۳۲. ابتدا انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه می‌کنیم. میدان D در ناحیه $a<r<b$ عبارت است از:

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r \quad , \quad a<r<b$$

$$\mathbf{D} = 0 \quad , \quad r<a, r>b$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r & a<r<c \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r & c<r<b \\ 0 & r<a, r>b \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}.\mathbf{D}\, d\mathcal{V}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^c \frac{Q^2 dr}{(4\pi)^2 \varepsilon r^2} + \int_c^b \frac{Q^2 dr}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 r^2}\right]\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\right]\frac{Q^2}{16\pi^2}$$

$$= \underbrace{\frac{Q^2}{8\pi}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_0 c}\right)\right]}_{=W_0} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b}$$

جهت تفهیم استخراج گرادیان، W_e را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$W_e = W_0 - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\Big|_{r=b}$$

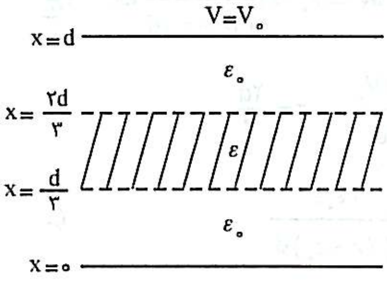
$$\mathbf{F} = -\nabla W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{a}_r\Big|_{r=b} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{a}_r$$

■

پ-۴ حل مسائل خودآزمایی فصل چهارم

۱. الف) با توجه به شکل پ-۳۱، بدیهی است که پتانسیل فقط تابعی از x می‌باشد، $V=V(x)$. پس می‌توان نوشت:

$$V = \begin{cases} A_1 x + B_1 = V_1 & 0 \le x \le \frac{d}{3} \\ A_2 x + B_2 = V_2 & \frac{d}{3} \le x \le \frac{2d}{3} \\ A_3 x + B_3 = V_3 & \frac{2d}{3} \le x \le d \end{cases}$$



شکل پ-۳۱

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V_1(x=0)=0$$
$$V_3(x=d)=V_0$$
$$V_1(x=d/3)=V_2(x=d/3)$$
$$V_2(x=2d/3)=V_3(x=2d/3)$$
$$\varepsilon_0 \frac{dV_1}{dx}\Big|_{x=d/3}=\varepsilon \frac{dV_2}{dx}\Big|_{x=d/3}$$
$$\varepsilon \frac{dV_2}{dx}\Big|_{x=2d/3}=\varepsilon_0 \frac{dV_3}{dx}\Big|_{x=2d/3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0+B_1=0 \\ A_3 d+B_3=V_0 \\ A_1\frac{d}{3}+B_1=A_2\frac{d}{3}+B_2 \\ A_2\left(\frac{2d}{3}\right)+B_2=A_3\left(\frac{2d}{3}\right)+B_3 \\ \varepsilon_0 A_1=\varepsilon A_2 \\ \varepsilon A_2=\varepsilon_0 A_3 \end{cases}$$

پس از حل دستگاه شش معادله و شش مجهول فوق داریم:

$$B_1=0 \quad , \quad A_1=A_3=\frac{3\varepsilon V_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d} \quad , \quad A_2=\frac{3\varepsilon_0 V_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d} \quad , \quad B_2=-B_3=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)V_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}$$

$$V(x)=\begin{cases} \dfrac{3V_0\,\varepsilon x}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d} & 0\le x\le\dfrac{d}{3} \\ \dfrac{V_0\,[3\varepsilon_0 x+(\varepsilon-\varepsilon_0)d]}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d} & \dfrac{d}{3}\le x\le\dfrac{2d}{3} \\ \dfrac{V_0\,[3\varepsilon x-(\varepsilon-\varepsilon_0)d]}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d} & \dfrac{2d}{3}\le x\le d \end{cases}$$

ب) $$\rho_S=\mathbf{D}\cdot\hat{a}_n=\left(-\varepsilon_0\frac{dV_1}{dx}\hat{a}_x\right)\cdot(\hat{a}_x)\Big|_{x=0}=-\frac{3\varepsilon_0\varepsilon V_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d} \quad , \quad x=0$$

ج) $$\mathbf{P}=\mathbf{D}-\varepsilon_0\mathbf{E}=\left[-\varepsilon\frac{dV_2}{dx}-\varepsilon_0\left(-\frac{dV_2}{dx}\right)\right]\hat{a}_x=(\varepsilon_0-\varepsilon)\frac{dV_2}{dx}\hat{a}_x=(\varepsilon_0-\varepsilon)\frac{3\varepsilon_0 V_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d}\hat{a}_x$$

$$\rho_{PS}=\mathbf{P}\cdot\hat{a}_n=\mathbf{P}\cdot\hat{a}_x=-\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)V_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d} \quad , \quad x=\frac{2d}{3}$$

د) $$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{|\rho_S(1)|}{V_0}=\frac{3\varepsilon_0\varepsilon V_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d}\frac{1}{V_0}=\frac{3\varepsilon_0\varepsilon}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

■

۲. تابع پتانسیل به صورت $V=V(x)$ در نواحی خلأ و $V=k$ در ناحیه هادی است. یعنی،

$$V=\begin{cases} A_۱x+B_۱=V_۱ & ۰\le x\le \frac{d}{۳} \\ k & \frac{d}{۳}\le x\le \frac{۲d}{۳} \\ A_۲x+B_۲=V_۲ & \frac{۲d}{۳}\le x\le d \end{cases}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$\left.\begin{array}{l} V_۱(x=۰)=۰ \\ V_۲(x=d)=V_۰ \\ V_۱(x=d/۳)=k \\ V_۲(x=۲d/۳)=k \\ \rho_S\Big|_{x=d}=-\rho_S\Big|_{x=۰}{}^{*} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} ۰+B_۱=۰ \\ A_۲d+B_۲=V_۰ \\ A_۱\frac{d}{۳}+B_۱=k \\ A_۲\left(\frac{۲d}{۳}\right)+B_۲=k \\ \underbrace{\left(-\varepsilon_۰\frac{dV_۲}{dx}\hat{a}_x\right).(-\hat{a}_x)}_{\varepsilon_۰A_۲}=-\underbrace{\left(-\varepsilon_۰\frac{dV_۱}{dx}\hat{a}_x\right).(\hat{a}_x)}_{\varepsilon_۰A_۱} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه پنج معادله و پنج مجهول بالا، نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

$$B_۱=۰\quad,\quad A_۱=A_۲=\frac{۳V_۰}{۲d}\quad,\quad B_۲=-\frac{V_۰}{۲}\quad,\quad k=\frac{V_۰}{۲}$$

الف) پتانسیل جسم هادی: $k=\frac{V_۰}{۲}$

ب) ظرفیت: $C=\frac{Q}{V_۰}=\frac{\rho_S(۱)}{V_۰}=\frac{\varepsilon_۰\frac{dV_۱}{dx}}{V_۰}=\frac{\varepsilon_۰A_۱}{V_۰}=\frac{۳\varepsilon_۰}{۲d}$

■

۳. الف) با توجه به بینهایت بودن طول شکاف در امتداد محور z، پتانسیل تابعی از z نبوده و $V=V(x,y)$ است. از آنجا که در مرز $x=a$ و $۰<y<b$ تغییرات تابع پتانسیل برحسب y سینوسی است، تابع $V(x,y)$ را در حالت کلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x,y)=(Ae^{kx}+Be^{-kx})(C\sin ky+D\cos ky)\quad,\quad ۰\le x\le a\quad,\quad ۰\le y\le b$$

که A، B، C، D و k ضرایب ثابت ولی مجهول هستند. برای تعیین این مجهولات از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم که به شرح زیر خلاصه می‌شوند.

$$V=۰\quad,\quad x=۰\quad,\quad ۰<y<b \qquad (۱)$$

* این شرط برای آن است که بارهای به وجود آمده روی صفحات واقع در $x=۰$ و $x=d$ دارای توزیعهای مساوی و ناهمنام هستند.

$$V=0 \ , \ y=0 \ , \ 0<x<a \quad (2)$$

$$V=0 \ , \ y=b \ , \ 0<x<a \quad (3)$$

$$V=V_0\sin(\pi y/b) \ , \ x=a \ , \ 0<y<b \quad (4)$$

اِعمال شرط (۲): $(Ae^{kx}+Be^{-kx})D=0 \ \Rightarrow \ D=0$

اِعمال شرط (۱): $(A+B)(C\sin ky)=0 \ \Rightarrow \ B=-A$

توجه کنید در اِعمال شرط (۱) نمی‌توان $C=0$ را قابل قبول دانست، زیرا با $D=C=0$ تابع پتانسیل همه جا صفر می‌شود. با استفاده از نتایج فوق تابع پتانسیل به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$V(x,y)=AC(e^{kx}-e^{-kx})\sin ky=A'\sinh(kx)\sin ky$$

که $A'=2AC$ ثابت جدیدی است.

