در نتیجه $\mathbf{B}_1$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول نیست.

ب)
$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{r^n}\hat{a}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r^n}\right) = 0$$

پس میدان $\mathbf{B}_2$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول است.

ج)
$$\mathbf{B}_3 = \left(1+\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{a}_r - \left(1-\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

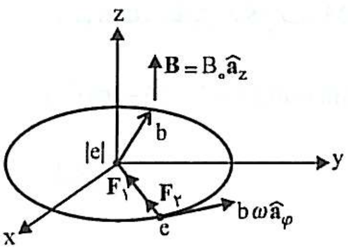
$$\nabla \cdot \mathbf{B}_3 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r^2+\frac{2}{r}\right)\cos\theta\right] - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(1-\frac{1}{r^3}\right)\sin^2\theta\right] = 0$$

بنابراین میدان $\mathbf{B}_3$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول است.

■

پ-۶ حل مسائل خودآزمایی فصل ششم

۱. قبل از اِعمال میدان خارجی $\mathbf{B}$، الکترون با سرعت زاویه‌ای ω_0 تحت تأثیر نیروی کولمب $\mathbf{F}_1$ در مداری به شعاع b به دور هسته گردش می‌کند (شکل پ-۶۰). نیروی $\mathbf{F}_1$ برابر است با:



شکل پ-۶۰

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{a}_r$$

پس از اِعمال میدان $\mathbf{B}$، سرعت زاویه‌ای الکترون از ω_0 به ω تغییر می‌کند. میدان $\mathbf{B}$ نیرویی بر الکترون که با سرعت $\mathbf{v} = b\,\omega\,\hat{a}_\varphi$ حرکت می‌کند وارد می‌سازد که عبارت است از:

$$\mathbf{F}_2 = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} = e\,b\,\omega\,\hat{a}_\varphi \times B_0\,\hat{a}_z = -|e|\,b\,\omega B_0\,\hat{a}_r$$

حال براساس رابطه نیوتن $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$، که $\mathbf{a}$ شتاب حرکت است، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2} + |e|\,b\,\omega B_0\right)\hat{a}_r = -m_e\omega^2 b\,\hat{a}_r$$

آنگاه:

$$\omega^2 = \frac{1}{m_e}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b^3} + |e|\omega B_0\right)$$

در غیاب میدان خارجی، $B_0 = 0$ و $\omega = \omega_0$ است. بنابراین:

$$\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e b^3}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\omega^2-\omega_0^2=(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0)=\frac{|e|\omega B_0}{m_e}$$

اما چون $\omega+\omega_0 \cong 2\omega$ است، داریم:

$$\omega-\omega_0=\frac{|e|B_0}{2m_e}$$

گشتاور دو قطبی مغناطیسی حاصل از گردش یک الکترون در جهت $\hat{a}_\varphi$ و با سرعت زاویه‌ای ω_0 عبارت است از:

$$\mathbf{m}_0=I_e\pi b^2\hat{a}_z=\left(\frac{\omega_0}{2\pi}e\right)\pi b^2\hat{a}_z=-\frac{|e|\omega_0 b^2}{2}\hat{a}_z$$

به همین ترتیب، وقتی که سرعت زاویه‌ای برابر ω است، داریم:

$$\mathbf{m}=-\frac{|e|\omega b^2}{2}\hat{a}_z$$

$$\Delta\mathbf{m}=\mathbf{m}-\mathbf{m}_0=-\frac{|e|b^2}{2}(\omega-\omega_0)\hat{a}_z=-\frac{e^2b^2}{4m_e}\mathbf{B}$$

ملاحظه می‌شود که نتیجه به دست آمده مستقل از ω_0 است. بنابراین، اگر ω_0 منفی هم باشد، یعنی الکترون در جهت $\hat{a}_\varphi$- گردش کند، $\Delta\mathbf{m}$ همان مقدار بالا را خواهد داشت.

■

۲. دیسک مغناطیس شده را می‌توان با جریانهای $\mathbf{J}_m$ و $\mathbf{J}_{ms}$ جایگزین نمود.

$$\mathbf{J}_m=\nabla\times\mathbf{M}=\nabla\times(M_0\hat{a}_z)=0$$

$$\mathbf{J}_{ms}=\mathbf{M}\times\hat{a}_n=M_0\hat{a}_z\times\hat{a}_r=M_0\hat{a}_\varphi\quad,\quad r=a\quad,\quad -\frac{t}{2}<z<\frac{t}{2}$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\mathbf{J}_{ms}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dS'$$

$$\mathbf{r}=z\hat{a}_z\ ,\ \mathbf{r}'=a\hat{a}_r+z'\hat{a}_z\ ,\ \mathbf{r}-\mathbf{r}'=-a\hat{a}_r+(z-z')\hat{a}_z$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3=[a^2+(z-z')^2]^{3/2}\ ,\ dS'=a\,d\varphi'\,dz'$$

$$\mathbf{J}_{ms}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=M_0\hat{a}_\varphi\times[-a\hat{a}_r+(z-z')\hat{a}_z]=aM_0\hat{a}_z+M_0(z-z')\hat{a}_r$$

$$\mathbf{B}(0,0,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{a^2M_0\hat{a}_z\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-t/2}^{t/2}\frac{dz'}{[a^2+(z-z')^2]^{3/2}}+\right.$$

$$\left.M_0a\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\,d\varphi'\,\hat{a}_x+\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\,d\varphi'\,\hat{a}_y\right)\int_{-t/2}^{t/2}\frac{(z-z')\,dz'}{[a^2+(z-z')^2]^{3/2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mu_0M_0a^2\hat{a}_z\left[\frac{-(z-z')}{a^2\sqrt{a^2+(z-z')^2}}\right]_{-t/2}^{t/2}$$

$$B(\circ,\circ,z)=\frac{1}{2}\mu_\circ M_\circ\left[\frac{-z+\frac{t}{2}}{\sqrt{a^2+\left(z-\frac{t}{2}\right)^2}}+\frac{z+\frac{t}{2}}{\sqrt{a^2+\left(z+\frac{t}{2}\right)^2}}\right]\hat{a}_z$$

$$H=B/\mu_\circ \ \text{(در بیرون دیسک)} \quad , \quad |z|>\frac{t}{2}$$

$$H=\frac{B}{\mu_\circ}-M=\frac{B}{\mu_\circ}-M_\circ\hat{a}_z \quad , \quad |z|<\frac{t}{2}$$

■

۳. کره آهنی مغناطیس شده را می‌توان با جریانهای مغناطیسی جایگزین نمود. چگالیهای این جریانها عبارتند از:

$$J_m=\nabla\times M=\nabla\times(M_\circ\hat{a}_z)=o$$

$$J_{ms}=M\times\hat{a}_n=(M_\circ\hat{a}_z)\times\hat{a}_r=M_\circ\sin\theta'\hat{a}_\varphi \ , \ r=a$$

$$B=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_S\frac{J_{ms}\times(r-r')}{\left|r-r'\right|^3}dS'$$

$$r=o \ , \ r'=a\hat{a}_r \ , \ r-r'=-a\hat{a}_r \ , \ \left|r-r'\right|^3=a^3, \ dS'=a^2\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$J_{ms}\times(r-r')=M_\circ\sin\theta'\hat{a}_\varphi\times(-a\hat{a}_r)=-aM_\circ\sin\theta'\hat{a}_\theta$$

$$=-aM_\circ\sin\theta'(\cos\theta'\cos\varphi'\hat{a}_x+\cos\theta'\sin\varphi'\hat{a}_y-\sin\theta'\hat{a}_z)$$

