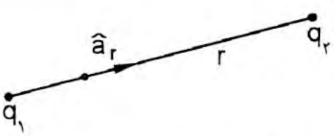
فصل دوم

قانون کولمب و میدان الکتریکی

مقدمه: قانون کولمب یکی از قوانین اساسی در فیزیک و الکترومغناطیس می‌باشد و اساس مبحث الکتریسیته ساکن را تشکیل می‌دهد بر طبق این قانون که در مورد بارهای ذره‌ای (نقطه‌ای) صادق است اگر دوبار $q_۱$ و $q_۲$ به فاصله r از هم قرار داشته باشند بر یکدیگر نیروی وارد می‌کنند که اندازه این نیرو متناسب با حاصلضرب اندازه دوبار و عکس مجذور فاصله بین دوبار می‌باشد جهت این نیرو در جهت خط و اصل بین دوبار می‌باشد. مطابق شکل ۲-۱ اگر دوبار $q_۱$ و $q_۲$ بفاصله r از هم باشند رابطه نیروی وارد از طرف بار $q_۱$ بر بار $q_۲$ عبارتست از



$$\overline{F}_{۲۱}=\frac{q_۱ q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\,\hat{a}_r \qquad (۱-۲)$$

که $\hat{a}_r$ بردار یکه و در جهت بار $q_۱$ به $q_۲$ می‌باشد (مطابق شکل ۲-۱)

شکل (۲-۱): نیروی بین دو بار نقطه‌ای

۸- بدیهی است که برای محاسبه نیروی وارد از طرف بار $q_۲$ بر بار $q_۱$ باید جهت $\hat{a}_r$ را عکس کرد همانطوریکه از شکل
۹- (۲-۱) دیده می‌شود اگر حاصلضرب اندازه دوبار $(q_۱ q_۲)$ مثبت باشد یعنی بارها همعلامت یا همنام باشند نیرو در جهت $+\hat{a}_r$ و دافعه است در حالی که اگر حاصلضرب اندازه دوبار منفی باشد یعنی بارها غیر همعلامت و یا غیر همنام باشند نیرو در جهت $-\hat{a}_r$ یعنی جاذبه است.

مثال ۱: دوبار $q_۱ = ۱۶^{nc}$ و $q_۲ = ۲۵^{nc}$ بفاصله ۳۶^{cm} از هم قرار دارند بار مثبت q در چه فاصله‌ای از $q_۱$ قرار گیرد تا بیحرکت بماند.

*حل: **بدیهی است که بار q نمی‌تواند در خارج خط و اصل $q_۱$ به $q_۲$ قرار گیرد زیرا هر دو نیرو در یک راستا بوده و بار q نمی‌تواند بیحرکت بماند بنابراین بار q حتماً باید بین دو بار $q_۱$ و $q_۲$ قرار گیرد. حال اگر فاصله دوبار $q_۱$ و $q_۲$ را d و فاصله بار q از $q_۱$ را x بگیریم خواهیم داشت***

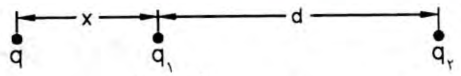
$$\rightarrow \frac{q_۱ q}{۴\pi\varepsilon_۰ x^۲}=\frac{q_۲ q}{۴\pi\varepsilon_۰ (d-x)^۲} \Rightarrow ۱۶(d-x)^۲ = ۲۵x^۲ \Rightarrow$$

$$۴(d-x) = ۵x \rightarrow x=\frac{۴}{۹}d=\frac{۴}{۹}\times ۳۶ = ۱۶^{cm}$$

مثال ۲: اگر بار $q_۱ = -۱۶^{nc}$ باشد مثلاً بالا را تکرار کنید.

*حل: **در اینحالت بار q نمی‌تواند بین دو بار $q_۱$ و $q_۲$ قرار گیرد زیرا نیروی وارد از طرف دو بار بر q همجهت بوده و q نمی‌تواند بیحرکت بماند لذا باید بار q در خارج خط واصل بین دو بار $q_۱$ و $q_۲$ قرار گیرد البته چون نیرو متناسب با بار و عکس مجذور فاصله است باید بار q نزدیک به بار $q_۱$ باشد یعنی در سمت چپ $q_۱$ قرار گیرد (شکل ۲-۲ را ببینید)***

حال شرط تعادل q را می‌نویسیم



شکل (۲-۲)

$$\frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{q_2 q}{4\pi\varepsilon_0 (d+x)^2} \Rightarrow 16(d+x)^2 = 25x^2 \rightarrow 4(d+x)=5x$$

$$\Rightarrow x = 4d = 144\text{cm}$$

یعنی بار q باید بفاصله ۱۴۴cm سمت چپ q_1 قرار گیرد. دقت شود که اگر بار q را در سمت راست q_2 می‌گرفتیم مطابق محاسبات زیر به همین نتیجه می‌رسیم.

$$\frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 (d+x)^2}=\frac{q_2 q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \Rightarrow 16x^2 = 25(d+x)^2 \rightarrow 4x=5(d+x)$$

$$\rightarrow x = -5d = -180^{\text{cm}}$$

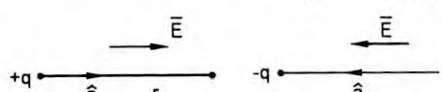
یعنی بار q به اندازه ۱۸۰cm سمت چپ q_2 و یا ۱۴۴cm سمت چپ q_1 قرار می‌گیرد که همان جواب بالا است.

۲-۱- تعریف میدان الکتریکی:

نیروی وارد از طرف بار q به واحد بار مثبت را میدان الکتریکی ناشی از بار q در محل بار واحد مثبت می‌نامیم با آنچه گفته شد میدان ناشی از بار q در فاصله r عبارتست از:

$$\overline{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \qquad (2-2)$$

که بردار یکه $\hat{a}_r$ در جهتی است که از بار مثبت دور می‌شود و اگر بار q منفی باشد. جهت بردار یکه $\hat{a}_r$ بسمت بار q می‌باشد شکل (۲-۳) این مطلب را بخوبی نشان می‌دهد.

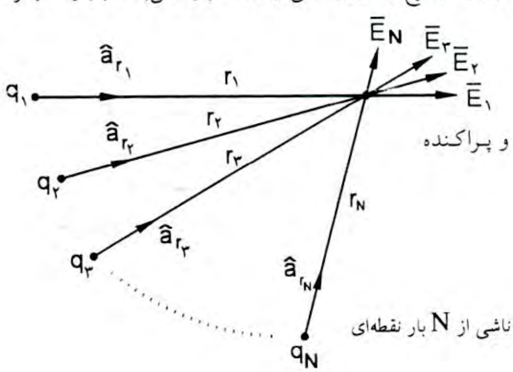


شکل (۲-۳) میدان ناشی از بار +q و -q

همانطوریکه ملاحظه می‌شود میدان الکتریکی بار q متناسب با بار q است یعنی رابطه بین میدان و بار خطی است دراینصورت اصل جمع آثار برقراراست یعنی میدان ناشی از N بار نقطه‌ای مساوی با مجموع میدانهای ناشی از تک‌تک بارها می‌باشد بعبارت دیگر

$$\overline{E}=\sum_{i=1}^{N}\overline{E}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{a}_{r_i} \qquad (3-2)$$

اما در حالت کلی و در عمل بارها بصورت نقطه‌ای و پراکنده نیستند بلکه به سه طریق زیر توزیع شده‌اند.



شکل (۲-۴) میدان ناشی از N بار نقطه‌ای

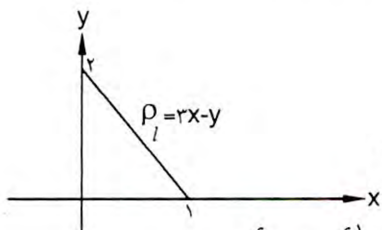
۲-۱-۱- توزیع طولی: در این حالت بار روی یک میله به قطر ناچیز توزیع شده است در اینصورت برای میله از چگالی طولی بار استفاده می‌کنیم یعنی اگر در طول $\Delta\ell$ از میله بار Δq موجود باشد در اینصورت چگالی طولی عبارتست از:

$$\rho_\ell = \lim_{\Delta\ell \to ۰} \frac{\Delta q}{\Delta\ell} = \frac{dq}{d\ell} \qquad (\frac{c}{m}) \qquad (۲-۴)$$

از رابطه (۲-۴) کل بار توزیع شده روی میله‌ای بطول L عبارتست از:

$$q = \int_۰^L \rho_\ell \, d\ell \qquad (۲-۵)$$

مثال ۳: میله‌ای مطابق شکل در صفحه xy قرار دارد و دارای بار الکتریکی به چگالی $\rho_\ell = ۳x - y$ می‌باشد کل بار توزیع شده روی میله را بدست آورید.



معادله میله: $y = ۲ - ۲x \Rightarrow dy = -۲dx$

$$\rho_\ell = ۳x - y = ۳x - (۲ - ۲x) = ۵x - ۲$$

$$d\ell = \sqrt{(dx)^۲ + (dy)^۲} = \sqrt{(dx)^۲ + (-۲dx)^۲} = \sqrt{۵}\,dx$$

$$q = \int \rho_\ell d\ell = \int_۰^۱ (۵x - ۲)\sqrt{۵}\,dx = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}x^۲ - ۲\sqrt{۵}x\Big]_۰^۱ = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲} - ۲\sqrt{۵} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

با توجه به معادله (۲-۵) میدان الکتریکی ناشی از یک میله با چگالی بار طولی ρ_ℓ با استفاده از رابطه (۲-۳) از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\overline{E} = \int_L \frac{\rho_\ell d\ell}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲} \hat{a}_R \qquad (۲-۶)$$

در رابطه (۲-۶) انتگرال روی طول میله گرفته می‌شود و بردار $\overline{R}$ بردار فاصله یک عنصر بطول $d\ell$ از میله تا نقطه‌ای است که میدان را باید در آن نقطه حساب کنیم.

واضح است که اگر توزیع بار روی میله یکنواخت باشد بعبارت دیگر ρ_ℓ ثابت باشد در اینصورت میتوان ρ_ℓ را با رابطه $\rho_\ell = \frac{q}{L}$ بدست آورد که q کل بار میله و L طول میله می‌باشند.

