در کره با پتانسیل $V=0$ توزیع زیر را داریم:

$$Q_1, Q_3, Q_5, \ldots, Q_{2m-1}, \ldots$$

که،

$m=1,2,3,\ldots$ ، به فاصله b_{2m-1} از مرکز کره

$$\begin{cases} Q_{2m-1} = -Q_0 \prod_{n=1}^{2m-1} \dfrac{a}{d-b_{n-1}} \\ b_{2m-1} = \dfrac{a^2}{d-b_{2m-2}} \end{cases}$$

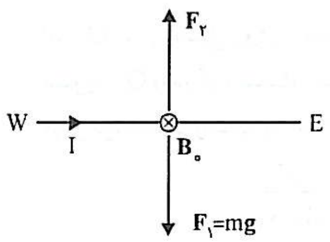
ب)

$$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{Q_0+\sum_{m=1}^{\infty} Q_{2m}}{V_0}=4\pi\varepsilon_0 a\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\prod_{n=1}^{2m}\frac{a}{d-b_{n-1}}\right)\right]$$

■

پ-۵ حل مسائل خودآزمایی فصل پنجم

۱. با توجه به شکل پ-۴۴ داریم:



شکل پ-۴۴

میدان B_0 بر جریان I عمود است؛ $|F_2|=\int_0^l B_0 I\,dL = B_0 I l$

$$|F_1|=|F_2|\ ,\ B_0 I l = mg$$

$$I=\frac{mg}{B_0 l}=\frac{30\times10^{-3}\times9{,}8}{1\times0{,}3\times10^{-4}}=9800\ \text{A}$$

■

۲.

$$F=\oint_C I\,dL\times B_0$$

چون B_0 بردار ثابتی است، می‌توان نوشت:

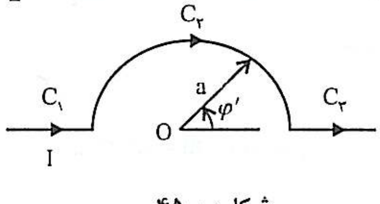
$$F=I\left(\oint_C dL\right)\times B_0$$

اما:

$$\oint_C dL=0 \Rightarrow F=0$$

■

۳. با توجه به شکل پ-۴۵ داریم:



شکل پ-۴۵

$$B_O=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{C_1+C_2+C_3}\frac{dL'\times\hat{a}_R}{R^2}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}\right)$$

روی مسیرهای C_1 و C_3 زاویه بین dL' و $\hat{a}_R$ برابر صفر یا π است، بنابراین $dL'\times\hat{a}_R=0$.
پس، فقط بخش C_2 از مسیر جریان در تولید میدان مغناطیسی در نقطه O سهیم است.

$$B_O=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{C_2}\frac{dL'\times\hat{a}_R}{R^2}$$

روی مسیر C_2، داریم:

$$dL'=-a\,d\varphi'\,\hat{a}_\varphi \;,\; R=a \;,\; \hat{a}_R=-\hat{a}_r$$

$$dL'\times\hat{a}_R=(-a\,d\varphi'\,\hat{a}_\varphi)\times(-\hat{a}_R)=-a\,d\varphi'\,\hat{a}_z$$

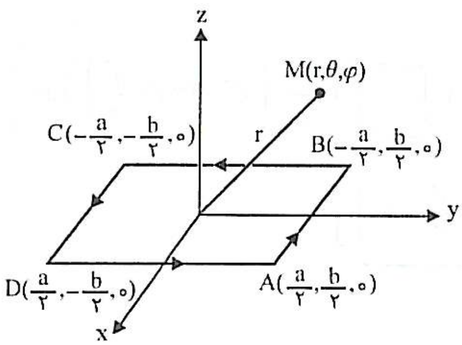
$$B_O=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{a^2}\hat{a}_z\int_\pi^0 d\varphi'=\frac{\mu_0 I}{4a}\hat{a}_z$$

■

۴. با توجه به شکل پ-۴۶ داریم:

$$B(r)=B_M(r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{ABCDA}\frac{dL'\times(r-r')}{|r-r'|^3}$$

$$\oint_{ABCDA}=\int_A^B+\int_B^C+\int_C^D+\int_D^A$$



شکل پ-۴۶

روی مسیر AB:

$$r'=x'\hat{a}_x+\frac{b}{2}\hat{a}_y \;,\; dL'=dx'\hat{a}_x$$

$$r-r'=(x-x')\hat{a}_x+\left(y-\frac{b}{2}\right)\hat{a}_y+z\hat{a}_z$$

$$dL'\times(r-r')=\left[\left(y-\frac{b}{2}\right)\hat{a}_z-z\hat{a}_y\right]dx'$$

$$|r-r'|=\left[(x-x')^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+z^2\right]^{1/2}$$

$$K_1=\int_A^B\frac{dL'\times(r-r')}{|r-r'|^3}=\int_{a/2}^{-a/2}\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)\hat{a}_z-z\hat{a}_y}{\left[(x-x')^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+z^2\right]^{3/2}}dx'$$

در فواصل دور از دو قطبی، داریم:

$$\left[(x-x')^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+z^2\right]^{-3/2}=\left[\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=r^2}+\left(x'^2+\frac{b^2}{4}-2xx'-by\right)\right]^{-3/2}$$

$$\cong r^{-۳}\left[۱-\frac{۳}{۲r^۲}\left(x'^۲+\frac{b^۲}{۴}-۲xx'-by\right)\right]$$

$$K_۱=\frac{۱}{r^۳}\left[\left(y-\frac{b}{۲}\right)\hat{a}_z-z\hat{a}_y\right]\int_{a/۲}^{-a/۲}\left[۱-\frac{۳}{۲r^۲}\left(x'^۲+\frac{b^۲}{۴}-۲xx'-by\right)\right]dx'$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که روی مسیر CD،

$$K_۲=\int_C^D\frac{d\mathbf{L}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}$$

$$K_۲=\frac{۱}{r^۳}\left[\left(y+\frac{b}{۲}\right)\hat{a}_z-z\hat{a}_y\right]\int_{-a/۲}^{a/۲}\left[۱-\frac{۳}{۲r^۲}\left(x'^۲+\frac{b^۲}{۴}-۲xx'+by\right)\right]dx'$$

آنگاه:

$$K_۱+K_۲=\frac{۱}{r^۳}\left[(y\hat{a}_z-z\hat{a}_y)\int_{-a/۲}^{a/۲}-\frac{۳}{r^۲}by\,dx'+b\,\hat{a}_z\int_{-a/۲}^{a/۲}\left[۱-\frac{۳}{۲r^۲}\left(x'^۲-۲xx'+\frac{b^۲}{۴}\right)\right]dx'\right]$$

$$=\frac{-۳aby}{r^۵}(y\,\hat{a}_z-z\,\hat{a}_y)+\frac{ab}{r^۳}\left[۱-\underbrace{\frac{۳}{۸r^۲}\left(\frac{a^۲}{۳}+b^۲\right)}_{<<۱}\right]\hat{a}_z$$

$$\cong\frac{ab}{r^۳}\left[\frac{-۳\,y(y\,\hat{a}_z-z\,\hat{a}_y)}{r^۲}+\hat{a}_z\right]$$

روی مسیر AD:

$$\mathbf{r}'=y'\hat{a}_y+\frac{a}{۲}\hat{a}_x\quad,\quad d\mathbf{L}'=dy'\hat{a}_y$$

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}'=\left(x-\frac{a}{۲}\right)\hat{a}_x+(y-y')\hat{a}_y+z\hat{a}_z$$

$$d\mathbf{L}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\left[-\left(x-\frac{a}{۲}\right)\hat{a}_z+z\hat{a}_x\right]dy'$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\left[\left(x-\frac{a}{۲}\right)^۲+(y-y')^۲+z^۲\right]^{۱/۲}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-۳/۲}=\left[\underbrace{(x^۲+y^۲+z^۲)}_{=r^۲}+\left(y'^۲+\frac{a^۲}{۴}-۲yy'-ax\right)\right]^{-۳/۲}$$

$$\cong r^{-۳}\left[۱-\frac{۳}{۲r^۲}\left(y'^۲+\frac{a^۲}{۴}-۲yy'-ax\right)\right]$$

$$K_3=\int_D^A \frac{dL'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=\frac{-1}{r^3}\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)\hat{a}_z-z\hat{a}_x\right]\int_{-b/2}^{b/2}\left[1-\frac{3}{2r^2}\left(y'^2+\frac{a^2}{4}-2yy'-ax\right)\right]dy'$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$K_4=\int_B^C \frac{dL'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=\frac{1}{r^3}\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)\hat{a}_z-z\hat{a}_x\right]\int_{b/2}^{-b/2}\left[1-\frac{3}{2r^2}\left(y'^2+\frac{a^2}{4}-2yy'+ax\right)\right]dy'$$

آنگاه:

$$K_3+K_4=\frac{1}{r^3}\left[(x\hat{a}_z-z\hat{a}_x)\int_{-b/2}^{b/2}-\frac{3}{r^2}ax\,dy'+a\hat{a}_z\int_{-b/2}^{b/2}\left[1-\frac{3}{r^2}\left(y'^2+\frac{a^2}{4}-2yy'\right)\right]dy'\right]$$

$$=\frac{-3abx}{r^5}(x\hat{a}_z-z\hat{a}_x)+\frac{ab}{r^3}\left[1-\underbrace{\frac{3}{8r^2}\left(\frac{a^2}{3}+b^2\right)}_{<<1}\right]\hat{a}_z$$

$$\cong\frac{ab}{r^3}\left[\frac{-3x(x\hat{a}_z-z\hat{a}_x)}{r^2}+\hat{a}_z\right]$$

حال،

$$K_1+K_2+K_3+K_4=\frac{ab}{r^3}\left[\frac{3}{r^2}(xz\hat{a}_x+yz\hat{a}_y-(x^2+y^2)\hat{a}_z)+2\hat{a}_z\right]$$

اما:

$$\frac{z(x\hat{a}_x+y\hat{a}_y)}{r^2}=\frac{z\mathbf{r}_c}{r^2}=\frac{z}{r}\frac{\mathbf{r}_c}{r}=\cos\theta\sin\theta(\sin\theta\hat{a}_r+\cos\theta\hat{a}_\theta)$$

$$\frac{x^2+y^2}{r^2}=\frac{r_c^2}{r^2}=\sin^2\theta\quad,\quad\hat{a}_z=\cos\theta\hat{a}_r-\sin\theta\hat{a}_\theta$$

$$K_1+\cdots+K_4=\frac{ab}{r^3}[3\sin\theta(\cos\theta\sin\theta\hat{a}_r+\cos^2\theta\hat{a}_\theta-\sin\theta\cos\theta\hat{a}_r+\sin^2\theta\hat{a}_\theta)$$
$$+2(\cos\theta\hat{a}_r-\sin\theta\hat{a}_\theta)]$$

$$=\frac{ab}{r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta)$$

سرانجام:

$$\mathbf{B}(r)=\frac{\mu_0 I ab}{r^3}(2\cos\theta\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta)\quad,\quad r>>a,b$$

■

.۵
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_{\circ} I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{L}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