اِعمال شرط (۳): $A'\sinh kx \sin kb=0 \ \Rightarrow \ k=\frac{n\pi}{b} \ ; \ n=$ عدد صحیح

بدین ترتیب:

$$V(x,y)=A'\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

حال شرط مرزی (۴) را اِعمال می‌کنیم. در $x=a$،

$$V_0\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)=A'\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

برقراری رابطه مذکور به ازای جمیع مقادیر $0<y<b$ وقتی میسر است که:

$$n=1 \ , \ A'=V_0/\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)$$

سرانجام:

$$V(x,y)=V_0\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \ , \ 0\le x\le a \ , \ 0\le y\le b$$

ب)

$$E=-\nabla V=-\frac{V_0\pi}{b\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)}\left[\cosh\left(\frac{\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\hat{a}_x+\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\hat{a}_y\right] \ , \ 0\le x\le a \ , \ 0\le y\le b$$

$$\rho_S=\varepsilon_0 E\cdot\hat{a}_n$$

روی سطح $x=0$ و $0<y<b$: $\hat{a}_n=\hat{a}_x$

$$\rho_S=\varepsilon_0 E_x\big|_{x=0}=-\frac{V_0\varepsilon_0\pi}{b\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

روی سطح $y=0$ و $0<x<a$: $\hat{a}_n=\hat{a}_y$

$$\rho_S = \varepsilon_\circ E_y \big|_{y=\circ} = -\frac{V_\circ \varepsilon_\circ \pi}{b \sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)$$

روی سطح $y=b$ و $\circ<x<a$: $\hat{a}_n = -\hat{a}_y$

$$\rho_S = -\varepsilon_\circ E_y \big|_{y=b} = -\frac{V_\circ \varepsilon_\circ \pi}{b \sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right) = \rho_S \big|_{y=\circ}$$

■

۴. شرایط مرزی ۱، ۲ و ۳ مسئله ۳ در این مسئله نیز صادقند و بنابراین شکل کلی جواب را می‌توان به صورت یک سری نوشت:

$$V(x,y) = \sum_n A'_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad , \ \circ \le x \le a \ , \ \circ \le y \le b$$

الف) شرط مرزی ۴ در این مسئله عبارت است از:

$$V = V_\circ \sin^3\left(\frac{\pi y}{b}\right) \ , \ x=a \ , \ \circ<y<b$$

با نوشتن این شرط به صورت $V = V_\circ \left[\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right)\right]$ و اِعمال آن، داریم:

$$V_\circ \left[\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right)\right] = \sum_n A'_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

شرط فوق وقتی به ازای جمیع مقادیر $\circ<y<b$ برقرار است که به جز A'_1 و A'_3 تمام ضرایب A'_n صفر باشند و

$$A'_1 = \frac{3V_\circ}{4\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \quad , \ A'_3 = -\frac{V_\circ}{4\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)}$$

آنگاه تابع پتانسیل برابر است با:

$$V(x,y) = \frac{3V_\circ}{4} \frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{V_\circ}{4} \frac{\sinh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \quad , \ \circ \le x \le a \ , \ \circ \le y \le b$$

ب)

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$= \frac{-3\pi V_\circ}{4b} \left\{ \left[\frac{\cosh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \right] \hat{a}_x \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{\sinh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)} \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \right] \hat{a}_y \right\} \quad , \ \circ \le x \le a \ , \ \circ \le y \le b$$

$$\rho_S = \varepsilon_\circ \mathbf{E} \cdot \hat{a}_n$$

روی سطح $x=0$ و $0<y<b$: $\hat{a}_n = \hat{a}_x$

$$\rho_S = \varepsilon_0 E_x \Big|_{x=0} = -\frac{3\pi\varepsilon_0 V_0}{4b}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)}\right]$$

روی سطح $y=0$ و $a>x>0$: $\hat{a}_n = \hat{a}_y$

$$\rho_S = \varepsilon_0 E_y \Big|_{y=0} = -\frac{3\pi\varepsilon_0 V_0}{4b}\left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)}\right]$$

روی سطح $y=b$ و $0<x<a$: $\hat{a}_n = -\hat{a}_y$

$$\rho_S = -\varepsilon_0 E_y \Big|_{y=b} = -\frac{3\pi\varepsilon_0 V_0}{4b}\left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{3\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi a}{b}\right)}\right] = \rho_S \Big|_{y=0}$$

■

۵. الف) به دلیل وجود تقارن نسبت به φ و بینهایت بودن طول استوانه‌ها، تابع پتانسیل مستقل از φ و z می‌باشد. از این رو شکل کلی تابع پتانسیل در هر ناحیه به صورت $V(r) = A\ln r + B$ بیان می‌شود، که A و B ضرایب ثابتی هستند. البته در هر ناحیه، ضرایب ثابت جداگانه باید در نظر گرفت. پس به طور خلاصه:

$$V(r) = \begin{cases} V_1 = A_1 \ln r + B_1 & a \le r \le c \\ V_2 = A_2 \ln r + B_2 & c \le r \le b \end{cases}$$

برای تعیین ضرایب ثابت از شرایط مرزی استفاده می‌شود. این شرایط عبارتند از:

$$V_1(r=a) = V_0 \quad (1)$$

$$V_2(r=b) = 0 \quad (2)$$

(۳) پیوستگی پتانسیل در $r=c$, $V_1(r=c) = V_2(r=c)$

(۴) پیوستگی D_n در $r=c$, $\varepsilon_1 \frac{dV_1}{dr}\Big|_{r=c} = \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dr}\Big|_{r=c}$

اِعمال شرایط مزبور به چهار معادله زیر می‌انجامد:

$$A_1 \ln a + B_1 = V_0$$

$$A_2 \ln b + B_2 = 0$$

$$(A_1 - A_2)\ln c + (B_1 - B_2) = 0$$

$$\varepsilon_1 A_1 - \varepsilon_2 A_2 = 0$$

پس از حل چهار معادله فوق برحسب A_1، A_2، B_1 و B_2، داریم:

$$A_1 = V_0 \Big/ \left(\ln\frac{a}{c}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b}\right) \quad , \quad A_2 = V_0\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \Big/ \left(\ln\frac{a}{c}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b}\right)$$

$$B_1 = V_0 - A_1 \ln a \quad , \quad B_2 = -A_2 \ln b$$

سرانجام:

$$V(r)=\begin{cases} \dfrac{V_0\left(\ln\frac{r}{c}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b}\right)}{\ln\frac{a}{c}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b}} & a\le r\le c \\[2ex] \dfrac{V_0\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{r}{b}}{\ln\frac{a}{c}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b}} & c\le r\le b \end{cases}$$

ب)

$$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{\rho_S(2\pi a)}{V_0}=\frac{\left(-\varepsilon_1\frac{dV_1}{dr}\Big|_{r=a}\right)(2\pi a)}{V_0}=\frac{-2\pi a\varepsilon_1}{V_0\, a}A_1$$

$$=-\frac{2\pi a\varepsilon_1}{V_0\, a}\frac{V_0}{-\left(\ln\frac{c}{a}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{b}{c}\right)} \Rightarrow C=\frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1\ln\left(\frac{b}{c}\right)+\varepsilon_2\ln\left(\frac{c}{a}\right)}$$

■

۶. در این مسئله تغییرات هم برحسب r و هم برحسب φ مشاهده می‌شود. در جهت r پتانسیل سطوح هادی از صفر به V_0 تغییر می‌کند و در جهت φ قابلیت گذردهی از ε_1 به ε_2 تغییر می‌یابد. بنابراین در ابتدا تابع پتانسیل را به صورت $V(r,\varphi)$ یعنی دو بُعدی در نظر گرفته و ساده‌ترین شکل پاسخ (رابطه ۴-۵۲-الف) را به کار می‌بریم.

$$V(r,\varphi)=(A\ln r+B)(C\varphi+D)$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$V=V_0 \,,\; r=a$ (۱)

$V=0 \,,\; r=b$ (۲)

$\varphi=\pi \,,\; 0$ پیوستگی E_r در (۳)

$\varphi=\pi \,,\; 0$ پیوستگی D_φ در (۴)

اِعمال شرط (۲): $0=(A\ln b+B)(C\varphi+D) \Rightarrow B=-A\ln b$

$$V(r,\varphi)=A\ln\left(\frac{r}{b}\right)(C\varphi+D)$$

اِعمال شرط (۱): $V_0=A\ln\left(\frac{a}{b}\right)(C\varphi+D)$

شرط مزبور به ازای جمیع مقادیر $\circ \le \varphi \le 2\pi$ وقتی می‌تواند برقرار باشد که $C = \circ$ و $AD\ln\left(\frac{a}{b}\right) = V_\circ$ باشد.

$$V(r,\varphi) = V(r) = V_\circ \frac{\ln\left(\frac{r}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad , \quad a \le r \le b \quad , \quad \circ \le \varphi \le 2\pi$$

این نتیجه در واقع نشان می‌دهد که تابع پتانسیل مستقل از φ است. چون $D_\varphi = \circ$ است، شرط (۴) حذف گردیده و شرط (۳) به خودی خود برقرار است. برای محاسبه ظرفیت به ازای واحد طول داریم:

$$C = \frac{Q}{V_\circ} = \frac{\pi a(\rho_{S_1} + \rho_{S_2})}{V_\circ} = \frac{-\pi a\left(\varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial r} + \varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)\Big|_{r=a}}{V_\circ} = \frac{-\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

■

۷. الف) روشن است که پتانسیل فقط تابعی از φ است و نسبت به r و z تغییراتی ندارد؛ از این رو تابع پتانسیل شکل کلی رابطه ۴-۴۴ را دارا است. بنابراین:

$$V(\varphi) = \begin{cases} V_1 = A_1\varphi + B_1 & \circ \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \\ V_2 = A_2\varphi + B_2 & \frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V_1 = \circ \ , \ \varphi = \circ \qquad (1)$$

$$V_2 = V_\circ \ , \ \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

$$V_1 = V_2 \ , \ \varphi = \frac{\pi}{3} \qquad (3)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} \ , \ \varphi = \frac{\pi}{3} \ \text{در} \ D_n = D_\varphi \ \text{پیوستگی} \qquad (4)$$

