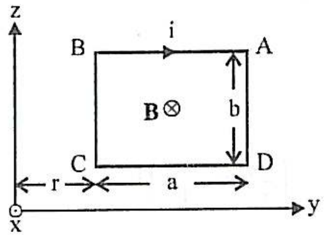
پ-۷ حل مسائل خودآزمایی فصل هفتم



شکل پ-۷۲

۱. $\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}$

که C مسیر بسته‌ای در امتداد محیط حلقه سیم مستطیلی و S، سطح حلقه است (شکل پ-۷۲). چون میدان B تغییراتی نسبت به زمان ندارد، $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{o}$ است. به علاوه در صفحه yz، r=y و $\hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x$ است. بنابراین:

$$\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = -\oint_C \left(v_\circ \hat{a}_y \times \frac{B_\circ}{y}\hat{a}_x \right).d\mathbf{L} = \oint_C \frac{v_\circ B_\circ}{y}\hat{a}_z.d\mathbf{L}$$

$$= \int_B^A + \int_A^D + \int_D^C + \int_C^B$$

انتگرال اول و سوم با توجه به اینکه $\hat{a}_z \perp d\mathbf{L}$ است، برابر صفر است.

$$\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \frac{v_\circ B_\circ}{y+a}\int_{z_D+b}^{z_D} dz + \frac{v_\circ B_\circ}{y}\int_{z_C}^{z_C+b} dz = v_\circ B_\circ b\left(-\frac{1}{y+a}+\frac{1}{y}\right)$$

$$i = \frac{1}{R}\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \frac{v_\circ B_\circ ab}{Ry(y+a)} \quad , \quad y = v_\circ t + y_\circ$$

■

۲.
$$i(t) = \frac{1}{R}\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \frac{1}{R}\left[-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}\right]$$

که C همان مسیر بسته ABCDA در شکل پ-۷۲ و S سطح این مسیر است. در صفحه yz، r=y و $\hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x$ است. بنابراین:

$$-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.d\mathbf{S} = \int_S -\frac{B_\circ \omega}{y}\sin\omega t\,\hat{a}_x.(-dy\,dz\,\hat{a}_x)$$

$$= B_\circ \omega \sin\omega t \int_{z_C}^{z_C+b} dz \int_y^{y+a} \frac{dy}{y} = b B_\circ \omega \sin\omega t \ln\left(\frac{y+a}{y}\right)$$

$$\oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L} = -\oint_C \left(v_\circ \hat{a}_y \times \frac{B_1}{y}\hat{a}_x \right).d\mathbf{L} = \oint_C \frac{v_\circ B_1}{y}\hat{a}_z.d\mathbf{L}$$

$$= \int_B^A + \int_A^D + \int_D^C + \int_C^B = \frac{v_\circ B_1}{y+a}\int_{z_D+b}^{z_D} dz + \frac{v_\circ B_1}{y}\int_{z_C}^{z_C+b} dz$$

که $B_1 = B_\circ \cos\omega t$ است.

$$\oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L} = v_\circ B_\circ b\cos\omega t\left(-\frac{1}{y+a}+\frac{1}{y}\right)$$

$$i(t)=\frac{1}{R}\left[bB_0\,\omega\ln\left(\frac{y+a}{y}\right)\sin\omega t+\frac{v_0 B_0\,ab}{y(y+a)}\cos\omega t\right]\ ,\ \ y=v_0\,t+y_0$$

■

۳.

$$\Psi=\int_S \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{S}=B_0\int_0^x y\,dx\ \ ;\ dS=y\,dx$$

$$y=d+x\tan\alpha\ \Rightarrow\ \Psi=\int_0^x B_0\,(d+x\tan\alpha)\,dx=x\left(d+\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\right)x\right)B_0$$

$$V_{ab}=-\frac{d\Psi}{dt}=-\left[d\frac{dx}{dt}+\frac{1}{2}\tan\alpha\frac{d(x^2)}{dt}\right]B_0$$

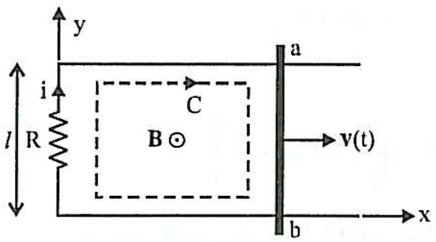
$$\frac{d(x^2)}{dt}=2x\frac{dx}{dt}\ \ ,\ \ x=v_0\,t\ \ ,\ \ \frac{dx}{dt}=v_0$$

$$V_{ab}=-[d\,v_0+\tan\alpha(v_0 t)(v_0)]B_0=-B_0\,v_0\,[d+(v_0\tan\alpha)\,t]$$

■

۴. الف) فرض می‌کنیم سرعت میله در لحظه t برابر $\mathbf{v}(t)$ باشد. حال می‌توان نوشت:

$$\oint_C \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{L}=\oint_C(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\,.\,d\mathbf{L}=\int_l^0(v\,\hat{a}_x\times B_0\,\hat{a}_z)\,.\,(dy\,\hat{a}_y)=\int_l^0-vB_0\,dy=B_0\,l\,v$$



شکل پ-۷۳

در اینجا C مسیر بسته‌ای است هم جهت با جریان i (شکل پ-۷۳). روشن است که فقط بخش شامل میله از مسیر C دارای سرعت غیر صفر است و بنابراین $\oint_C$ به $\int_l^0$ کاهش می‌یابد. جریان ایجاد شده i عبارت است از:

$$i=\frac{1}{R}\oint_C \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{L}=\frac{B_0\,l\,v}{R}$$