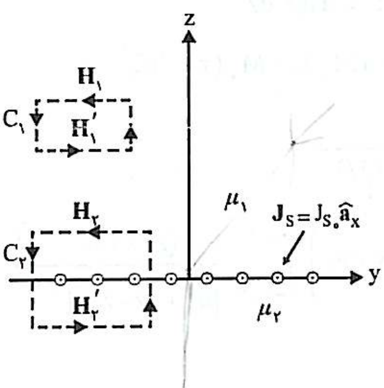
$$B(o)=-\frac{\mu_\circ M_\circ a^3}{4\pi a^3}\left[\hat{a}_x\int_\circ^{2\pi}\cos\varphi'd\varphi'\int_\circ^{\pi}\sin^2\theta'\cos\theta'd\theta'+\hat{a}_y\int_\circ^{2\pi}\sin\varphi'd\varphi'\right.$$

$$\left.\int_\circ^{\pi}\sin^2\theta'\cos\theta'd\theta'+\hat{a}_z\int_\circ^{2\pi}d\varphi'\int_\circ^{\pi}-\sin^3\theta'd\theta'\right]=\frac{2}{3}\mu_\circ M_\circ\hat{a}_z$$

$$H(o)=B(o)/\mu_\circ-M(o)=\frac{2}{3}M_\circ\hat{a}_z-M_\circ\hat{a}_z=-\frac{1}{3}M_\circ\hat{a}_z$$

■

۴. از آنجا که توزیع جریان و نواحی $z>\circ$ و $z<\circ$ در امتدادهای x و y تا بینهایت ادامه داشته و در این امتدادها کاملاً یکنواخت هستند، میدان مغناطیسی حاصل تابعی از x و y نخواهد بود. همچنین به دلیل خطی و همسانگرد بودن دو محیط، میدان مغناطیسی در این دو محیط همان مؤلفه‌ای را خواهد داشت که صفحه بینهایت جریان در خلأ تولید می‌کند، یعنی مؤلفه $\hat{a}_y$. حال دو مسیر بسته مستطیلی شکل C_1 و C_2 را مطابق شکل پ-۶۱ در نظر گرفته و قانون مداری آمپر را به کار می‌بریم.



شکل پ-۶۱

$$\mathbf{H} = H_y(z)\,\hat{a}_y$$

$$\oint_{C_1} \mathbf{H}.d\mathbf{L} = (H_1 - H'_1)\,l = 0 \;\Rightarrow\; H_1 = H'_1$$

نتیجه مزبور بیان می‌کند که میدان مغناطیسی **H** در ناحیه ۱ یکنواخت است. عیناً همین نتیجه برای ناحیه ۲ نیز صادق است. از طرفی،

$$\oint_{C_2} \mathbf{H}.d\mathbf{L} = (H_2 + H'_2)\,l = J_{S_0}\,l \;\Rightarrow\; H_2 + H'_2 = J_{S_0} \qquad (1)$$

حال از خاصیت سیملوله‌ای بودن میدان **B** استفاده می‌کنیم.

$$\oint_S \mathbf{B}.d\mathbf{S} = 0 \quad ; \quad S = y \text{ صفحه بینهایت عمود بر محور}$$

$$\int_{S_1} B_2\,dS - \int_{S_2} B'_2\,dS = 0$$

که S_1 نیمی از صفحه S با $z>0$ و S_2 نیم دیگر آن با $z<0$ است. رابطه بالا وقتی برقرار است که $B_2 = B'_2$ یا

$$\mu_1 H_2 - \mu_2 H'_2 = 0 \qquad (2)$$

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲)، داریم:

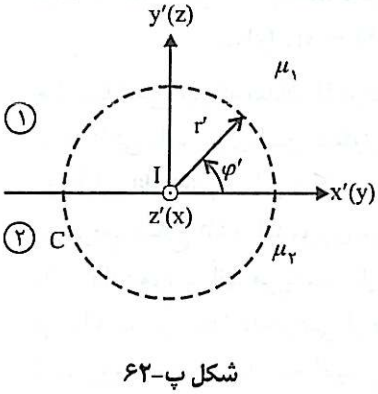
$$H_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} J_{S_0} \;,\quad H'_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} J_{S_0}$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} J_{S_0}\,\hat{a}_y & z>0 \\[2ex] \dfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} J_{S_0}\,\hat{a}_y & z<0 \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = -\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2} J_{S_0} \frac{z}{|z|}\,\hat{a}_y$$

■

۵. مسئله را در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r', φ', z') که مترادف با دستگاه مختصات مستطیلی (x', y', z') در شکل پ-۶۲ است بررسی نموده و سرانجام پاسخها را برحسب x، y و z بیان می‌کنیم. میدانهای **B** و **H** در نواحی ۱ و ۲ فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_{\varphi'}$ بوده (چون خط جریان، میدان اولیه‌ای با این مؤلفه، تولید می‌کند) و به علاوه این مؤلفه‌ها ($H_{\varphi'}$ و $B_{\varphi'}$) فقط تابعی از r' هستند. شرط مرزی $B_{n_1} = B_{n_2}$ در مرز دو ناحیه ایجاب می‌کند که $B^1_{\varphi'} = B^2_{\varphi'}$ به ازای هر مقدار r' باشد. بنابراین، **H** و **B** به صورت زیر بیان می‌شوند:



شکل پ-۶۲

$$\mathbf{B} = B_{\varphi'}(r')\,\widehat{\mathbf{a}}_{\varphi'}$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} (B_{\varphi'}/\mu_1)\,\widehat{\mathbf{a}}_{\varphi'} & 0 < \varphi' < \pi \\ (B_{\varphi'}/\mu_2)\,\widehat{\mathbf{a}}_{\varphi'} & \pi < \varphi' < 2\pi \end{cases}$$

برای تعیین $B_{\varphi'}$، قانون مداری آمپر را برای مسیر دایره‌ای C که شعاعش برابر r' و مرکزش بر خط جریان منطبق است به کار می‌بریم.

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = I$$

$$\left(\frac{B_{\varphi'}}{\mu_1}\right)(\pi r') + \left(\frac{B_{\varphi'}}{\mu_2}\right)(\pi r') = I$$

$$B_{\varphi'} = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r'} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)}\frac{\widehat{\mathbf{a}}_{\varphi'}}{r'}$$

لیکن:

$$\frac{\widehat{\mathbf{a}}_{\varphi'}}{r'} = \frac{-\sin\varphi'\,\widehat{\mathbf{a}}_{x'} + \cos\varphi'\,\widehat{\mathbf{a}}_{y'}}{(x'^2+y'^2)^{1/2}}\;,\quad \sin\varphi' = \frac{y'}{(x'^2+y'^2)^{1/2}}\;,\quad \cos\varphi' = \frac{x'}{(x'^2+y'^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\widehat{\mathbf{a}}_{\varphi'}}{r'} = \frac{-y'\widehat{\mathbf{a}}_{x'} + x'\widehat{\mathbf{a}}_{y'}}{x'^2+y'^2}$$

با تبدیل به مختصات بدون پیریم؛ $x' \to y$، $y' \to z$، $z' \to x$، داریم:

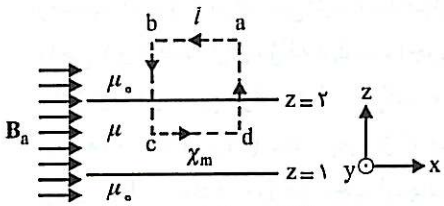
$$\frac{\widehat{\mathbf{a}}_{\varphi'}}{r'} = \frac{-z\widehat{\mathbf{a}}_y + y\widehat{\mathbf{a}}_z}{y^2+z^2} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \frac{\mu_1\mu_2 I(-z\widehat{\mathbf{a}}_y + y\widehat{\mathbf{a}}_z)}{\pi(\mu_1+\mu_2)(y^2+z^2)}\;,\quad \mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{B}/\mu_1 & z>0 \\ \mathbf{B}/\mu_2 & z<0 \end{cases}$$