اِعمال شرایط فوق چهار معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} B_1 = \circ \\ \frac{\pi}{2}A_2 + B_2 = V_\circ \\ \frac{\pi}{3}(A_1 - A_2) + (B_1 - B_2) = \circ \\ \varepsilon_1 A_1 - \varepsilon_2 A_2 = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = \circ \\ A_1 = \frac{V_\circ}{\pi}\frac{6\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \\ A_2 = \frac{V_\circ}{\pi}\frac{6\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \\ B_2 = 2V_\circ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \end{cases}$$

آنگاه:

$$V(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{6V_0\varepsilon_2}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}\varphi & 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}\\[2ex] \dfrac{6V_0\varepsilon_1}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}\varphi+2V_0\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2} & \dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

ب)

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{a}}_\varphi \Rightarrow \mathbf{E}(r)=\begin{cases}-\dfrac{6\varepsilon_2V_0}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}\hat{\mathbf{a}}_\varphi & 0<\varphi<\dfrac{\pi}{3}\\[2ex] -\dfrac{6\varepsilon_1V_0}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}\hat{\mathbf{a}}_\varphi & \dfrac{\pi}{3}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

ج)

$$\mathbf{P}=\mathbf{D}-\varepsilon_0\mathbf{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbf{E}\Rightarrow\mathbf{P}=\begin{cases}-\dfrac{6\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_0)V_0}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}\hat{\mathbf{a}}_\varphi & 0<\varphi<\dfrac{\pi}{3}\ ,\ (\mathbf{P}_1)\\[2ex] -\dfrac{6\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_0)V_0}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}\hat{\mathbf{a}}_\varphi & \dfrac{\pi}{3}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\ ,\ (\mathbf{P}_2)\end{cases}$$

$$\rho_{PS}=\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{a}}_n$$

$$\rho_{PS_1}=\mathbf{P}_1\cdot\hat{\mathbf{a}}_n=\mathbf{P}_1\cdot(\hat{\mathbf{a}}_\varphi)=-\frac{6\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_0)V_0}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}\ ,\ \varphi=\frac{\pi^-}{3}$$

$$\rho_{PS_2}=\mathbf{P}_2\cdot\hat{\mathbf{a}}_n=\mathbf{P}_2\cdot(-\hat{\mathbf{a}}_\varphi)=\frac{6\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_0)V_0}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}\ ,\ \varphi=\frac{\pi^+}{3}$$

$$\rho_{PS}=\rho_{PS_1}+\rho_{PS_2}=\frac{6\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)V_0}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}\ ,\ \varphi=\frac{\pi}{3}$$

د)

$$V=A\varphi+B\ ,\quad \frac{\pi}{2}\le\varphi\le 2\pi$$

شرایط مرزی در این حالت عبارتند از:

$$V=0\ ,\ \varphi=2\pi\quad(1)$$
$$V=V_0\ ,\ \varphi=\frac{\pi}{2}\quad(2)$$

اِعمال شرایط بالا دو معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases}2\pi A+B=0\\ A\dfrac{\pi}{2}+B=V_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{2V_0}{3\pi}\\[2ex] B=\dfrac{4V_0}{3}\end{cases}$$

آنگاه:

$$V(\varphi)=-\frac{2V_0}{3}\left(\frac{\varphi}{\pi}-2\right)\ ,\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le 2\pi$$

■

۸. به دلیل ناچیز بودن ضخامت صفحه، پتانسیل تغییراتی در جهت z نخواهد داشت. لیکن در جهت r به دلیل تغییر پتانسیل از V_0 به صفر و در جهت φ به دلیل تغییر محیط (تغییر رسانایی از σ_0 به صفر) می‌توان تغییرات پتانسیل را محتمل دانست و مسئله را به عنوان یک معادله لاپلاس دو بُعدی مورد بررسی قرار داد. همانند مسئله ۶ تابع پتانسیل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(r,\varphi)=(A\ln r+B)(C\varphi+D)\ ,\ 0<\varphi<\varphi_0\ ,\ R_1\le r\le R_2$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V=0\ ,\ r=R_2\qquad(1)$$

$$V=V_0\ ,\ r=R_1\qquad(2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0\ ,\ \varphi=0\ ,\ \varphi=\varphi_0\qquad(3)$$

شرط (۳) ناشی از این حقیقت است که جریانی از مرزهای $\varphi=0$ و $\varphi=\varphi_0$ عبور نمی‌کند. به عبارت دیگر،

$$J_\varphi=\sigma_0 E_\varphi=-\frac{\sigma_0}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0\ ,\ \varphi=0\ ,\ \varphi=\varphi_0$$

با اِعمال شرایط (۱) و (۲) داریم:

$$0=(A\ln R_2+B)(C\varphi+D)\ \Rightarrow\ B=-A\ln R_2$$

$$V_0=(A\ln R_1+B)(C\varphi+D)$$

شرط (۲) فقط وقتی به ازای جمیع مقادیر $0<\varphi<\varphi_0$ برقرار است که $C=0$ و $AD=V_0/\ln\frac{R_1}{R_2}$ باشد. آنگاه:

$$V(r,\varphi)=V(r)=V_0\frac{\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\ ,\ 0<\varphi<\varphi_0\ ,\ R_1\le r\le R_2$$

با توجه به اینکه تابع پتانسیل مستقل از φ است، $J_\varphi=0$ و شرط (۳) حذف می‌شود.

$$E=-\nabla V=-\frac{\frac{V_0}{r}}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\hat{a}_r$$

$$I=\int_S J\cdot dS=\int_S\sigma_0 E\cdot dS=-\sigma_0\int_S\frac{V_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\frac{1}{r}(r\,d\varphi\,dz)=-\frac{\sigma_0 V_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\int_0^{\varphi_0}d\varphi\int_0^{\Delta}dz$$

$$=-\frac{\sigma_0\varphi_0\Delta}{\ln\frac{R_1}{R_2}}V_0=\frac{\sigma_0\varphi_0\Delta}{\ln\frac{R_2}{R_1}}V_0\ \Rightarrow\ R=\frac{V_0}{I}=\frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\sigma_0\varphi_0\Delta}$$

■

۹. الف) چون محفظه در امتداد z تا بینهایت ادامه دارد، پتانسیل تابعی از z نخواهد بود و فقط نسبت به r و φ تغییر می‌کند. شکل کلی پتانسیل را مطابق رابطه ۴-۵۲-ب در نظر می‌گیریم.

$$V(r,\varphi)=(Ar^{n}+Br^{-n})(C\sin n\varphi+D\cos n\varphi)\quad,\quad 0\le r\le a\quad,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V=V_0,\quad r=a,\quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\quad (1)$$

$$V=0,\quad \varphi=0,\quad 0<r<a\quad (2)$$

$$V=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2},\quad 0<r<a\quad (3)$$

$$V=0,\quad r=0\quad (4)$$

اعمال شرط (۲): $0=(Ar^{n}+Br^{-n})(0+D)\ \Rightarrow\ D=0$

اعمال شرط (۴): $0=\left(0+\frac{B}{0}\right)(C\sin n\varphi)\ \Rightarrow\ B=0$

در نتیجه:

$$V(r,\varphi)=ACr^{n}\sin n\varphi=A'r^{n}\sin n\varphi\quad;\quad A'=AC$$

اعمال شرط (۳): $0=A'r^{n}\sin\frac{n\pi}{2}\ \Rightarrow\ n=$ عدد صحیح زوج و مثبت $(n=2m)$

تا اینجا داریم:

$$V(r,\varphi)=A'r^{2m}\sin 2m\varphi$$

شرط (۱) در پاسخی که تاکنون به دست آورده‌ایم برقرار نخواهد شد. برای رفع این مشکل پاسخ را به صورت یک سری به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(r,\varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}A'_m r^{2m}\sin 2m\varphi$$

شرط (۱): $V_0=\sum_{m=1}^{\infty}A'_m a^{2m}\sin 2m\varphi$

برای محاسبه ضرایب A'_m طرفین رابطه اخیر را در $\sin 2m'\varphi$، که m' عددی صحیح است، ضرب نموده و از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^{\pi/2}V_0\sin 2m'\varphi\,d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A'_m a^{2m}\int_0^{\pi/2}\sin 2m\varphi\sin 2m'\varphi\,d\varphi$$

اما:

$$\int_0^{\pi/2}V_0\sin 2m'\varphi\,d\varphi=\begin{cases}\dfrac{V_0}{m'} & m' \text{ فرد}\\ 0 & m' \text{ زوج}\end{cases}$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin 2m\varphi \, \sin 2m'\varphi \, d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & m=m' \\ 0 & m\neq m' \end{cases}$$

آنگاه:

$$A'_m = \begin{cases} \frac{4V_0}{m\pi}\left(\frac{1}{a}\right)^{2m} & m=1,3,5,\ldots \\ 0 & m=2,4,6,\ldots \end{cases}$$

سرانجام:

$$V(r,\varphi) = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (4V_0/m\pi)\left(\frac{r}{a}\right)^{2m} \sin(2m\varphi) \quad , \quad 0\le r\le a \quad , \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

ب)

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi$$

$$= -\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{8V_0}{\pi}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{2m}\left(\frac{1}{r}\right)(\sin 2m\varphi\,\hat{a}_r + \cos 2m\varphi\,\hat{a}_\varphi) \quad , \quad 0\le r\le a \quad , \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$\rho_S = D\cdot\hat{a}_n = \varepsilon_0 E\cdot\hat{a}_n \quad , \quad \hat{a}_n = -\hat{a}_r \quad r=a$$ روی سطح

$$\rho_S = -\varepsilon_0 E_r(a,\varphi) = \varepsilon_0 \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{8V_0}{\pi}\right)\left(\frac{a}{a}\right)^{2m}\left(\frac{1}{a}\right)\sin 2m\varphi$$

$$= \frac{8\varepsilon_0 V_0}{\pi a}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sin 2m\varphi \quad , \quad r=a \quad , \quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