نیروی وارد آمده بر میله فلزی که حاوی جریان i است و در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ قرار دارد برابر است با:

$$\mathbf{F}=\int i\,d\mathbf{L}\times\mathbf{B}=\int_a^b\frac{B_0\,l v}{R}dy\,\hat{a}_y\times B_0\,\hat{a}_z=\frac{B_0^2\,l v}{R}\hat{a}_x\int_l^0 dy=-\frac{B_0^2\,l^2 v}{R}\hat{a}_x$$

از طرف دیگر،

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\frac{dv}{dt}\hat{a}_x=-\frac{B_0^2\,l^2 v}{R}\hat{a}_x$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{B_0^2\,l^2}{Rm}v\,\hat{a}_x=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ v(t)=Ae^{-\alpha t}\ ;\ \alpha=\frac{B_0^2\,l^2}{Rm}$$

که A ضریب ثابتی است که با استفاده از شرط اولیه مسئله به دست می‌آید. در لحظه $t=0$، $v=v_0$ است، پس:

$$v_0 = A \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\alpha t}$$

$$\mathbf{v}(t) = v_0\, e^{-(B_0^2 l^2/Rm)t}\, \hat{a}_x$$

ب)
$$i(t) = \frac{B_0 l v}{R} = \frac{B_0 l v_0}{R} e^{-(B_0^2 l^2/Rm)t} \quad , \quad t > 0$$

■

.۵
$$\mathbf{v}(t) = \frac{dy}{dt}\hat{a}_y = -\omega y_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right)\sin\omega t\, \hat{a}_y$$

$$\oint_{aMANb} \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \underbrace{\int_{aMANb} \mathbf{E}.d\mathbf{L}}_{=0\ (\text{چون } E=0)} + \underbrace{\int_b^a \mathbf{E}.d\mathbf{L}}_{=-V_{ab}} = \oint_{aMANb} (\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}$$

$$-V_{ab} = -\omega y_0 B_0 \sin\omega t \int_{MAN} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{d}\right)\hat{a}_y \times \hat{a}_z\right].(dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y)$$

$$= -\omega y_0 B_0 \sin\omega t \int_0^d \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right)dx$$

$$V_{ab} = \left(\frac{2}{\pi} y_0 B_0 \omega d\right)\sin\omega t$$

■

۶. فرض می‌کنیم در لحظه $t=0$ حلقه مستطیلی در صفحه yz واقع باشد و در لحظه t، زاویه $\alpha=\omega_0 t$ با این صفحه بسازد. بردار واحد عمود بر صفحه حلقه و در جهت پیشروی پیچ راستگردی که در جهت i بچرخد عبارت است از:

$$\hat{a}_n = -(\cos\alpha\,\hat{a}_x + \sin\alpha\,\hat{a}_z)$$

آنگاه سرعت نقاط مختلف حلقه برابر است با:

$$\mathbf{v} = z_0 \omega_0 \hat{a}_n = -z_0 \omega_0 (\cos\alpha\,\hat{a}_x + \sin\alpha\,\hat{a}_z)$$

که z_0 مختصه z در لحظه $t=0$ (یعنی وقتی که حلقه روی صفحه yz واقع است) می‌باشد. حال، داریم:

$$\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{L} = \oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{a}_\varphi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}(-\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(x^2+y^2)}(-y\,\hat{a}_x + x\,\hat{a}_y)$$

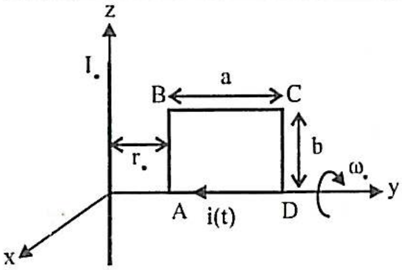
$$\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \frac{-\mu_0 I_0 \omega_0 z_0}{2\pi(x^2+y^2)}[x\cos\alpha\,\hat{a}_z - y\sin\alpha\,\hat{a}_y - x\sin\alpha\,\hat{a}_x] \quad , \quad d\mathbf{L} = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z$$

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L} = \frac{\mu_0 I_0 \omega_0 z_0}{2\pi(x^2+y^2)}(x\sin\alpha\, dx + y\sin\alpha\, dy - x\cos\alpha\, dz)$$

$$\oint(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}=\int_D^A+\int_A^B+\int_B^C+\int_C^D$$

با توجه به شکل پ-۷۴، روی مسیر DA داریم:

$$z_0=0 \;\Rightarrow\; \int_D^A(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}=0$$



شکل پ-۷۴

روی مسیر AB:

$$y=r_0 \;,\; dy=0 \;,\; z_0=z/\cos\alpha \;,\; z=-x\cot\alpha \;,\; dz=-\cot\alpha\, dx$$

$$x_A=z_A=0 \;,\; x_B=-b\sin\alpha \;,\; z_B=b\cos\alpha$$

$$x\sin\alpha\, dx+y\sin\alpha\, dy-x\cos\alpha\, dz=x(\sin\alpha+\cos\alpha\cot\alpha)\,dx=\frac{x\,dx}{\sin\alpha}$$

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}=\frac{\mu_0 I_0\omega_0}{2\pi(x^2+r_0^2)}\left(\frac{-x}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x\,dx}{\sin\alpha}\right)=-\frac{\mu_0\omega_0 I_0 x^2 dx}{2\pi\sin^2\alpha(x^2+r_0^2)}$$

$$\int_A^B(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}=\int_{x_A}^{x_B}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}=\int_0^{-b\sin\alpha}\left(-\frac{\mu_0\omega_0 I_0}{2\pi\sin^2\alpha}\right)\left(\frac{x^2 dx}{x^2+r_0^2}\right)$$

روی مسیر CD: به طور مشابهی نظیر آنچه که برای مسیر AB انجام شد، می‌توان نشان داد که:

$$\int_C^D(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}=\int_{-b\sin\alpha}^{0}\left(-\frac{\mu_0\omega_0 I_0}{2\pi\sin^2\alpha}\right)\left(\frac{x^2 dx}{x^2+(r_0+a)^2}\right)$$