■

۶. الف) با توجه به اینکه ناحیه اشغال شده توسط ماده مغناطیسی، $1<z<2$، در امتدادهای x و y تا بینهایت ادامه دارد و ضریب χ_m تابعی از x و y نمی‌باشد و به علاوه میدان اولیه فقط مؤلفه $\widehat{\mathbf{a}}_x$ دارد، می‌توان نتیجه گرفت که میدانهای **B**، **H** و **M** همگی فقط دارای مؤلفه $\widehat{\mathbf{a}}_x$ هستند، ممکن است مؤلفه‌ها فقط تابعی از z باشند. یعنی،

$$\mathbf{B} = B_x(z)\,\widehat{\mathbf{a}}_x \;,\quad \mathbf{H} = H_x(z)\,\widehat{\mathbf{a}}_x \;,\quad \mathbf{M} = M_x(z)\,\widehat{\mathbf{a}}_x$$

حال نشان می‌دهیم که میدان **H** در تمام نقاط فضا مقدار ثابتی دارد. برای این منظور مسیر بسته مستطیلی abcda را مطابق شکل پ-۶۳ در نظر می‌گیریم. اضلاع ab و cd موازی مرزها و اضلاع bc و da عمود بر آنها می‌باشند. (این مسیر بسته می‌تواند در هر مکان دلخواهی از فضا باشد و نباید لزوماً بخشی از ماده مغناطیسی را در برگیرد). با به کار بردن قانون مداری آمپر، داریم:



شکل پ-۶۳

$$\oint_{abcda} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = I = \circ \quad , \quad I = \text{جریان آزاد در برگرفته شده توسط مسیر بسته}$$

$$\oint_{abcda} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = (-H_{x_1} + H_{x_2})l = \circ$$

در نتیجه $H_{x_1} = H_{x_2}$ که H_{x_1} اندازه $\mathbf{H}$ روی ضلع ab و H_{x_2} اندازه $\mathbf{H}$ روی ضلع cd است. این نتیجه بیان می‌کند که میدان $\mathbf{H}$ تابعی از z نیست و در تمام نقاط فضا مقدار ثابتی دارد. بنابراین، $\mathbf{H} = H_\circ \hat{a}_x$. میدان ثانویه برابر است با:

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{B} - \mathbf{B}_a = \begin{cases} (\mu_\circ H_\circ - B_\circ)\hat{a}_x & z>2, z<1 \\ (\mu H_\circ - B_\circ)\hat{a}_x & 1<z<2 \end{cases}$$

چون میدان ثانویه یک میدان سیملوله‌ای است باید $\oint_S \mathbf{B}_s\cdot d\mathbf{S} = \circ$ باشد. در اینجا S را صفحه $x=\circ$ در نظر می‌گیریم (کره‌ای به شعاع بینهایت)، آنگاه:

$$\oint_S \mathbf{B}_s\cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{B}_s\cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{B}_s\cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{B}_s\cdot d\mathbf{S}$$

که $S_1: \begin{cases} x=\circ \\ 1<z<2 \end{cases}$، $S_2: \begin{cases} x=\circ \\ z>2 \end{cases}$ و $S_3: \begin{cases} x=\circ \\ z<1 \end{cases}$ است. لیکن انتگرال روی سطوح S_2 و S_3 برابر است با:

$$\int_{S_2+S_3} = (\mu_\circ H_\circ - B_\circ)\left(\int_{S_2} dS + \int_{S_3} dS\right)$$

اگر $\mu_\circ H_\circ - B_\circ \neq \circ$ باشد، $\int_{S_2+S_3}$ بینهایت می‌شود، از این رو $\mu_\circ H_\circ - B_\circ = \circ$ و

$$\mathbf{H} = \frac{B_\circ}{\mu_\circ}\hat{a}_x \quad , \quad \text{در تمام فضا}$$

توجه شود که این نتیجه مستقل از این است که χ_m به چه نحوی نسبت به z تغییر می‌کند. حال، داریم:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \frac{B_\circ}{4\mu_\circ} z\hat{a}_x \quad , \quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{a}_n$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \begin{cases} \left(\dfrac{B_\circ}{4\mu_\circ}\right)(1)(\hat{a}_x)\times(-\hat{a}_z) = \dfrac{B_\circ}{4\mu_\circ}\hat{a}_y & z=1 \\ \left(\dfrac{B_\circ}{4\mu_\circ}\right)(2)(\hat{a}_x)\times(\hat{a}_z) = -\dfrac{B_\circ}{2\mu_\circ}\hat{a}_y & z=2 \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} = \frac{dM_x}{dz}\hat{a}_y = \frac{B_\circ}{4\mu_\circ}\hat{a}_y \quad , \quad 1<z<2$$

ب) $\mathbf{B}_s=(\mu_0 H_0-B_0)\hat{a}_x=0 \;,\; z<1 \,,\, z>2$

$$\mathbf{B}_s=(\mu H_0-B_0)\hat{a}_x=\left[\mu_0(1+\chi_m)(B_0/\mu_0)-B_0\right]\hat{a}_x=\chi_m B_0\hat{a}_x \;,\; 1<z<2$$

$$\mathbf{B}_s=\begin{cases}0 & z<1,z>2\\ \dfrac{B_0}{4}z\hat{a}_x & 1<z<2\end{cases}$$

و برای میدان کل:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\begin{cases}\mu_0\mathbf{H}=B_0\hat{a}_x & z<1,z>2\\ \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H}=B_0\left(1+\dfrac{z}{4}\right)\hat{a}_x & 1<z<2\end{cases}$$

■

۷. الف) به دلیل تقارن استوانه‌ای ناحیه اشغال شده توسط ماده مغناطیسی و بینهایت بودن این ناحیه و خط جریان در امتداد محور z، نتیجه گرفته می‌شود که میدانها فقط مؤلفه φ داشته و مؤلفه‌ها فقط تابعی از r هستند. یعنی $\mathbf{M}=M_\varphi(r)\hat{a}_\varphi$، $\mathbf{H}=H_\varphi(r)\hat{a}_\varphi$ و $\mathbf{B}=B_\varphi(r)\hat{a}_\varphi$. با به کار بردن قانون مداری آمپر داریم:

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}=H_\varphi(2\pi r)=I \;;\; C:$$ دایره‌ای به شعاع r، مرکزی منطبق بر محور z و واقع در صفحه‌ای عمود بر محور z

$$\mathbf{H}=\frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi \;,$$ در تمام فضا

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\frac{\mu I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{a}_\varphi \;,\; a<r<b$$

$$\mu=\mu_0\frac{r}{a} \;,\; a<r<b$$

ب) $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}=(\mu_r-1)\mathbf{H}=\left(\dfrac{r}{a}-1\right)\left(\dfrac{I}{2\pi r}\right)\hat{a}_\varphi \;,\; a<r<b$

$$\mathbf{J}_{ms}=\mathbf{M}\times\hat{a}_n=\begin{cases}\left(\dfrac{a}{a}-1\right)\left(\dfrac{I}{2\pi a}\right)\hat{a}_\varphi\times(-\hat{a}_r)=0 & r=a\\ \left(\dfrac{b}{a}-1\right)\left(\dfrac{I}{2\pi b}\right)\hat{a}_\varphi\times(\hat{a}_r)=-\dfrac{(b-a)I}{2\pi ab}\hat{a}_z & r=b\end{cases}$$