روی محور x:
$$\mathbf{r}'=x'\hat{a}_x \quad , \quad d\mathbf{L}'=dx'\hat{a}_x \quad , \quad \mathbf{r}-\mathbf{r}'=z\hat{a}_z-x'\hat{a}_x$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3=\left(z^2+x'^2\right)^{3/2} \quad , \quad d\mathbf{L}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=-z\,dx'\hat{a}_y$$

روی محور y:
$$\mathbf{r}'=y'\hat{a}_y \quad , \quad d\mathbf{L}'=dy'\hat{a}_y \quad , \quad \mathbf{r}-\mathbf{r}'=z\hat{a}_z-y'\hat{a}_y$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3=\left(z^2+y'^2\right)^{3/2} \quad , \quad d\mathbf{L}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=z\,dy'\hat{a}_x$$

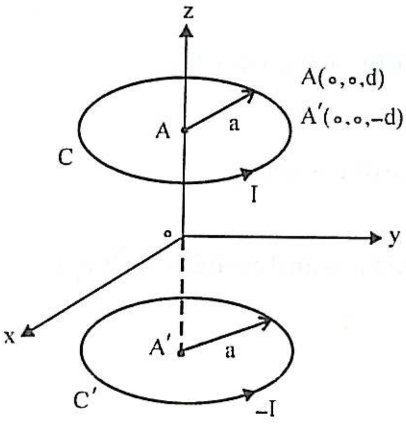
$$\mathbf{B}(0,0,z)=\frac{\mu_{\circ} I}{4\pi}\left[-z\hat{a}_y\int_{\infty}^{0}\frac{dx'}{(x'^2+z^2)^{3/2}}+z\hat{a}_x\int_{0}^{\infty}\frac{dy'}{(y'^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$\int_{\infty}^{0}\frac{dx'}{(x'^2+z^2)^{3/2}}=-\int_{0}^{\infty}\frac{dy'}{(y'^2+z^2)^{3/2}}=-\left[\frac{y'}{z^2(y'^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{z^2}$$

$$\mathbf{B}(0,0,z)=\frac{\mu_{\circ} I}{4\pi z}(\hat{a}_x+\hat{a}_y)$$

■

۶. الف) با توجه به شکل پ-۴۷ داریم:



شکل پ-۴۷

$$\mathbf{B}(z)=\frac{\mu_{\circ} I}{4\pi}\left[\oint_C\frac{d\mathbf{L}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}-\oint_{C'}\frac{d\mathbf{L}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]$$

ابتدا میدان حاصل از یک حلقه جریان را به فرض اینکه روی صفحه xy واقع باشد به دست می‌آوریم. برای چنین حلقه جریانی داریم:

$$\mathbf{r}=z\hat{a}_z \quad , \quad \mathbf{r}'=a\hat{a}_r \quad , \quad d\mathbf{L}'=a\hat{a}_{\varphi}d\varphi'$$

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}'=z\hat{a}_z-a\hat{a}_r \quad , \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3=(z^2+a^2)^{3/2}$$

$$d\mathbf{L}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=(az\hat{a}_r+a^2\hat{a}_z)\,d\varphi' \quad , \quad \hat{a}_r=\cos\varphi'\hat{a}_x+\sin\varphi'\hat{a}_y$$

$$B_1(z)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{dL'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi(z^2+a^2)^{3/2}}\Bigg[\underbrace{az\int_0^{2\pi}(\cos\varphi'\,\hat{a}_x+\sin\varphi'\,\hat{a}_y)\,d\varphi'}_{=0}$$

$$+a^2\hat{a}_z\int_0^{2\pi}d\varphi'\Bigg]=\frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B}(z)=\mathbf{B}_1(z-d)+\mathbf{B}_1(z+d)$$

$$=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\hat{a}_z\left[\frac{1}{[(z-d)^2+a^2]^{3/2}}-\frac{1}{[(z+d)^2+a^2]^{3/2}}\right]$$

لیکن:

$$\frac{1}{[(z-d)^2+a^2]^{3/2}}=\frac{1}{z^3\left[1+\frac{-2zd+d^2+a^2}{z^2}\right]^{3/2}}\cong\frac{1}{z^3}\left[1+\frac{3}{2z^2}(2zd-d^2-a^2)\right]\ ,\quad z>>d,a$$

$$\frac{1}{[(z+d)^2+a^2]^{3/2}}=\frac{1}{z^3\left[1+\frac{2zd+d^2+a^2}{z^2}\right]^{3/2}}\cong\frac{1}{z^3}\left[1-\frac{3}{2z^2}(2zd+d^2+a^2)\right]\ ,\quad z>>d,a$$

$$\frac{1}{[(z-d)^2+a^2]^{3/2}}-\frac{1}{[(z+d)^2+a^2]^{3/2}}\cong\frac{6zd}{z^5}\ ,\quad z>>d,a\ ,\quad z>0$$

اگر $z<0$ باشد مقدار عبارت فوق برابر $-\frac{6zd}{z^5}$ است. پس برای $z>0$ و $z<0$، مقدار این عبارت را به صورت $\frac{6d\,|z|}{z^5}$ می‌نویسیم. آنگاه:

$$\mathbf{B}(0,0,z)=\frac{3\mu_0 I a^2 d\,|z|}{z^5}\,\hat{a}_z\ ,\quad |z|>>d,a$$

ب) برای این حالت، ابتدا کمیتهای مربوط به یک حلقه جریان به فاصله d از صفحه xy را به دست می‌آوریم. چون میدان در یک نقطه واقع در صفحه xy، تابعی از φ نیست (به دلیل تقارن مسیر جریان)، می‌توان φ را هر مقدار دلخواه، مثلاً صفر، انتخاب کرد. در این صورت $\mathbf{r}=x\,\hat{a}_x$ می‌شود و کافی است در خاتمه محاسبات x را با r و $\hat{a}_x$ را با $\hat{a}_r$ جایگزین نماییم. حال برای این حلقه جریان می‌نویسیم،

$$\mathbf{r}'=a\,\hat{a}_r+d\,\hat{a}_z=a(\cos\varphi'\,\hat{a}_x+\sin\varphi'\,\hat{a}_y)+d\,\hat{a}_z$$

$$\mathbf{r} = x\,\hat{a}_x \quad , \quad dL' = a\,d\varphi'\,\hat{a}_\varphi = ad\varphi'\,(-\sin\varphi'\,\hat{a}_x + \cos\varphi'\,\hat{a}_y)$$

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}' = (x - a\cos\varphi')\,\hat{a}_x - a\sin\varphi'\,\hat{a}_y - d\,\hat{a}_z$$

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-۳} = [(x - a\cos\varphi')^{۲} + a^{۲}\sin^{۲}\varphi' + d^{۲}]^{-۳/۲} = [x^{۲} + a^{۲} + d^{۲} - ۲ax\cos\varphi']^{-۳/۲}$$

$$\cong x^{-۳}\left[۱ - \frac{۳}{۲x^{۲}}(-۲ax\cos\varphi' + a^{۲} + d^{۲})\right] \quad , \quad x >> a, d$$

$$dL' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = [a^{۲}\sin^{۲}\varphi'\,\hat{a}_z - ad\sin\varphi'\,\hat{a}_y - \cos\varphi'\,(ax - a^{۲}\cos\varphi')\,\hat{a}_z - ad\cos\varphi'\,\hat{a}_x\,]d\varphi'$$

$$= a\,[-d\cos\varphi'\,\hat{a}_x - d\sin\varphi'\,\hat{a}_y + (a - x\cos\varphi')\,\hat{a}_z]\,d\varphi'$$

$$K_۱ = \frac{dL' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{۳}} = \frac{۱}{x^{۳}}\left[۱ - \frac{۳}{۲x^{۲}}(-۲ax\cos\varphi' + a^{۲} + d^{۲})\right] a\,[-d\cos\varphi'\,\hat{a}_x - d\sin\varphi'\,\hat{a}_y + (a - x\cos\varphi')\,\hat{a}_z\,]d\varphi'$$

برای حلقه جریانی که به فاصله d- از صفحه xy بوده و حامل جریان I- است، داریم: (با تبدیل d به d-)

$$K_۲ = \frac{dL' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{۳}} = \frac{۱}{x^{۳}}\left[۱ - \frac{۳}{۲x^{۲}}(-۲ax\cos\varphi' + a^{۲} + d^{۲})\right] a\,[d\cos\varphi'\,\hat{a}_x + d\sin\varphi'\,\hat{a}_y + (a - x\cos\varphi')\,\hat{a}_z\,]d\varphi'$$

حال، مقدار کل میدان عبارت است از:

$$B\,(x, y, ۰) = \frac{\mu_۰ I}{۴\pi}\int_۰^{۲\pi}(K_۱ - K_۲)$$

$$B\,(x, y, ۰) = \frac{-\mu_۰ Ia}{۴\pi x^{۳}}\int_۰^{۲\pi}\left[۱ - \frac{۳}{۲x^{۲}}(-۲ax\cos\varphi' + a^{۲} + d^{۲})\right](۲d\cos\varphi'\,\hat{a}_x + ۲d\sin\varphi'\,\hat{a}_y)\,d\varphi'$$

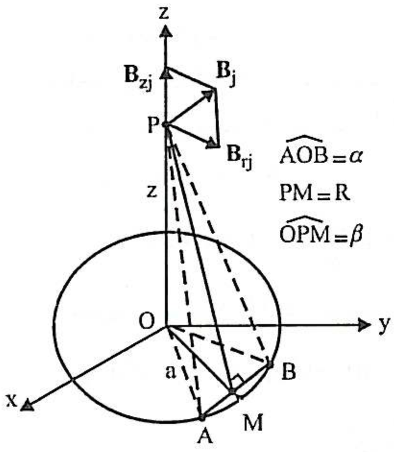
$$= \frac{-\mu_۰ Ia}{۴\pi x^{۳}}\int_۰^{۲\pi}\left(\frac{۳}{۲x^{۲}}\right)(۲ax\cos\varphi')\,(۲d\cos\varphi')\,d\varphi'\,\hat{a}_x$$

$$= -\frac{۳\mu_۰ Ia^{۲}d}{۲\pi x^{۴}}\int_۰^{۲\pi}\cos^{۲}\varphi'\,d\varphi'\,\hat{a}_x = -\frac{۳\mu_۰ Ia^{۲}d}{۲x^{۴}}\hat{a}_x$$

با جایگزین نمودن x و $\hat{a}_x$ با r و $\hat{a}_r$، سرانجام نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$B\,(x, y, ۰) = -\frac{۳\mu_۰ Ia^{۲}d}{۲r^{۴}}\hat{a}_r \quad , \quad r >> a, d$$

■



شکل پ-۴۸

۷. با توجه به شکل پ-۴۸، فرض می‌کنیم AB یک ضلع، مثلاً ضلع jام، از n ضلعی منظم باشد. میدان مغناطیسی حاصل از پاره خط جریان AB (جریان I از A به طرف B است) در نقطه $P(\circ,\circ,z)$ بردار $\mathbf{B}_j$ است که در صفحه OPM واقع است. باید توجه شود که صفحه OPM در نقطه M که وسط AB است بر AB عمود است. با استفاده از رابطه ۵-۱۶ و قرار دادن $z=\circ$ در آن، اندازه بردار $\mathbf{B}_j$ برابر است با:

$$\left|\mathbf{B}_j\right| = \frac{\mu_\circ I}{4\pi R}\frac{2(AB/2)}{\sqrt{AP^2}}$$