آنگاه:

$$\int_{AB+CD}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}=\left(\frac{\mu_0\omega_0 I_0}{2\pi\sin^2\alpha}\right)\int_0^{-b\sin\alpha}\left[\frac{x^2 dx}{x^2+(r_0+a)^2}-\frac{x^2 dx}{x^2+r_0^2}\right]$$

$$=\left(\frac{\mu_0\omega_0 I_0}{2\pi\sin^2\alpha}\right)\left[x-(r_0+a)\tan^{-1}\left(\frac{x}{r_0+a}\right)-x+r_0\tan^{-1}\left(\frac{x}{r_0}\right)\right]_0^{-b\sin\alpha}$$

$$=\left(\frac{\mu_0\omega_0 I_0}{2\pi\sin^2\alpha}\right)\left[(r_0+a)\tan^{-1}\left(\frac{b\sin\alpha}{r_0+a}\right)-r_0\tan^{-1}\left(\frac{b\sin\alpha}{r_0}\right)\right]$$

روی مسیر BC:

$$x=-b\sin\alpha \;,\; dx=0 \;,\; z=b\cos\alpha \;,\; dz=0 \;,\; z_0=b$$

$$\int_B^C(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}=\frac{\mu_0\omega_0 I_0 b}{2\pi}\sin\alpha\int_{r_0}^{r_0+a}\frac{y\,dy}{b^2\sin^2\alpha+y^2}$$

$$=\frac{\mu_0\omega_0 I_0 b\sin\alpha}{4\pi}\ln\left[\frac{b^2\sin^2\alpha+(r_0+a)^2}{b^2\sin^2\alpha+r_0^2}\right]$$

سرانجام:

$$i(t)=\frac{۱}{R}\oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B}).d\mathbf{L}$$

$$i(t)=\frac{\mu_۰\omega_۰ I_۰}{۲\pi R}\left\{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\left[(r_۰+a)\tan^{-۱}\left(\frac{b\sin\alpha}{r_۰+a}\right)-r_۰\tan^{-۱}\left(\frac{b\sin\alpha}{r_۰}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{b\sin\alpha}{۲}\ln\left[\frac{b^۲\sin^۲\alpha+(r_۰+a)^۲}{b^۲\sin^۲\alpha+r_۰^۲}\right]\right\}\ ;\quad \alpha=\omega_۰ t$$

■

۷. $$\mathbf{B}_۱=\frac{-\mu_۰ I_۰}{۲\pi y}\cos\omega_۰ t\,\hat{\mathbf{a}}_x\quad,\quad \mathbf{B}_۲=\frac{\mu_۰ I_۰}{۲\pi(y+d)}\cos\omega_۰ t\,\hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_۱+\mathbf{B}_۲=\frac{\mu_۰ I_۰}{۲\pi}\cos\omega_۰ t\left(\frac{۱}{y+d}-\frac{۱}{y}\right)\hat{\mathbf{a}}_x$$

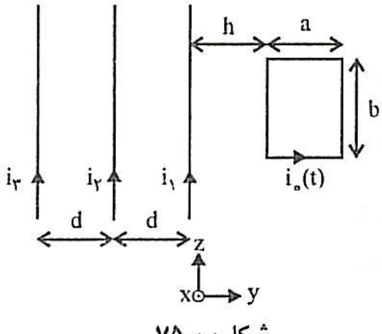
$$\Psi=\int\mathbf{B}.d\mathbf{S}=\frac{\mu_۰ I_۰}{۲\pi}\cos\omega_۰ t\int_{z_۰}^{z_۰+b}dz\int_h^{h+a}\left(\frac{۱}{y+d}-\frac{۱}{y}\right)dy$$

$$=\frac{\mu_۰ I_۰ b}{۲\pi}\left[\ln\left(\frac{h+a+d}{h+d}\right)-\ln\left(\frac{h+a}{h}\right)\right]\cos\omega_۰ t$$

اگر جریان القا شده در حلقه را با $i_۰(t)$ نشان دهیم داریم:

$$i_۰(t)=\frac{۱}{R}\left(-\frac{d\Psi}{dt}\right)=\frac{\mu_۰\omega_۰ I_۰ b}{۲\pi R}\ln\left[\frac{h(h+a+d)}{(h+a)(h+d)}\right]\sin\omega_۰ t$$

■



شکل پ-۷۵

۸. با توجه به شکل پ-۷۵ داریم:

$$\mathbf{B}_۱=\frac{-\mu_۰ I_۰}{۲\pi y}\cos\omega_۰ t\,\hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{B}_۲=\frac{-\mu_۰ I_۰}{۲\pi(y+d)}\cos(\omega_۰ t+۱۲۰^\circ)\hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{B}_۳=\frac{-\mu_۰ I_۰}{۲\pi(y+۲d)}\cos(\omega_۰ t+۲۴۰^\circ)\hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_۱+\mathbf{B}_۲+\mathbf{B}_۳$$

$$\Psi=\int_S\mathbf{B}.d\mathbf{S}=\frac{\mu_۰ I_۰ b}{۲\pi}\left[\cos\omega_۰ t\int_h^{h+a}\frac{dy}{y}+\cos(\omega_۰ t+۱۲۰^\circ)\int_h^{h+a}\frac{dy}{y+d}\right.$$

$$\left.+\cos(\omega_۰ t+۲۴۰^\circ)\int_h^{h+a}\frac{dy}{y+۲d}\right]$$

$$=-\frac{\mu_\circ I_\circ b}{2\pi}\left[\cos\omega_\circ t\ln\left(\frac{h+a}{h}\right)+\cos(\omega_\circ t+120^\circ)\ln\left(\frac{h+a+d}{h+d}\right)\right.$$
$$\left.+\cos(\omega_\circ t+240^\circ)\ln\left(\frac{h+a+2d}{h+2d}\right)\right]$$

$$i_\circ(t)=\frac{1}{R}\left(-\frac{d\Psi}{dt}\right)$$

$$i_\circ(t)=-\frac{\mu_\circ\omega_\circ I_\circ b}{2\pi R}\left[\sin\omega_\circ t\ln\left(\frac{h+a}{h}\right)+\sin(\omega_\circ t+120^\circ)\ln\left(\frac{h+a+d}{h+d}\right)\right.$$
$$\left.+\sin(\omega_\circ t+240^\circ)\ln\left(\frac{h+a+2d}{h+2d}\right)\right]$$