ج) $\mathbf{J}_m=\nabla\times\mathbf{M}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rM_\varphi)\hat{a}_z=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left[\left(\dfrac{r}{a}-1\right)\dfrac{I}{2\pi}\right]\hat{a}_z=\dfrac{I}{2\pi ar}\hat{a}_z \;,\; a<r<b$

■

۸. در مثال ۵-۶ میدان یک سیملوله بینهایت طویل در خلأ را مطالعه نموده‌ایم. میدان در بیرون چنین سیملوله‌ای صفر و در درون آن برابر با $\mathbf{B}=\mu_0 nI\hat{a}_z$ است (رابطه ۵-۴۱). وقتی ناحیه $0<r<b$ از درون سیملوله با یک ماده مغناطیسی اشغال شود، همچنان میدان در بیرون سیملوله صفر و در درون آن فقط مؤلفه z خواهد داشت. زیرا جریان سطحی القایی ناشی از قطبی شدن ماده مغناطیسی همانند

جریان اصلی فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ است ($J_{ms} = M_0\, \hat{a}_z \times \hat{a}_r = M_0\, \hat{a}_\varphi$). شرط مرزی $H_{t_1} = H_{t_2}$، که به صورت $H_{z_1} = H_{z_2}$ بیان می‌شود، ایجاب می‌کند که میدان $\mathbf{H}$ در تمام فضای درون سیملوله یکسان باشد. بنابراین:

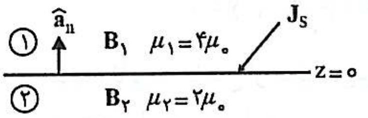
$$\mathbf{H} = \begin{cases} 0 & r>a \\ nI\hat{a}_z & r<a \end{cases}$$

برای میدان $\mathbf{B}$، داریم:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \begin{cases} 0 & r>a \\ \mu_0 nI\hat{a}_z & b<r<a \\ \mu_0 \mu_r nI\hat{a}_z & r<b \end{cases}$$

■

۹. با توجه به شکل پ-۶۴ داریم:



شکل پ-۶۴

$$\mathbf{B}_2 = B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z$$

$$\mathbf{B}_1 = B_0(2\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 5\hat{a}_z)$$

برای شرایط مرزی داریم:

$$B_{n_1} = B_{n_2} \Rightarrow B_z = 5B_0$$

$$\hat{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \quad ; \quad \hat{a}_n = \hat{a}_z$$

$$\hat{a}_z \times \left[\left(\frac{2B_0}{\mu_1} - \frac{B_x}{\mu_2}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{4B_0}{\mu_1} - \frac{B_y}{\mu_2}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{5B_0}{\mu_1} - \frac{B_z}{\mu_2}\right)\hat{a}_z \right] = \frac{B_0}{\mu_0}(\hat{a}_x - 2\hat{a}_y)$$

$$\left(\frac{2B_0}{4\mu_0} - \frac{B_x}{2\mu_0}\right)\hat{a}_y - \left(\frac{4B_0}{4\mu_0} - \frac{B_y}{2\mu_0}\right)\hat{a}_x = \frac{B_0}{\mu_0}(\hat{a}_x - 2\hat{a}_y)$$

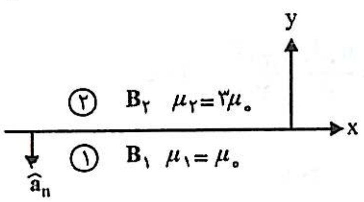
$$\frac{B_0}{2} - \frac{B_x}{2} = -2B_0 \Rightarrow B_x = 5B_0 \;, \; -\left(B_0 - \frac{B_y}{2}\right) = B_0 \Rightarrow B_y = 4B_0$$

سرانجام:

$$\mathbf{B}_2 = B_0(5\hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 5\hat{a}_z)$$

■

۱۰. الف) با توجه به شکل پ-۶۵ داریم:



شکل پ-۶۵

$$\mathbf{B}_1 = B_0\left(\frac{1}{2}\hat{a}_x + \hat{a}_y\right)$$

$$\mathbf{B}_2 = B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z$$

برای شرایط مرزی داریم:

$$B_{n_1} = B_{n_2} \Rightarrow B_0 = B_y$$

$$\hat{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \Rightarrow -\hat{a}_y \times \left(\frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} - \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2}\right) = 0$$

$$-\hat{a}_y \times \left[\left(\frac{B_۰}{۲\mu_۰} - \frac{B_x}{۳\mu_۰}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{B_۰}{\mu_۰} - \frac{B_y}{۳\mu_۰}\right)\hat{a}_y + \left(۰ - \frac{B_z}{۳\mu_۰}\right)\hat{a}_z \right] = 0$$

$$\left(\frac{B_۰}{۲} - \frac{B_x}{۳}\right)\hat{a}_z - \frac{B_z}{۳}\hat{a}_x = 0 \Rightarrow B_z = ۰ \ , \ B_x = \frac{۳}{۲}B_۰$$

$$\mathbf{B}_۲ = B_۰\left(\frac{۳}{۲}\hat{a}_x + \hat{a}_y\right)$$

ب) در ناحیه $y>۰$ داریم:

$$\mathbf{M}_۲ = \frac{\mathbf{B}_۲}{\mu_۰} - \mathbf{H}_۲ = \frac{۲}{۳\mu_۰}\mathbf{B}_۲ = \frac{B_۰}{\mu_۰}\left(\hat{a}_x + \frac{۲}{۳}\hat{a}_y\right)$$

$$\mathbf{J_m} = \nabla \times \mathbf{M}_۲ = 0 \ \ , \ \ \mathbf{J_{ms}} = \mathbf{M}_۲ \times \hat{a}_n = -\frac{B_۰}{\mu_۰}\hat{a}_z \ , \ y=۰$$

میدان ثانویه حاصل از صفحه بینهایت جریان واقع در $y=۰$ و با چگالی $\mathbf{J_{ms}}$ با توجه به رابطه ۵-۲۴ عبارت است از:

$$\mathbf{B}_s = \begin{cases} \dfrac{B_۰}{۲}\hat{a}_x & y>۰ \\ -\dfrac{B_۰}{۲}\hat{a}_x & y<۰ \end{cases}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_۱ - \mathbf{B}_s\Big|_{y<۰} = B_۰\left(\frac{۱}{۲}\hat{a}_x + \hat{a}_y\right) + \frac{B_۰}{۲}\hat{a}_x \Rightarrow \mathbf{B}_a = B_۰(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

توجه کنید که $\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_۲ - \mathbf{B}_s\Big|_{y>۰}$ نیز نتیجه بالا را می‌دهد.

■

۱۱. الف) میدان مغناطیسی حاصل از این توزیع جریان فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ داشته و این مؤلفه نیز فقط تابعی از r است. میدان تنها در ناحیه $r<a$ مورد نیاز است و با استفاده از قانون مداری آمپر به دست می‌آید.