لیکن:

$$AP^2 = z^2 + a^2 \quad , \quad AB = 2AM = 2a\sin\frac{\alpha}{2} \quad , \quad R^2 = \left(z^2 + a^2\cos^2(\alpha/2)\right)$$

در نتیجه:

$$\left|\mathbf{B}_j\right| = \frac{\mu_\circ I a}{2\pi}\frac{\sin(\alpha/2)}{\left(z^2+a^2\cos^2(\alpha/2)\right)^{1/2}}\frac{1}{(z^2+a^2)^{1/2}}$$

$\mathbf{B}_j$، در دستگاه مختصات استوانه‌ای دارای مؤلفه‌های $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_z$ است. اما مؤلفه $\hat{a}_r$ برای میدان کل برابر صفر می‌شود، زیرا این مؤلفه‌ها دارای اندازه‌های یکسانند و برای مؤلفه $\hat{a}_r$ هر ضلع، سایر اضلاع مؤلفه‌ای در جهت $-\hat{a}_r$ تولید می‌کنند. بنابراین، میدان کل فقط مؤلفه $\hat{a}_z$ دارد.

$$B_{jz} = \left|\mathbf{B}_j\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \left|\mathbf{B}_j\right|\sin\beta \quad , \quad \sin\beta = \frac{OM}{PM} = \frac{a\cos(\alpha/2)}{\left(z^2+a^2\cos^2(\alpha/2)\right)^{1/2}}$$

$$B_{jz} = \frac{\mu_\circ I a^2}{2\pi}\frac{\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\left(z^2+a^2\cos^2(\alpha/2)\right)}\frac{1}{(z^2+a^2)^{1/2}}$$

حال، داریم:

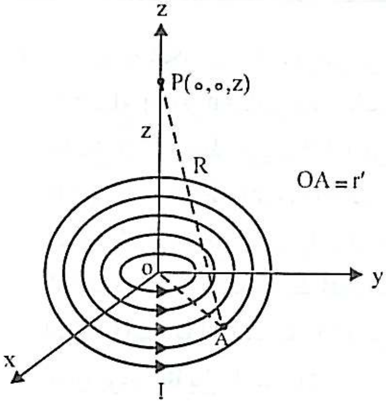
$$\mathbf{B} = (\circ,\circ,z) = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{B}_j = \sum_{j=1}^{n}B_{jz}\hat{a}_z = n\,B_{jz}\hat{a}_z$$

$$= n\left(\frac{\mu_\circ I a^2}{4\pi}\right)\frac{\sin\alpha}{\left(z^2+a^2\cos^2(\alpha/2)\right)(z^2+a^2)^{1/2}}$$

اما برای یک n ضلعی منظم $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ است. پس:

$$\mathbf{B}(\circ,\circ,z) = \left(\frac{\mu_\circ I n}{4\pi}\right)\frac{\sin(2\pi/n)}{\left[(z/a)^2+\cos^2(\pi/n)\right]\sqrt{z^2+a^2}}\hat{a}_z$$

■



شکل پ-۴۹

۸. این حلزون جریان را می‌توان به منزله یک توزیع سطحی جریان تلقی کرد که روی دیسکی به شعاع a و در جهت φ برقرار باشد (شکل پ-۴۹). چگالی توزیع سطحی جریان برابر است با:

$$J_S = \lim \frac{\Delta I}{\Delta L} \hat{a}_n \quad ; \quad \hat{a}_n = \hat{a}_\varphi$$

جریان عبوری از عنصر طول ΔL در امتداد شعاعی ; $\Delta I = n I \Delta L$

$$J_S = n I \hat{a}_\varphi = n I (-\sin\varphi' \hat{a}_x + \cos\varphi' \hat{a}_y)$$

$$\mathbf{B}(\circ,\circ,z) = \int_S \frac{\mu_\circ J_S \times R}{4\pi R^3} dS'$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \;,\; \mathbf{r} = z\hat{a}_z \;,\; \mathbf{r}' = r'\cos\varphi' \hat{a}_x + r'\sin\varphi' \hat{a}_y$$

$$R = |\mathbf{R}| = \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| = (z^2 + r'^2)^{1/2} \;,\; dS' = r' dr' d\varphi'$$

$$J_S \times R = nI(-\sin\varphi' \hat{a}_x + \cos\varphi' \hat{a}_y) \times (-r'\cos\varphi' \hat{a}_x - r'\sin\varphi' \hat{a}_y + z\hat{a}_z)$$

$$= nI(z\cos\varphi' \hat{a}_x + z\sin\varphi' \hat{a}_y + r' \hat{a}_z)$$

$$\mathbf{B}(\circ,\circ,z) = \frac{\mu_\circ nI}{4\pi} \int_\circ^a \int_\circ^{2\pi} \frac{z\cos\varphi' \hat{a}_x + z\sin\varphi' \hat{a}_y + r'\hat{a}_z}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' d\varphi'$$

مؤلفه‌های $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ میدان مغناطیسی $\mathbf{B}(\circ,\circ,z)$ به ترتیب شامل $\int_\circ^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi' = \circ$ و $\int_\circ^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi' = \circ$ هستند و در نتیجه صفرند. بنابراین:

$$\mathbf{B}(\circ,\circ,z) = \frac{\mu_\circ nI}{4\pi} \left[\underbrace{\int_\circ^a \frac{r'^2 dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}}_{=K_1} \int_\circ^{2\pi} d\varphi' \right] \hat{a}_z$$

$$K_1 = \left[-\frac{r'}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} + \ln\left(r' + (z^2 + r'^2)^{1/2}\right) \right]_\circ^a$$

پس از خلاصه نمودن، داریم:

$$\mathbf{B}(\circ,\circ,z) = \frac{\mu_\circ nI}{2} \left[\ln\frac{a + \sqrt{z^2 + a^2}}{|z|} - \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \hat{a}_z$$

■

۹.

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{J}_S\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}dS'$$

$$\mathbf{r}=y\,\widehat{\mathbf{a}}_y \quad , \quad \mathbf{r}'=x'\widehat{\mathbf{a}}_x+z'\widehat{\mathbf{a}}_z \quad , \quad dS'=dx'dz'$$

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}'=-x'\widehat{\mathbf{a}}_x-z'\widehat{\mathbf{a}}_z+y\,\widehat{\mathbf{a}}_y \quad , \quad J_S\widehat{\mathbf{a}}_z\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=(-x'\widehat{\mathbf{a}}_y-y\,\widehat{\mathbf{a}}_x)J_S$$

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-3}=(x'^2+z'^2+y^2)^{-3/2}$$

$$\mathbf{B}(0,y,0)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x'=-a}^{a}\int_{z'=-\infty}^{+\infty}\frac{-(y\,\widehat{\mathbf{a}}_x+x'\widehat{\mathbf{a}}_y)J_S}{(x'^2+z'^2+y^2)^{3/2}}dx'dz'$$

ابتدا انتگرال‌گیری را نسبت به z' انجام می‌دهیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'}{(x'^2+y^2+z'^2)^{3/2}}=\frac{1}{x'^2+y^2}\left[\frac{z'}{(x'^2+y^2+z'^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2}{x'^2+y^2}$$

بنابراین:

$$\mathbf{B}(0,y,0)=-\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(y\,\widehat{\mathbf{a}}_x+x'\widehat{\mathbf{a}}_y)J_S}{x'^2+y^2}dx'$$

$$B_x=-\frac{\mu_0 y}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{J_S\,dx'}{x'^2+y^2} \quad , \quad B_y=-\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{J_S\,x'dx'}{x'^2+y^2}$$

بدیهی است که در عبارات سمت راست B_x و B_y می‌توان به جای x'، x (یا هر حرف دلخواهی) به کار برد.

الف)

$$\mathbf{J}_S=J_{S0}\,\widehat{\mathbf{a}}_z$$

$$B_x=-\frac{\mu_0 y}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{J_{S0}\,dx'}{x'^2+y^2}=-\frac{\mu_0 J_{S0}\,y}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{dx'}{x'^2+y^2}=-\frac{\mu_0 J_{S0}}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{a}{y}\right)$$

چون $\dfrac{x'}{x'^2+y^2}$ تابع فردی از x' است، بنابراین:

$$B_y=-\frac{\mu_0 J_{S0}}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x'dx'}{x'^2+y^2}=0$$

ب)

$$\mathbf{J}_S=J_{S0}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\widehat{\mathbf{a}}_z$$

$$B_x=-\frac{\mu_0 y}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{J_{S0}\left(1-\frac{|x'|}{a}\right)}{x'^2+y^2}dx'=\frac{-\mu_0 y J_{S0}}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{1-\frac{x'}{a}}{x'^2+y^2}dx'$$

$$= \frac{-\mu_\circ J_{S_\circ} y}{\pi}\left[\int_\circ^a \frac{dx'}{x'^۲+y^۲} - \frac{۱}{a}\int_\circ^a \frac{x'dx'}{x'^۲+y^۲}\right]$$

$$= -\frac{\mu_\circ J_{S_\circ} y}{\pi}\left[\frac{۱}{y}\tan^{-۱}\left(\frac{x'}{y}\right) - \frac{۱}{a}\frac{۱}{۲}\ln(x'^۲+y^۲)\right]_\circ^a$$

$$= -\frac{\mu_\circ J_{S_\circ}}{\pi}\left[\tan^{-۱}\left(\frac{a}{y}\right) - \frac{y}{۲a}\ln\left(\frac{a^۲+y^۲}{y^۲}\right)\right]$$

$$B_y = -\frac{\mu_\circ}{۲\pi}\int_{-a}^{a} \underbrace{\frac{J_{S_\circ} x'\left(۱-\frac{|x'|}{a}\right)}{x'^۲+y^۲}}_{\text{تابع فردی از } x'} dx' = \circ$$

■

۱۰. ابتدا میدان یکی از نیم صفحه‌ها، مثلاً نیم صفحه $y=\circ$ و $z>\circ$، را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{B}_۱ = \int_S \frac{\mu_\circ \mathbf{J}_S \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{۴\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}\,dS'$$

$$\mathbf{J}_S = J_{S_\circ}\hat{a}_z \ ,\ \mathbf{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \ ,\ \mathbf{r}' = x'\hat{a}_x + z'\hat{a}_z \ ,\ dS' = dx'dz'$$