■

۹. چون میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ تابعی از φ و z نیست، میدان الکتریکی وابسته به آن نیز تابعی از φ و z نخواهد بود و فقط می‌تواند تابعی از r باشد. حال میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{E}=E_\varphi(r)\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi+\mathbf{E}_1(r)$$

که $\mathbf{E}_1(r)$ بیانگر مجموع مؤلفه‌های $\hat{\mathbf{a}}_z$ و $\hat{\mathbf{a}}_r$ میدان $\mathbf{E}$ است. اگر کرل $\mathbf{E}_1$ را محاسبه نماییم، داریم:

$$\nabla\times\mathbf{E}_1=-\frac{\partial E_{1z}}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_\varphi=\mathbf{o}\quad;\quad \text{چون }\ \ \cdot=\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}\mu_\circ-\text{است}$$

اما می‌دانیم اگر کرل یک میدان الکتریکی صفر باشد آن میدان از نوع ساکن خواهد بود. بنابراین، برای آنکه میدان $\mathbf{E}$ متغیر با زمان باشد، باید $\mathbf{E}_1=\mathbf{o}$ و آنگاه $\mathbf{E}=E_\varphi(r)\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi$. برای محاسبه E_φ از شکل انتگرالی قانون فاراده استفاده می‌کنیم. مسیر بسته C را به صورت دایره‌ای به شعاع r، مرکزی منطبق بر محور z و واقع در صفحه‌ای عمود بر محور z در نظر می‌گیریم و شکل انتگرالی قانون فاراده را می‌نویسیم:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=-\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

$$(2\pi r)E_\varphi=-\frac{d}{dt}\begin{cases}\mu_\circ H_\circ\sin\omega t\,(\pi r^2) & r<a\\ \mu_\circ H_\circ\sin\omega t\,(\pi a^2) & r>a\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\mu_\circ H_\circ\,\omega\cos\omega t\,(\pi r^2) & r<a\\ -\mu_\circ H_\circ\,\omega\cos\omega t\,(\pi a^2) & r>a\end{cases}$$

$$\mathbf{E}=E_\varphi\hat{\mathbf{a}}_\varphi=\begin{cases}-\frac{1}{2}\mu_\circ H_\circ\,\omega r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi & r<a\\ -\frac{1}{2}\mu_\circ H_\circ\,\omega\left(\frac{a^2}{r}\right)\cos\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi & r>a\end{cases}$$

■

۱۰. الف) به همان ترتیب که در مسئله ۹ خودآزمایی نشان داده شد، می‌توان برای هر دو بند (الف) و (ب) این مسئله نتیجه‌گیری نمود که میدان الکتریکی وابسته به میدان مغناطیسی داده شده فقط می‌تواند تابعی از r باشد و نیز فقط می‌تواند مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ داشته باشد. آنگاه با نوشتن شکل انتگرالی قانون فاراده داریم:

$$\oint_C \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{S} \quad ; \quad \mathbf{E} = E_\varphi(r)\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

که C یک مسیر بسته دایره‌ای شکل به شعاع r و مرکزی منطبق بر محور z و واقع در صفحه‌ای عمود بر محور z می‌باشد. S بیانگر سطح این مسیر بسته است.

$$(۲\pi r)E_\varphi = -\frac{d}{dt}\begin{cases} ۰ & r<a \\ \mu_۰ H_۰ \sin\omega t\,(\pi r^۲ - \pi a^۲) & a<r<b \\ \mu_۰ H_۰ \sin\omega t\,(\pi b^۲ - \pi a^۲) & r>b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۰ & r<a \\ -\mu_۰ H_۰\,\omega \cos\omega t\,(\pi(r^۲ - a^۲)) & a<r<b \\ -\mu_۰ H_۰\,\omega\cos\omega t\,(\pi(b^۲ - a^۲)) & r>b \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = E_\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \begin{cases} \mathbf{0} & r<a \\ -\frac{۱}{۲}\mu_۰ H_۰\,\omega\left(r - \frac{a^۲}{r}\right)\cos\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi & a<r<b \\ -\frac{۱}{۲}\mu_۰ H_۰\,\omega\frac{(b^۲ - a^۲)}{r}\cos\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi & r>b \end{cases}$$

ب)

$$\oint_C \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{S} \quad ; \quad \mathbf{E} = E_\varphi(r)\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

$$E_\varphi(۲\pi r) = -\frac{d}{dt}\begin{cases} \mu_۰ H_۰ \sin\omega t \int_۰^{۲\pi} d\varphi' \int_۰^{r} r'\left(۱ - \frac{r'^۲}{a^۲}\right)dr' & r<a \\ \mu_۰ H_۰ \sin\omega t \int_۰^{۲\pi} d\varphi' \int_۰^{a} r'\left(۱ - \frac{r'^۲}{a^۲}\right)dr' & r>a \end{cases}$$