■

۱۰. روشن است که پتانسیل فقط تابعی از r و φ است. برای نقاط درون سطح استوانه‌ای:

$$V(r,\varphi) = (Ar^n + Br^{-n})(C\sin n\varphi + D\cos n\varphi) \quad , \quad r\le a \quad , \quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

برای آنکه پتانسیل روی محور استوانه محدود باشد $(r=0)$ لازم است که $B=0$ باشد. توجه کنید که $n>0$ فرض می‌شود. با معرفی ضرایب $A_n = AC$ و $B_n = AD$، داریم:

$$V(r,\varphi) = r^n(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi)$$

شرایط مرزی در این حالت عبارتند از:

$$V = V_0 \, , \; r=a \, , \; 0<\varphi<\varphi_0 \qquad (1)$$

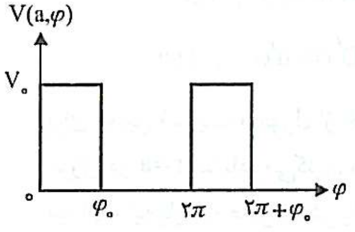
$$V = 0 \, , \; r=a \, , \; \varphi_0<\varphi<2\pi \qquad (2)$$

تابع پتانسیل بالا در شکل موجود نمی‌تواند شرایط مذکور را برآورده سازد. از این رو، شکل کلی پاسخ را به صورت یک سری بینهایت در نظر می‌گیریم.

$$V(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left(A_n\sin n\varphi+B_n\cos n\varphi\right)$$

$$V(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\left(A_n\sin n\varphi+B_n\cos n\varphi\right)\qquad(1)$$

برای تعیین ضرایب A_n و B_n بسط سری فوریه $V(a,\varphi)$، که تغییرات آن برحسب φ در شکل پ-۳۲ نشان داده شده است، را به دست می‌آوریم.



شکل پ-۳۲

$$V(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{A}_n\sin n\varphi+\overline{B}_n\cos n\varphi\qquad(2)$$

$$\overline{A}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0}V_0\sin n\varphi\,d\varphi=\frac{V_0}{n\pi}(1-\cos n\varphi_0)\ ,\ n\geq 0$$

$$\overline{B}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0}V_0\cos n\varphi\,d\varphi=\frac{V_0}{n\pi}\sin n\varphi_0\ ,\ n\geq 1$$

$$\overline{B}_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi_0}V_0\,d\varphi=\frac{V_0\,\varphi_0}{2\pi}$$

از مقایسه سریهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$B_0=\overline{B}_0=\frac{V_0\,\varphi_0}{2\pi}\ ,\ B_n=\frac{\overline{B}_n}{a^n}=\frac{V_0}{\pi}\frac{\sin n\varphi_0}{n\,a^n}\ ,\ n\geq 1\ ,\ A_n=\frac{\overline{A}_n}{a^n}=\frac{V_0}{\pi}\frac{(1-\cos n\varphi_0)}{n\,a^n}\ ,\ n\geq 0$$

سرانجام:

$$V(r,\varphi)=\frac{V_0\,\varphi_0}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{V_0}{n\pi}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^n\left[(1-\cos n\varphi_0)\sin n\varphi+\sin n\varphi_0\cos n\varphi\right]$$

$$V(r,\varphi)=\frac{V_0}{\pi}\left\{\frac{\varphi_0}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{\sin\left(\frac{n\varphi_0}{2}\right)}{n}\right)\cos\left[n\left(\varphi-\frac{\varphi_0}{2}\right)\right]\right\}\ ,\ r\leq a$$

برای نقاط بیرون سطح استوانه‌ای، تنها تفاوت با حالت قبل این است که پتانسیل باید وقتی که $r\to\infty$ محدود باشد. لازمه برآورده شدن این شرط آن است که در شروع کار A را به جای B برابر صفر قرار دهیم. سایر شرایط و محاسبات عیناً مانند حالت قبل هستند. کمی دقت نشان می‌دهد که پاسخ این حالت را می‌توان با جایگزین نمودن n با n- از پاسخ حالت قبل به دست آورد. یعنی،

$$V(r,\varphi)=\frac{V_0}{\pi}\left\{\frac{\varphi_0}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\left(\frac{\sin\left(\frac{n\varphi_0}{2}\right)}{n}\right)\cos\left[n\left(\varphi-\frac{\varphi_0}{2}\right)\right]\right\}\ ,\ r\geq a$$

■

۱۱. همانند مثال ۴-۷ پتانسیل را در درون و نیز در بیرون استوانه عایق مطابق رابطه ۴-۵۲-ب در نظر می‌گیریم. ضمناً مثال ۴-۷ به ما می‌آموزد که نیازی نیست تابع پتانسیل را به صورت یک سری بینهایت در نظر بگیریم و یک جمله عام سری کفایت می‌کند.

$$V^o(r,\varphi)=(Ar^n+Br^{-n})(C\sin n\varphi+D\cos n\varphi)\quad,\quad r\geq a$$

$$V^i(r,\varphi)=(A'r^{n'}+B'r^{-n'})(C'\sin n'\varphi+D'\cos n'\varphi)\quad,\quad r\leq a$$

برای تعیین ضرایب مجهول از خواص میدان در $r=\infty$، محدود بودن میدان در $r=0$ و شرایط مرزی در $r=a$ استفاده می‌کنیم. در فواصل بسیار دور از استوانه $(r\rightarrow\infty)$ تاثیر حضور استوانه در میدان اولیه باید به صفر کاهش یابد. بنابراین در $r\rightarrow\infty$، پتانسیل و میدان الکتریکی باید به صورت اولیه خود در آیند. پتانسیل در نقطه دلخواه A قبل از قرارگرفتن استوانه عایق در میدان همان رابطه ۴-۵۹ است.

$$V_A=-E_0 x=-E_0 r\cos\varphi$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$V^o(r,\varphi)\Big|_{r\rightarrow\infty}=-E_0 r\cos\varphi$$

$$Ar^n(C\sin n\varphi+D\cos n\varphi)\xrightarrow[r\rightarrow\infty]{}-E_0 r\cos\varphi$$

رابطه مزبور فقط وقتی امکان‌پذیر است که $n=1$، $C=0$ و $AD=-E_0$ باشد. آنگاه:

$$V^o(r,\varphi)=\left(-E_0 r+\frac{\overline{B}}{r}\right)\cos\varphi\ ,\ \ r\geq a$$

که $\overline{B}=BD$ است. در درون استوانه عایق برای اینکه پتانسیل در $r=0$ محدود باشد (ونیز میدان) لازم است که $B'=0$ باشد. شرایط مرزی در $r=a$، که از پیوستگی پتانسیل و مؤلفه عمودی میدان **D** ناشی می‌شوند، عبارتند از:

$$V^o\Big|_{r=a}=V^i\Big|_{r=a}\quad(1)\quad,\quad -\frac{\partial V^o}{\partial r}\Big|_{r=a}=-\varepsilon_r\frac{\partial V^i}{\partial r}\Big|_{r=a}\quad(2)$$

با اِعمال شرط اول داریم:

$$A'a^{n'}(C'\sin n'\varphi+D'\cos n'\varphi)=\left(-E_0 a+\frac{\overline{B}}{a}\right)\cos\varphi$$

رابطه بالا فقط وقتی به ازای جمیع مقادیر φ برقرار است که، $n'=1$، $C'=0$ و

$$\overline{A'}a=-E_0 a+\frac{\overline{B}}{a}\quad,\quad \overline{A'}=A'D'\quad(1)$$

آنگاه:

$$V^i(r,\varphi)=\overline{A'}r\cos\varphi$$

با اِعمال شرط مرزی دوم، داریم:

$$-E_{\circ}-\frac{\overline{B}}{a^{2}}=\varepsilon_r\overline{A'} \qquad (2)$$

پس از حل همزمان معادلات (۱) و (۲)، داریم:

$$\overline{A'}=-\frac{2E_{\circ}}{\varepsilon_r+1} \quad , \quad \overline{B}=E_{\circ}a^{2}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}$$

سرانجام:

$$V^{o}(r,\varphi)=-E_{\circ}\left(1-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\frac{a^{2}}{r^{2}}\right)r\cos\varphi,\ \ r\geq a$$

$$V^{i}(r,\varphi)=-\frac{2E_{\circ}}{\varepsilon_r+1}r\cos\varphi\ ,\ r\leq a$$

$$E=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial r}\widehat{a}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\widehat{a}_{\varphi}$$

$$E^{o}(r,\varphi)=E_{\circ}\left(1+\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\frac{a^{2}}{r^{2}}\right)\cos\varphi\,\widehat{a}_r-E_{\circ}\left(1-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\frac{a^{2}}{r^{2}}\right)\sin\varphi\,\widehat{a}_{\varphi}\ \ ,\ \ r>a$$

$$E^{i}(r,\varphi)=\frac{2E_{\circ}}{\varepsilon_r+1}(\cos\varphi\,\widehat{a}_r-\sin\varphi\,\widehat{a}_{\varphi})=\frac{2E_{\circ}}{\varepsilon_r+1}\widehat{a}_x\ \ ,\ \ r<a$$