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}' = (x-x')\hat{a}_x + y\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z \ ,\ \mathbf{J}_S\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = J_{S_\circ}[(x-x')\hat{a}_y - y\hat{a}_x]$$

$$\mathbf{B}_۱ = \frac{\mu_\circ J_{S_\circ}}{۴\pi}\int_{x'=-\infty}^{\infty}\int_{z'=\circ}^{\infty} \frac{(x-x')\hat{a}_y - y\hat{a}_x}{[(x-x')^۲+y^۲+(z-z')^۲]^{۳/۲}}dx'dz'$$

$$= \frac{\mu_\circ J_{S_\circ}}{۴\pi}\left\{\hat{a}_y\int_{z'=\circ}^{\infty}dz'\underbrace{\int_{x'=-\infty}^{\infty}\frac{(x-x')}{[(x-x')^۲+y^۲+(z-z')^۲]^{۳/۲}}dx'}_{=\circ}\right.$$

$$\left. -y\hat{a}_x\int_\circ^{\infty}dz'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{[(x-x')^۲+y^۲+(z-z')^۲]^{۳/۲}}\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{[(x-x')^۲+y^۲+(z-z')^۲]^{۳/۲}} = \left.\frac{-(x-x')}{[y^۲+(z-z')^۲][(x-x')^۲+y^۲+(z-z')^۲]^{۱/۲}}\right|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{۲}{y^۲+(z-z')^۲}$$

حال،

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2\,dz'}{y^2+(z-z')^2} = -2\int_{z}^{-\infty} \frac{dt}{y^2+t^2} = \frac{2}{|y|}\tan^{-1}\left(\frac{t}{|y|}\right)\Bigg|_{-\infty}^{z}$$

$$= \frac{2}{|y|}\left[\tan^{-1}\left(\frac{z}{|y|}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 J_{S_0}}{2\pi}\left[\frac{y}{|y|}\left(\tan^{-1}\left(\frac{z}{|y|}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\right]\hat{a}_x$$

با تبدیل z به y، y به z- و J_{S_0} به $-J_{S_0}$ توزیع جریان مربوط به نیم صفحه $y=0$ و $z>0$ به توزیع جریان روی نیم صفحه دیگر واقع در $z=0$ و $y>0$ تبدیل می‌شود. با اِعمال این تبدیل، میدان مغناطیسی حاصل از نیم صفحه دوم برابر است با:

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 J_{S_0}}{2\pi}\left[\frac{z}{|z|}\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{|z|}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\right]\hat{a}_x$$

آنگاه میدان کل برابر است با:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 J_{S_0}}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{|z|}+\frac{y}{|y|}\right)+\frac{z}{|z|}\tan^{-1}\left(\frac{y}{|z|}\right)+\frac{y}{|y|}\tan^{-1}\left(\frac{z}{|y|}\right)\right]\hat{a}_x$$

در ربع اول، $y>0$ و $z>0$ است و داریم:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 J_{S_0}}{2\pi}\left[\pi+\underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{z}{y}\right)}_{=\frac{\pi}{2}}\right]\hat{a}_x = -\frac{3}{4}\mu_0 J_{S_0}\hat{a}_x$$

در ربع‌های دوم و چهارم، $\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}=0$، چون $y>0$ و $z<0$ یا $y<0$ و $z>0$ است.

$$\frac{z}{|z|}\tan^{-1}\left(\frac{y}{|z|}\right)+\frac{y}{|y|}\tan^{-1}\left(\frac{z}{|y|}\right) = -\left[\tan^{-1}\left|\frac{y}{z}\right|+\tan^{-1}\left|\frac{z}{y}\right|\right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 J_{S_0}}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\hat{a}_x = \frac{1}{4}\mu_0 J_{S_0}\hat{a}_x$$

در ربع سوم $y<0$ و $z<0$، $\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}=-2$ است، بنابراین:

$$\frac{z}{|z|}\tan^{-1}\left(\frac{y}{|z|}\right)+\frac{y}{|y|}\tan^{-1}\left(\frac{z}{|y|}\right) = \tan^{-1}\left|\frac{y}{z}\right|+\tan^{-1}\left|\frac{z}{y}\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_\circ J_{S_\circ}}{۲\pi}\left(-۲\times\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right)\widehat{\mathbf{a}}_x = \frac{۱}{۴}\mu_\circ J_{S_\circ}\widehat{\mathbf{a}}_x$$

به طور خلاصه:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} (-۳\mu_\circ J_{S_\circ}/۴)\widehat{\mathbf{a}}_x & y>\circ, z>\circ, \text{(ربع اول)} \\ (\mu_\circ J_{S_\circ}/۴)\widehat{\mathbf{a}}_x & \text{(ربع‌های دوم، سوم و چهارم)، سایر نواحی} \end{cases}$$

■

۱۱. برای این توزیع حجمی جریان می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$

$$\mathbf{J} = \frac{I}{ab}\widehat{\mathbf{a}}_z \quad , \quad \mathbf{r} = \mathbf{o} \quad , \quad \mathbf{r}' = x'\widehat{\mathbf{a}}_x + y'\widehat{\mathbf{a}}_y + z'\widehat{\mathbf{a}}_z \quad , \quad \mathbf{r}-\mathbf{r}' = -\mathbf{r}'$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-۳} = (x'^۲+y'^۲+z'^۲)^{-۳/۲} \quad , \quad \mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{I}{ab}(x'\widehat{\mathbf{a}}_y - y'\widehat{\mathbf{a}}_x)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{o}) = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi ab}\int_{x'=-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}}\int_{y'=-\frac{b}{۲}}^{\frac{b}{۲}}\int_{z'=-\infty}^{+\infty}\frac{x'\widehat{\mathbf{a}}_y - y'\widehat{\mathbf{a}}_x}{(x'^۲+y'^۲+z'^۲)^{۳/۲}}dx'dy'dz'$$

برای مؤلفه $\widehat{\mathbf{a}}_x$ میدان اگر ابتدا انتگرال‌گیری نسبت به y' انجام گیرد، داریم:

$$B_x = -\frac{\mu_\circ I}{۴\pi ab}\int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\int_{-\frac{b}{۲}}^{\frac{b}{۲}}\frac{y'dy'}{(x'^۲+y'^۲+z'^۲)^{۳/۲}}\right)}_{\text{(چون عبارت زیر انتگرال تابع فردی از } y' \text{ است.)}\ ;\ =\circ}dz'dx' = \circ$$

به طور مشابهی می‌توان نشان داد که $B_y = \circ$ است. پس،

$$\mathbf{B}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$$

■

۱۲.
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}dV'$$

$$\mathbf{J} = \frac{I}{s}\widehat{\mathbf{a}}_z = \frac{۲I}{\pi(b^۲-a^۲)}\widehat{\mathbf{a}}_z \quad , \quad s = \frac{\pi}{۲}(b^۲-a^۲) \text{ سطح مقطع سیم}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{o} \quad , \quad \mathbf{r}' = r'\widehat{\mathbf{a}}_r + z'\widehat{\mathbf{a}}_z \quad , \quad \mathbf{r}-\mathbf{r}' = -\mathbf{r}' \quad , \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-۳} = (r'^۲+z'^۲)^{-۳/۲}$$

$$\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=-\mathrm{J}\,\mathrm{r}'\hat{\mathbf{a}}_\varphi=-\mathrm{J}\,\mathrm{r}'(-\sin\varphi'\hat{\mathbf{a}}_x+\cos\varphi'\hat{\mathbf{a}}_y)$$

$$\mathbf{B}(\mathrm{o})=\frac{\mu_\circ \mathrm{I}}{۲\pi^۲(\mathrm{b}^۲-\mathrm{a}^۲)}\underbrace{\int_{r'=a}^{b}\int_{z'=-\infty}^{+\infty}\int_{\varphi'=\circ}^{\pi}\frac{\mathrm{r}'(\sin\varphi'\hat{\mathbf{a}}_x-\cos\varphi'\hat{\mathbf{a}}_y)}{(\mathrm{r}'^۲+\mathrm{z}'^۲)^{۳/۲}}\mathrm{r}'\,d\mathrm{r}'\,d\mathrm{z}'\,d\varphi'}_{=\mathrm{K}_۱}$$

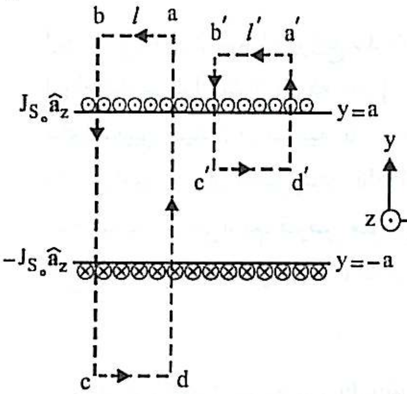
$$\mathrm{K}_۱=\int_a^b\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{r}'^۲d\mathrm{r}'d\mathrm{z}'}{(\mathrm{r}'^۲+\mathrm{z}'^۲)^{۳/۲}}\left(\hat{\mathbf{a}}_x\int_\circ^\pi\sin\varphi'd\varphi'-\hat{\mathbf{a}}_y\int_\circ^\pi\cos\varphi'd\varphi'\right)$$

$$=۲\hat{\mathbf{a}}_x\int_a^b \mathrm{r}'^۲d\mathrm{r}'\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mathrm{z}'}{(\mathrm{r}'^۲+\mathrm{z}'^۲)^{۳/۲}}}_{=\left.\frac{\mathrm{z}'}{\mathrm{r}'^۲\sqrt{\mathrm{r}'^۲+\mathrm{z}'^۲}}\right|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{۲}{\mathrm{r}'^۲}}=۴\hat{\mathbf{a}}_x\int_a^b d\mathrm{r}'=۴(\mathrm{b}-\mathrm{a})\hat{\mathbf{a}}_x$$

در نتیجه:

$$\mathbf{B}(\mathrm{o})=\frac{۲\mu_\circ \mathrm{I}}{\pi^۲(\mathrm{a}+\mathrm{b})}\hat{\mathbf{a}}_x$$

■



شکل پ-۵۰

۱۳. الف) با توجه به توضیحات پایان بخش ۵-۴، میدان مغناطیسی فقط مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_x$ دارد و این مؤلفه فقط تابعی از y می‌تواند باشد. ابتدا میدان را در ناحیه $|y|>a$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. مسیر بسته abcda را در صفحه xy مطابق شکل پ-۵۰ در نظر می‌گیریم و قانون مداری آمپر را به کار می‌بریم.

$$\oint_{abcda}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\int_a^b+\int_b^c+\int_c^d+\int_d^a=(\mathrm{B}_{x_۱}-\mathrm{B}_{x_۲})\,l=\circ$$

در امتدادهای bc و da، $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\circ$ است؛ زیرا $\mathbf{B}$ و $d\mathbf{L}$ بر یکدیگر عمودند. $\mathrm{B}_{x_۱}$ و $\mathrm{B}_{x_۲}$ میدان مغناطیسی در نواحی $y>a$ و $y<-a$ هستند. از رابطه بالا، نتیجه می‌گیریم:

$$\mathrm{B}_{x_۱}=\mathrm{B}_{x_۲}$$

از این نتیجه چنین استنباط می‌شود که، چون مسیر بسته abcda نسبت به صفحه $y=\circ$ به طور دلخواه نامتقارن است، میدان $\mathbf{B}$ در نواحی $|y|>a$ یکنواخت است. از طرف دیگر، $\mathbf{B}$ یک میدان سیملوله‌ای است و $\oint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\circ$ است. اگر S را صفحه $x=\circ$ در نظر گیریم (کره‌ای به شعاع بینهایت)، برای اینکه شار کل گذرنده از صفحه $x=\circ$ برابر صفر شود باید $\mathrm{B}_{x_۱}=\mathrm{B}_{x_۲}=\circ$ باشد. بنابراین:

$$\mathbf{B}=\mathbf{o}\ ,\ |\,y\,|>a$$

برای تعیین میدان در ناحیه $|\,y\,|<a$ مسیر بسته $C'=a'b'c'd'a'$ را مطابق شکل پ-۵۰ در نظر می‌گیریم و قانون مداری آمپر را به کار می‌بریم.