$$= -\frac{d}{dt}\begin{cases} \mu_۰ H_۰ \sin\omega t\,(۲\pi)\left(\frac{۱}{۲}r^۲ - \frac{۱}{۴}\frac{r^۴}{a^۲}\right) & r<a \\ \mu_۰ H_۰ \sin\omega t\,(۲\pi)\left(\frac{۱}{۴}a^۲\right) & r>a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\mu_۰ H_۰\,\omega\cos\omega t\,(۲\pi)\left(\frac{۱}{۲}r^۲ - \frac{۱}{۴}\frac{r^۴}{a^۲}\right) & r<a \\ -\mu_۰ H_۰\,\omega\cos\omega t\,(۲\pi)\left(\frac{۱}{۴}a^۲\right) & r>a \end{cases}$$

$$E = E_\varphi \hat{a}_\varphi = \begin{cases} -\mu_0 H_0 \omega \cos \omega t \left(\frac{۱}{۲} r - \frac{۱}{۴} \frac{r^۳}{a^۲} \right) \hat{a}_\varphi & r<a \\ -\mu_0 H_0 \omega \cos \omega t \left(\frac{۱}{۴} \frac{a^۲}{r} \right) \hat{a}_\varphi & r>a \end{cases}$$

■

.۱۱ $$E = E_0 \cos (۱۰^۶ t - ۰/۰۲ z) \hat{a}_x$$

$$\nabla \times E = \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{a}_y = ۰/۰۲ E_0 \sin (۱۰^۶ t - ۰/۰۲ z) \hat{a}_y = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H = -\frac{۰/۰۲ E_0}{\mu_0} \int \sin (۱۰^۶ t - ۰/۰۲ z) dt \, \hat{a}_y = \frac{۰/۰۲ E_0}{\mu_0 \times ۱۰^۶} \cos (۱۰^۶ t - ۰/۰۲ z) \hat{a}_y + H_0$$

که H_0 مقداری ثابت نسبت به زمان است و معرف یک میدان مغناطیسی ساکن می‌باشد. چنین میدانی نمی‌تواند وابسته به یک میدان الکتریکی متغیر با زمان باشد، بنابراین $H_0 = 0$ است.

$$H = \frac{E_0}{۲۰\pi} \cos (۱۰^۶ t - ۰/۰۲ z) \hat{a}_y$$

حال معادله دیگر ماکسول را می‌نویسیم:

$$\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{-\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon = \frac{-\partial H_y / \partial z}{\partial E_x / \partial t} = \frac{-\left(\frac{E_0}{۲۰\pi} \right) (۰/۰۲) \sin (۱۰^۶ t - ۰/۰۲ z)}{-۱۰^۶ E_0 \sin (۱۰^۶ t - ۰/۰۲ z)}$$

$$\varepsilon = \frac{۱۰^{-۹}}{\pi} = ۳۶ \varepsilon_0 \quad ; \quad \varepsilon_0 = \frac{۱}{۳۶\pi} \times ۱۰^{-۹} \text{ فاراد بر متر}$$

■

.۱۲ $$E = E_0 \sin \left(\frac{\pi x}{d} \right) \cos \left(\frac{c \pi t}{d} \right) \hat{a}_z$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{a}_y = -\frac{E_0 \pi}{d} \cos \left(\frac{\pi x}{d} \right) \cos \left(\frac{c\pi t}{d} \right) \hat{a}_y = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های همنام، داریم:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{E_0 \pi}{\mu_0 d} \cos \left(\frac{\pi x}{d} \right) \cos \left(\frac{c\pi t}{d} \right)$$

روشن است که H_x و H_z باید نسبت به زمان ثابت باشند. اما چون یک میدان الکتریکی متغیر با زمان فقط میدان مغناطیسی متغیر با زمان به وجود می‌آورد و نه میدان مغناطیسی ساکن، نتیجه می‌گیریم که $H_x = ۰$ و $H_z = ۰$ است. با انتگرال‌گیری نسبت به زمان، از طرفین رابطه سوم داریم:

$$H_y = \frac{E_\circ \pi}{\mu_\circ d}\int \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right)\cos\left(\frac{c\pi t}{d}\right)dt = \frac{E_\circ}{\mu_\circ c}\cos\left(\frac{\pi x}{d}\right)\sin\left(\frac{c\pi t}{d}\right) + H_{y\circ}$$

که $H_{y\circ}$ مقداری ثابت نسبت به زمان است. این مقدار ثابت باید صفر باشد چون نمی‌تواند وابسته به یک میدان الکتریکی متغیر با زمان باشد. به طور خلاصه:

$$H = E_\circ\sqrt{\frac{\varepsilon_\circ}{\mu_\circ}}\cos\left(\frac{\pi x}{d}\right)\sin\left(\frac{c\pi t}{d}\right)\hat{a}_y \quad ; \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_\circ}{\mu_\circ}} = \frac{۱}{۱۲۰\pi}\ \Omega^{-۱}$$

ب) $J_S = \hat{a}_n \times (H_۱ - H_۲)$, $H_۱ = H$, $H_۲ = o$ (درون هادی)

$$J_S = \hat{a}_n \times H = \begin{cases} \hat{a}_x \times H\Big|_{x=\circ} = E_\circ\sqrt{\frac{\varepsilon_\circ}{\mu_\circ}}\sin\left(\frac{c\pi t}{d}\right)\hat{a}_z & x=\circ \\ -\hat{a}_x \times H\Big|_{x=d} = E_\circ\sqrt{\frac{\varepsilon_\circ}{\mu_\circ}}\sin\left(\frac{c\pi t}{d}\right)\hat{a}_z & x=d \end{cases}$$

■

.۱۳
$$E = \begin{cases} E_۱ = [E_i\cos(\omega t - \beta z) + E_r\cos(\omega t + \beta z)]\hat{a}_x & z<\circ \\ E_۲ = E_t\cos(\omega t - ۳\beta z)\hat{a}_x & z>\circ \end{cases}$$