۲-۱-۲- توزیع سطحی: در اینحالت بار روی یک صفحه با ضخامت ناچیز توزیع شده است که جهت محاسبه میدان الکتریکی ناشی از این صفحه باردار ابتدا باید چگالی سطحی بار را تعریف کنیم. اگر در جزء سطح Δs از صفحه بار Δq موجود باشد چگالی سطحی بار با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \to ۰} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \qquad (\frac{c}{m^۲}) \qquad (۲-۷)$$

از رابطه (۲-۷) کل بار روی صفحه به مساحت s از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$q = \int_s \rho_s \, ds \qquad (۲-۸)$$

با توجه به معادله (۲-۸) میدان الکتریکی ناشی از یک صفحه با چگالی بار سطحی ρ_s با استفاده از رابطه (۲-۳) از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\overline{E} = \int_s \frac{\rho_s ds}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲} \hat{a}_R \qquad (۲-۹)$$

که انتگرال روی سطح صفحه گرفته می‌شود و $\overline{R}$ بردار فاصله جزء سطح ds روی صفحه از نقطه‌ای است که میدان را در آن نقطه قرار است بدست آوریم. در اینجا نیز واضح است که اگر توزیع بار روی صفحه یکنواخت باشد یعنی چگالی بار سطحی ρ_s در تمام نقاط صفحه ثابت باشد در اینصورت ρ_s را میتوان از رابطه $\rho_s = \frac{q}{s}$ که q کل بار توزیع شده روی صفحه و s کل سطح صفحه است بدست آورد.

۲-۱-۳- توزیع حجمی: در اینحالت بار در حجمی از فضا توزیع شده است و جهت محاسبه میدان الکتریکی ناشی از بار الکتریکی موجود در این حجم ابتدا باید چگالی حجمی بار را تعریف کنیم. فرض کنیم در حجم Δv از این حجم بار Δq موجود باشد در اینصورت چگالی حجمی بار از رابطه:

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \quad (\frac{c}{m^3}) \qquad (۲-۱۰)$$

بدست می‌آید. با استفاده از رابطه (۲-۱۰) کل بار موجود در حجم V را میتوان از رابطه زیر بدست آورد.

$$q = \int_V \rho \, dv \qquad (۲-۱۱)$$

که انتگرال روی حجمی از فضا که دارای بار الکتریکی با چگالی حجمی بار ρ است گرفته می‌شود. با توجه به معادله (۲-۱۱) میدان الکتریکی ناشی از یک بار حجمی با چگالی ρ با استفاده از رابطه (۲-۳) از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\overline{E} = \int_V \frac{\rho \, dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R \qquad (۲-۱۲)$$

در رابطه بالا $\overline{R}$ بردار فاصله جزء حجم dv از نقطه‌ای است که میدان را بدست می‌آوریم بنابراین میدان الکتریکی ناشی از سه توزیع بار طولی، سطحی و حجمی را میتوان به ترتیب از روابط (۲-۶)، (۲-۹) و (۲-۱۲) بدست آورد که در روابط زیر خلاصه شده است.

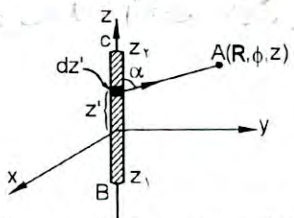
$$\overline{E} = \begin{cases} \displaystyle\int_L \frac{\rho_\ell \, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R & \text{میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار روی یک میله} \\ \displaystyle\int_s \frac{\rho_\ell \, ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R & \text{میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار روی یک صفحه} \\ \displaystyle\int_V \frac{\rho \, dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R & \text{میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار در یک حجم} \end{cases} \qquad (۲-۱۳)$$

۲-۲- محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک میله با چگالی بار طولی ρ_ℓ در یک نقطه از فضا

فرض کنیم میله‌ای بطول محدود و با چگالی بار طولی ρ_ℓ روی محور zها قرار دارد مطابق شکل زیر میدان در نقطه A که در دستگاه استوانه‌ای دارای مختصات (R, ϕ, z) است از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E_A = \int \frac{\rho_\ell \, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad \text{و} \quad \overline{R} = R\,\hat{a}_R + (z - z')\,\hat{a}_z \qquad (۲-۱۴)$$

که z' مختصات نقطه‌ای روی میله با بار dq میباشد که $dq = \rho_\ell \, d\ell$ و $d\ell = dz'$ با جایگزینی $\overline{R}$ در رابطه میدان (رابطه ۲-۱۴) خواهیم داشت.



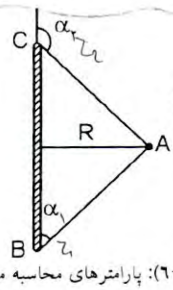
شکل (۲-۵): محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک میله

$$\overline{E}_A = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_\ell \, dz' \left[R\,\hat{a}_R + (z-z')\,a_z \right]}{4\pi\varepsilon_\circ \left[R^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overline{E}_A = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_\ell \, dz' \, R\,\hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_\circ \left[R^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_\ell (z-z') \, dz' \, \hat{a}_z}{4\pi\varepsilon_\circ \left[R^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

انتگرال اول با تغییر متغیر $\cot g\,\alpha = \dfrac{z-z'}{R}$ و انتگرال دوم با تغییر متغیر $z-z' = u$ براحتی قابل محاسبه هستند که نتیجه بصورت زیر خواهد شد.

$$\overline{E}_A = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ R} \left[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \right] \hat{a}_R + \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-z_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-z_1)^2}} \right] \hat{a}_z$$



شکل (۲-۶): پارامترهای محاسبه میدان

که با توجه به شکل زیر میدان در نقطه A به صورت زیر خواهد بود.

$$E_A = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ R} \left[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \right] \hat{a}_R + \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ} \left[\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} \right] \hat{a}_z \qquad (۲-۱۵)$$

که همانطوریکه در شکل (۲-۶) نشان داده شده است α_1 و α_2 زاویهٔ AB و AC با میله و R فاصله عمودی A از میله می‌باشند.

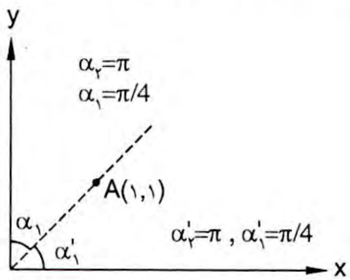
همانطوریکه از رابطه (۲-۱۵) دیده می‌شود میدان دارای دو مولفه عمود بر میله (مولفه $\hat{a}_R$) و موازی با میله ($\hat{a}_z$) می‌باشد. اگر نقطه A روی عمود منصف میله باشد در اینصورت مولفه موازی میله صفر خواهد بود زیرا AB=AC خواهد بود. در حالت خاص که طول میله بی نهایت بزرگ باشد. $\alpha_1 = 0$ و $\alpha_2 = \pi$ و AB و AC بی نهایت بزرگ خواهند شد در اینصورت

$$\overline{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_\circ R} \hat{a}_R \qquad (۲-۱۶)$$

رابطه (۲-۱۶) میدان ناشی از یک میله بطول بی نهایت میباشد همانطوریکه دیده می‌شود در اینحالت میدان شعاعی (عمود بر میله) خواهد بود. با توجه به رابطه (۲-۱۶) میدان الکتریکی در بین دو میله باردار با چگالی هم علامت برابر است با تفاضل میدان الکتریکی ناشی از تک تک میله‌ها و میدان الکتریکی در خارج دو میله با چگالی هم علامت برابر است با مجموع میدان ناشی از تک تک میله‌ها می‌باشد بدیهی برای دو میله با چگالی غیر هم علامت (یکی $+\rho_\ell$ و دیگر $-\rho_\ell$) مطلب گفته شده عکس خواهد شد.

مثال ۴: دو میله عمود بر هم به ترتیب روی قسمت مثبت محور x و y قرار داشته و دارای چگالی بار طولی ρ_ℓ می‌باشند میدان الکتریکی در روی نیمساز ربع اول (۱و۱) A را بدست آورید.

حل: مطابق شکل زیر میدان را برای تک تک میله‌ها حساب کرده و با استفاده از اصل جمع آثار جمع این دو میدان را روی نیمساز بدست می‌آوریم.



$$\overline{E}_1 = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}(\cos\alpha'_1 - \cos\pi)\,\widehat{a}_y + \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\widehat{a}_x$$ میدان میله افقی

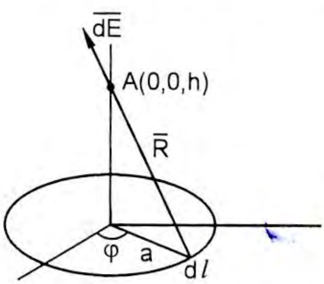
$$\overline{E}_2 = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}(\cos\alpha_1 - \cos\pi)\,\widehat{a}_x + \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\widehat{a}_y$$ میدان میله عمودی

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\widehat{a}_y - \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}}\widehat{a}_x + \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\widehat{a}_x - \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}}\widehat{a}_y$$

$$\Rightarrow \overline{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0}(\widehat{a}_x + \widehat{a}_y)$$

۲-۳- میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه دایروی به شعاع a و چگالی بار طولی ρ_ℓ روی محور میله

شکل (۲-۷) چنین حلقه‌ای را نشان می‌دهد برای محاسبه میدان در نقطه A از رابطه میدان ناشی از میله با رابطه (۲-۶) استفاده می‌کنیم.



شکل (۲-۷): میدان ناشی از میله دایره‌ای شکل روی محور دایره

$$\overline{E} = \int \frac{\rho_\ell\, d\ell\, \widehat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \int \frac{\rho_\ell\, a\, d\phi\, \overline{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\overline{R} = h\,\widehat{a}_z - a\,\widehat{a}_R$$

$$\overline{E} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_\ell\, a\, d\phi\, h\, \widehat{a}_z}{4\pi\varepsilon_0 (h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_0^{2\pi} \frac{\rho_\ell\, a^2\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0 (h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{a}_R =$$

$$\frac{\rho_\ell\, a\, d\phi\, h}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\phi\, \widehat{a}_z - \frac{\rho_\ell\, a^2}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} \widehat{a}_R\, d\phi$$

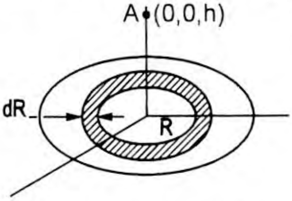
از آنجائی که $\widehat{a}_R = \widehat{a}_x\cos\phi + \widehat{a}_y \sin\phi$ در اینصورت $\int_0^{2\pi} \widehat{a}_R\, d\phi = 0$ خواهد بود لذا

$$\overline{E} = \frac{\rho_\ell\, a\, h}{2\varepsilon_0 (a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\widehat{a}_z \qquad (۱۷-۲)$$

رابطه (۲-۱۷) یک رابطه مهم در الکترو مغناطیس است و با استفاده از آن میدان در مرکز یک کره، دیسک و هر گونه شکل که بتوان آنرا به میله‌های دایروی تبدیل کرد قابل محاسبه می‌باشد.