$$\oint_{C'} \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{L}=\mu_{\circ}\ (\text{جریان در برگرفته شده توسط مسیر } C')$$

$$=\int_{a'}^{b'}+\int_{b'}^{c'}+\int_{c'}^{d'}+\int_{d'}^{a'}=\int_{c'}^{d'}\mathbf{B}\,.\,d\mathbf{L}=B_x l'=J_{S_\circ} l'$$

در امتداهای $b'c'$ و $d'a'$، $\mathbf{B}\,.\,d\mathbf{L}=\circ$ و در امتداد $a'b'$، $\mathbf{B}=\mathbf{o}$ است. بنابراین:

$$B_x=J_{S_\circ}\mu_\circ$$

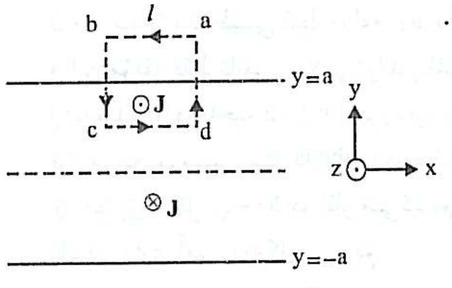
به طور خلاصه:

$$\mathbf{B}=\begin{cases} J_{S_\circ}\mu_\circ\,\hat{a}_x & |\,y\,|<a\\ \mathbf{o} & |\,y\,|>a\end{cases}$$

ب) در این حالت نیز میدان فقط مؤلفه $\hat{a}_x$ داشته و این مؤلفه فقط تابعی از y است، یعنی

$$\mathbf{B}=B_x\,(y)\,\hat{a}_x$$

این توزیع جریان همانند توزیع بند (الف) تابع فردی از y است و به همان ترتیبی که در بند (الف) انجام شد می‌توان نشان داد که $\mathbf{B}=\mathbf{o}\ ,\ |\,y\,|>a$.



شکل پ-۵۱

برای تعیین میدان در ناحیه $|\,y\,|<a$ قانون مداری آمپر را روی مسیر بسته abcda در شکل پ-۵۱ به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم فاصله ضلع cd از محور x برابر y باشد، آنگاه:

$$\oint_{abcda}\mathbf{B}\,.\,d\mathbf{L}=\mu_\circ I;\ I=\text{جریان در برگرفته شده توسط مسیر } abcda$$

$$=\int_a^b+\int_b^c+\int_c^d+\int_d^a=\int_c^d \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{L}=B_x\,l$$

در امتدادهای bc و da، $\mathbf{B}\,.\,d\mathbf{L}=\circ$ و در امتداد ab، میدان $\mathbf{B}=\mathbf{o}$ است.

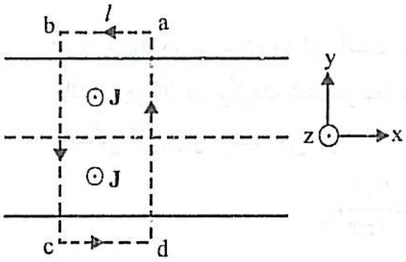
$$I=\int \mathbf{J}\,.\,d\mathbf{S}=\int y\,dx\,dy=\int_y^a y\,dy\int_\circ^l dx=l\,(a^2-y^2)/2$$

$$B_x=\frac{\mu_\circ}{2}(a^2-y^2)$$

به طور خلاصه:

$$\mathbf{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_\circ}{2}(a^2-y^2)\,\hat{a}_x & |\,y\,|<a\\ \mathbf{o} & |\,y\,|>a\end{cases}$$

ج) مسیر بسته abcda را که نسبت به صفحه $y=0$ متقارن است مطابق شکل پ-۵۲ در نظر می‌گیریم. میدان در ناحیه $y>0$ در جهت $-\hat{a}_x$ و در ناحیه $y<0$ در جهت $\hat{a}_x$ است. بدیهی است که اندازه میدان روی اضلاع ab و cd یکسان است. با به کار بردن قانون مداری امپر داریم:



شکل پ-۵۲

$$\oint_{abcda} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\mu_0 I \quad , \quad I = \text{جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته abcda}$$

$$=\int_a^b+\int_b^c+\int_c^d+\int_d^a=\int_{x_a}^{x_b}(-B_x\,\hat{a}_x)\cdot(dx\,\hat{a}_x)+\int_{x_c}^{x_d}(B_x\,\hat{a}_x)\cdot(dx\,\hat{a}_x)=2lB_x$$

در امتدادهای bc و da، $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=0$ است.

$$I=\begin{cases}2\int_0^l dx\int_0^a (a-y)\,dy=a^2 l & |y|>a\\[2ex] 2\int_0^l dx\int_0^y (a-y)\,dy=2l\left(ay-\dfrac{y^2}{2}\right) & |y|<a\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\mathbf{B}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\mu_0\, a^2\hat{a}_x & y>a\\[2ex] -\mu_0\left(ay-\frac{1}{2}y^2\right)\hat{a}_x & 0<y<a\end{cases}$$

با توجه به اینکه میدان در ناحیه $y<0$ برابر منهای میدان در ناحیه $y>0$ است، به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\mu_0\, a^2\dfrac{y}{|y|}\,\hat{a}_x & |y|>a\\[2ex] -\mu_0\left(ay-\dfrac{y^3}{2|y|}\right)\hat{a}_x & |y|<a\end{cases}$$

■

۱۴. با توجه به اینکه توزیع جریان فقط تابعی از r بوده و در جهت $\hat{a}_z$ است، میدان مغناطیسی حاصل (در هر سه بند) فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ است و این مؤلفه فقط تابعی از r است، یعنی $\mathbf{B}(\mathbf{r})=B_\varphi(r)\,\hat{a}_\varphi$. در به کار بردن قانون مداری آمپر مسیر بسته را دایره‌ای به شعاع r در نظر گرفته که مرکز آن منطبق بر محور z بوده و در صفحه‌ای عمود بر این محور باشد. به این ترتیب،

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\oint_C (B_\varphi\hat{a}_\varphi)\cdot(r\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi)=\int_0^{2\pi} rB_\varphi\,d\varphi=rB_\varphi\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi rB_\varphi$$

که C همان مسیر بسته مذکور است. سمت راست رابطه قانون مداری آمپر $\mu_\circ I$ است که I مقدار خالص جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته C است. بنابراین، در این مسئله میدان مغناطیسی به شکل کلی زیر نوشته می‌شود:

$$2\pi r B_\varphi = \mu_\circ I \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

حال برای هر بند مقدار I را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

الف)
$$I = \int_C \mathbf{J_S}\cdot d\mathbf{L} = \int_C (J_z\hat{\mathbf{a}}_z)\cdot(r\,d\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_z) = \begin{cases} 2J_S\pi a & a<r<b \\ 0 & r<a\;,\; r>b \end{cases}$$

توجه کنید که برای $r < a$، مسیر بسته C هیچ مقدار جریانی را در بر نمی‌گیرد و برای $r > b$ مقدار خالص جریان در برگرفته شده صفر است، زیرا $J_{S_\circ}(2\pi a) - J_{S_\circ}\left(\frac{a}{b}\right)(2\pi b) = 0$. در نتیجه میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ برابر است با:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_\circ J_{S_\circ}\left(\frac{a}{r}\right)\hat{\mathbf{a}}_\varphi & a<r<b \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

ب)
$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_S J_z\hat{\mathbf{a}}_z\cdot r\,dr\,d\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_z = \int_r\int_0^{2\pi} J_z\,r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_r J_z\,r\,dr$$

$$I = \begin{cases} 2\pi(I/\pi a^2)\int_0^r r\,dr = I\left(\frac{r}{a}\right)^2 & 0<r<a \\ 2\pi(I/\pi a^2)\int_0^a r\,dr = I & a<r<b \\ I - [2I/(c^2-b^2)]\int_b^r r\,dr = I\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} & b<r<c \\ 0 & r>c \end{cases}$$

بنابراین میدان مغناطیسی برابر است با:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_\circ I r}{2\pi a^2}\hat{\mathbf{a}}_\varphi & 0\le r\le a \\ \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\hat{\mathbf{a}}_\varphi & a\le r\le b \\ \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\hat{\mathbf{a}}_\varphi & b\le r\le c \\ 0 & r\ge c \end{cases}$$

ج)
$$I=\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\int_S J_z\hat{a}_z\cdot r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z=2\pi\int_r J_z\,r\,dr$$

$$I=\begin{cases}2\pi\int_0^r J_0\left(\frac{r}{a}\right)^n r\,dr=2\pi J_0\left(\frac{r^2}{n+2}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^n & 0<r<a\\ 2\pi\int_0^a J_0\left(\frac{r}{a}\right)^n r\,dr=2\pi J_0\left(\frac{a^2}{n+2}\right) & r>a\end{cases}$$

آنگاه:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 J_0 a}{n+2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{n+1}\hat{a}_\varphi & 0\le r\le a\\ \dfrac{\mu_0 J_0 a}{n+2}\left(\dfrac{a}{r}\right)\hat{a}_\varphi & r\ge a\end{cases}$$

■

۱۵. به دلیل تقارن توزیع جریان نسبت به φ، توزیع جریان و میدان مغناطیسی حاصل از آن مستقل از φ هستند. بنابراین، ضمن محاسبه میدان $\mathbf{B}$، برای φ می‌توان هر مقدار دلخواهی در نظر گرفت بدون اینکه به عمومیت مسئله لطمه‌ای وارد آید. در اینجا $\varphi=\pi/2$ را انتخاب می‌کنیم. اگر میدان مغناطیسی حاصل از دو عنصر جریان که نسبت به صفحه $\varphi=\pi/2$ متقارن باشند را در نظر بگیریم، این میدان بر صفحه $\varphi=\pi/2$ عمود بوده و به عبارت دیگر فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ دارد. در نتیجه میدان مغناطیسی چنبره نیز فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ دارد. حال یک مسیر دایره‌ای بسته در نظر می‌گیریم به طوری که شعاع آن برابر r و مرکزش منطبق بر محور z باشد و در صفحه‌ای عمود بر محور z قرار گیرد. با نوشتن قانون مداری آمپر برای این مسیر بسته داریم:

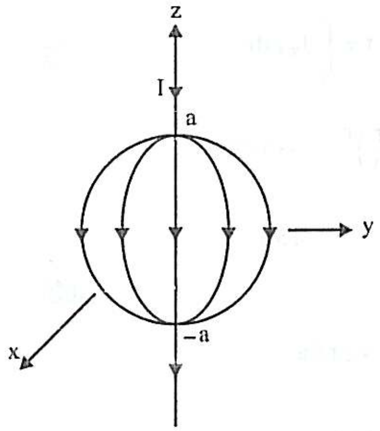
$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=B_\varphi(2\pi r)=\mu_0 I_1$$

که C مسیر بسته مذکور و I_1 جریان در برگرفته شده توسط مسیر C است. بدیهی است که اگر مسیر C در بیرون چنبره واقع باشد، مقدار خالص جریان در برگرفته شده توسط آن صفر است و بنابراین میدان مغناطیسی در بیرون چنبره نیز صفر خواهد بود. اما، اگر مسیر بسته C در درون چنبره قرار گیرد، جریان در برگرفته شده توسط آن برابر $I_1=2\pi bnI$ است. بنابراین در درون و بیرون چنبره داریم:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\begin{cases}\mu_0 nI\left(\dfrac{b}{r}\right)\hat{a}_\varphi & \text{درون چنبره}\\ 0 & \text{بیرون چنبره}\end{cases}$$

باید توجه داشت که نتایج به دست آمده با رعایت این فرض بوده است که توزیع جریان به شکل یک جریان سطحی روی بدنه چنبره که فاقد مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ باشد در نظر گرفته شود. این فرض تا وقتی که تعداد دورهای سیم پیچ زیاد باشد معقول است و نتایج با تقریب خوبی میدان را به دست می‌دهند.