الف)
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_\circ\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{a}_y = \begin{cases} \beta[E_i\sin(\omega t - \beta z) - E_r\sin(\omega t + \beta z)]\hat{a}_y & z<\circ \\ ۳\beta E_t\sin(\omega t - ۳\beta z)\hat{a}_y & z>\circ \end{cases}$$

$$= -\mu_\circ\frac{\partial H}{\partial t} = -\mu_\circ\frac{\partial H_y}{\partial t}\hat{a}_y$$

با انتگرال‌گیری نسبت به زمان از طرفین رابطه فوق و مساوی صفر قرار دادن مقادیر ثابت حاصل از انتگرال‌گیری (به دلیل آنکه چنین مقادیر ثابتی نمی‌توانند وابسته به میدانهای الکتریکی متغیر با زمان باشند) داریم:

$$H = \begin{cases} \frac{\beta}{\omega\mu_\circ}[E_i\cos(\omega t - \beta z) - E_r\cos(\omega t + \beta z)]\hat{a}_y = H_۱ & z<\circ \\ \frac{۳\beta}{\omega\mu_\circ}E_t\cos(\omega t - ۳\beta z)\hat{a}_y = H_۲ & z>\circ \end{cases}$$

$$\frac{\beta}{\omega\mu_\circ} = \frac{\omega\sqrt{\mu_\circ\varepsilon_\circ}}{\omega\mu_\circ} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\circ}{\mu_\circ}} = \left[\left(\frac{۱}{۳۶\pi}\times ۱۰^{-۹}\right)\Big/(۴\pi \times ۱۰^{-۷})\right]^{۱/۲} = \frac{۱}{۱۲۰\pi}\ \Omega^{-۱}$$

ب) مؤلفه‌های مماسی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ در مرز $z=\circ$ باید پیوسته باشند. E_x و H_y خود مؤلفه‌های مماسی‌اند، بنابراین:

$$\begin{aligned} &E_{1}(z=\circ)=E_{2}(z=\circ) \;\Rightarrow\; E_i+E_r=E_t \\ &H_{1}(z=\circ)=H_{2}(z=\circ) \;\Rightarrow\; E_i-E_r=3E_t \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (E_r/E_i)+1=(E_t/E_i) \\ -(E_r/E_i)+1=3(E_t/E_i) \end{cases}$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول فوق، داریم:

$$\frac{E_r}{E_i}=-\frac{1}{2}\;,\;\; \frac{E_t}{E_i}=\frac{1}{2}$$

■

۱۴. الف)

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mu_\circ\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=\frac{\partial E_r}{\partial z}\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi=\frac{\pi E_\circ}{dr}\cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)\cos\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi=-\mu_\circ\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}\hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

$$H_\varphi=-\frac{\pi E_\circ}{\mu_\circ d}\frac{1}{r}\cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)\int\cos\omega t\,dt=-\frac{\pi E_\circ}{\mu_\circ\omega d}\frac{1}{r}\cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)\sin\omega t+H_{\varphi\circ}$$

که $H_{\varphi\circ}$ مقداری ثابت نسبت به زمان است. اما مقدار ثابت باید صفر باشد، زیرا نمی‌تواند وابسته به یک میدان الکتریکی متغیر با زمان باشد. بنابراین:

$$\mathbf{H}=H_\varphi\hat{\mathbf{a}}_\varphi=-\frac{\pi E_\circ}{\mu_\circ\omega d r}\cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi\quad,\quad a<r<b\,,\;\circ<z<d$$

ب)

$$\nabla\times\mathbf{H}=\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\,\hat{\mathbf{a}}_r=-\frac{\pi^2E_\circ}{\mu_\circ\omega d^2 r}\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_r$$

$$=\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=-\frac{\varepsilon_\circ E_\circ\omega}{r}\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\frac{\pi^2E_\circ}{\mu_\circ\omega d^2}=\varepsilon_\circ E_\circ\omega\;\Rightarrow\;\omega=\frac{\pi}{d}\frac{1}{\sqrt{\mu_\circ\varepsilon_\circ}}$$

ج)

$$\rho_S=\hat{\mathbf{a}}_n\cdot\mathbf{D}=\varepsilon_\circ\hat{\mathbf{a}}_n\cdot\mathbf{E}\;,\;\; r=a \text{ یا } b$$

$$\rho_{S_\circ}=\begin{cases}\varepsilon_\circ(\hat{\mathbf{a}}_r)\cdot\left(\dfrac{E_\circ}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi z}{d}\right)\cos\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_r & r=a\,,\;\circ<z<d\\[2ex] \varepsilon_\circ(-\hat{\mathbf{a}}_r)\cdot\left(\dfrac{E_\circ}{b}\right)\sin\left(\dfrac{\pi z}{d}\right)\cos\omega t\,\hat{\mathbf{a}}_r & r=b\,,\;\circ<z<d\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_\circ E_\circ}{a}\sin\left(\dfrac{\pi z}{d}\right)\cos\omega t & r=a\,,\ \circ<z<d \\ -\dfrac{\varepsilon_\circ E_\circ}{b}\sin\left(\dfrac{\pi z}{d}\right)\cos\omega t & r=b\,,\ \circ<z<d \end{cases}$$

د) $$\mathbf{J_S}=\hat{a}_n\times\mathbf{H}=\begin{cases} \hat{a}_r\times\left(-\dfrac{H_\circ}{a}\cos\left(\dfrac{\pi z}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{a}_\varphi\right) & r=a\,,\ \circ<z<d \\ -\hat{a}_r\times\left(-\dfrac{H_\circ}{b}\cos\left(\dfrac{\pi z}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{a}_\varphi\right) & r=b\,,\ \circ<z<d \\ -\hat{a}_z\times\left(-\dfrac{H_\circ}{r}\cos\left(\dfrac{\pi d}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{a}_\varphi\right) & z=d\,,a<r<b \\ \hat{a}_z\times\left(-\dfrac{H_\circ}{r}\cos\left(\dfrac{\pi(\circ)}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{a}_\varphi\right) & z=\circ\,,a<r<b \end{cases}$$