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L} = \mu_۰ I \ ; \ C : \text{دایره‌ای به شعاع r، مرکزی منطبق بر محور z و واقع روی صفحه‌ای عمود بر محور z}$$

$$\mathbf{B} = B_\varphi(r)\hat{a}_\varphi$$

$$B_\varphi(۲\pi r) = \mu_۰ \int_۰^r \int_۰^{۲\pi} J_۰\left(\frac{r'}{a}\right)(r'dr'd\varphi') = \frac{\mu_۰ J_۰}{a}\frac{۲\pi r^۳}{۳} \ , \ r<a$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_۰ J_۰}{۳a}r^۲ \ , \ \mathbf{B} = \frac{\mu_۰ J_۰}{۳a}r^۲\hat{a}_\varphi \ , \ r<a$$

شار مغناطیسی گذرنده از عنصر سطحی به طول واحد و عرض dr (واقع در صفحه، ثابت $=\varphi$) برابر است با:

$$d\phi = \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{S} = \mathbf{B}\,.\,((1)\,dr\,\hat{a}_{\varphi}) = \frac{\mu_0 J_0}{3a} r^2\,dr$$

شاری که با تمامی جریان I پیوند دارد برابر $d\Psi = N\,d\phi$ است. که در آن،

$$N = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r} (J_0/a)\, r'^2\, dr'\, d\varphi'}{\int_0^{2\pi}\int_0^{a} (J_0/a)\, r'^2\, dr'\, d\varphi'} = \frac{\int_0^{r} r'^2\, dr'}{\int_0^{a} r'^2\, dr'} = \frac{r^3}{a^3}$$

آنگاه:

$$d\Psi = (\mu_0 J_0 / 3a^4)\, r^5\, dr$$

مقدار کل شار که با جریان I پیوند دارد، عبارت است از:

$$\Psi = \int d\Psi = \int_0^{a} \frac{\mu_0 J_0}{3a^4} r^5\, dr = \frac{\mu_0 J_0}{18} a^2$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{J_0}{a} r'^2\, dr'\, d\varphi' = \frac{2}{3}\pi J_0 a^2$$

سرانجام ضریب خود القایی داخلی برابر است با:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{12\pi} \quad \text{در واحد طول}$$

ب) روش انرژی:

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B_{\varphi}^2\, dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^{1} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{a} \left(\frac{\mu_0 J_0}{3a}\right)^2 r'^5\, dr' = \frac{1}{54}\pi \mu_0 J_0^2 a^4$$

$$L = \frac{(2)\left(\frac{1}{54}\right)(\pi \mu_0 J_0^2 a^4)}{\left(\frac{2}{3}\pi J_0 a^2\right)^2} = \frac{\mu_0}{12\pi} \quad \text{در واحد طول}$$

■

۱۲. با توجه به شکل پ-۶۶ برای معادله دایره داریم:

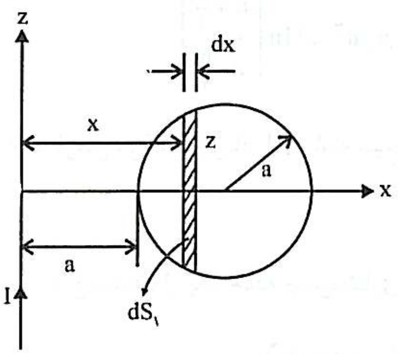
$$(x - 2a)^2 + z^2 = a^2$$

$$z = \pm\sqrt{a^2 - (x - 2a)^2}$$

$$dS_1 = 2\,|z|\,dx = 2\sqrt{a^2 - (x - 2a)^2}\, dx$$

$$d\phi_{12} = \mathbf{B}_2 . d\mathbf{S}_1$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{a}_y \ (xy \text{ در صفحه}) \quad , \quad d\mathbf{S}_1 = dS_1\,\hat{a}_y$$



شکل پ-۶۶

$$d\phi_{۱۲}=\frac{\mu_{\circ} I}{\pi x}\sqrt{a^{۲}-(x-۲a)^{۲}}\,dx$$

$$\phi_{۱۲}=\int d\phi_{۱۲}=\frac{\mu_{\circ} I}{\pi}\int_{a}^{۳a}\frac{\sqrt{a^{۲}-(x-۲a)^{۲}}}{x}dx$$

$$=\frac{\mu_{\circ} I}{\pi}\left[\sqrt{-x^{۲}+۴ax-۳a^{۲}}-۲a\sin^{-۱}\left(\frac{-۲x+۴a}{۲a}\right)-\frac{۳a}{\sqrt{۳}}\sin^{-۱}\left(\frac{۲x-۳a}{|x|}\right)\right]_{a}^{۳a}$$

$$=\frac{\mu_{\circ} I}{\pi}\left(\circ+۲\pi a-\frac{۳\pi a}{\sqrt{۳}}\right)=\mu_{\circ} a(۲-\sqrt{۳})I$$

$$M=\frac{\phi_{۱۲}}{I}=\mu_{\circ} a(۲-\sqrt{۳})\Rightarrow M=\circ{,}۲۶۸\mu_{\circ} a$$

■

۱۳. در مسئله ۱۵ خودآزمایی فصل پنجم میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را برای یک چنبره با سطح مقطع دایره‌ای به دست آوردیم. نتیجه به دست آمده در این مسئله در حقیقت بستگی به شکل سطح مقطع چنبره ندارد و برای هر سطح مقطع دلخواه صادق است. بنابراین، برای چنبره با سطح مقطع مستطیلی در این مسئله و البته با توجه به جهت سیم پیچ آن می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B}=\begin{cases}\circ & \text{بیرون چنبره}\\ -\mu_{\circ} nI\left(\frac{a}{r}\right)\hat{a}_{\varphi} & \text{درون چنبره}\end{cases}$$

شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقه برابر است با:

$$\phi=\int_{S}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\int_{\circ}^{c}dz'\int_{a-\frac{b}{۲}}^{a+\frac{b}{۲}}\mu_{\circ} nI\left(\frac{a}{r'}\right)dr' \quad ; \quad S:\text{سطح مقطع چنبره}$$

$$\phi=\mu_{\circ} nIac\ln\left(\frac{a+\frac{b}{۲}}{a-\frac{b}{۲}}\right)$$

$$\Psi=N\phi=(۲\pi an)\phi\ \Rightarrow\ L=\frac{\Psi}{I}=۲\pi\mu_{\circ} n^{۲}ca^{۲}\ln\left(\frac{a+\frac{b}{۲}}{a-\frac{b}{۲}}\right)$$

■

۱۴. فرض می‌کنیم جریان I از رشته سیم نازک بگذرد، آنگاه میدان حاصل از آن برابر است با:

$$\mathbf{B}_{۲}=\frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi r}\hat{a}_{\varphi}$$

این میدان، از یک حلقه چنبره شاری به میزان $\phi_{۱۲}$ عبور می‌دهد.

$$\phi_{۱۲}=\int_{S_{۱}}\mathbf{B}_{۲}\cdot d\mathbf{S}_{۱}=\frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi}\int_{\circ}^{c}dz'\int_{a-\frac{b}{۲}}^{a+\frac{b}{۲}}\frac{۱}{r'}dr'=\frac{\mu_{\circ} Ic}{۲\pi}\ln\left(\frac{۲a+b}{۲a-b}\right) \quad ; \quad S_{۱}:\text{سطح مقطع چنبره}$$

$$\Psi_{12}=N\phi_{12}=(2\pi an)\phi_{12}=\mu_0 Iacn\ln\left(\frac{2a+b}{2a-b}\right)$$

$$M=M_{12}=\Psi_{12}/I=\mu_0 nac\ln\left(\frac{2a+b}{2a-b}\right)$$

■

.۱۵

$$L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\int_V BH\,dV}{I^2}$$

که V حجم بین دو هادی به ازای واحد طول است. بدیهی است وقتی L حداکثر است که $\int_V BH\;dV$ حداکثر باشد. در یک کابل هم‌محور B و H تغییراتی به صورت $\frac{1}{r}$ با مختصه شعاعی r دارند. بنابراین، با توجه به اینکه $\mu>\mu_0$ است، ماده مغناطیسی باید آن بخش از فضای بین دو هادی را پر کند که r کوچک‌ترین مقادیر ممکن را داشته باشد، $a<r<x$. برای تعیین x داریم:

$$\pi(x^2-a^2)=\frac{1}{2}\pi(b^2-a^2)\;\Rightarrow\; x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