■



شکل پ-۵۳

۱۶. در مثال ۵-۱ نشان داده شده است که میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان در امتداد محور z فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ است. از این رو، میدان مغناطیسی حاصل از دو قسمت جریان که در نواحی $a<z<\infty$ و $-\infty<z<-a$ روی محور z قرار دارند فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ است. حال میدان مغناطیس ناشی از بخش کروی جریان را مورد بررسی قرار می‌دهیم (شکل پ-۵۳). واضح است که این بخش از توزیع جریان تابعی از φ نیست، بنابراین میدان حاصل از آن نیز مستقل از φ است. به علاوه اگر دو عنصر جریان که نسبت به یک صفحه ثابت $=\varphi$ (مثلاً $\varphi=\pi/۲$) متقارنند را در نظر بگیریم، میدان مغناطیسی حاصل از آنها فقط مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ دارد. پس به طور خلاصه، کل توزیع جریان فقط مؤلفه B_φ ایجاد می‌کند و این مؤلفه خود تابعی از φ نیست. حال قانون مداری آمپر را برای یک مسیر دایره‌ای به شعاع r، مرکزی منطبق بر محور z و واقع در صفحه‌ای عمود بر محور z به کار می‌بریم،

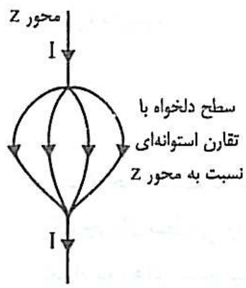
$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\mu_\circ I_۱=B_\varphi(۲\pi r)$$

که C مسیر بسته دایره‌ای مذکور و $I_۱$ جریان در برگرفته شده توسط آن است. اگر این دایره در درون محفظه کروی باشد $(r_s<a)$ جریان در برگرفته شده توسط آن صفر است و اگر در بیرون آن باشد $(r_s>a)$ این جریان برابر $-I$ است. بنابراین:

$$B_\varphi(۲\pi r)=\begin{cases}\circ & r_s<a\\ -\mu_\circ I & r_s>a\end{cases}$$

(r_s مختصه شعاعی در دستگاه مختصات کروی و r مختصه شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای است.) به طور خلاصه:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\begin{cases}\mathbf{0} & r_s<a \text{ ،a درون کره به شعاع}\\ -\dfrac{\mu_\circ I}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi & r_s>a \text{ ،a بیرون کره به شعاع}\end{cases}$$



شکل پ-۵۴

جالب است که نتیجه مزبور در حقیقت بستگی به شکل سطحی که جریان در بخشی از مسیر خود روی آن توزیع می‌شود ندارد، بلکه فقط کافی است که سطح توزیع جریان دارای تقارن استوانه‌ای نسبت به محور z باشد، به طوری که توزیع جریان تابع φ نباشد. به عنوان مثال، اگر به جای یک سطح کروی، سطحی مطابق شکل پ-۵۴ داشته باشیم، میدان مغناطیسی در درون این سطح صفر و در بیرون آن همانند میدان یک خط بینهایت جریان است.

بالاخره اگر در امتداد مسیر جریان تعداد دلخواهی از این‌گونه سطوح قرار گیرند، میدان در درون تمامی این سطوح صفر و در بیرون آنها همانند میدان یک خط بینهایت طویل جریان، $\mathbf{B}=(\mu_0 I/2\pi r)\hat{a}_\varphi$، است.

■

۱۷. الف) با استفاده از توابع پله، مؤلفه B_x را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{B}=B_x\,\hat{a}_x$$

$$B_x=\mu_0 J_{S_0}\left[1-\frac{2}{3}u(y)-\frac{4}{3}u(y-a)\right]$$

$$\mathbf{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}=-\frac{1}{\mu_0}\frac{dB_x}{dy}\hat{a}_z=-J_{S_0}\left[-\frac{2}{3}\delta(y)-\frac{4}{3}\delta(y-a)\right]\hat{a}_z$$

$$\mathbf{J}=J_{S_0}\left[\frac{2}{3}\delta(y)+\frac{4}{3}\delta(y-a)\right]\hat{a}_z$$

این توزیع حجمی جریان، به دلیل وجود توابع ضربه یک بُعدی در آن، در حقیقت یک توزیع سطحی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{J}_S=\begin{cases}\frac{2}{3}J_{S_0}\hat{a}_z & y=0\\ \frac{4}{3}J_{S_0}\hat{a}_z & y=a\end{cases}$$

ب)

$$\mathbf{B}=B_\varphi(r)\hat{a}_\varphi$$

$$B_\varphi(r)=\mu_0 J_0\left[r^2[u(r)-u(r-a)]+\frac{a^3}{r}[u(r-a)-u(r-b)]\right]$$

$$\mathbf{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB_\varphi)\hat{a}_z$$

$$\mathbf{J}=\frac{J_0}{r}\frac{d}{dr}\left[r^3[u(r)-u(r-a)]+a^3[u(r-a)-u(r-b)]\right]\hat{a}_z$$

$$=\frac{J_0}{r}\left[3r^2[u(r)-u(r-a)]+r^3[\delta(r)-\delta(r-a)]+a^3[\delta(r-a)-\delta(r-b)]\right]\hat{a}_z$$

$$\mathbf{J}=J_0\left[3r[u(r)-u(r-a)]-\frac{a^3}{b}\delta(r-b)\right]\hat{a}_z=\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$$

که در آن،

$$\mathbf{J}_1=3J_0 r[u(r)-u(r-a)]\hat{a}_z\quad,\quad \mathbf{J}_2=-J_0\frac{a^3}{b}\delta(r-b)\hat{a}_z$$

$\mathbf{J}_1$ خود یک توزیع حجمی جریان است و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{J}_1=\begin{cases}3J_0 r\hat{a}_z & 0<r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

اما $\mathbf{J}_۲$ یک توزیع سطحی جریان است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{J}_۲ \rightarrow \mathbf{J}_{S_۲} = -J_{\circ}\frac{a^۳}{b}\,\widehat{a}_z \quad , \quad r=b$$

ج)
$$\mathbf{J} = \frac{۱}{\mu_{\circ}}\nabla\times\mathbf{B} = \frac{۱}{\mu_{\circ} r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right]\widehat{a}_\varphi$$

چون $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \circ$ و $\mathbf{B} = B_r\widehat{a}_r + B_\theta\widehat{a}_\theta$، داریم:

$$rB_\theta = \begin{cases} -\mu_{\circ} J_{S_{\circ}} r\sin\theta & \circ<r<a \\ \frac{۱}{۲}\mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\frac{a^۳}{r^۲}\sin\theta & r>a \end{cases}$$

$$rB_\theta = -\mu_{\circ} J_{S_{\circ}} r\sin\theta[u(r)-u(r-a)] + \frac{۱}{۲}\mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\frac{a^۳}{r^۲}\sin\theta\, u(r-a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) = -\mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\sin\theta[u(r)-u(r-a)] - \mu_{\circ} J_{S_{\circ}} r\sin\theta[\delta(r)-\delta(r-a)]$$
$$+\frac{۱}{۲}\mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\frac{a^۳}{r^۲}\sin\theta\,\delta(r-a) - \mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\frac{a^۳}{r^۳}\sin\theta\, u(r-a)$$
$$= -\mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\sin\theta\left[u(r) + \left(\frac{a^۳}{r^۳}-۱\right)u(r-a)\right] + \frac{۳a}{۲}\mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\sin\theta\,\delta(r-a)$$

$$B_r = \begin{cases} \mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\cos\theta & \circ<r<a \\ \mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\left(\frac{a}{r}\right)^۳\cos\theta & r>a \end{cases}$$

$$B_r = \mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\cos\theta\left[u(r)-u(r-a)+\left(\frac{a}{r}\right)^۳ u(r-a)\right]$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial\theta} = -\mu_{\circ} J_{S_{\circ}}\sin\theta\left[u(r)+\left(\frac{a^۳}{r^۳}-۱\right)u(r-a)\right]$$

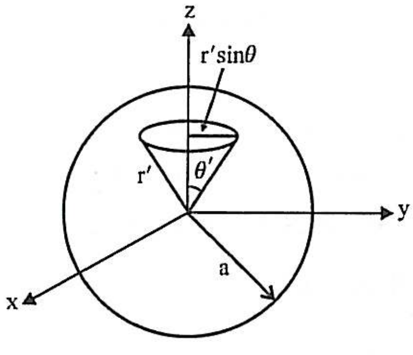
$$\mathbf{J} = \frac{۱}{\mu_{\circ} r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right]\widehat{a}_\varphi = \left(\frac{\mu_{\circ}}{\mu_{\circ} r}\right)\left(\frac{۳a}{۲}\right)J_{S_{\circ}}\sin\theta\,\delta(r-a)\,\widehat{a}_\varphi$$
$$= \frac{۳}{۲}J_{S_{\circ}}\sin\theta\,\delta(r-a)\,\widehat{a}_\varphi$$

این توزیع جریان را می‌توان به صورت یک توزیع سطحی بیان داشت به طوری که:

$$\mathbf{J}_S = \frac{۳}{۲}J_{S_{\circ}}\sin\theta\,\widehat{a}_\varphi \quad , \quad r=a$$

■

۱۸. یک حلقه بار الکتریکی به سطح مقطع $dS' = r'd\theta' dr'$ و شعاع $r'\sin\theta'$ مطابق شکل پ-۵۵ در نظر می‌گیریم. مقدار بار موجود در این حلقه برابر است با:



شکل پ-۵۵

$$dq = \rho_{\circ}\,(2\pi r'\sin\theta')(r'dr'd\theta')$$

اگر کره بار با سرعت زاویه‌ای $\omega_{\circ}$ حول محور z بچرخد، بار dq در هر ثانیه به تعداد $f_{\circ} = \frac{\omega_{\circ}}{2\pi}$ بار از سطح مقطع حلقه، (dS') عبور می‌کند. بنابراین، جریان حلقه که همان بار الکتریکی عبور نموده از سطح مقطع حلقه در یک ثانیه است عبارت است از:

$$dI = f_{\circ}\,dq = \rho_{\circ}\,\omega_{\circ}\,r'^{2}\sin\theta'\,dr'd\theta'$$