که $H_\circ=\dfrac{\pi E_\circ}{\mu_\circ \omega d}$ است.

$$= \begin{cases} -\dfrac{H_\circ}{a}\cos\left(\dfrac{\pi z}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{a}_z & r=a\,,\ \circ<z<d \\ \dfrac{H_\circ}{b}\cos\left(\dfrac{\pi z}{d}\right)\sin\omega t\,\hat{a}_z & r=b\,,\ \circ<z<d \\ \dfrac{H_\circ}{r}\sin\omega t\,\hat{a}_r & z=d\,,a<r<b \\ -\dfrac{H_\circ}{r}\sin\omega t\,\hat{a}_r & z=\circ\,,a<r<b \end{cases}$$

■

.۱۵ $$\nabla.\mathbf{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}$$

با لاپلاسین گرفتن از طرفین این رابطه داریم:

$$\nabla^۲(\nabla.\mathbf{A})=-\mu\varepsilon\nabla^۲\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

لیکن:

$$\nabla^۲\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\nabla^۲V\quad,\quad \nabla^۲(\nabla.\mathbf{A})=\nabla.(\nabla^۲\mathbf{A})$$

درستی رابطه اخیر با بسط طرفین آن در دستگاه مختصات مستطیلی به سادگی محقق می‌شود.

$$\nabla^۲(\nabla.\mathbf{A})=\nabla^۲\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^۳A_x}{\partial x^۳}+\frac{\partial^۳A_x}{\partial x\,\partial y^۲}+\frac{\partial^۳A_x}{\partial x\,\partial z^۲}+\frac{\partial^۳A_y}{\partial x^۲\,\partial y}+\frac{\partial^۳A_y}{\partial y^۳}+\frac{\partial^۳A_y}{\partial y\,\partial z^۲}+\frac{\partial^۳A_z}{\partial x^۲\,\partial z}+\frac{\partial^۳A_z}{\partial y^۲\,\partial z}+\frac{\partial^۳A_z}{\partial z^۳}$$

$$\nabla.(\nabla^2\mathbf{A})=\nabla.\left[\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\hat{a}_z\right]$$

$$=\frac{\partial^3 A_x}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 A_x}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 A_x}{\partial x\partial z^2}+\frac{\partial^3 A_y}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 A_y}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 A_y}{\partial y\partial z^2}+\frac{\partial^3 A_z}{\partial x^2\partial z}+\frac{\partial^3 A_z}{\partial y^2\partial z}+\frac{\partial^3 A_z}{\partial z^3}$$

حال داریم:

$$\nabla.(\nabla^2\mathbf{A})=-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 V)$$

رابطه ۷-۶۱: $\nabla^2\mathbf{A}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\mu\mathbf{J}$, رابطه ۷-۶۳: $\nabla^2 V=\mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{\rho}{\varepsilon}$

$$\nabla.\left(\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\mu\mathbf{J}\right)=-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underbrace{\left(\nabla.\mathbf{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right)}_{=0}=\mu\left(\nabla.\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

در نتیجه:

$$\nabla.\mathbf{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

■

۱۶. $\mathbf{J}=I\Delta l\,\delta(x')\delta(y')\delta(z')\hat{a}_z$, $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\int_V\frac{\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=|\mathbf{r}|=r\ ;\ \mathbf{r}'=0\ ,\ \int_V\delta(x')\delta(y')\delta(z')dV'=1$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0 I\Delta l\,e^{-j\beta r}}{4\pi r}\hat{a}_z\ ,\ \hat{a}_z=\hat{a}_r\cos\theta-\hat{a}_\theta\sin\theta$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\frac{\mu_0 I\Delta l}{4\pi}\nabla\times\left[\frac{e^{-j\beta r}}{r}(\hat{a}_r\cos\theta-\hat{a}_\theta\sin\theta)\right]$$

$$=\frac{\mu_0 I\Delta l}{4\pi r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-e^{-j\beta r}\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\cos\theta\right)\right]\hat{a}_\varphi$$

$$=-\frac{\mu_0 I\Delta l\beta^2}{4\pi}\sin\theta\left[\frac{1}{j\beta}+\frac{1}{(j\beta)^2}\right]e^{-j\beta r}\hat{a}_\varphi$$

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

$$\mathbf{E}=\frac{\nabla\times\mathbf{H}}{j\omega\varepsilon_\circ}=-\mu_\circ I\Delta l\beta^{۲}\left\{۲\cos\theta\left[\frac{۱}{(j\beta r)^{۲}}+\frac{۱}{(j\beta r)^{۳}}\right]\widehat{a}_r+\right.$$

$$\left.\sin\theta\left[\frac{۱}{j\beta r}+\frac{۱}{(j\beta r)^{۲}}+\frac{۱}{(j\beta r)^{۳}}\right]\widehat{a}_\theta\right\}e^{-j\beta r}$$

■

.۱۷

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu}=\frac{\nabla\times\mathbf{A}}{\mu}\quad,\quad\mathbf{E}=-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{A}}{\mu}\right)=\mathbf{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\mathbf{J}-\varepsilon\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\varepsilon\frac{\partial^{۲}\mathbf{A}}{\partial t^{۲}}$$

با استفاده از شرط لورنتز $\nabla.(\varepsilon\mathbf{A})=-\mu\varepsilon^{۲}\frac{\partial V}{\partial t}$، داریم $\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{\nabla.(\varepsilon\mathbf{A})}{\mu\varepsilon^{۲}}$ و آنگاه:

$$\nabla\times\left(\frac{\nabla\times\mathbf{A}}{\mu}\right)+\varepsilon\frac{\partial^{۲}\mathbf{A}}{\partial t^{۲}}-\varepsilon\nabla\left(\frac{\nabla.(\varepsilon\mathbf{A})}{\mu\varepsilon^{۲}}\right)=\mathbf{J}$$