به عبارت دیگر ناحیه $a<r<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ بین دو هادی را ماده مغناطیسی اشغال نماید. برای تعیین حداکثر ضریب خودالقایی، میدان و انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول را ابتدا محاسبه می‌کنیم. با استفاده از قانون مداری آمپر به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\mathbf{H}=\begin{cases}\dfrac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi & a<r<b\\ \mathbf{o} & \text{جاهای دیگر}\end{cases}\quad,\quad \mathbf{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi & x<r<b\\ \dfrac{\mu I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi & a<r<x\\ \mathbf{o} & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

$$W_m=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 dz'\int_0^{2\pi}d\varphi'\left(\int_a^x\frac{\mu I^2}{4\pi^2}\frac{dr}{r}+\int_x^b\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2}\frac{dr}{r}\right)\right]$$

$$=\frac{I^2}{8\pi}\left[\mu\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2a^2}\right)-\mu_0\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2b^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\; L_{max}=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{1}{4\pi}\left[\mu\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2a^2}\right)-\mu_0\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2b^2}\right)\right]$$

■

.۱۶ میدان مغناطیسی H را برای این سیملوله به شرح زیر محاسبه نمودیم:

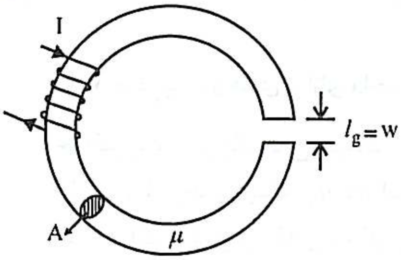
$$\mathbf{H}=\begin{cases}nI\hat{a}_z & r<a\\ \mathbf{o} & r>a\end{cases}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\mu \int_0^b (nI)^2 r\,dr + \mu_0 \int_b^a (nI)^2 r\,dr\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi n^2 I^2 (\mu b^2 - \mu_0 b^2 + \mu_0 a^2)$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \pi n^2 [\mu_0 a^2 + (\mu - \mu_0) b^2]$$ در واحد طول

■



شکل پ-۶۷

۱۷. با توجه به شکل پ-۶۷ داریم:

$$A = 2\,cm^2 \;,\; l = 20\,cm \;,\; l_g = 0.1\,cm$$

$$A = \pi d^2/4 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{8/\pi} \cong 1.6\,cm$$

سطح مقطع مؤثر شکاف هوا: $A_g = \pi[(d+w)/2]^2 = \pi[(1.6+0.1)/2]^2 = 2.27\,cm^2$

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{20 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{4\pi} \times 10^7$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_0 A_g} = \frac{0.1 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 2.27 \times 10^{-4}} = \frac{10^8}{9.08\pi}$$

$$NI = \phi(\mathcal{R} + \mathcal{R}_g) = 3 \times 10^{-4}\left(\frac{10^7}{4\pi} + \frac{10^8}{9.08\pi}\right) \cong 1290$$ آمپر دور

■

۱۸.

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \mathcal{R}\phi \;,\; \mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

$$\phi = \frac{(N_1 I_1 + N_2 I_2)\mu S}{l} \;,\; \phi_1 = \phi\Big|_{I_2=0} \;,\; \phi_2 = \phi\Big|_{I_1=0}$$

$$L_{11} = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} = \frac{N_1(N_1 I_1 + 0)\mu S}{I_1 l} = \frac{N_1^2 \mu S}{l}$$

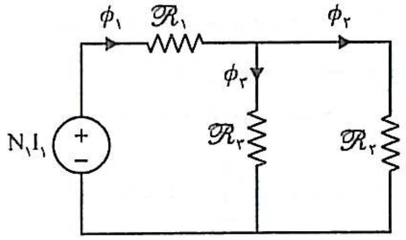
$$L_{22} = \frac{N_2 \phi_2}{I_2} = \frac{N_2(0 + N_2 I_2)\mu S}{I_2 l} = \frac{N_2^2 \mu S}{l}$$

$$M_{12} = \frac{N_1 \phi_2}{I_2} = \frac{N_1(N_2 I_2 \mu S)}{I_2 l} = \frac{N_1 N_2 \mu S}{l} = M_{21}$$

ملاحظه می‌شود که $M_{12} = \sqrt{L_{11} L_{22}}$ است.

■

۱۹. الف) مدار معادل الکتریکی این مدار مغناطیسی را وقتی که از سیم پیچ ۱ جریان $I_۱$ عبور داده شود و $I_۲=۰$ باشد مطابق شکل پ-۶۸ رسم نموده و شارهای مغناطیسی شاخه‌های مختلف را محاسبه می‌کنیم.



شکل پ-۶۸

$$\mathcal{R}_۱=\frac{l_۱}{\mu S}\ ,\quad \mathcal{R}_۲=\frac{l_۲}{\mu S}=\mathcal{R}_۱\ ,\quad \mathcal{R}_۳=\frac{l_۳}{\mu S}$$

$$\mathcal{R}_۱=\mathcal{R}_۲=۲\mathcal{R}_۳\ ,\quad l_۱=l_۲=۲l_۳$$

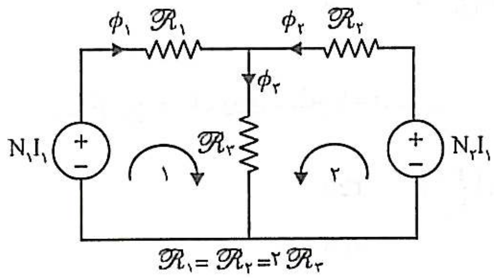
$$\phi_۱=N_۱I_۱/(\mathcal{R}_۱+\mathcal{R}_۲\,\|\,\mathcal{R}_۳)$$

$$\mathcal{R}_۱+\mathcal{R}_۲\,\|\,\mathcal{R}_۳=\mathcal{R}_۱+\frac{\mathcal{R}_۲\mathcal{R}_۳}{\mathcal{R}_۲+\mathcal{R}_۳}=۲\mathcal{R}_۳+\frac{۲\mathcal{R}_۳^۲}{۳\mathcal{R}_۳}=\frac{۸}{۳}\mathcal{R}_۳\ \Rightarrow\ \phi_۱=\frac{۳}{۸}\frac{N_۱I_۱}{\mathcal{R}_۳}$$

$$\phi_۲=\phi_۱\frac{\mathcal{R}_۳}{\mathcal{R}_۲+\mathcal{R}_۳}=\phi_۱\frac{\mathcal{R}_۳}{۳\mathcal{R}_۳}=\frac{۱}{۳}\phi_۱=\frac{۱}{۸}\frac{N_۱I_۱}{\mathcal{R}_۳}$$

$$L_{۱۱}=\frac{N_۱\phi_۱}{I_۱}=\frac{۳}{۸}\frac{N_۱^۲}{\mathcal{R}_۳}=\frac{۳}{۸}\frac{\mu SN_۱^۲}{l_۳}\ ,\quad M_{۲۱}=\frac{N_۲\phi_۲}{I_۱}=\frac{۱}{۸}\frac{N_۱N_۲}{\mathcal{R}_۳}=\frac{۱}{۸}\frac{\mu SN_۱N_۲}{l_۳}$$

ب) وقتی که سیم پیچهای ۱ و ۲ مطابق اتصالات خط چین در شکل مسئله به یکدیگر وصل شوند، مدار معادل الکتریکی به صورت شکل پ-۶۹ خواهد بود.