مثال ۵: با استفاده از میدان ناشی از یک حلقه میدان در روی محور یک دیسک که دارای بار الکتریکی به چگالی بار سطحی ρ_s است را بدست آورید.

حل: دیسک را مطابق شکل زیر به صورت حلقه هایی به ضخامت dR و شعاع R در می‌آوریم و میدان ناشی از یکی از حلقه‌ها را با استفاده از رابطه (۲-۱۷) نوشته و روی شعاع دیسک انتگرال می‌گیریم.



$$d\overline{E}_A = \frac{\rho_\ell R h}{2\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z \qquad (۱۸-۲)$$

حال باید ρ_ℓ معادله را برای حلقه نوار شکل بدست آوریم می‌دانیم که کل سطح این حلقه نواری $(2\pi R\, dR)$ می‌باشد لذا کل بار در این حلقه نواری $\rho_s(2\pi R\, dR)$ می‌باشد که اگر بر طول حلقه که $2\pi R$ است تقسیم کنیم چگالی طولی حلقه بدست می‌آید بعبارت دیگر $\rho_s\, dR = \frac{(2\pi R\, dR\, \rho_s)}{2\pi R} = \rho_\ell$ با جایگزینی ρ_ℓ بدست آمده در رابطه (۲-۱۸) داریم:

$$d\overline{E}_A = \frac{(\rho_s\, dR) R h}{2\varepsilon_0 (R+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z \qquad (۱۹-۲)$$

حال اگر از رابطه (۲-۱۹) روی شعاع دیسک انتگرال بگیریم میدان ناشی از دیسک به چگالی بار سطحی ρs و شعاع a روی محور دیسک بدست می‌آید.

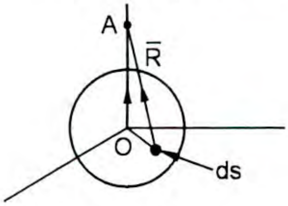
$$\overline{E}_A = \int_0^a \frac{\rho_s R\, h\, dR}{2\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z = \frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|h|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]\hat{a}_z \qquad (۲۰-۲)$$

حال میتوان میدان ناشی از یک صفحه بی نهایت بزرگ را در بالای صفحه $(h>0)$ و پائین صفحه $(h<0)$ با میل دادن a به سمت بی نهایت بدست آورد در اینصوت میدان ناشی از صفحه بی نهایت بزرگ از رابطه (۲-۲۰) با شرط $a \to \infty$ بصورت زیر خواهد بود.

$$\overline{E}_A = \begin{cases} \frac{\rho s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z & h>0 \quad \text{(میدان بالای صفحه)} \\ \frac{-\rho s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z & h<0 \quad \text{(میدان زیر صفحه)} \end{cases} \qquad (۲۱-۲)$$

رابطه (۲-۲۱) نشان دهنده این مسئله است که میدان ناشی از صفحه بی‌نهایت بزرگ در تمام نقاط فضا ثابت بوده و بستگی به فاصله نقطه تا صفحه ندارد.

میدان ناشی از دیسک به شعاع a و چگالی بار سطحی ρ_s را میتوان با استفاده از فرمول (۲-۹) که میدان ناشی از توزیع سطحی بار است نیز بدست آورد اگر عنصر سطح ds را مطابق شکل زیر انتخاب کنیم خواهیم داشت.



$$\overline{E}_A = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho_s R\, dR\, d\phi (h\hat{a}_z - R\hat{a}_R)}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho_s R\, dR\, d\phi\, h\,\hat{a}_z}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho_s R^2\, dR\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_R$$

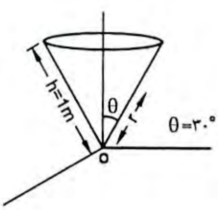
چون $\hat{a}_R = \hat{a}_x \cos\phi + \hat{a}_y \sin\phi$ است لذا $\int_{\circ}^{2\pi} \hat{a}_R \, d\phi$ صفر خواهد شد و حاصل انتگرال دوم صفر میشود لذا داریم

$$\overline{E}_A = \int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{a} \frac{\rho_s R\, dR\, d\phi\, h}{4\pi\varepsilon_{\circ}(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z = \int_{\circ}^{a}\frac{\rho_s R\, dR\, h}{2\varepsilon_{\circ}(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z$$

$$\overline{E}_A = \frac{\rho_s h}{2\varepsilon_{\circ}}\left[\frac{1}{|h|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]\hat{a}_z \qquad (۲۲-۲)$$

که همان رابطه (۲-۲۰) می‌باشد که قبلاً با تعمیم دادن میدان ناشی از حلقه با چگالی بار طولی ρ_ℓ به دیسک به شعاع a و چگالی بار سطحی ρ_s بدست آمده بود.

مثال ۶: بار سطحی با چگالی غیر یکنواخت $\rho_s = kr$ روی پوسته مخروطی شکل زیر توزیع شده است میدان E را در رأس مخروط بدست آورید کل بار روی مخروط، Q چقدر است؟



حل: اگر از معادله (۲-۹) که میدان ناشی از توزیع سطحی را می‌دهد مسئله را حل کنیم خواهیم داشت.

$$\overline{E}_o = \iint \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_{\circ} r^2}\hat{a}_R \qquad \overline{r} = -r\,\hat{a}_r$$

$$\overline{E}_o = \int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\frac{\rho_s (r\, d\phi \sin\theta)\, dr}{4\pi\varepsilon_{\circ} r^2}(-\hat{a}_r)$$

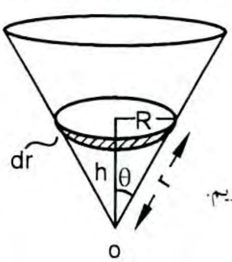
$$\overline{E}_o = \int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\frac{kr(r\sin\theta\, d\phi\, dr)}{4\pi\varepsilon_{\circ} r^2}(-\hat{a}_x \sin\theta\cos\phi - \hat{a}_y \sin\theta\sin\phi - \hat{a}_z\cos\theta)$$

واضح است که انتگرال‌های مولفه‌های $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ صفر است زیرا $\int_{\circ}^{2\pi}\sin\phi\, d\phi = \circ$ و $\int_{\circ}^{2\pi}\cos\phi\, d\phi = \circ$ بنابراین خواهیم داشت.

$$E_o = -\int_{\circ}^{2\pi}\int_{\circ}^{1}\frac{k\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\phi}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\hat{a}_z = \frac{-k}{4\varepsilon_{\circ}}\sin 2\theta\,\hat{a}_z = -\frac{k\sqrt{3}}{8\varepsilon_{\circ}}\hat{a}_z$$

$$Q = \iint \rho_s\, ds = \int_{\circ}^{1}\int_{\circ}^{2\pi} kr(r\sin\theta\, d\phi\, dr)\Big|_{\theta=30^{\circ}} = k\pi\int_{\circ}^{1} r^2\, dr = \frac{k\pi}{3} \quad (C)$$

حال این مسئله را میتوان با استفاده از میدان ناشی از یک حلقه که قبلاً حساب کرده‌ایم بدست آورد اگر حلقه‌ای به ضخامت dr و شعاع R و بفاصله h از راس o روی مخروط در نظر بگیریم در اینصورت داریم.



$$d\overline{E}_o = -\frac{\rho_\ell R h}{2\varepsilon_{\circ}(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z \qquad (۲۳-۲)$$

علامت منفی بدین خاطر است که نقطه o زیر حلقه بضخامت dr می‌باشد حال داریم.

$$\rho_\ell = \rho_s\, dr \qquad R = r\sin\theta \qquad h = r\cos\theta$$

با جایگزینی h، R و ρ_ℓ در معادله (۲-۲۳) خواهیم داشت.

$$\overline{dE}_o = -\frac{\rho_s\, dr\, r^{۲} \sin\theta \cos\theta\, \hat{a}_z}{۲\varepsilon_{\circ}\, r^{۳}} = -\frac{kr\, dr\, r^{۲} \sin\theta \cos\theta}{۲\varepsilon_{\circ}\, r^{۳}}\hat{a}_z$$

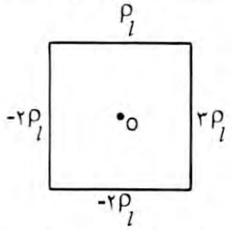
$$dE_o = -\frac{k}{۴\varepsilon_{\circ}} \sin ۲\theta\, dr\, \hat{a}_z = -\frac{k}{۴\varepsilon_{\circ}} \sin ۶۰^{\circ}\, dr\, \hat{a}_z = -\frac{k\sqrt{۳}}{۸\varepsilon_{\circ}} dr\, \hat{a}_z$$

$$E_o = \int_{\circ}^{۱} -\frac{k\sqrt{۳}}{۸\varepsilon_{\circ}} dr\, \hat{a}_z = \frac{-k\sqrt{۳}}{۸\varepsilon_{\circ}}\hat{a}_z$$

که همان نتیجه قسمت اول این مثال است.