■

۱۲. روشن است که تابع پتانسیل به φ بستگی ندارد و با توجه به رابطه ۴-۸۰ می‌توان نوشت:

$$V(r,\theta)=[Ar^{n}+B\,r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V=V_{\circ}\cos\theta \quad , \quad r=a\ ,\ 0\leq\theta<\frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

$$V=0\ \ ,\ \ \theta=\frac{\pi}{2}\ \ ,\ \ 0\leq r\leq a \qquad (2)$$

اِعمال شرط ۱: $V_{\circ}\cos\theta=[Aa^{n}+B\,a^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)$

برقراری رابطه بالا مستلزم آن است که $P_n(\cos\theta)=\cos\theta$، یعنی $n=1$، آنگاه:

$$V_{\circ}=\left(Aa+\frac{B}{a^{2}}\right) \qquad (1)$$

اِعمال شرط ۲: $0=\left(Ar+\frac{B}{r^{2}}\right)\cos\frac{\pi}{2}$

برای اینکه رابطه بالا در $r=0$ برقرار باشد لازم است که $B=0$ باشد. آنگاه از رابطه (۱)، $A=\frac{V_{\circ}}{a}$ است و داریم:

$$V(r,\theta)=V_{\circ}\left(\frac{r}{a}\right)\cos\theta,\quad 0\leq r\leq a\ ,\ \ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

■

۱۳. همانند مثال ۴-۹ تابع پتانسیل را در درون و بیرون حفره مطابق روابط ۴-۸۳ و ۴-۸۴ در نظر می‌گیریم. محورهای مختصات به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که مبدأ مختصات بر مرکز حفره منطبق باشد.

$$V^o(r,\theta)=[A_1 r^n + B_1 r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)\ ,\ r\geq a$$

$$V^i(r,\theta)=[A'_1 r^{n'} + B'_1 r^{-(n'+1)}]P_{n'}(\cos\theta)\ ,\ r\leq a$$

برای تعیین ضرایب مجهول از خواص میدان در $r=\infty$، شرایط مرزی در $r=a$ و محدود بودن میدان در $r=0$ استفاده می‌کنیم. خواص میدان در $r=\infty$ در این مسئله و مثال ۴-۹ کاملاً یکسان بوده و نتایج حاصل نیز یکسانند. بنابراین می‌توان نوشت $n=1$ و $A_1=-E_0$. همچنین محدود بودن میدان و پتانسیل در $r=0$ در این مسئله و مثال ۴-۹ بیانگر یک واقعیت بوده و نتیجه نیز یکسان خواهد بود، یعنی $B'_1=0$. شرط مرزی ۴-۸۸ نیز در این مسئله و مثال ۴-۹ کاملاً یکسان بوده ولی شرط ۴-۸۹ متفاوت است. در این شرط عایق جای خلأ و خلأ جای عایق را می‌گیرد. به عبارت دیگر در رابطه ۴-۸۹، ε_r با $\frac{1}{\varepsilon_r}$ باید جایگزین شود تا به شرط مورد نظر در این مسئله تبدیل شود. به طور خلاصه، کلیه شرایط مرزی و مراحل محاسبه پتانسیل در این مسئله و مثال ۴-۹ یکسان خواهند بود اگر ε_r به $\frac{1}{\varepsilon_r}$ تبدیل شود. از این رو پاسخهای این مسئله به سادگی از روابط ۴-۹۳ که در آنها ε_r با $\frac{1}{\varepsilon_r}$ جایگزین شود به دست می‌آیند. نتایج عبارتند از:

$$V^i(r,\theta)=-\frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r+1}E_0\, r\cos\theta\ \ ,\ r\leq a$$

$$V^o(r,\theta)=-E_0\left[1+\frac{\varepsilon_r-1}{2\varepsilon_r+1}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]r\cos\theta\ \ ,\ r\geq a$$

$$E^i(r,\theta)=\frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r+1}E_0(\cos\theta\,\hat{a}_r-\sin\theta\,\hat{a}_\theta)=\frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r+1}E_0\,\hat{a}_z\ \ ,\ r<a$$

$$E^o(r,\theta)=E_0\left[1-\frac{2(\varepsilon_r-1)}{2\varepsilon_r+1}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\cos\theta\,\hat{a}_r-E_0\left[1+\frac{\varepsilon_r-1}{2\varepsilon_r+1}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\sin\theta\,\hat{a}_\theta\ \ ,\ r>a$$

ب) خطوط میدان: میدان الکتریکی در درون حفره یکنواخت ولی شدت آن از میدان اولیه بیشتر است. ■

۱۴. تابع پتانسیل را به شکل کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(r,\theta)=[Ar^n+B\,r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)\ ,\ r\geq a$$

ضرایب مجهول را با استفاده از خواص تابع پتانسیل در $r=\infty$ و شرایط مرزی در $r=a$ به دست می‌آوریم. وقتی که $r\to\infty$ پتانسیل باید شکل اولیه خود را (که در صورت عدم حضور کره هادی وجود می‌داشت) باز یابد. این خصوصیت با آنچه که در مورد یک کره عایق در مثال ۴-۹ داشتیم تفاوتی ندارد. یعنی:

$$V(r,\theta)\xrightarrow[r\to\infty]{}-E_0\, r\cos\theta$$

یا

$$Ar^n P_n(\cos\theta) = -E_0 r\cos\theta\ ,\ (r\to\infty)$$

رابطه بالا فقط وقتی برقرار است که ۱=n و $A=-E_0$ باشد. آنگاه $V(r,\theta)=\left(-E_0 r+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$.

شرط مرزی در r=a عبارت است از $E_t = E_\theta = 0$. بنابراین برحسب پتانسیل داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = 0$$

$$\frac{1}{r}\left(-E_0 r+\frac{B}{r^2}\right)\sin\theta\,\bigg|_{r=a} = \frac{1}{a}\left(-E_0 a+\frac{B}{a^2}\right)\sin\theta = 0\ \Rightarrow\ B = E_0 a^3$$

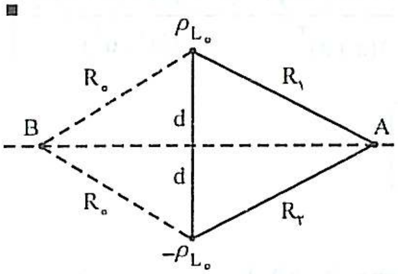
سرانجام:

$$V(r,\theta) = -E_0\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta\ ,\ r\ge a$$

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{a}_\theta = E_0\left(1+\frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{a}_r - E_0\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{a}_\theta\ ,\ r\ge a$$

■

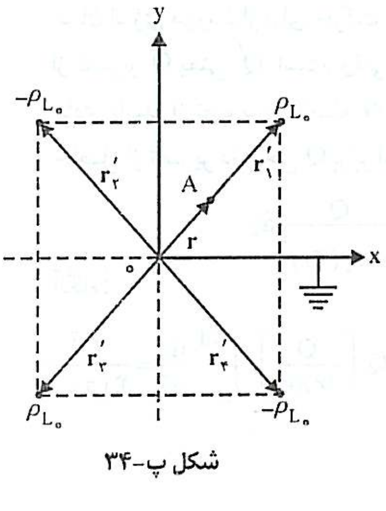
۱۵. الف) کافی است نشان دهیم خط بار و تصویرش تولید پتانسیل صفر در یک نقطه دلخواه مانند A در محل صفحه هادی می‌نمایند (شکل پ-۳۳). مبنای پتانسیل را نقطه‌ای مانند B به فاصله یکسان R_0 از دو خط بار در نظر می‌گیریم. آنگاه با استفاده از رابطه ۲-۱۰۲ می‌توان نوشت:



شکل پ-۳۳

$$V_A = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_1}{R_0} - \frac{-\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_0} = -\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_1}{R_2} = 0\ ;\quad \frac{R_1}{R_2} = 1 \quad \text{زیرا}$$

ب) دو نیم صفحه عمود برهم هادی را می‌توان با سه تصویر مطابق شکل پ-۳۴ جایگزین نمود. میدان کل در نقطه A(a,a,z) حاصل جمع میدانهای چهار خط بار (خط بار اولیه و سه تصویر آن) است. چون نیم صفحه‌های هادی، خط بار و تصاویر آن در امتداد محور z از هر دو طرف تا بینهایت ادامه دارند، میدان الکتریکی تابعی از z نخواهد بود و می‌توان محاسبات را به ازای هر مقدار دلخواه z، مثلاً ۰=z، انجام داد.