گشتاور مغناطیسی حاصل از این حلقه جریان برابر است با:

$$dM = (dI \times \text{سطح حلقه})\,\hat{a}_z = \rho_{\circ}\,\omega_{\circ}\,\pi\, r'^{4}\sin^{3}\theta'\,dr'd\theta'\,\hat{a}_z$$

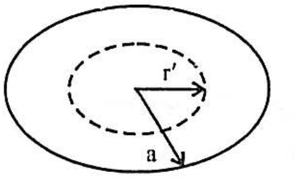
پتانسیل مغناطیسی برداری حاصل از این حلقه با توجه به رابطه ۵-۶۹ عبارت است از:

$$dA = \frac{\mu_{\circ}\,dM \times \hat{a}_r}{4\pi r^{2}} = \frac{\mu_{\circ}\,\omega_{\circ}\,\rho_{\circ}}{4r^{2}}\sin\theta\,\hat{a}_\varphi\, r'^{4}\sin^{3}\theta'\,dr'd\theta'$$

$$A = \frac{1}{4r^{2}}\mu_{\circ}\,\omega_{\circ}\,\rho_{\circ}\sin\theta\,\hat{a}_\varphi\int_{\circ}^{a} r'^{4}\,dr'\int_{\circ}^{\pi}\sin^{3}\theta'\,d\theta' = \frac{\mu_{\circ}\,\omega_{\circ}\,\rho_{\circ}\,a^{5}\sin\theta}{15r^{2}}\hat{a}_\varphi$$

■

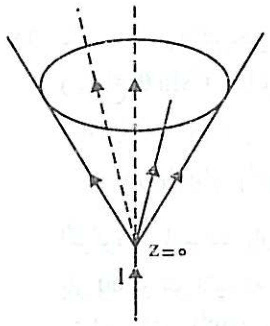
۱۹. اگر حلقه‌ای از این دیسک بار الکتریکی به شعاع r' و به ضخامت dr' را در نظر بگیریم (شکل پ-۵۶)، مقدار بار موجود در این حلقه برابر $dq = \rho_{S_{\circ}}(2\pi r')dr'$ است. اگر دیسک با سرعت زاویه‌ای $\omega_{\circ}$ بچرخد، حلقه مزبور به منزله جریانی به میزان $dI = f_{\circ}\,dq$ خواهد بود که $f_{\circ} = \frac{\omega_{\circ}}{2\pi}$ است. میدان حاصل از این حلقه جریان در مرکز حلقه در امتداد محور دیسک بوده و مقدار آن با توجه به نتیجه مسئله ۳ خودآزمایی برابر $dB = \frac{\mu_{\circ}\,dI}{2r'}\hat{a}_z$ است (دقت شود که میدان یک حلقه در مرکز آن، دو برابر میدان نیم حلقه است). میدان کل حاصل از تمامی دیسک برابر است با:



شکل پ-۵۶

$$B = \int dB = \int_{\circ}^{a}\frac{1}{2}\mu_{\circ}\,\rho_{S_{\circ}}\,\omega_{\circ}\,dr'\,\hat{a}_z = \left(\frac{1}{2}\mu_{\circ}\,\rho_{S_{\circ}}\,\omega_{\circ}\,a\right)\hat{a}_z$$

■



شکل پ-۵۷

۲۰. این مسئله با مسئله خودآزمایی ۱۶ ماهیتاً تفاوتی ندارد. پس، با توجه به شکل پ-۵۷ و توضیحاتی که در مسئله مزبور داده شد، داریم:

$$\mathbf{B} = B_\varphi(r)\,\hat{a}_\varphi$$

یک مسیر بسته دایره‌ای به شعاع r، مرکزی منطبق بر محور z و واقع در صفحه $z = z_\circ$ ($z_\circ$ مقدار ثابتی است) را در نظر گرفته و قانون مداری آمپر را به کار می‌بریم.

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L} = \mu_\circ I$$

$$(B_\varphi)(2\pi r) = \begin{cases} \mu_\circ I & \theta_\circ < \theta < \pi \\ 0 & 0 < \theta < \theta_\circ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_\circ I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi & \theta_\circ < \theta < \pi \\ 0 & 0 \le \theta < \theta_\circ \end{cases}$$

■

۲۱. این سیملوله را می‌توان با یک جریان سطحی به صورت $\mathbf{J}_S = J_{S\varphi}\hat{a}_\varphi + J_{S_z}\hat{a}_z$ بیان کرد. روشن است که $J_{S\varphi} = J_S \cos\varphi_\circ$ و $J_{S_z} = J_S \sin\varphi_\circ$ که $J_S = \dfrac{nI}{\cos\varphi_\circ}$. میدان حاصل از $J_{S\varphi}$ را طی مثال ۵-۶ مطالعه نموده‌ایم. این میدان برابر است با:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} 0 & r>a \\ \mu_\circ n I\,\hat{a}_z & r<a \end{cases}$$

میدان حاصل از J_{S_z}، که به صورت $\mathbf{B}_2 = B_{\varphi 2}\,\hat{a}_\varphi$ بیان می‌شود، به سادگی با استفاده از قانون مداری آمپر به دست می‌آید. نتیجه عبارت است از:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{cases} 0 & r<a \\ \mu_\circ n I \tan\varphi_\circ \left(\dfrac{a}{r}\right)\hat{a}_\varphi & r>a \end{cases}$$

سرانجام، میدان کل برابر است با:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \begin{cases} \mu_\circ n I\,\hat{a}_z & r<a \\ \mu_\circ n I \tan\varphi_\circ \left(\dfrac{a}{r}\right)\hat{a}_\varphi & r>a \end{cases}$$

■

۲۲. ابتدا پتانسیل مغناطیسی برداری A را برای یک صفحه بینهایت جریان که به صورت $\mathbf{J}_S = J_{S_\circ}\hat{a}_z$ ، $y = y_\circ$ بیان می‌شود محاسبه می‌کنیم. برای سادگی پتانسیل A را در $y=0$ برابر صفر فرض می‌کنیم. به عبارت دیگر $y=0$ را به منزله مبنا اختیار می‌کنیم.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{S'} \frac{\mathbf{J}_S\, dS'}{R}$$

$$A(r)=A_\circ(r)=\left(\frac{\mu_\circ J_{S_\circ}}{4\pi}\hat{a}_z\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y_\circ)^2+(z-z')^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+y_\circ^2+(z-z')^2}}\right\}dx'\,dz'$$

با جایگزینی متغیرهای $x_1=x-x'$ و $z_1=z-z'$، انتگرال دوگانه بالا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2+(y-y_\circ)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2+y_\circ^2}}\right]dx_1\,dz_1$$

$$=4\int_\circ^{\infty}\int_\circ^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2+(y-y_\circ)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2+y_\circ^2}}\right]dx_1\,dz_1$$

$$=4\int_\circ^{\infty}\left[\ln\left(\sqrt{x_1^2+z_1^2+(y-y_\circ)^2}+z_1\right)-\ln\left(\sqrt{x_1^2+z_1^2+y_\circ^2}+z_1\right)\right]_\circ^{\infty}dx_1$$

$$=-2\int_\circ^{\infty}[\ln(x_1^2+(y-y_\circ)^2)-\ln(x_1^2+y_\circ^2)]dx_1$$

$$=-2\left\{x_1\ln[x_1^2+(y-y_\circ)^2]-2x_1+2|y-y_\circ|\tan^{-1}\frac{x_1}{|y-y_\circ|}-x_1\ln(x_1^2+y_\circ^2)+2x_1-2|y_\circ|\tan^{-1}\frac{x_1}{|y_\circ|}\right\}_\circ^{\infty}$$

$$=-2\left\{x_1\ln\left[\frac{x_1^2+(y-y_\circ)^2}{x_1^2+y_\circ^2}\right]+2|y-y_\circ|\tan^{-1}\frac{x_1}{|y-y_\circ|}-2|y_\circ|\tan^{-1}\frac{x_1}{|y_\circ|}\right\}_\circ^{\infty}$$

$$=-2\pi\left(|y-y_\circ|-|y_\circ|\right)=\begin{cases}2\pi(2y_\circ-y) & y>y_\circ\\ 2\pi y & y<y_\circ\end{cases}$$

سرانجام:

$$A_\circ(r)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mu_\circ J_{S_\circ}(2y_\circ-y)\hat{a}_z & y>y_\circ\\ \frac{1}{2}\mu_\circ J_{S_\circ}y\,\hat{a}_z & y<y_\circ\end{cases}$$

در نتیجه مزبور فرض شده است که $y_{\circ} > \circ$ باشد. در صورتی که صفحه جریان در $y = -y_{\circ}$ واقع باشد، داریم:

$$A_1(r) = -\frac{1}{2}\mu_{\circ} J_{S_{\circ}} \left(|y + y_{\circ}| - |y_{\circ}| \right)$$

$$A_1(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_{\circ} J_{S_{\circ}} y \, \hat{a}_z & y > -y_{\circ} \\ \frac{1}{2}\mu_{\circ} J_{S_{\circ}} (y + 2y_{\circ}) \hat{a}_z & y < -y_{\circ} \end{cases}$$

حال برای مسئله خودآزمایی ۱۳-الف داریم:

$$J_S = \begin{cases} J_{S_{\circ}} \hat{a}_z & y = a \\ -J_{S_{\circ}} \hat{a}_z & y = -a \end{cases}$$

با توجه به نتایج به دست آمده در بالا، داریم:

$$A(r) = A_{\circ}(r) \Big|_{y_{\circ}=a} - A_1(r) \Big|_{y_{\circ}=a}$$

$$A(r) = \begin{cases} \mu_{\circ} J_{S_{\circ}} a \, \hat{a}_z & y > a \\ \mu_{\circ} J_{S_{\circ}} y \, \hat{a}_z & -a < y < a \\ -\mu_{\circ} J_{S_{\circ}} a \, \hat{a}_z & y < -a \end{cases}$$

$$B = \nabla \times A = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{a}_x \quad \Rightarrow \quad B = \begin{cases} 0 & |y| > a \\ \mu_{\circ} J_{S_{\circ}} \hat{a}_x & |y| < a \end{cases}$$

برای مسئله خودآزمایی ۱۴-الف، ابتدا پتانسیل مغناطیسی برداری A را برای یک توزیع جریان روی سطح استوانه‌ای به طول بینهایت و شعاع $r_{\circ}$ به دست می‌آوریم. این توزیع جریان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$J_S = J_{S_{\circ}} \hat{a}_z \ , \quad r = r_{\circ}$$

برای سادگی پتانسیل A را در $r = \circ$ برابر صفر فرض می‌کنیم. به عبارت دیگر $r = \circ$ را به منزله مبنا اختیار می‌کنیم.

$$A(r) = \frac{\mu_{\circ}}{4\pi} \int_{S'} \frac{J_S \, dS'}{R}$$

$$A(r) = A_{\circ}(r) = \left(\frac{\mu_{\circ} J_{S_{\circ}}}{4\pi} \hat{a}_z \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\circ}^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_{\circ}^2 - 2r_{\circ} r \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{\circ}^2 + (z - z')^2}} \right] r_{\circ} \, d\varphi' dz'$$