سوالهای میدان الکتریکی

۱. چهار میله بطول a مطابق شکل با چگالی بار طولی داده شده مفروض هستند میدان الکتریکی در نقطه O (مرکز مربع) کدام است؟ ($\rho_\ell = -2\pi\varepsilon_0$ و $a=14^{cm}$)



۱) $30\, a_x + 50\, \hat{a}_y$ ۲) $50\, \hat{a}_x + 30\, \hat{a}_y$

۳) $-50\, \hat{a}_x - 30\, \hat{a}_y$ ۴) صفر

۲. دو بار نقطه‌ای $-\frac{1}{2}q$ و $\frac{3}{2}q$ به ترتیب در مبدأ مختصات و نقطه (۰و۲) قرار دارند در چه نقطه‌ای روی محور x میدان الکتریکی صفر می‌باشد؟

۱) x=۲/۷۳ ۲) x=-۱/۷۳ ۳) x=-۲/۷۳ ۴) x=۱/۷۳

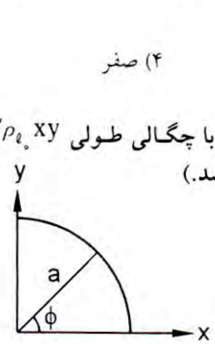
۳. بار حجمی به چگالی $\rho = 2\frac{\rho_0}{d} z$ در فضای بین $-\frac{d}{2} \le z \le \frac{d}{2}$ قرار دارد میدان الکتریکی داخل این فضا چقدر است؟

۱) $\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d}(z^2 - \frac{d^2}{2})$ ۲) $\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d}(z^2 - \frac{d^2}{4})$ ۳) $\frac{2\rho_0}{\varepsilon_0 d}(z^2 + \frac{d^2}{4})$ ۴) $\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d}(z^2 + \frac{d^2}{4})$

۴. کره‌ای به شعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی سطحی بار $\rho_s = \rho_{s_0} \cos\theta$ می‌باشد شدت میدان الکتریکی در مرکز کره کدام است؟

۱) $\frac{-\rho_{s_0}}{6\varepsilon_0}\hat{a}_z$ ۲) $\frac{-\rho_{s_0}}{3\varepsilon_0}\hat{a}_z$ ۳) $\frac{\rho_{s_0}}{3\varepsilon_0}\hat{a}_z$ ۴) صفر

۵. میله‌ای به شکل ربع دایره در صفحه xy مطابق شکل دارای بار الکتریکی با چگالی طولی $\rho_\ell = 3\rho_{\ell_0} xy$ می‌باشد میدان الکتریکی در مرکز O کدام است؟ (شعاع ربع دایره a می‌باشد.)



۱) $\frac{-\rho_{\ell_0} a}{4\pi\varepsilon_0}(\hat{a}_x - \hat{a}_y)$ ۲) $\frac{-\rho_{\ell_0} a}{2\pi\varepsilon_0}(\hat{a}_x - \hat{a}_y)$

۳) $\frac{-\rho_{\ell_0}}{4\pi\varepsilon_0}(\hat{a}_y - \hat{a}_x)$ ۴) $-\frac{\rho_{\ell_0} a}{4\pi\varepsilon_0}(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$

۶. یک حلقه بشعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی طولی ρ_ℓ می‌باشد در چه نقطه‌ای روی محور حلقه میدان حداکثر است؟

۱) $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ۲) $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ۳) $h = a\sqrt{2}$ ۴) $h=a$

۷. یک لوله استوانه‌ای شکل بشعاع a و طول L دارای بار الکتریکی با چگالی بار سطحی متغیر $\rho_s = \rho_{s_0} z$ می‌باشد قاعده بالایی استوانه در صفحه $z=\frac{L}{2}$ و صفحه پائین در $z=\frac{-L}{2}$ قرار گرفته است میدان الکتریکی

روی محور استوانه در نقطه $z=0$ چقدر است (محور استوانه محور z می‌باشد) $(L=2a)$

۱) $-0/24\frac{\rho_{s_0} a}{\varepsilon_0}\hat{a}_z$ ۲) $-0/34\frac{\rho_{s_0} a}{\varepsilon_0}\hat{a}_z$ ۳) صفر ۴) $-0/17\frac{\rho_{s_0} a}{\varepsilon_0}\hat{a}_z$

۸. یک نیمکره بشعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی بار سطحی $\rho_s=\rho_{s_0}\cos\phi\sin\theta$ می‌باشد میدان الکتریکی در مرکز نیمکره کدام است؟

۱) $\frac{-\rho_{s_0}}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z$ ۲) $\frac{-\rho_{s_0}}{6\varepsilon_0}\hat{a}_x$ ۳) $\frac{-\rho_{s_0}}{3\varepsilon_0}\hat{a}_y$ ۴) صفر

پاسخ سوالهای میدان الکتریکی

۱. *گزینهٔ ۲) طبق معادله (۲-۱۵) چون نقطه O روی عمود منصف میله های می‌باشد میدان الکتریکی مولفه موازی با میله‌ها ندارد لذا میدان ناشی از میله‌ها افقی در جهت y و میدان ناشی از میله‌های عمودی در جهت x خواهد بود.*

$$E_{\text{میله‌های افقی}} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ \frac{a}{2}}(\mathrm{cso}\alpha_1 - \cos\alpha_2)(-\hat{a}_y) + \frac{-2\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ \frac{a}{2}}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\hat{a}_y$$

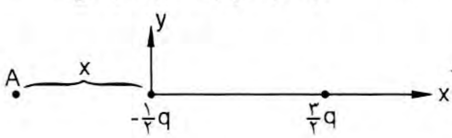
$$\alpha_1 = 45^\circ \quad \alpha_2 = 135 \rightarrow \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = \sqrt{2} = 1/4$$

$$E_{\text{میله‌های افقی}} = \frac{-4\pi\varepsilon_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ \times 0/14}(-1/4)\hat{a}_y + \frac{8\pi\varepsilon_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ \times 0/14}(1/4)\hat{a}_y = 30\hat{a}_y$$

$$E_{\text{میله‌های عمودی}} = \frac{-2\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ \frac{a}{2}}(\mathrm{cso}\alpha_1 - \cos\alpha_2)(\hat{a}_x) + \frac{3\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_\circ \frac{a}{2}}(\mathrm{cso}\alpha_1 - \cos\alpha_2)(-\hat{a}_x)$$

$$E_{\text{میله‌های عمودی}} = \frac{8\pi\varepsilon_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ \times 0/14}(1/4)\hat{a}_x + \frac{-12\pi\varepsilon_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ \times 0/14}(1/4)(-\hat{a}_x) = 50\hat{a}_x$$

$$E = E_{\text{میله‌های افقی}} + E_{\text{میله‌های عمودی}} = 50\hat{a}_x + 30\hat{a}_y$$

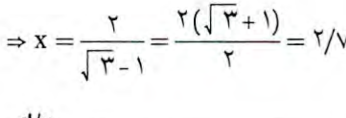


۲. *گزینهٔ ۳) واضح است میدان در سمت چپ بار* $-\frac{1}{2}q$ *صفر است اگر میدان در نقطه A صفر باشد در اینصورت داریم*

$$\frac{-\frac{1}{2}q}{4\pi\varepsilon_\circ x^2} + \frac{\frac{3}{2}q}{4\pi\varepsilon_\circ (x+2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 = (x+2)^2 \Rightarrow x\sqrt{3} = x+2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = 2/73 \rightarrow x = -2/73$$

چون A در سمت چپ مبدأ است باید x را منفی بگیریم.

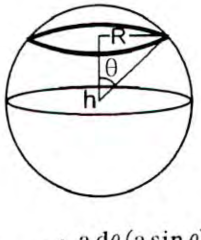


۳. *گزینهٔ ۲) اگر صفحه‌ای به ضخامت dz بین دو صفحه* $z=\frac{d}{2}$ *و* $z=-\frac{d}{2}$ *بگیریم چگالی معادل سطحی آن* $\rho_s = \rho\, dz$ *خواهد بود لذا*

$$E = \int_{-\frac{d}{2}}^{z} \frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ} + \int_{z}^{\frac{d}{2}} -\frac{\rho_s}{2\varepsilon_\circ} = \int_{-\frac{d}{2}}^{z} \frac{2\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ d} z\,dz - \int_{z}^{\frac{d}{2}} \frac{2\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ d} z\,dz = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ d}\left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right)$$

۴. *گزینهٔ ۲) میتوان از فرمول میدان ناشی از حلقه استفاده کرد مطابق شکل زیر کره را به حلقه هایی به شعاع*

معین و ضخامت مشخص تقسیم می‌کنیم اگر حلقه‌ای مطابق شکل را در نظر بگیریم ضخامت آن $a\,d\theta$ می‌باشد لذا چگالی بار طولی معادل آن $\rho_s\, a\, d\theta$ خواهد بود اگر شعاع این حلقه را R و فاصله مرکز آن تا مرکز کره را h بگیریم خواهیم داشت.



$$d\mathrm{E} = -\frac{\rho_\ell R h}{2\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{a}_z$$ (میدان ناشی از حلقه هاشور خورده در مرکز کره)

علامت منفی بخاطر این مطلب است که مرکز کره زیر این حلقه می‌باشد

حال با جایگزینی $R = a\sin\theta$ و $h = a\sin\theta$ و $\rho_\ell = \rho_s\, a\, d\theta$ داریم

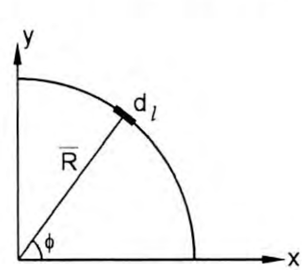
$$d\overline{E} = \frac{-\rho_s\, a\, d\theta\,(a\sin\theta)\,(a\cos\theta)}{2\varepsilon_0 (a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{a}_z$$

$$d\overline{E} = \frac{-\rho_{s_0}\cos\theta\sin\theta\cos\theta}{2\varepsilon_0}\,\hat{a}_z = \frac{-\rho_{s_0}\sin\theta\cos^2\theta}{2\varepsilon_0}\,\hat{a}_z$$

$$\overline{E} = \int_0^{\pi}\frac{-\rho_{s_0}\sin\theta\cos^2\theta}{2\varepsilon_0}\,\hat{a}_z = \frac{\rho_{s_0}}{6\varepsilon_0}\cos^3\theta\,\hat{a}_z\Big]_0^{\pi} = -\frac{\rho_{s_0}}{3\varepsilon_0}\,\hat{a}_z$$

۵. گزینهٔ ۴) از انتگرال داده شده در معادله (۲-۶) استفاده می‌کنیم.

$$\overline{E} = \int\frac{\rho_\ell\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\hat{a}_R = \int\frac{3\rho_{\ell_0}\, xy\, a\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,(-\hat{a}_R)$$



$$\overline{E} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\rho_{\ell_0}\, a\cos\phi\, a\sin\phi\, a\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,(-\hat{a}_x\cos\phi - \hat{a}_y\sin\phi)$$

$$\overline{E} = -\frac{3\rho_{\ell_0} a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(+\hat{a}_x\cos^2\phi\sin\phi + \hat{a}_y\sin^2\phi\cos\phi)\,d\phi$$

$$= \frac{-3\rho_{\ell_0} a}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{3}\hat{a}_x\cos^3\phi + \frac{1}{3}\hat{a}_y\sin^3\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-\rho_{\ell_0} a}{4\pi\varepsilon_0}\,(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