شکل پ-۶۹

در حلقه ۱ $(KVL)_m:\ -N_۱I_۱+\mathcal{R}_۱\phi_۱+\mathcal{R}_۳(\phi_۱+\phi_۲)=۰$

در حلقه ۲ $(KVL)_m:\ -N_۲I_۱+\mathcal{R}_۲\phi_۲+\mathcal{R}_۳(\phi_۲+\phi_۱)=۰$

پس از حل دو رابطه فوق برای $\phi_۱$ و $\phi_۲$، داریم:

$$\phi_۱=\frac{(۳N_۱-N_۲)I_۱}{۸\,\mathcal{R}_۳}\ ,\quad \phi_۲=\frac{(۳N_۲-N_۱)I_۱}{۸\,\mathcal{R}_۳}$$

$$L=\frac{N_۱\phi_۱+N_۲\phi_۲}{I_۱}=\frac{N_۱(۳N_۱-N_۲)+N_۲(۳N_۲-N_۱)}{۸\mathcal{R}_۳}=\frac{\mu S}{۸l_۳}[۳(N_۱^۲+N_۲^۲)-۲N_۱N_۲]$$

■

۲۰. برحسب تعاریف رلوکتانس و شار مغناطیسی، داریم:

$$\mathcal{R}=\frac{\int_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}}{\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}}\ ,\quad \phi=\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

که S سطح مقطع مدار مغناطیسی و C یک مسیر در امتداد طول متوسط مدار است. این یادآوری لازم است که در بررسی مدارهای مغناطیسی معمولاً فرض بر این است که **B** و **H** در درون هسته مدار یکنواخت بوده و عمود بر سطح مقطع می‌باشند. بنابراین $\mathbf{B}\,.\,d\mathbf{S}=B\,dS$ و $\mathbf{H}\,.\,d\mathbf{L}=H\,dL$، پس:

$$\frac{1}{2}\mathscr{R}\phi^{2}=\frac{1}{2}\int_{C}\mathbf{H}\,.d\mathbf{L}\int_{S}\mathbf{B}\,.d\mathbf{S}=\frac{1}{2}\int_{C}\int_{S}HB\,\underbrace{dS\,dL}_{=dV}=\frac{1}{2}\int_{V}HB\,dV$$

$$=\frac{1}{2}\int_{V}\mu H^{2}dV=W_m$$

■

۲۱. الف) پتانسیل مغناطیسی برداری (A) ناشی از یک جریان سطحی استوانه‌ای با چگالی $r=r_0$ و $J_{S_0}\,\hat{a}_z$ را طی مسئله ۲۲ خودآزمایی فصل پنجم محاسبه نمودیم. نتیجه را بار دیگر در اینجا می‌نویسیم.

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r})=\begin{cases}-\mu_0 J_{S_0} r_0 \ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right)\hat{a}_z & r\geq r_0\\ 0 & r\leq r_0\end{cases}$$

برای توزیع جریان روی سطح $r=a$، داریم:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r})=\begin{cases}-\mu_0 I_1 \ln\left(\dfrac{r}{a}\right)\hat{a}_z & r\geq a\\ 0 & r\leq a\end{cases}$$

برای توزیع جریان روی سطح $r=b$، داریم:

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r})=\begin{cases}-\mu_0 I_2 \ln\left(\dfrac{r}{b}\right)\hat{a}_z & r\geq b\\ 0 & r\leq b\end{cases}$$

بالاخره برای توزیع جریان روی سطح $r=c$، داریم:

$$\mathbf{A}_3(\mathbf{r})=\begin{cases}\mu_0 (I_1+I_2) \ln\left(\dfrac{r}{c}\right)\hat{a}_z & r\geq c\\ 0 & r\leq c\end{cases}$$

پتانسیل کل برابر است با:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\begin{cases}0 & r\leq a\\ -\mu_0 I_1\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)\hat{a}_z & a\leq r\leq b\\ -\mu_0\left[I_1\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)+I_2\ln\left(\dfrac{r}{b}\right)\right]\hat{a}_z & b\leq r\leq c\\ \mu_0\left[I_1\ln\left(\dfrac{a}{c}\right)+I_2\ln\left(\dfrac{b}{c}\right)\right]\hat{a}_z & r\geq c\end{cases}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{J_S}\cdot\mathbf{A}\,dS$$

$$= \frac{1}{2}\int_{S_a}\left(\frac{I_1}{a}\right)(0)\,dS + \frac{1}{2}\int_{S_b}\left(\frac{I_2}{b}\right)\left(-\mu_0 I_1 \ln\frac{b}{a}\right)dS$$

$$+\frac{1}{2}\int_{S_c} -\left(\frac{I_1+I_2}{c}\right)\mu_0\left(I_1\ln\frac{a}{c}+I_2\ln\frac{b}{c}\right)dS$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left[-\left(I_1 I_2 \ln\frac{b}{a}\right)\left(\frac{2\pi b}{b}\right) - (I_1+I_2)\left(I_1\ln\frac{a}{c}+I_2\ln\frac{b}{c}\right)\left(\frac{2\pi c}{c}\right)\right]$$

$$= \mu_0\pi\left(I_1^2\ln\frac{c}{a}+I_2^2\ln\frac{c}{b}+2I_1I_2\ln\frac{c}{b}\right)$$

ب) ابتدا میدان مغناطیسی را در کلیه نقاط فضا، با استفاده از قانون مداری آمپر، به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{B} = B_\varphi(r)\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I = \mu_0 \begin{cases} 0 & r<a, r>c \\ 2\pi I_1 & a<r<b \\ 2\pi(I_1+I_2) & b<r<c \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0 & r<a, r>c \\ (\mu_0 I_1/r)\hat{\mathbf{a}}_\varphi & a<r<b \\ [\mu_0(I_1+I_2)/r]\hat{\mathbf{a}}_\varphi & b<r<c \end{cases}$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\int_a^b\left(\frac{\mu_0 I_1}{r}\right)^2 r\,dr + \int_b^c\left[\frac{\mu_0(I_1+I_2)}{r}\right]^2 r\,dr\right]$$

$$= \mu_0\pi\left[I_1^2\ln\frac{b}{a}+(I_1+I_2)^2\ln\frac{c}{b}\right]$$

$$= \mu_0\pi\left(I_1^2\ln\frac{c}{a}+I_2^2\ln\frac{c}{b}+2I_1I_2\ln\frac{c}{b}\right)$$

■

.۲۲

$$B = \mu_0 H^2$$

$$B = \mu H = \mu_0 H^2 \Rightarrow \mu = \mu_0 H$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = HH - H = (H-1)H$$

■

۲۳. چون در هیچ نقطه از فضا جریان الکتریکی آزاد وجود ندارد، معادله لاپلاس $\nabla^2 V_m = 0$ و رابطه $H = -\nabla V_m$ برای پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی صادقند و حل مسئله به یافتن جواب معادله لاپلاس بالا تحت شرایط مرزی حاکم خلاصه می‌شود. اما شکل ریاضی این مسئله با مسئله ۱۱ خودآزمایی فصل چهارم یکسان است. از این رو کافی است که در پاسخهای مسئله مزبور تبدیلات زیر را انجام دهیم تا پاسخهای مسئله حاضر به دست آیند:

$$V \to V_m \quad , \quad E \to H \quad , \quad \varepsilon_r \to \mu_r$$

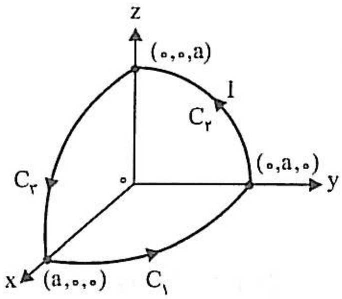
پاسخهای مسئله ۱۱ خودآزمایی فصل چهارم عبارتند از:

$$\mathbf{E}^i(r,\varphi) = \frac{2E_0}{\varepsilon_r + 1}(\cos\varphi\,\hat{a}_r - \sin\varphi\,\hat{a}_\varphi) \quad , \quad r<a$$

$$\mathbf{E}^o(r,\varphi) = E_0\left[\left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\varphi\,\hat{a}_r - \left(1 - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi\right] \quad , \quad r>a$$