شکل پ-۳۴

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_{L\cdot}}{۲\pi\varepsilon_{\cdot}}\left[\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۱}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۱\right|^۲}-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۲}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۲\right|^۲}+\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۳}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۳\right|^۲}-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۴}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۴\right|^۲}\right]$$

$$\mathbf{r}=a(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)$$

$$\mathbf{r}'_۱=d(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)\ ,\ \mathbf{r}'_۲=d(-\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)\ ,\ \mathbf{r}'_۳=-d(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)\ ,\ \mathbf{r}'_۴=d(\widehat{a}_x-\widehat{a}_y)$$

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۱\right|^۲=\left|\widehat{a}_x(a-d)+\widehat{a}_y(a-d)\right|^۲=۲(a-d)^۲$$

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۲\right|^۲=\left|\widehat{a}_x(a+d)+\widehat{a}_y(a-d)\right|^۲=(a+d)^۲+(a-d)^۲=۲(a^۲+d^۲)$$

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۳\right|^۲=\left|\widehat{a}_x(a+d)+\widehat{a}_y(a+d)\right|^۲=۲(a+d)^۲$$

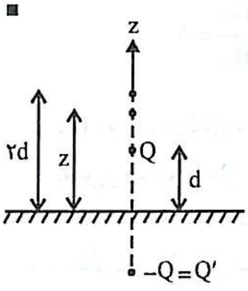
$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_۴\right|^۲=\left|(a-d)\widehat{a}_x+(a+d)\widehat{a}_y\right|^۲=(a-d)^۲+(a+d)^۲=۲(a^۲+d^۲)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_{L\cdot}}{۲\pi\varepsilon_{\cdot}}\left[\frac{(a-d)(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)}{۲(a-d)^۲}-\frac{(a+d)\widehat{a}_x+(a-d)\widehat{a}_y}{۲(a^۲+d^۲)}+\frac{(a+d)(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)}{۲(a+d)^۲}-\frac{(a-d)\widehat{a}_x+(a+d)\widehat{a}_y}{۲(a^۲+d^۲)}\right]$$

$$=\frac{\rho_{L\cdot}}{۴\pi\varepsilon_{\cdot}}\left[\left(\frac{۱}{a-d}+\frac{۱}{a+d}\right)(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)-\frac{۲a(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)}{a^۲+d^۲}\right]$$

$$\mathbf{E}(a,a,z)=\frac{\rho_{L\cdot}}{\pi\varepsilon_{\cdot}}\frac{ad^۲}{(a^۲-d^۲)(a^۲+d^۲)}(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y)$$

■



شکل پ-۳۵

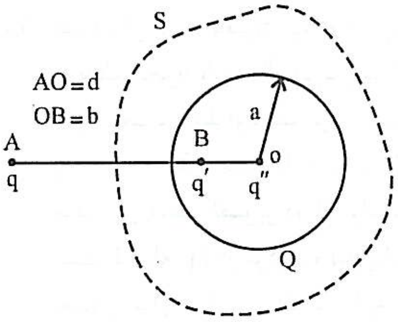
۱۶. انرژی لازم برای دور نمودن بار نقطه‌ای Q از صفحه هادی در حقیقت همان انرژی مورد نیاز برای حرکت دادن Q در میدان الکتریکی ناشی از تصویر Q یعنی Q' است. وقتی که بار Q به فاصله z از صفحه هادی باشد، از تصویرش فاصله ۲z دارد (شکل پ-۳۵). آنگاه میدان حاصل از تصویر در محل Q برابر است با:

$$\mathbf{E}=-\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_{\cdot}(۲z)^۲}\widehat{a}_z$$

آنگاه:

$$W=-Q\int_d^{۲d}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=Q\left(\frac{Q}{۱۶\pi\varepsilon_{\cdot}}\right)\int_d^{۲d}\frac{dz}{z^۲}=\frac{Q^۲}{۳۲\pi\varepsilon_{\cdot}d}$$

■

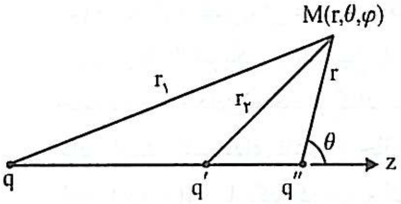


شکل پ-۳۶

۱۷. الف) دو بار تصویر q' و q'' همراه با بار q (شکل پ-۳۶) باید سطح هم‌پتانسیلی در محل سطح کره به وجود آورند. می‌دانیم که بار q و تصویر آن q' $\left(b=\frac{a^2}{d}\ ،\ q'=-\frac{a}{d}q\right)$ سطح هم‌پتانسیلی با پتانسیل صفر در محل سطح کره ایجاد می‌کنند. از طرف دیگر چون q'' در مرکز کره واقع است، این بار تصویر نیز سطح هم‌پتانسیلی در محل سطح کره پدید می‌آورد. بدین ترتیب هم‌پتانسیل بودن سطح کره محقق است و مقدار و مکان بار q' نیز مشخص است. برای تعیین مقدار q'' این‌طور استدلال می‌کنیم که بار نقطه‌ای q و کره هادی با بار Q در فضای اطراف کره همان میدانی را به وجود می‌آورند که سه بار نقطه‌ای q، q' و q'' ایجاد می‌نمایند. بنابراین اِعمال قانون گوس، روی سطح بسته‌ای که کره هادی را در برگیرد ولی بار نقطه‌ای q را شامل نشود، در سیستم اصلی و معادل آن باید نتایج یکسانی داشته باشد.

$$\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \text{S بار محصور در} = Q = q' + q''$$

$$q'' = Q - q' = Q + \frac{a}{d}q$$



شکل پ-۳۷

ب) با توجه به شکل پ-۳۷ داریم:

$$r_1 = (r^2 + d^2 + 2dr\cos\theta)^{1/2}$$

$$r_2 = (r^2 + b^2 + 2br\cos\theta)^{1/2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r}\right)$$

با معلوم بودن r_1، r_2، q' و q'' تابع پتانسیل به طور کامل مشخص است.

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{q(r+d\cos\theta)}{r_1^3} + \frac{q'(r+b\cos\theta)}{r_2^3} + \frac{q''}{r^2}\right]\hat{\mathbf{a}}_r - \left[\frac{q\,d\sin\theta}{r_1^3} + \frac{q'\,b\sin\theta)}{r_2^3}\right]\hat{\mathbf{a}}_\theta\right\}$$

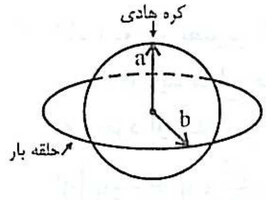
با معلوم بودن r_1 و r_2 برحسب r و θ و نیز q' و q''، میدان الکتریکی به طور کامل مشخص است.

ج) چون q و q' در محل کره، پتانسیل صفر تولید می‌کنند، پتانسیل کره همان پتانسیل ناشی از بار q'' در $r=a$ است.

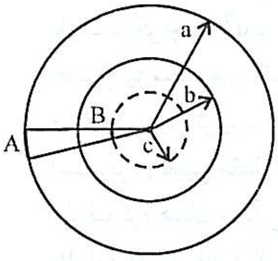
$$V = \frac{Q + \frac{a}{d}q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{d}\right)$$ که،

محاسبه V در $r=a$ نیز دقیقاً همین نتیجه را می‌دهد.

■



شکل پ-۳۸

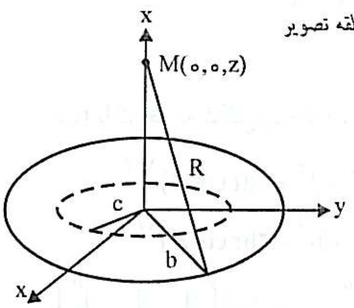


شکل پ-۳۹

۱۸. الف) با توجه به شکلهای پ-۳۸ و پ-۳۹، یک عنصر بار از حلقه را در نقطه دلخواه A در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن این عنصر بار به عنوان یک بار نقطه‌ای، تصویر آن عنصر باری در نقطه B خواهد بود. با توجه به اینکه عنصر بار واقع در A برابر $dq=\rho_{L_\circ} b\, d\varphi$ است، مقدار بار عنصر تصویر در B برابر با $dq'=-\frac{a}{b}dq=-a\rho_{L_\circ} d\varphi$ است. فاصله dq' از مرکز کره (c) برابر با $c=a^۲/b$ است. حال اگر تصاویر سایر عناصر حلقه بار را به همین ترتیب به دست آوریم، عناصر تصویر خود تشکیل یک حلقه بار می‌دهند که شعاع آن c، مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات (مرکز کره هادی) و واقع در صفحه حلقه بار (صفحه xy) است. برای محاسبه چگالی توزیع بار روی حلقه تصویر داریم:

$$\text{کل بار روی حلقه تصویر}=Q'=\int dq'=-\int_\circ^{۲\pi} a\rho_{L_\circ} d\varphi=-۲\pi a\rho_{L_\circ}$$

$$\text{چگالی توزیع بار روی حلقه تصویر}=\rho'_{L_\circ}=\frac{Q'}{۲\pi c}=\frac{-۲\pi a\rho_{L_\circ}}{۲\pi c}=-\frac{b}{a}\rho_{L_\circ}$$



شکل پ-۴۰

ب) حلقه بار و تصویرش در فضای اطراف کره هادی (r>a) همان میدان الکتریکی و پتانسیل را به وجود می‌آورند که حلقه بار و کره هادی ایجاد می‌کنند. بنابراین برای $|z|>a$، کافی است پتانسیلهای ناشی از حلقه بار و تصویرش را در نقطه $M(\circ,\circ,z)$ با یکدیگر جمع کنیم (شکل پ-۴۰).
پتانسیل ناشی از حلقه بار به شعاع b برابر است با:

$$V_۱(\circ,\circ,z)=\int_\circ^{۲\pi}\frac{\rho_{L_\circ} b\, d\varphi}{۴\pi\varepsilon_\circ\sqrt{b^۲+z^۲}}=\frac{\rho_{L_\circ} b}{۲\varepsilon_\circ\sqrt{b^۲+z^۲}}$$

به همین ترتیب پتانسیل ناشی از حلقه بار تصویر، $V_۲(\circ,\circ,z)$ عبارت است از:

$$V_۲(\circ,\circ,z)=\frac{\rho'_{L_\circ} c}{۲\varepsilon_\circ\sqrt{c^۲+z^۲}}$$

$$V=V_۱+V_۲=\frac{\rho_{L_\circ} b}{۲\varepsilon_\circ\sqrt{b^۲+z^۲}}+\frac{\rho'_{L_\circ} c}{۲\varepsilon_\circ\sqrt{c^۲+z^۲}}$$

$$V(\circ,\circ,z)=\frac{\rho_{L_\circ}}{۲\varepsilon_\circ}\left(\frac{b}{\sqrt{b^۲+z^۲}}-\frac{a}{\sqrt{(a^۲/b)^۲+z^۲}}\right)\quad,\quad |z|>a$$