۶. گزینهٔ ۱) همانطوریکه گفته شد اندازه میدان در محور حلقه بفاصله h از مرکز حلقه عبارتست از

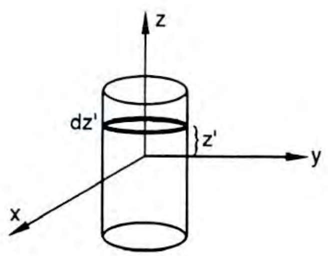
$$E = \frac{\rho_\ell a h}{2\varepsilon_0 (a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در اینصورت جهت اینکه بدانیم میدان به ازای چه مقداری از h حداکثر است باید از E نسبت به h مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\frac{dE}{dh} = \frac{\rho_\ell a\left[2\varepsilon_0 (a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}\right] - 3\varepsilon_0 (a^2+h^2)^{\frac{1}{2}}(2h)\rho_\ell a h}{4\varepsilon_0^2 (a^2+h^2)^3}$$

$$2\varepsilon_0 (a^2+h^2)^{\frac{1}{2}} \left[(a^2+h^2) - 3h^2\right] \rho_\ell a = 0 \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

۷. *گزینهٔ ۴) از تقریب میدان ناشی از حلقه استفاده می‌کنیم اگر حلقه‌ای به ضخامت dz' در صفحه $z = z'$ انتخاب کنیم میدان ناشی از این حلقه عبارت است از:*



$$d\overline{E} = -\frac{\rho_\ell a z'}{2\varepsilon_0 (a^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{a}_z \qquad \rho_\ell = \rho_s dz'$$

$$\overline{E} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{-\rho_s dz' a z' \hat{a}_z}{2\varepsilon_0 (a^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{-\rho_{s_0} a z'^2 dz' \hat{a}_z}{2\varepsilon_0 (a^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-\rho_{s_0} a}{2\varepsilon_0}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{a^2+z'^2}} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{a^2 dz'}{(a^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{a}_z$$

$$= \frac{-\rho_{s_0} a}{2\varepsilon_0}\left[\sinh^{-1}\frac{z'}{a} - \frac{z'}{\sqrt{z'^2+a^2}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \hat{a}_z = \frac{-\rho_{s_0} a \hat{a}_z}{2\varepsilon_0}\left[2\sinh^{-1} 1 - \sqrt{2}\right] = -0/17\frac{\rho_{s_0} a}{\varepsilon_0}\hat{a}_z$$

۸. *گزینهٔ ۲) چون ρ_s تابع ϕ است لذا نمی‌توان از میدان ناشی از حلقه استفاده کنیم در نتیجه از رابطه (۲-۹) استفاده می‌کنیم.*

$$\overline{E} = \iint \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

که $\overline{R} = -a\hat{a}_r$ می‌باشد لذا

$$\overline{E} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{\rho_{s_0}\cos\phi\sin\theta\,(a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi)}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(-\hat{a}_r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} -\frac{\rho_{s_0}}{4\pi\varepsilon_0}\sin^2\theta\cos\phi\,d\theta d\phi\,\hat{a}_r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{-\rho_{s_0}}{4\pi\varepsilon_0}\sin^2\theta\cos\phi\,(+\hat{a}_x\sin\theta\cos\phi + \hat{a}_y\sin\theta\sin\phi + \hat{a}_z\cos\theta)\,d\theta\,d\phi$$

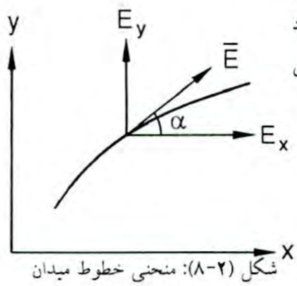
انتگرال مولفه‌های $\hat{a}_z$ و $\hat{a}_y$ صفر است لذا داریم

$$\overline{E} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{-\rho_{s_0}}{4\pi\varepsilon_0}\sin^3\theta\cos^2\phi\,\hat{a}_x\,d\theta\,d\phi = \frac{-\rho_{s_0}}{4\varepsilon_0}\hat{a}_x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta = \frac{-\rho_{s_0}}{6\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

۲-۴- خطوط میدان الکتریکی

خطوط میدان الکتریکی جهت حرکت یک ذره باردار الکتریکی را که در آن میدان الکتریکی قرار می‌گیرد را مشخص می‌کنند بعبارت دیگر اگر یک ذره باردار در یک میدان الکتریکی قرار گیرد روی یک مسیری حرکت می‌کند که معادله این مسیر همان معادله خطوط میدان الکتریکی می‌باشد بردار میدان الکتریکی در هر لحظه بر این مسیر مماس است

مطابق شکل (۲-۸) اگر منحنی $y=f(x)$ منحنی مسیر حرکت ذره باردار در میدان E باشند (منحنی خطوط میدان) در اینصورت همانطوریکه ملاحظه می‌شود بردار $\overline{E}$ بر این منحنی مماس است اگر از تعریف ضریب زاویه خط مماس بر منحنی که همان مشتق منحنی به ازای مختصات نقطه تماس است استفاده کنیم خواهیم داشت.



شکل (۲-۸): منحنی خطوط میدان

$$tg\,\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{E_y}{E_x} \qquad (۲۳-۲)$$

رابطه (۲-۲۳) را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\frac{dy}{E_y}=\frac{dx}{E_x} \qquad (۲۴-۲)$$

از حل معادله دیفرانسیل (۲-۲۴) معادله خطوط میدان بصورت $y=f(x)$ بدست می‌آید در حالت کلی که میدان دارای هر سه مولفه است در اینصورت رابطه (۲-۲۴) را میتوان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{dy}{E_y}=\frac{dx}{E_x}=\frac{dz}{E_z} \qquad (۲۵-۲)$$

در حقیقت معادله (۲-۲۵) معرف معادله یک سطح می‌باشد معادله خطوط میدان در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی بصورت زیر می‌باشد.

$$\frac{dR}{E_R}=\frac{R\,d\phi}{E_\phi}=\frac{dz}{E_z} \quad \text{مختصات استوانه‌ای} \qquad (۲۶-۲)$$

$$\frac{dr}{E_r}=\frac{r\,d\theta}{E_\theta}=\frac{r\sin\theta\,d\phi}{E_\phi} \quad \text{مختصات کروی} \qquad (۲۷-۲)$$

مثال ۷: یک میله طویل دارای بار الکتریکی به چگالی طولی $\rho_\ell=۲\pi\varepsilon_\circ$ می‌باشد مطلوبست معادله خطوط میدان.

حل: می‌دانیم میدان ناشی از یک میله بی نهایت بزرگ عبارتست از $\overline{E}=\frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ R}\hat{a}_R$ که R فاصله میله تا نقطه‌ای است که میدان در آن نقطه حساب می‌شود همانطوریکه ملاحظه می‌شود میدان تنها یک مولفه E_R دارد بنابراین نمی‌توان از رابطه (۲-۲۶) استفاده کرد لذا باید میدان را از دستگاه مختصات استوانه‌ای به قائم تبدیل کرد.

$$\overline{E}=\frac{\rho_\ell}{۲\pi\varepsilon_\circ R}\hat{a}_R=\frac{۱}{R}\hat{a}_R=\frac{۱}{R}(\hat{a}_x\cos\phi+\hat{a}_y\sin\phi)$$

$$\overline{E}=\frac{۱}{R}(\hat{a}_x\frac{x}{R}+\hat{a}_y\frac{y}{R})=\hat{a}_x\frac{x}{x^۲+y^۲}+\hat{a}_y\frac{y}{x^۲+y^۲}$$

با تبدیل میدان به دستگاه قائم می‌توان از رابطه (۲-۲۴) استفاده کرد

$$\frac{dy}{E_y}=\frac{dx}{E_x}\rightarrow\frac{dy}{\frac{y}{x^۲+y^۲}}=\frac{dx}{\frac{x}{x^۲+y^۲}}\rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

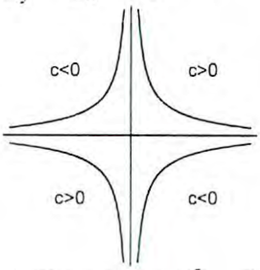
$$\rightarrow \ln y=\ln cx \rightarrow y=cx$$

همانطوریکه انتظار می‌رفت خطوط میدان بصورت خطوط راست در صفحه x-y هستند.

مثال ۸: میدان الکتریکی ناشی از توزیع یک بار مشخص از رابطه $\overline{E}=\frac{x}{x+y}\,\hat{a}_x-\frac{y}{x+y}\,\hat{a}_y$ بدست می‌آید مطلوبست معادله خطوط میدان

حل: از رابطه (۲-۲۴) خواهیم داشت

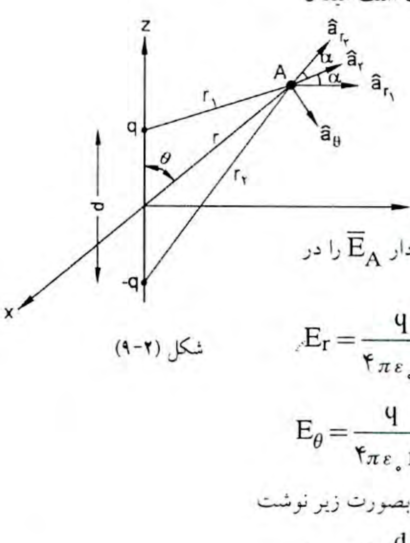
$$\frac{dy}{E_y}=\frac{dx}{E_x}\rightarrow\frac{dy}{-y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln y=\ln\frac{c}{x}\;\Rightarrow y=\frac{c}{x}$$



که تابع هموگرافیک است و در مقابل رسم گردیده است در حقیقت به ازای هر c یک دسته منحنی بدست می‌آید و مقدار c بستگی به نقطه شروع حرکت ذره باردار در میدان الکتریکی دارد.