به خوبی روشن است که با انجام تبدیلات فوق پاسخهای مورد نظر برای مسئله حاضر به دست می‌آیند. ■

۲۴. با توجه به شکل پ-۷۰ داریم:



شکل پ-۷۰

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \frac{I}{2}\oint_C (\mathbf{r} \times d\mathbf{L}) \times \mathbf{B} = \frac{I}{2}\left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\right)$$

$$\int_{C_1}(\mathbf{r}\times d\mathbf{L})\times\mathbf{B} = B_0\int_{C_1}[(x\,\hat{a}_x + y\,\hat{a}_y)\times(dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y)]\times\hat{a}_x$$

$$= B_0\int_{C_1}(x\,dy\,\hat{a}_z - y\,dx\,\hat{a}_z)\times\hat{a}_x = B_0\int_{C_1}(x\,dy - y\,dx)\,\hat{a}_y$$

$$= B_0\left(\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy - \int_a^0 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\right)\hat{a}_y$$

$$= B_0\left\{\left[\frac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a - \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_a^0\right\}\hat{a}_y$$

$$= \frac{1}{2}B_0\,\pi a^2\,\hat{a}_y$$

$$\int_{C_2}(\mathbf{r}\times d\mathbf{L})\times\mathbf{B} = B_0\int_{C_2}[(y\,\hat{a}_y + z\,\hat{a}_z)\times(dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z)]\times\hat{a}_x = 0$$

$$\int_{C_3} (\mathbf{r} \times d\mathbf{L}) \times \mathbf{B} = B_0 \int_{C_3} [(x\,\hat{a}_x + z\,\hat{a}_z) \times (dx\,\hat{a}_x + dz\,\hat{a}_z)] \times \hat{a}_x$$

$$= B_0 \int_{C_3} (-x dz\,\hat{a}_y + z\,dx\,\hat{a}_y) \times \hat{a}_x = B_0 \int_{C_3} (x dz - z dx)\,\hat{a}_z$$

$$= -\frac{1}{2} B_0\, \pi a^2 \hat{a}_z$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{4} B_0\, I \pi a^2 (\hat{a}_y - \hat{a}_z)$$

■

۲۵. انرژی ذخیره شده در واحد طول کابل هم‌محور را طی مثال ۶-۱۰ محاسبه کرده‌ایم. نتیجه در رابطه ۶-۸۰ آمده است.

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{r}{a}\right)\Big|_{r=b}$$

$$\mathbf{F} = \nabla W_m = \frac{\partial W_m}{\partial r}\hat{a}_r = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r}\hat{a}_r\Big|_{r=b} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi b}\hat{a}_r$$

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\mu_0 I^2 / 4\pi b}{2\pi b\,(1)} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 b^2}$$

■

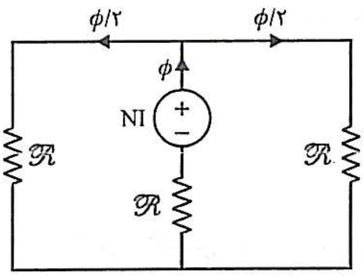
۲۶. چگالی شار مغناطیسی در شاخه میانی B و در شاخه‌های کناری برابر $\frac{1}{2}B$ است. اگر وزنه به اندازه dx از هسته دور شود تغییر به وجود آمده در انرژی مغناطیسی ذخیره شده، عبارت است از :

$$dW_m = \frac{1}{2\mu_0}\left[B^2 S\,dx + 2\left(\frac{B}{2}\right)^2 S\,dx\right] = \frac{3}{4\mu_0} B^2 S\,dx$$

$$F = \frac{dW_m}{dx} = \frac{3}{4\mu_0} B^2 S$$

■

۲۷. ابتدا B را به دست می‌آوریم. برای این منظور مدار معادل الکتریکی سیستم جراثقال را به صورت شکل پ-۷۱ در نظر می‌گیریم.



شکل پ-۷۱

$$\phi = \frac{NI}{\mathcal{R} + \mathcal{R}\,||\,\mathcal{R}} = \frac{2NI}{3\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 S} \quad , \quad B = \frac{\phi}{S} = \frac{2NI\mu_0}{3l}$$

از مسئله ۲۶، داریم :

$$F = \frac{3}{4\mu_0} B^2 S = \frac{3}{4\mu_0}\left(\frac{2NI\mu_0}{3l}\right)^2 S = \frac{1}{3}\mu_0\left(\frac{NI}{l}\right)^2 S$$

به ازای $l=10^{-3}\,\mathrm{m}$، $N=1000$، $I=5\,A$ و $S=0{,}02\,\mathrm{m}^2$، داریم:

$$F=\frac{1}{3}(4\pi\times 10^{-7})\left(\frac{1000\times 5}{0{,}001}\right)^2(0{,}02)=\frac{2\pi}{3}\times 10^5\ \mathrm{N}$$

$$F=mg \Rightarrow m=\frac{F}{g}=\frac{2\pi\times 10^5}{3\times 9{,}8}=21371\ \ \mathrm{Kg}$$

■

۲۸. الف) اگر بازوی متحرک به اندازه زاویه $d\varphi$ از هسته دور شود، یک شکاف کوچک هوا به اندازه $l'd\varphi$ بین هسته و بازو ایجاد می‌شود. تغییر حجم ایجاد شده برابر $dV=Sl'd\varphi$ است. در صورتی که میدان مغناطیسی B ضمن این چرخش جزئی ثابت فرض شود، تغییر حاصل در انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم برابر است با:

$$dW_m=\frac{1}{2\mu_0}B^2dV=\frac{1}{2\mu_0}B^2Sl'd\varphi$$

آنگاه، گشتاور مکانیکی برابر است با:

$$T=\frac{dW_m}{d\varphi}=\frac{1}{2\mu_0}B^2Sl'$$

لیکن:

$$B=\frac{\phi}{S}=\frac{NI}{\mathscr{R}S}=\frac{NI}{\frac{(l+l')}{\mu S}S}=\frac{\mu NI}{l+l'}\ \Rightarrow\ T=\frac{(\mu NI)^2Sl'}{2\mu_0(l+l')^2}$$

ب) در صورت وجود یک شکاف هوا به فاصله d بین هسته و بازو، داریم:

$$T=\frac{1}{2\mu_0}B^2Sl'$$

اما در این حالت:

$$B=\frac{\phi}{S}=\frac{NI}{\mathscr{R}S}=\frac{NI}{\left(\frac{l+l'}{\mu S}+\frac{d}{\mu_0 S}\right)S}=\frac{\mu NI}{(l+l')+\frac{\mu}{\mu_0}d}$$

$$T=\frac{(\mu NI)^2Sl'}{2\mu_0\left[(l+l')+\frac{\mu}{\mu_0}d\right]^2}$$

اگر از رلوکتانس هسته در مقابل رلوکتانس فاصله هوایی صرف‌نظر شود، $l+l'<<\frac{\mu}{\mu_0}d$، داریم:

$$T=\frac{\mu_0N^2I^2Sl'}{2d^2}$$

■