این معادله فقط برحسب پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ است. برای یافتن معادله V می‌نویسیم:

$$\nabla.\mathbf{D}=\nabla.(\varepsilon\mathbf{E})=\nabla.\left[\varepsilon\left(-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)\right]=\rho$$

$$\nabla.(\varepsilon\nabla V)+\frac{\partial}{\partial t}\nabla.(\varepsilon\mathbf{A})=-\rho$$

با استفاده از شرط لورنتز، $\nabla.(\varepsilon\mathbf{A})=-\mu\varepsilon^{۲}\frac{\partial V}{\partial t}$، داریم:

$$\nabla.(\varepsilon\nabla V)-\mu\varepsilon^{۲}\frac{\partial^{۲}V}{\partial t^{۲}}=-\rho$$

به طور خلاصه، معادلات موج برای $\mathbf{A}$ و V عبارتند از:

$$\mu\nabla\times\left(\frac{۱}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}\right)+\mu\varepsilon\frac{\partial^{۲}\mathbf{A}}{\partial t^{۲}}-\mu\varepsilon\nabla\left(\frac{۱}{\mu\varepsilon^{۲}}\nabla.(\varepsilon\mathbf{A})\right)=\mu\mathbf{J}$$

$$\frac{۱}{\varepsilon}\nabla.(\varepsilon\nabla V)-\mu\varepsilon\frac{\partial^{۲}V}{\partial t^{۲}}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

■

.۱۸ الف)

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+j\omega\varepsilon\mathbf{E}=\sigma\mathbf{E}+j\omega\varepsilon\mathbf{E}=j\omega\underbrace{\left(\varepsilon+\frac{\sigma}{j\omega}\right)}_{=\widehat{\varepsilon}}\mathbf{E}=j\omega\widehat{\varepsilon}\mathbf{E}$$

بنابراین:

$$\widehat{\varepsilon}=\varepsilon+\frac{\sigma}{j\omega}$$

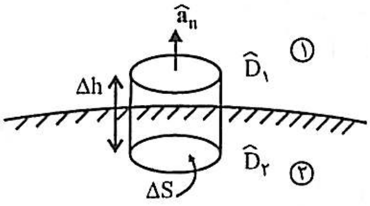
ب)

$$\nabla\times\mathbf{H}=j\omega\widehat{\varepsilon}\mathbf{E}=j\omega\widehat{\mathbf{D}}$$

$$\nabla.(\nabla\times\mathbf{H})\equiv ۰=\nabla.(j\omega\widehat{\mathbf{D}})=j\omega\nabla.\widehat{\mathbf{D}}\ \Rightarrow\ \nabla.\widehat{\mathbf{D}}=۰$$

شکل انتگرالی $\nabla . \widehat{D} = 0$ عبارت است از:

$$\oint_S \widehat{D} . dS = 0$$



شکل پ-۷۶

اگر در مرز دو ناحیه، S را به صورت یک سطح استوانه‌ای کوچک مطابق شکل پ-۷۶ در نظر بگیریم که محور آن بر مرز عمود باشد، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint \widehat{D} . dS = \widehat{a}_n . (\widehat{D}_1 - \widehat{D}_2) \Delta S = 0$$

$$(\widehat{D}_{n_1} - \widehat{D}_{n_2}) \Delta S = 0 \ \Rightarrow \ \widehat{D}_{n_1} - \widehat{D}_{n_2} = 0$$

ج) $$\widehat{D}_{n_1} - \widehat{D}_{n_2} = 0 \ \Rightarrow \ \left(\varepsilon_1 + \frac{\sigma_1}{j\omega}\right) E_{n_1} - \left(\varepsilon_2 + \frac{\sigma_2}{j\omega}\right) E_{n_2} = 0$$

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_S \ \Rightarrow \ \varepsilon_1 E_{n_1} - \varepsilon_2 E_{n_2} = \rho_S$$

با حل دو معادله فوق برحسب E_{n_1} و E_{n_2}، داریم:

$$E_{n_1} = \frac{(j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2)\rho_S}{\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1} \ , \ E_{n_2} = \frac{(j\omega\varepsilon_1 + \sigma_1)\rho_S}{\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1}$$

و ρ_S برحسب E_{n_1} و E_{n_2} برابر است با:

$$\rho_S = \frac{(\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1) E_{n_1}}{j\omega\widehat{\varepsilon}_2} = \frac{(\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1) E_{n_2}}{j\omega\widehat{\varepsilon}_1}$$

■

۱۹. الف) $$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} \ , \ \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \widehat{a}_y = -\gamma E_0 e^{-\gamma z} \widehat{a}_y \ \Rightarrow \ \mathbf{H} = \frac{\gamma E_0 e^{-\gamma z}}{j\omega\mu} \widehat{a}_y$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon \mathbf{E} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \ , \ \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \widehat{a}_x = \frac{\gamma^2 E_0 e^{-\gamma z}}{j\omega\mu} \widehat{a}_x$$

$$(\sigma + j\omega\varepsilon) E_0 e^{-\gamma z} = \frac{\gamma^2 E_0 e^{-\gamma z}}{j\omega\mu} \ , \ \gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \ \Rightarrow \ \mathbf{H} = E_0 \sqrt{\frac{\widehat{\varepsilon}}{\mu}} e^{-\gamma z} \widehat{a}_y \ , \ \gamma = j\omega\sqrt{\mu\widehat{\varepsilon}} \ ; \ \widehat{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$$

ب) $$\gamma = \left[(j\omega\mu)(j\omega\varepsilon)\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)\right]^{1/2} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)^{1/2}$$

$$\cong j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)^2\right] = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ , \ \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]$$

■