۲-۵- میدان الکتریکی ناشی از یک دو قطبی الکتریکی

دو قطبی الکتریکی در حقیقت متشکل از دو بار مختلف العلامت q و q- می‌باشد که فاصله بین آنها در مقایسه با فاصله این دو بار از نقطه‌ای که لازم است میدان را حساب کنیم خیلی کوچک است میدان الکتریکی در نقطه A را می‌توان بصورت زیر نوشت



شکل (۲-۹)

$$\overline{E}_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\,\hat{a}_{r_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\,\hat{a}_{r_2}\qquad(۲-۲۸)$$

میدان E در صفحه θ - r است لذا مولفه E_ϕ نداریم حالا بردار $\overline{E}_A$ را در امتدادهای $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_\theta$ تجزیه نموده و از فرض $r\gg d$ استفاده می‌کنیم.

$$E_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\cos\alpha-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\cos\alpha'\qquad(۲-۲۹)$$

$$E_\theta=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\sin\alpha-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}(-\sin\alpha')\qquad(۲-۳۰)$$

با توجه به اینکه $d\ll r$ می‌باشد در اینصورت r_1 و r_2 را میتوان بصورت زیر نوشت

$$r_1=r-\frac{d}{2}\cos\theta\qquad r_2=r+\frac{d}{2}\cos\theta\qquad(۲-۳۱)$$

اگر از تقریب $\cos\alpha=\cos\alpha'\simeq 1$ و $\sin\alpha=\sin\alpha'=\frac{d\sin\theta}{2r}$ استفاده کنیم در اینصورت با جایگزینی r_1 و r_2 از (۲-۳۱) در (۲-۲۹) و (۲-۳۰) خواهیم داشت.

$$E_r=\frac{q\,d\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\quad و\quad E_\theta=\frac{q\,d\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

بنابراین میدان الکتریکی ناشی از دو قطبی الکتریکی را می‌توان بصورت زیر در دستگاه مختصات کروی بیان کرد.

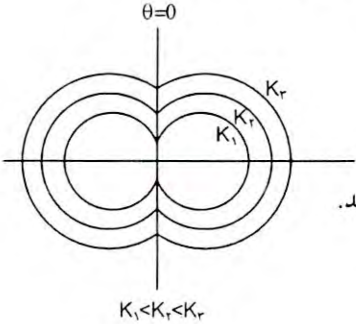
$$\overline{E}=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{a}_r+\sin\theta\,\hat{a}_\theta)\qquad(۲-۳۲)$$

همانطوریکه از رابطه (۲-۳۲) دیده می‌شود میدان ناشی از یک دو قطبی الکتریکی با مکعب فاصله نسبت عکس

دارد در حالی که میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای با مجذور فاصله نسبت عکس دارد این مسئله بدان علت است که میدان هر کدام از بارهای q و q- به نسبت $\frac{1}{r^2}$ تغییر می‌کنند و چون این دو میدان یکدیگر را تضعیف می‌کنند در نتیجه میدان منتجه به نسبت $\frac{1}{r^3}$ کاهش می‌یابد.

مثال ۹: معادله خطوط میدان الکتریکی دو قطبی را بدست آورید.

حل: چون میدان داده شده در معادله (۲-۳۲) در دستگاه مختصات کروی بیان شده لذا از رابطه (۲-۲۷) استفاده می‌کنیم.



$$\frac{dr}{E_r}=\frac{rd\theta}{E_\theta}\rightarrow\frac{dr}{۲\cos\theta}=\frac{rd\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dr}{r}=۲\frac{d\theta}{\sin\theta}\rightarrow \ln r=۲\ln c\sin\theta\rightarrow r=k\sin^۲\theta$$

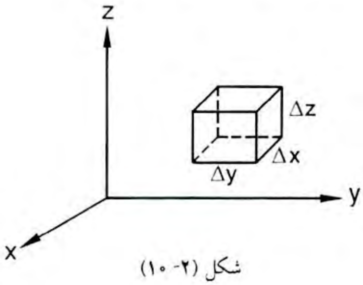
شکل خطوط میدان در دستگاه مختصات قطبی بصورت مقابل می‌باشد.

۲-۶- تعریف دیورژانس یک بردار

دیورژانس بردار $\overline{A}$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\operatorname{div}\overline{A}=\lim_{\Delta v\to ۰}\frac{\oint_{\Delta s}\overline{A}.\overline{ds}}{\Delta v} \qquad (۲-۳۳)$$

در حقیقت Δv حجم سطح بسته Δs می‌باشد اگر در فضا مکعب مستطیل کوچکی به اضلاع Δx, Δy, Δz انتخاب کنیم همانطوریکه در شکل (۲-۱۰) نشان داده شده خواهیم داشت.



شکل (۲-۱۰)

$$\oint\overline{A}.\overline{ds}=\int_{\text{سطح جلو}} A_x\,dy\,dz+\int_{\text{سطح پشت}} -A_x\,dy\,dz$$

$$+\int_{\text{سطح سمت راست}} A_y\,dx\,dz+\int_{\text{سطح سمت چپ}} -A_y\,dx\,dz+\int_{\text{سطح بالا}} A_z\,dx\,dy$$

$$+\int_{\text{سطح پائین}} -A_z\,dx\,dy \qquad (۲-۳۴)$$

اگر بردار $\overline{A}$ در مرکز مکعب مستطیل به مختصات $(x_۰, y_۰, z_۰)$ را بصورت $\overline{A}(x_۰, y_۰, z_۰)$ نشان دهیم در اینصورت خواهیم داشت.

$$\text{سطح جلو } A_x=A_x(x_۰,y_۰,z_۰)+\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{۲} \qquad (\text{۲-۳۵ - الف})$$

$$\text{سطح پشت } A_x=A_x(x_۰,y_۰,z_۰)-\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{۲} \qquad (\text{۲-۳۵ - ب})$$

$$\text{سطح راست } A_y=A_y(x_۰,y_۰,z_۰)+\frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{۲} \qquad (\text{۲-۳۵ - پ})$$

$$A_y = A_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ) - \frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{۲}$$ سطح چپ (۲-۳۵ - ت)

$$A_z = A_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ) + \frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{۲}$$ سطح بالا (۲-۳۵ - ث)

$$A_z = A_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ) - \frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{۲}$$ سطح پائین (۲-۳۵ - ج)

با جایگزینی معادلات (۲-۳۵) و با فرض ثابت بودن A روی هر سطح در (۲-۳۴) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\oint \overline{A}.\overline{ds} &= \left[A_x(x_\circ, y_\circ, z_\circ) + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{۲}\right]\Delta y\,\Delta z - \left[A_x(x_\circ, y_\circ, z_\circ) - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{۲}\right]\Delta y\,\Delta z \\ &+ \left[A_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ) + \frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{۲}\right]\Delta x\,\Delta z - \left[A_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ) - \frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{۲}\right]\Delta x\,\Delta z \\ &+ \left[A_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ) + \frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{۲}\right]\Delta x\,\Delta y - \left[A_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ) - \frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{۲}\right]\Delta x\,\Delta y \\ &= \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\Delta v\end{aligned}$$

در نتیجه رابطه (۲-۳۳) را میتوان بصورت زیر نوشت.

$$\operatorname{div}\overline{A} = \lim_{\Delta v \to \circ} \frac{\left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\Delta v}{\Delta v} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۲\text{-}۳۶)$$

در حقیقت چون اپراتور $\overline{\nabla}$ بصورت

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z \qquad (۲\text{-}۳۷)$$

می‌باشد در اینصورت رابطه (۲-۳۶) بصورت زیر بیان می‌شود

$$\operatorname{div}\overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z\right].\left[A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z\right] = \overline{\nabla}.\overline{A}$$

بعبارت دیگر، دیورژانس بردار $\overline{A}$ را می‌توانیم بصورت ضرب نقطه‌ای اپراتور $\overline{\nabla}$ و بردار $\overline{A}$ بیان کنیم. بنابراین دیورژانس بردار $\overline{A}$ بصورت زیر در دستگاه مختصات قائم بیان می‌شود.

$$\overline{\nabla}.\overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۲\text{-}۳۸)$$

حال اگر از تغییر متغیر دستگاه قائم به استوانه‌ای و کروی استفاده کنیم روابط دیورژانس در دستگاه استوانه‌ای و کروی بصورت زیر خواهد شد.

$$\overline{\nabla}.\overline{A} = \frac{۱}{R}\frac{\partial(R A_R)}{\partial R} + \frac{۱}{R}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۲\text{-}۳۹)$$

$$\overline{\nabla}.\overline{A} = \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲ A_r) + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \qquad (۲\text{-}۴۰)$$

حال با استفاده از تعریف دیورژانس قضیه دیورژانس را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\oint_s \overline{A}.\overline{ds} = \int_v \overline{\nabla}.\overline{A}\,dv \qquad (۲\text{-}۴۱)$$

مثال ۱۰: اگر بردار $\overline{A}=x\,\hat{a}_x+y\,\hat{a}_y+z\,\hat{a}_z$ باشد $\oint_s A.ds$ را روی یک استوانه به شعاع ۲^m و ارتفاع $۱/۵^m$ محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه (۲-۴۱) خواهیم داشت .

$$\oint_s \overline{A}.\overline{ds}=\int \overline{\nabla}.\overline{A}dv=\int\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]dv=\int(۱+۱+۱)\,dv$$

$$=\int ۳\,dv=۳v=۳\pi a^۲h=۳\pi(۲)^۲(۱/۵)=۱۸\pi$$

۲-۷- اثبات قضیه دیورژانس

اگر حجم نامشخص v را به تعداد زیادی عنصر به حجم Δv تقسیم کنیم برای هر عنصر حجم می‌توانیم تعریف دیورژانس را بنویسیم مثلاً برای j امین عنصر حجم خواهیم داشت.

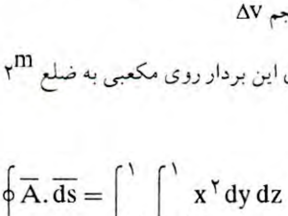
$$(\nabla.A)_j=\frac{\oint_{\Delta s_j}\overline{A}.\overline{ds}}{\Delta v_j}$$

$$(\nabla.A)_j\,\Delta v_j=\oint_{\Delta s_j}\overline{A}.\overline{ds}$$

اگر دو طرف رابطه را روی کل حجم جمع بزنیم داریم

$$\underset{\Delta vj\to ۰}{\text{حد}}\sum_{j=۱}^{N}(\overline{\nabla}.\overline{A})_j\,\Delta v_j=\underset{\Delta sj\to ۰}{\text{حد}}\left[\sum_{j=۱}^{N}\oint_{\Delta s_j}\overline{A}.\overline{ds}\right]$$

عبارت سمت چپ رابط بالا همان $\int(\overline{\nabla}.\overline{A})\,dv$ می‌باشد اما انتگرال سمت راست تبدیل به انتگرال روی سطح کل می‌شود زیرا سهم‌های سطوح داخلی اجزاء کوچک مجاور یکدیگر را خنثی می‌کنند در حقیقت در یک سطح مشترک داخلی عمودهای بسمت بیرون ($\overline{ds}$) اجزاء کوچک همسایه به جهت مخالف هم اشاره دارد از این رو سهم خالص عبارت سمت راست معادله بالا به سطح خارجی S که حجم v را احاطه کرده مربوط می‌گردد پس سمت راست معادله بالا به $\oint_s\overline{A}.ds$ و سمت چپ به $\int(\nabla.A)\,dv$ تبدیل می‌شود.