ج) در صورتی که کره هادی از ابتدا زمین نشده بود، علاوه بر تصویری که در بند (الف) مورد بحث قرار گرفت تصویر دیگری به صورت بار نقطه‌ای Q'' باید در مرکز کره در نظر بگیریم. آنگاه میدان الکتریکی و پتانسیل در فضای اطراف کره هادی برابر با میدان و پتانسیلی است که حلقه بار ρ_{L_0} و تصویرش با چگالی ρ'_{L_0} و بار تصویر Q'' ایجاد می‌کنند. برای تعیین بار نقطه‌ای Q''، قانون گوس را به کار می‌بریم و سطح بسته S را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که کره هادی را شامل شود، ولی حلقه بار را در بر نگیرد. آنگاه:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \text{S بار محصور در} = Q' + Q'' \text{ در سیستم معادل} = 0 \text{ در سیستم اصلی}$$

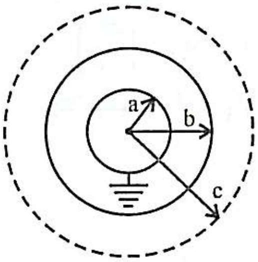
در نتیجه:

$$Q'' = -Q' = 2\pi a \rho_{L_0}$$

آنگاه پتانسیل کره، که همان پتانسیل ناشی از Q'' در فاصله $r=a$ است، عبارت است از:

$$V_a = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\rho_{L_0}}{2\varepsilon_0}$$

■



شکل پ-۴۱

۱۹. انرژی الکتریکی ذخیره شده در سیستم را قبل و بعد از انبساط بار محاسبه می‌کنیم. تفاوت این دو انرژی مقدار انرژی مورد نیاز را نشان می‌دهد (شکل پ-۴۱). چون کره هادی زمین شده است باری به مقدار Q' روی آن جمع می‌شود. برای تعیین بار Q' پتانسیلها را در $r=b$ نسبت به کره هادی زمین شده و نسبت به بینهایت مساوی قرار می‌دهیم. برای این منظور ابتدا میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r & a<r<b \\[2ex] \dfrac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r>b \;\; ; \;\; Q = 4\pi b^2 \rho_{S_0} \end{cases}$$

$$V_b = \int_b^\infty \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \Rightarrow \frac{Q+Q'}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^\infty = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^a$$

$$(Q+Q')\left(\frac{1}{b}\right) = Q'\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow Q' = -\frac{a}{b}Q$$

$$\text{انرژی ذخیره شده قبل از انبساط}: W_1 = \frac{1}{2}\int_S \rho_S V\, dS = \frac{1}{2}\int_{S_b} \rho_{S_0} V_b\, dS + \frac{1}{2}\int_{S_a} \rho'_{S_0} V_a\, dS = \frac{1}{2} Q V_b$$

اما:

$$V_b = (Q+Q')/4\pi\varepsilon_0 b = \frac{Q(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$$

$$W_1=\frac{Q^2(b-a)}{8\pi\varepsilon_0 b^2}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که انرژی ذخیره شده بعد از انبساط بار برابر است با :

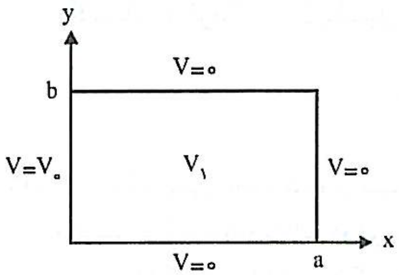
$$W_2=\frac{Q^2(c-a)}{8\pi\varepsilon_0 c^2}$$

$$\Delta W=W_1-W_2=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{b-a}{b^2}-\frac{c-a}{c^2}\right]$$

$$\Delta W=\left(\frac{2\pi}{\varepsilon_0}\right)(\rho_{S_0}b^2)^2\left(\frac{b-a}{b^2}-\frac{c-a}{c^2}\right)$$

■

۲۰. ابتدا نشان می‌دهیم که تابع پتانسیل مساوی مجموع پتانسیلهای V_1 (به منزله پاسخ وقتی که تنها شرط مرزی غیر صفر $V=V_0\,,\,x=0$) و V_2 (به عنوان پاسخ وقتی که تنها شرط مرزی غیر صفر $x=0$, $V=V_0\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$) است (شکل پ-۴۲). برای پتانسیلهای V_1 و V_2 داریم:



شکل پ-۴۲-الف

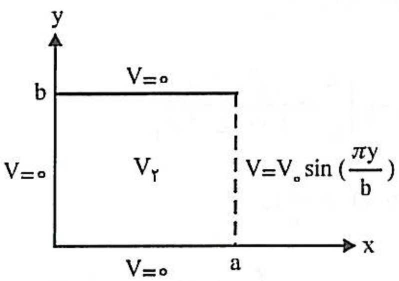
$$\nabla^2V_1=0\,,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$$

$$V_1=V_0\,,\quad x=0,\quad 0<y<b$$

$$V_1=0\,,\quad x=a,\quad 0<y<b$$

$$V_1=0\,,\quad y=0,\quad 0<x<a$$

$$V_1=0\,,\quad y=b,\quad 0<x<a$$



شکل پ-۴۲-ب

$$\nabla^2V_2=0\,,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$$

$$V_2=0\,,\quad x=0,\quad 0<y<b$$

$$V_2=V_0\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\,,\quad x=a,\quad 0<y<b$$

$$V_2=0\,,\quad y=0,\quad 0<x<a$$

$$V_2=0\,,\quad y=b,\quad 0<x<a$$

حال نشان می‌دهیم که V_1+V_2 هم در معادله لاپلاس صدق می‌کند و هم شرایط مرزی کلی مسئله را برآورده می‌سازد. در آن صورت $V=V_1+V_2$ پاسخ مسئله است.

$$\nabla^2 V_1 + \nabla^2 V_2 = \nabla^2 (V_1 + V_2) = 0 \quad , \quad \text{معادله لاپلاس صادق است}$$

$$V_1 + V_2 = V_0 + 0 = V_0 \,, \quad x = 0 \,, \; 0 < y < b$$

$$V_1 + V_2 = 0 + V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad x = a \,, \; 0 < y < b$$

$$V_1 + V_2 = 0 + 0 = 0, \quad y = 0 \,, \; 0 < x < a$$

$$V_1 + V_2 = 0 + 0 = 0, \quad y = b \,, \; 0 < x < a$$

ملاحظه می‌شود که $V = V_1 + V_2$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند و شرایط مرزی را نیز برآورده می‌سازد، بنابراین تنها پاسخ است. حال V_1 و V_2 را جداگانه به دست می‌آوریم.

$$V_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin k_n y + B_n \cos k_n y)(C_n e^{k_n x} + D_n e^{-k_n x})$$

$$V_1 = 0 \,, \; y = 0 \;\Rightarrow\; B_n (C_n e^{k_n x} + D_n e^{-k_n x}) = 0 \,, \; B_n = 0$$

$$V_1 = 0 \,, \; y = b \;\Rightarrow\; A_n \sin(k_n b)(C_n e^{k_n x} + D_n e^{-k_n x}) = 0 \,, \; k_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$V_1 = 0 \,, \; x = a \;\Rightarrow\; A_n \sin(k_n y)(C_n e^{k_n a} + D_n e^{-k_n a}) = 0 \,, \; D_n = -C_n e^{2k_n a}$$

با به کار بردن نتایج فوق، تابع پتانسیل در این مرحله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right]$$

که $\overline{A}_n = 2 A_n C_n e^{k_n a}$ است.

حال آخرین شرط مرزی بر V_1 را اِعمال می‌کنیم.

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} -\overline{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$ و انتگرال گرفتن از صفر تا b، داریم:

$$V_0 \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} -\overline{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy$$

با توجه به روابط ۴-۳۵ تا ۴-۳۸ داریم:

$$\overline{A}_n = \begin{cases} -\dfrac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} & \text{فرد } n \\[2ex] 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$V_1(x,y) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{4V_0}{n\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \frac{\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

پتانسیل $V_۲$ را در مسئله ۳ محاسبه نموده‌ایم. نتیجه عبارت است از:

$$V_۲(x,y)=V_۰ \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)}$$

سرانجام:

$$V(x,y)=V_۱(x,y)+V_۲(x,y)$$

$$V(x,y)=V_۰\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi a}{b}\right)}\left[\frac{۴}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{b}(a-x)\right)+\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۳,۵,۷,\ldots}\left(\frac{۱}{n}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\frac{\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\right\}\ ,\ ۰\le x\le a\ ,\ ۰\le y\le b$$

■

۲۱. تابع سه بُعدی پتانسیل را به صورت حاصل ضرب سه تابع به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

آنگاه:

$$\nabla^۲V=YZ\frac{d^۲X}{dx^۲}+XZ\frac{d^۲Y}{dy^۲}+XY\frac{d^۲Z}{dz^۲}=۰$$

با تقسیم طرفین رابطه بر XYZ، داریم:

$$\frac{۱}{X}\frac{d^۲X}{dx^۲}+\frac{۱}{Y}\frac{d^۲Y}{dy^۲}+\frac{۱}{Z}\frac{d^۲Z}{dz^۲}=۰$$

بدیهی است که معادله بالا فقط وقتی برقرار است که هر جمله برابر مقدار ثابتی باشد. در این صورت معادله بالا به سه معادله تجزیه می‌گردد که همگی شکل عمومی یکسانی دارند و پاسخهای آنها نیز از یک خانواده خواهند بود. به عنوان مثال اگر جمله اول را برابر $-k_x^۲$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^۲X}{dx^۲}+k_x^۲X=۰\ \Rightarrow\ X(x)=A\sin k_x x+B\cos k_x x$$