با جایگزینی متغیر $z_۱ = z - z'$ در عبارت زیر انتگرال داریم:

$$= ۲r_۰ \int_۰^{\infty} \int_۰^{۲\pi} \left[\frac{۱}{\sqrt{r^۲ + r_۰^۲ - ۲rr_۰ \cos(\varphi - \varphi') + z_۱^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{r_۰^۲ + z_۱^۲}} \right] d\varphi' \, dz_۱$$

$$= ۲r_۰ \int_۰^{۲\pi} \left\{ \ln\left(\sqrt{r^۲ + r_۰^۲ - ۲rr_۰ \cos(\varphi - \varphi') + z_۱^۲} + z_۱ \right) - \ln\left(\sqrt{r_۰^۲ + z_۱^۲} + z_۱ \right) \right\}_۰^{\infty} d\varphi'$$

$$= -r_۰ \int_۰^{۲\pi} \left\{ \ln[r^۲ + r_۰^۲ - ۲rr_۰ \cos(\varphi - \varphi')] - ۲\ln r_۰ \right\} d\varphi'$$

$$= -۲\pi r_۰ \left\{ \ln\left[\frac{۱}{۲} \left(r^۲ + r_۰^۲ + \sqrt{(r^۲ + r_۰^۲)^۲ - (۲rr_۰)^۲} \right) \right] - ۲\ln r_۰ \right\}$$

$$= -۲\pi r_۰ \left\{ \ln\left[\frac{۱}{۲} \left(r^۲ + r_۰^۲ + \left| r^۲ - r_۰^۲ \right| \right) \right] - ۲\ln r_۰ \right\}$$

$$= \begin{cases} -۴\pi r_۰ \ln\left(\dfrac{r}{r_۰}\right) & r > r_۰ \\ ۰ & r < r_۰ \end{cases}$$

آنگاه:

$$\mathbf{A}_۰(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\mu_۰ J_{S_۰} r_۰ \ln\left(\dfrac{r}{r_۰}\right) & r > r_۰ \\ \mathbf{o} & r < r_۰ \end{cases}$$

حال برای توزیع جریان مسأله خودآزمایی ۱۴-الف داریم:

$$\mathbf{J}_S = \begin{cases} J_{S_۰} \hat{\mathbf{a}}_z & r = a \\ -J_{S_۰} \dfrac{a}{b} \hat{\mathbf{a}}_z & r = b \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_۰ \Big|_{\substack{r_۰ = a \\ J_{S_۰} = J_{S_۰}}} + \mathbf{A}_۰ \Big|_{\substack{r = b \\ J_{S_۰} \to -\frac{a}{b} J_{S_۰}}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{o} & r < a \\ -\mu_۰ J_{S_۰} a \ln\left(\dfrac{r}{a}\right) \hat{\mathbf{a}}_z & a < r < b \\ \mu_۰ J_{S_۰} a \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \hat{\mathbf{a}}_z & r > b \end{cases}$$

برای میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$، داریم:

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=-\frac{\partial A_z}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_\varphi=-\frac{dA_z}{dr}\hat{\mathbf{a}}_\varphi \;\Rightarrow\; \mathbf{B}(\mathbf{r})=\begin{cases}\mathbf{o} & r<a\,,r>b\\ \mu_\circ J_{S_\circ}\left(\frac{a}{r}\right)\hat{\mathbf{a}}_\varphi & a<r<b\end{cases}$$

■

۲۳. با استفاده از تعریف لاپلاسین یک بردار که در رابطه ۱-۱۳۵ آمده است می‌توان نشان داد که در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2\mathbf{A}=\nabla(\nabla.\mathbf{A})-\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}$$

$$=\left(\nabla^2A_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{A_r}{r^2}\right)\hat{\mathbf{a}}_r+\left(\nabla^2A_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{A_\varphi}{r^2}\right)\hat{\mathbf{a}}_\varphi+(\nabla^2A_z)\hat{\mathbf{a}}_z$$

به خوبی روشن است که $\nabla^2\mathbf{A}\neq(\nabla^2A_r)\hat{\mathbf{a}}_r+(\nabla^2A_\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\varphi+(\nabla^2A_z)\hat{\mathbf{a}}_z$ مگر آنکه $A_\varphi=A_r=\circ$ باشد.

در دستگاه مختصات کروی می‌توان نشان داد که:

$$\nabla^2\mathbf{A}=\nabla(\nabla.\mathbf{A})-\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}$$

$$=\left[\nabla^2A_r-\frac{2}{r^2}\left(A_r+\cot\theta A_\theta+\csc\theta\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\right]\hat{\mathbf{a}}_r+$$

$$\left[\nabla^2A_\theta-\frac{1}{r^2}\left(\csc^2\theta A_\theta-2\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+2\cot\theta\csc\theta\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\hat{\mathbf{a}}_\theta+$$

$$\left[\nabla^2A_\varphi-\frac{1}{r^2}\left(\csc^2\theta A_\varphi-2\csc\theta\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-2\cot\theta\csc\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

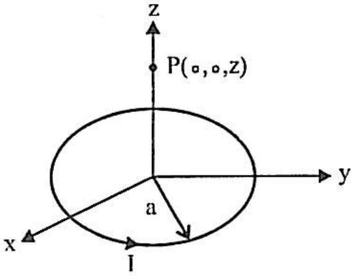
روشن است که،

$$\nabla^2\mathbf{A}\neq(\nabla^2A_r)\hat{\mathbf{a}}_r+(\nabla^2A_\theta)\hat{\mathbf{a}}_\theta+(\nabla^2A_\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

■

۲۴. میدان مغناطیسی این حلقه جریان را در نقطه‌ای روی محور z (شکل پ-۵۸) در مسئله خودآزمایی ۶ محاسبه نمودیم. نتیجه عبارت است از:

$$\mathbf{B}(z)=\frac{\mu_\circ I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{a}}_z$$



شکل پ-۵۸

در تشابه با رابطه $V=\int_r^\infty \mathbf{E}.d\mathbf{L}$ برای پتانسیل الکتریکی، رابطه زیر را برای پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای می‌نویسیم:

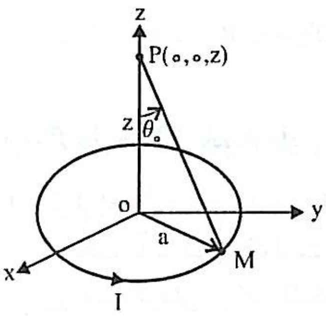
$$V_m=\frac{1}{\mu_\circ}\int_r^\infty \mathbf{B}.d\mathbf{L}=\int_r^\infty \mathbf{H}.d\mathbf{L}$$

مسیر انتگرال‌گیری را محور z، از نقطه P تا بینهایت، در نظر می‌گیریم، آنگاه:

$$V_m=\frac{1}{\mu_\circ}\int_z^\infty B_z\,dz'=\frac{1}{2}Ia^2\int_z^\infty \frac{dz'}{(z'^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}Ia^2\left[\frac{z'}{a^2(a^2+z'^2)^{1/2}}\right]_z^\infty$$

$$=\frac{1}{2}I\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$$

■



شکل پ-۵۹

۲۵. عنصر زاویه فضایی برابر است با $d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$. (یادآوری می‌شود که واحد اندازه‌گیری زاویه فضایی استرادیان بوده و تمامی فضا شامل 4π استرادیان است). زاویه فضایی دیده شده از نقطه P روی محور z و محدود به دایره به شعاع a و مرکز o، مطابق شکل پ-۵۹، برابر است با:

$$\Omega=\int d\Omega=\int_\circ^{\theta_\circ}\int_\circ^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=2\pi(1-\cos\theta_\circ)$$

لیکن:

$$\cos\theta_\circ=\frac{OP}{MP}=\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

در نتیجه:

$$V_m=\frac{I}{4\pi}\Omega=\frac{1}{2}I\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، نتیجه فوق همانند نتیجه محاسبه شده در مسئله خودآزمایی ۲۴ است.

■

۲۶. کافی است تحقیق شود که آیا $\nabla.\mathbf{B}$ صفر است یا نه. چون میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ یک میدان سیملوله‌ای است، همواره دیورژانس آن برابر صفر است.

الف) $\mathbf{B}_1=\frac{1}{z}(y\,\hat{a}_y-z\,\hat{a}_z)$

$$\nabla.\mathbf{B}_1=\nabla.\left(\frac{y}{z}\hat{a}_y-\hat{a}_z\right)=\nabla.\left(\frac{y}{z}\hat{a}_y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}\right)=\frac{1}{z}\neq 0$$

در نتیجه $\mathbf{B}_1$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول نیست.

ب)
$$\mathbf{B}_2=\frac{1}{r^n}\hat{a}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r^n}\right)=0$$

پس میدان $\mathbf{B}_2$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول است.

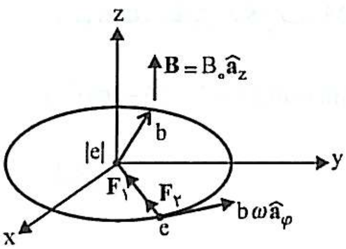
ج)
$$\mathbf{B}_3=\left(1+\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{a}_r-\left(1-\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_3=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r^2+\frac{2}{r}\right)\cos\theta\right]-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(1-\frac{1}{r^3}\right)\sin^2\theta\right]=0$$

بنابراین میدان $\mathbf{B}_3$ به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول است.

■

پ-۶ حل مسائل خودآزمایی فصل ششم



شکل پ-۶۰

۱. قبل از اِعمال میدان خارجی $\mathbf{B}$، الکترون با سرعت زاویه‌ای ω_0 تحت تأثیر نیروی کولمب $\mathbf{F}_1$ در مداری به شعاع b به دور هسته گردش می‌کند (شکل پ-۶۰). نیروی $\mathbf{F}_1$ برابر است با:

$$\mathbf{F}_1=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{a}_r$$

پس از اِعمال میدان $\mathbf{B}$، سرعت زاویه‌ای الکترون از ω_0 به ω تغییر می‌کند. میدان $\mathbf{B}$ نیرویی بر الکترون که با سرعت $\mathbf{v}=b\,\omega\,\hat{a}_\varphi$ حرکت می‌کند وارد می‌سازد که عبارت است از:

$$\mathbf{F}_2=q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}=e\,b\,\omega\,\hat{a}_\varphi\times B_0\,\hat{a}_z=-|e|\,b\,\omega B_0\,\hat{a}_r$$

حال براساس رابطه نیوتن $\mathbf{F}=m\,\mathbf{a}$، که $\mathbf{a}$ شتاب حرکت است، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=-\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}+|e|\,b\,\omega B_0\right)\hat{a}_r=-m_e\omega^2 b\,\hat{a}_r$$

آنگاه:

$$\omega^2=\frac{1}{m_e}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b^3}+|e|\omega B_0\right)$$

در غیاب میدان خارجی، $B_0=0$ و $\omega=\omega_0$ است. بنابراین:

$$\omega_0^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e b^3}$$