شکل (۲-۱۱) تقسیم‌بندی حجم v به عناصر کوچک حجم Δv

مثال ۱۱: اگر $\overline{A}=x^۲\hat{a}_x+۲xy^۲\hat{a}_y+۳zx\,\hat{a}_z$ باشد قضیه دیورژانس را برای این بردار روی مکعبی به ضلع ۲^m که مرکز آن در مبدأ مختصات است تحقیق کنید.

حل:

$$\oint\overline{A}.\overline{ds}=\underbrace{\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱}x^۲\,dy\,dz\Big|_{x=۱}}_{\text{سطح جلو}}+\underbrace{\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱}-x^۲\,dy\,dz\Big|_{x=-۱}}_{\text{سطح پشت}}$$

$$+\underbrace{\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱}۳zx\,dx\,dy\Big|_{z=۱}}_{\text{سطح بالا}}+\underbrace{\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱}-۳zx\,dx\,dy\Big|_{z=-۱}}_{\text{سطح پائین}}+\underbrace{\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱}۲xy^۲\,dx\,dz\Big|_{y=۱}}_{\text{سطح سمت راست}}$$

$$+\underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -3xy^2\,dx\,dz\,\Big|_{y=-1}}_{\text{سطح سمت چپ}} \qquad = 4-4+0+0+0+0=0$$

$$\int_v (\overline{\nabla}.\overline{A})\,dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2x+4xy+3x)\,dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(5x+4xy)\,dx\,dy\,dz=0$$

لذا رابطه صحیح است و $\oint_s \overline{A}.\overline{ds}$ و $\int(\overline{\nabla}.\overline{A})\,dv$ با هم روی سطح مکعب و حجم مکعب یکی می‌باشند.

مثال ۱۲: مثال قبل را برای مکعبی که وجه‌های آن در محدوده $0\le x\le 2$ ، $0\le y\le 2$ و $0\le z\le 2$ می‌باشد تکرار کنید.

$$\oint \overline{A}.\overline{ds}=\underbrace{\int_0^2\int_0^2 x^2\,dy\,dz\,\Big|_{x=2}}_{\text{سطح جلو}}+\underbrace{\int_0^2\int_0^2 x^2\,dy\,dz\,\Big|_{x=0}}_{\text{سطح پشت}}+\underbrace{\int_0^2\int_0^2 3zx\,dx\,dy\,\Big|_{z=2}}_{\text{سطح بالا}}$$

$$+\underbrace{\int_0^2\int_0^2 -3zx\,dx\,dy\,\Big|_{z=0}}_{\text{سطح پائین}}+\underbrace{\int_0^2\int_0^2 2xy^2\,dx\,dz\,\Big|_{y=2}}_{\text{سطح سمت راست}}+\underbrace{\int_0^2\int_0^2 -2xy^2\,dx\,dz\,\Big|_{y=0}}_{\text{سطح سمت چپ}}$$

$$=16+0+24+0+32+0=72$$

$$\oint(\overline{\nabla}.\overline{A})\,dv=\iiint(2x+4xy+3x)\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2\int_0^2(5x+4xy)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{5}{2}x^2yz\,\Big]_{0,0,0}^{(2,2,2)}+x^2y^2z\,\Big]_{(0,0,0)}^{(2,2,2)}=40+32=72$$

لذا قضیه دیورژانس اثبات می‌شود.

۲-۸- چگالی شار الکتریکی

چگالی شار الکتریکی را بصورت $D=\varepsilon_0 E$ تعریف می‌کنیم در حقیقت برای حذف تابعیت میدان به خصوصیات الکتریکی محیط D تعریف می‌شود مثلاً برای بار نقطه‌ای خواهیم داشت.

$$\overline{D}=\varepsilon_0\overline{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \qquad (۲-۴۲)$$

حال اگر کره‌ای به مرکز بار نقطه‌ای و شعاع r در نظر بگیریم خواهیم داشت.

$$\oint_{\text{کره}}\overline{D}.\overline{ds}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Q}{4\pi r^2}r^2\,d\theta\,d\phi\sin\theta=Q$$

به همین ترتیب برای یک میله طویل با چگالی بار طولی ρ_ℓ میدان الکتریکی با رابطه $\overline{E}=\dfrac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{a}_R$ بیان می‌شود در اینصورت خواهیم داشت

$$\overline{D}=\varepsilon_0\overline{E}=\frac{\varepsilon_0\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{a}_R=\frac{\rho_\ell}{2\pi R}\hat{a}_R$$

حال اگر استوانه‌ای بشعاع R که محور آن میله با چگالی ρ_ℓ می‌باشد در نظر بگیریم خواهیم داشت.

$$\oint_{\text{استوانه}} \overline{D}.\overline{ds} = \int_{\text{سطح جانبی استوانه}} \frac{\rho_\ell}{2\pi R}\hat{a}_R.\overline{ds} = \int_0^{2\pi}\int_0^{l} \frac{\rho_\ell}{2\pi R} R\, d\phi\, dz = \rho_\ell l = Q$$

در هر دو حالت بار نقطه‌ای و بار میله‌ای ثابت شد که $\oint \overline{D}.\overline{ds}$ روی یک سطح بسته برابر است با کل بار الکتریکی یکی داخل سطح بسته این رابطه به قانون گوس معروف است و بصورت زیر بیان می‌شود.

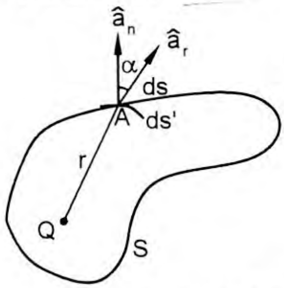
$$\oint_s \overline{D}.\overline{ds} = Q \qquad (۲-۴۳)$$

نکته مهم این است که سطح بسته‌ای که انتگرال روی آن گرفته می‌شود اختیاری است مثلاً برای بار نقطه‌ای می‌توان سطح را مطابق شکل زیر یک سطح نامشخص فرض کرد.

در اینصورت $\hat{a}_n$ برداریکه عمود بر سطح s و $\hat{a}_r$ برداریکه عمود بر سطح کره گذرانیده شده از نقطه A می‌باشد (در جهت بردار $\overline{D}$) در اینصورت خواهیم داشت.

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r.\hat{a}_n\, ds$$

که $\hat{a}_r.\hat{a}_n$ برابر است با $\cos\alpha$ در نتیجه انتگرال بالا به شکل زیر خواهد شد.



شکل (۲-۱۲): اثبات قانون گوس برای سطح بسته اختیاری

$$\oint_s \overline{D}.\overline{ds} = \int_s \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ds\cos\alpha = \int_{s'\ \text{سطح کره}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ds' = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi = Q$$

ملاحظه می‌شود که $\oint_s \overline{D}.\overline{ds}$ روی هر سطح بسته برابر است با بار موجود داخل سطح بسته دقت شود که اگر بار Q خارج سطح بسته باشد $\oint \overline{D}.\overline{ds} = 0$ می‌شود ولی D صفر نیست زیرا روی قسمتی از سطح که بردار شار الکتریکی به آن وارد می‌شود $\overline{D}.\overline{ds}$ و روی قسمتی از سطح که بردار شار الکتریکی از آن خارج می‌شود $\overline{D}.\overline{ds}$ است بنابراین $\oint \overline{D}.\overline{ds}$ که معرف شار الکتریکی خالص خارج شوند از سطح بسته s می‌باشد برابر صفر خواهد شد بنابراین قانون گوس چنین بیان می‌کند که شار الکتریکی خارج شونده از سطح بسته s برابر است با مقدار بار الکتریکی موجود در داخل سطح بسته. قانون گوس کاربرد بسیار زیادی در حل مسائل الکترواستاتیک دارد.

مثال ۱۳: کره‌ای بشعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی بار حجمی ρ می‌باشد میدان الکتریکی در داخل و خارج کره را بدست آورید.

حل: ***برای محاسبه میدان در داخل کره با استفاده از قانون گوس کره‌ای بشعاع $r<a$ داخل کره اصلی به شعاع a رسم کرده و قانون گوس را برای این کره می‌نویسیم.***

$$\oint_s \overline{D}.\overline{ds} = \text{بار داخل کره بشعاع r}$$

چون $\overline{D}$ روی کره بشعاع r ثابت است بنابراین خواهیم داشت.

$$D\,4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \;\rightarrow\; \overline{D} = \frac{\rho r}{3}\widehat{a}_r \;,\; \overline{E} = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\widehat{a}_r$$

به همین ترتیب برای محاسبه میدان در خارج کره با استفاده از قانون گوس کره‌ای بشعاع r>a رسم می‌کنیم و قانون گوس را برای این کره می‌نویسیم.

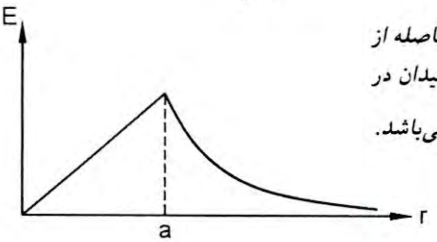
$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = \text{بار داخل کره شعاع r}$$

$$D(4\pi r^2) = \rho \frac{4}{3}\pi a^3 \;\rightarrow\; \overline{D} = \frac{\rho a^3}{3r^2}\widehat{a}_r \;,\; \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\widehat{a}_r$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\overline{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\widehat{a}_r & r<a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\widehat{a}_r & r>a \end{cases}$$

منحنی تغییرات میدان در داخل و خارج کره بر حسب فاصله از مرکز کره در زیر رسم شده است همانطور که ملاحظه می‌شود میدان در داخل کره بر حسب r خطی و در خارج بصورت تابعی از $\frac{1}{r^2}$ می‌باشد.



