تابع سینوسی دارد ولی در جهت x چون در $x=۰$ برابر صفر است تابع سینوس هیپوربولیک می‌باشد.

$$V = \sum A_m \sinh\alpha x \sin\alpha y \qquad \alpha = \frac{m\pi}{b}$$

$$V(x=a) = \sum A_m \sinh\frac{m\pi}{b} a \sin\frac{m\pi}{b} y = V_\circ \sin\frac{\pi}{b} y \quad \rightarrow \quad m=۱$$

$$A_۱ \sinh\frac{\pi}{b} a = V_\circ \quad \rightarrow \quad A_۱ = \frac{V_\circ}{\sinh\frac{\pi}{b} a}$$

$$\rightarrow V = \frac{V_\circ}{\sinh\frac{\pi}{b} a} \sinh\alpha x \sin\alpha y \quad \Rightarrow V = \frac{V_\circ}{\sinh\frac{\pi}{b} a} \sinh\frac{\pi}{b} x \sin\frac{\pi}{b} y$$