رابطه (۲-۴۳) با استفاده از قضیه دیورژانس به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$\oint_s \overline{D}.\overline{ds} = \int_v (\overline{\nabla}.\overline{D})\,dv = Q = \int \rho\,dv \;\rightarrow\; \overline{\nabla}.\overline{D} = \rho$$

$$\overline{\nabla}.\overline{D} = \rho \qquad (۲-۴۴)$$

این رابطه در حقیقت فرم نقطه‌ای قانون گوس می‌باشد.

سوالهای قانون گوس و خطوط میدان

۱. کره‌ای به شعاع a دارای بار الکتریکی به چگالی حجمی $\rho=\frac{\rho_\circ}{r}$ می‌باشد در اینصورت میدان الکتریکی در داخل کره کدام است؟

۱) بی نهایت ۲) $\frac{\rho_\circ}{۲\varepsilon_\circ}$ ۳) صفر ۴) $\frac{\rho_\circ a}{۲\varepsilon_\circ}$

۲. روی یک دیسک دایروی به شعاع a که در صفحه xy قرار دارد بار الکتریکی با چگالی سطحی $\rho_s=kR^{۳}$ (R در مختصات استوانه و k ثابت است) اگر شار الکتریکی خارج شونده از کره‌ای به شعاع $\frac{a}{۳}$ برابر $\Psi_۱$ و فلوی خارج شونده از کره‌ای بشعاع ۳a برابر $\Psi_۲$ باشد (مرکز کره‌ها و دیسک یکی هستند) در اینصورت $\frac{\Psi_۲}{\Psi_۱}$ کدام است؟

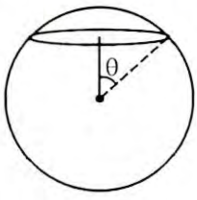
۱) $۳^{۱۰}$ ۲) $۳^{۳}$ ۳) $۳^{۶}$ ۴) $۳^{۵}$

۳. فضای بین $-a<z<a$ از بار الکتریکی به چگالی $\rho=\rho_\circ \frac{z}{|z|}$ پر شده است میدان الکتریکی در $\circ<z<a$ کدام است؟

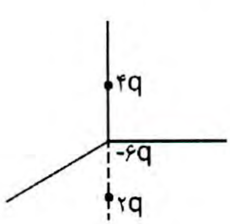
۱) صفر ۲) $\frac{\rho_\circ}{۲\varepsilon_\circ}(z-a)$ ۳) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(z-a)$ ۴) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}z$

۴. روی کره‌ای که در مرکز آن بار الکتریکی ۱c قرار دارد و شعاع آن ۲m است یک حلقه بشعاع ۱m قرار می‌دهیم شار الکتریکی خارج شونده از حلقه کدام است؟

۱) ۰/۰۴۵ ۲) ۰/۰۸۵
۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۰۷۵



۵. سه بار نقطه‌ای ۴q، ۶q- و ۲q به ترتیب روی محور zها در نقاط z=d، z=۰ و z=-d قرار دارند معادله میدان الکتریکی دو نقطه (r,θ,ϕ) کدام است؟ $(r\gg d)$



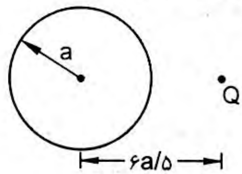
۱) $\frac{(۲r+qd\cos\theta)}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۴}}\left[۲\cos\theta\,\hat{a}_r+\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$

۲) $\frac{r-qd\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۳}}\left[۲\cos\theta\,\hat{a}_r+\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$

۳) $\frac{r+qd\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۳}}\left[۲\cos\theta\,\hat{a}_r+\sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$

۴) صفر

۶. بار $Q=1^{C}$ مطابق شکل زیر در خارج کره‌ای بشعاع a قرار دارد شار الکتریکی وارد شده به کره کدام است؟



۱) ۰/۱۸
۲) ۰/۲۲
۳) ۰/۴۱
۴) صفر

۷. بردار میدان الکتریکی در فضا بصورت $\sin x\, e^{-y}\,\hat{a}_x + \cos x\, e^{-y}\,\hat{a}_y$ می‌باشد اگر بار الکتریکی در نقطه $\left[\frac{\pi}{2}\ ,\ 0/69\right]$ قرار گیرد معادله حرکت آن کدام است؟

۱) $y = \ln 2 \sin x$ ۲) $y = 0/94\, e^{\sin x}$ ۳) $y = \ln 2 \sin^2 x$ ۴) $y = \ln \frac{2}{\sin x}$

۸. میدان الکتریکی در مختصات کروی با رابطه $\overline{E} = r\,\hat{a}_r + \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\,\hat{a}_\theta$ اگر بار الکتریکی در مختصات قطبی $(1,\frac{\pi}{4})$ قرار گیرد در چه نقطه‌ای به محور r برخورد می‌کند؟

۱) ۱/۱ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۲

پاسخ سوالهای قانون گوس و خطوط میدان

۱. گزینهٔ ۲) از قانون گوس استفاده می‌کنیم

$$\oint \overline{D}.\overline{ds} = \int \rho\, dv \;\rightarrow\; D(4\pi r^2) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{\rho_0}{r} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \int_0^{r} \rho_0\, 4\pi r\, dr$$

$$D(4\pi r^2) = 4\pi\rho_0 \frac{1}{2} r^2 \;\rightarrow\; D = \frac{\rho_0}{2} \;\rightarrow\; \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\hat{a}_r$$

۲. گزینهٔ ۴) فلوی خارج شونده از کره همان بار الکتریکی داخل کره است بنابراین:

$$\Psi_1 = \int\int \rho_s\, ds = \int_0^{\frac{a}{3}}\int_0^{2\pi} kR^3 (R\, dR\, d\phi) = 2\pi k \left[\frac{1}{5}R^5\right]_0^{\frac{a}{3}} = 2\pi k \left[\frac{1}{5}\left[\frac{a}{3}\right]^5\right] = \frac{2\pi k a^5}{3^5 \times 5}$$

$$\Psi_2 = \int_0^{3a}\int_0^{2\pi} \rho_s\, ds = \int_0^{a}\int_0^{2\pi} kR^3 (R\, dR\, d\phi) = 2\pi k \left[\frac{1}{5}R^5\right] \;\rightarrow\; \frac{\Psi_2}{\Psi_1} = 3^5$$

۳. گزینهٔ ۳) با توجه به توزیع بار
فقط مولفه E_z داریم

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & a>z>0 \\ -\rho_0 & -a<z<a \end{cases} \qquad \nabla.\,\overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} & a>z>0 \\ \dfrac{-\rho_0}{\varepsilon_0} & -a<z<0 \end{cases}$$

$$\nabla.\,\overline{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \;\rightarrow\; E_z = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z + k_1 \qquad 0<z<a$$

اما کل بار الکتریکی در $-a<z<a$ صفر است بنابراین $E=0$ در $z\geq a$ پس از شرط مرزی استفاده می‌کنیم

$$E_z \Big|_{z=a} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}a + k_1 = 0 \;\rightarrow\; k_1 = \frac{-\rho_0}{\varepsilon_0}a$$

$$E_z = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(z-a)$$

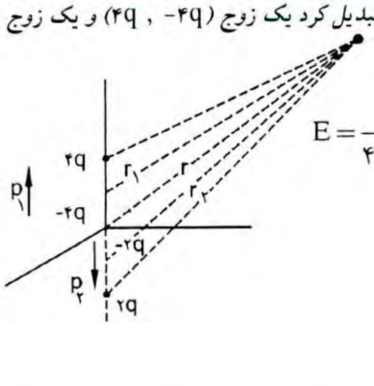
۴. گزینهٔ ۴)

$$\Psi \text{ شار الکتریکی } = \oint \overline{D}.\overline{ds} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{Q}{4\pi r^2} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{Q}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

با توجه به ابعاد داده شده زاویه θ برابر $\frac{\pi}{6}$ است

$$\Psi = \frac{1}{2}\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{4}\left[2-\sqrt{3}\right] \simeq 0/075$$

۵. گزینهٔ ۱) میتوان سه بار را به دو عدد دو قطبی مطابق شکل زیر تبدیل کرد یک زوج $(4q\ ,\ -4q)$ و یک زوج $(2q\ ,\ -2q)$ که البته ممان‌های آنها عکس یکدیگر هستند.



$$E = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right] - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

$$E = \frac{q(4r_2^3 - 2r_1^3)}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3 r_2^3}\left[2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

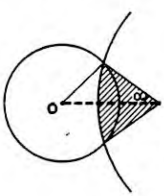
$$r_۲ = r + \frac{d}{۲}\cos\theta$$

$$\rightarrow r_۱ r_۲ = r^۲$$

$$r_۱ = r - \frac{d}{۲}\cos\theta$$

$$E = \frac{۲r + qd\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۴}\left[۲\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

۶. گزینهٔ ۲) شار وارد شونده از رابطه $\int \overline{D}.\overline{ds}$ روی قسمتی از سطح کره که مرکز آن بار Q است و با زاویه $\theta = \alpha$ مطابق شکل زیر دیده می‌شود با رابطه زیر بدست می‌آید.



$$\sin\alpha = \frac{a}{۶a/۵} = \frac{۵}{۶} \rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{۱۱}}{۶}$$

$$\Psi = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\alpha} \frac{Q}{۴\pi r^۲} r^۲ \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{Q}{۲}(۱-\cos\alpha) = \frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{\sqrt{۱۱}}{۶}\right) = ۰/۲۲$$

۷. گزینهٔ ۱) معادله خطوط میدان را بدست می‌آوریم.

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x} \rightarrow \frac{dy}{\cos x\, e^{-y}} = \frac{dx}{\sin x\, e^{-y}} \rightarrow dy = \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$\Rightarrow y = \ln k \sin x \Rightarrow ۰/۶۹ = \ln k \sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow k = ۲$$

$$y = \ln ۲ \sin x$$

۸. گزینهٔ ۴) معادله خطوط میدان را بدست می‌آوریم.

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} \rightarrow \frac{dr}{r^۲} = \frac{d\theta}{\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}} \Rightarrow \frac{dr}{r^۲} = d\theta\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta} \rightarrow \frac{۱}{r} = \ln\frac{k}{۱+\sin\theta}$$

$$r = ۱\ ,\ \theta = \frac{\pi}{۴} \rightarrow k = ۴/۶ \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲} \rightarrow \frac{۱}{r} = \ln\frac{۴/۶}{۱+۱} = \ln ۲/۳ = ۰/۸۳ \rightarrow r = ۱/۲$$

روی محور r مقدار $\theta = \frac{\pi}{۲}$ است.