در صورتی که به جای $-k_x^۲$ مقدار ثابت را به صورت $k_x^۲$ در نظر بگیریم (شرایط مسئله مشخص می‌کند که $-k_x^۲$ یا $k_x^۲$ انتخاب گردد)، آنگاه:

$$\frac{d^۲X}{dx^۲}-k_x^۲X=۰\ \Rightarrow\ X(x)=A'e^{k_x x}+B'e^{-k_x x}$$

نتایج مشابهی را می‌توان برای Y(y) و Z(z) به دست آورد. در اینجا از شرایط مرزی مسئله این طور استنباط می‌کنیم که چون دو صفر در جهات x و y داریم، تغییرات سینوسی برحسب x و y محتمل‌تر از تغییرات نمایی است. در جهت z چنین ویژگی وجود ندارد و تغییرات نمایی خواهند بود. با این توضیحات، تابع پتانسیل را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$V(x,y,z) = (A\sin k_x x + B\cos k_x x)(C\sin k_y y + D\cos k_y y)(Ee^{k_z z} + Fe^{-k_z z})$$

که،

$$k_z^2 - k_x^2 - k_y^2 = 0$$

شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$V=0,\quad x=0,\quad 0<y<b,\quad 0<z<c \qquad (1)$$

$$V=0,\quad x=a,\quad 0<y<b,\quad 0<z<c \qquad (2)$$

$$V=0,\quad y=0,\quad 0<x<a,\quad 0<z<c \qquad (3)$$

$$V=0,\quad y=b,\quad 0<x<a,\quad 0<z<c \qquad (4)$$

$$V=0,\quad z=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b \qquad (5)$$

$$V=V_0,\quad z=c,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b \qquad (6)$$

اعمال شرط ۱: $(0+B)\,Y(y)\,Z(z)=0 \Rightarrow B=0$

اعمال شرط ۲: $A\sin k_x a\,Y(y)\,Z(z)=0 \Rightarrow k_x=\dfrac{n\pi}{a},\ n=1,2,3,\ldots$

اعمال شرط ۳: $A\sin k_x x\,(0+D)\,Z(z)=0 \Rightarrow D=0$

اعمال شرط ۴: $(A\sin k_x x)\,(C\sin k_y b)\,Z(z)=0 \Rightarrow k_y=\dfrac{m\pi}{b},\ m=1,2,3,\ldots$

اعمال شرط ۵: $(A\sin k_x x)\,(C\sin k_y y)\,(E+F)=0 \Rightarrow F=-E$

در ضمن با داشتن k_x و k_y، مقدار k_z عبارت است از:

$$k_z=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

در این مرحله تابع پتانسیل به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$V(x,y,z)=\overline{A}_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sinh(k_z z)$$

که $\overline{A}_{nm}=2ACE$ ثابت جدیدی است. شرط مرزی (۶) در شکل کنونی پاسخ صدق نخواهد کرد. برای رفع این مشکل، شکل نهایی پاسخ را به صورت یک سری دوگانه بینهایت در نظر می‌گیریم.

$$V(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{A}_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sinh(k_z z)$$

اعمال شرط ۶: $V_0=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{A}_{nm}\sinh(k_z c)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

برای تعیین ضرایب $\overline{A}_{nm}$ طرفین را در $\sin\left(\dfrac{n'\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{m'\pi y}{b}\right)$ ضرب کرده و نسبت به x از صفر تا a و نسبت به y از صفر تا b انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^a \int_0^b V_0 \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right) dx\, dy =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{A}_{nm} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right) dy$$

که $\widehat{A}_{nm} = \overline{A}_{nm} \sinh(k_z c)$ است.

$$\text{سمت چپ رابطه} = \begin{cases} \dfrac{4V_0 ab}{m'n'\pi^2} & m', n' \text{ فرد} \\ 0 & m'n' \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\text{سمت راست رابطه} = \begin{cases} 0 & n \neq n' \text{ یا } m \neq m' \\ \dfrac{ab}{4}\widehat{A}_{nm} & n = n',\ m = m' \end{cases}$$

با ترکیب نتایج فوق، داریم:

$$\overline{A}_{nm} = \begin{cases} \left(\dfrac{16 V_0}{\pi^2}\right) \Big/ (mn \sinh(k_z c)) & m, n \text{ فرد} \\ 0 & mn \text{ زوج} \end{cases}$$

سرانجام:

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1,3,5,\ldots} \sum_{m=1,3,5,\ldots} \left[\frac{16 V_0}{mn\pi^2 \sinh\left(c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\right)}\right.$$

$$\left. \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\, z\right]\right], \quad \begin{matrix} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ 0 \le z \le c \end{matrix}$$

■

۲۲.

$$\nabla^2 V = -\rho_V/\varepsilon_0 = \frac{-k}{\varepsilon_0} r^{-5/2}$$

$$V = V(r) \Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{k}{\varepsilon_0} r^{-5/2}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = -\frac{k}{\varepsilon_0} r^{-1/2} \Rightarrow r^2 \frac{dV}{dr} = -\frac{2k}{\varepsilon_0} r^{1/2} + K_1$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{2k}{\varepsilon_0} r^{-3/2} + \frac{K_1}{r^2}, \quad K_1 = \text{مقدار ثابت}$$

$$V(r) = \frac{4k}{\varepsilon_0} r^{-1/2} - \frac{K_1}{r} + K_2, \quad K_2 = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow V(r=\infty) = K_2 \to 0 \Rightarrow K_2 = 0$$

$$E=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r=\frac{۲k}{\varepsilon_۰}r^{-۳/۲}-\frac{K_۱}{r^۲} \;\Rightarrow\; r^۲E_r=\frac{۲k}{\varepsilon_۰}r^{\frac{۱}{۲}}-K_۱\xrightarrow[r\to ۰]{}۰\Rightarrow K_۱=۰$$

$$V(r)=\frac{۴k}{\varepsilon_۰\sqrt{r}}$$

■

۲۳. الف) معادله لاپلاس در هر دو ناحیه برقرار است، زیرا جریان ایجاد شده یکنواخت و ساکن است (فقط ساکن بودن آن کافی است) $\nabla.J=۰$.

$$\nabla.J=\nabla.(\sigma E)=\sigma\nabla.E=\sigma\nabla.(-\nabla V)=-\sigma\nabla^۲V=۰ \;\Rightarrow\; \nabla^۲V=۰$$

پتانسیل فقط نسبت به y تغییر می‌کند، بنابراین:

$$V(y)=\begin{cases}V_۱=A_۱y+B_۱ & a<y<a+b\\ V_۲=A_۲y+B_۲ & ۰<y<a\end{cases}$$

شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:

$$V_۱=V_۰,\quad y=a+b \qquad (۱)$$

$$V_۲=۰,\quad y=۰ \qquad (۲)$$

$$V_۱=V_۲,\quad y=a \qquad (۳)$$

$$\sigma_۱\frac{dV_۱}{dy}=\sigma_۲\frac{dV_۲}{dy}\;,\; y=a\;;\;(J_{n_۱}=J_{n_۲}\;,\;y=a) \qquad (۴)$$

اعمال شرط ۲: $۰=۰+B_۲\Rightarrow B_۲=۰$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{اعمال شرط ۱:} & V_۰=A_۱(a+b)+B_۱\\ \text{اعمال شرط ۳:} & A_۱a+B_۱=A_۲a\\ \text{اعمال شرط ۴:} & \sigma_۱A_۱=\sigma_۲A_۲\end{array}\right\}\Rightarrow A_۱=\frac{V_۰\sigma_۲}{\sigma_۲b+\sigma_۱a},B_۱=-\frac{(\sigma_۲-\sigma_۱)aV_۰}{\sigma_۲b+\sigma_۱a},A_۲=\frac{V_۰\sigma_۱}{\sigma_۲b+\sigma_۱a}$$

بنابراین:

$$V(y)=\begin{cases}\dfrac{V_۰\sigma_۱y}{\sigma_۲b+\sigma_۱a} & ۰\le y\le a\\[2ex] \dfrac{\sigma_۲y-(\sigma_۲-\sigma_۱)a}{\sigma_۲b+\sigma_۱a}V_۰ & a\le y\le a+b\end{cases}$$

ب) $$R=\frac{V_۰}{I}=\frac{V_۰}{J_n(۱)}=\frac{V_۰}{J_n},J_n=\sigma_۱\frac{dV_۱}{dy}=\frac{\sigma_۱\sigma_۲}{\sigma_۲b+\sigma_۱a}V_۰\Rightarrow R=\frac{\sigma_۲b+\sigma_۱a}{\sigma_۱\sigma_۲}=\frac{a}{\sigma_۲}+\frac{b}{\sigma_۱}$$

ج) $$C=\frac{۲W_e}{V_۰^۲}=\frac{۲(W_{e_۱}+W_{e_۲})}{V_۰^۲}=\frac{\varepsilon_۱\int_{\nu_۱}|E_۱|^۲d\nu+\varepsilon_۲\int_{\nu_۲}|E_۲|^۲d\nu}{V_۰^۲}$$

$$|E_1| = \frac{J_n}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 b + \sigma_1 a} V_0 \ , \quad |E_2| = \frac{J_n}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 b + \sigma_1 a} V_0$$

$\mathcal{V}_1$= حجم مکعب مستطیلی به قاعده واحد سطح و ارتفاع b در ناحیه ۱ ؛ $\int_{\mathcal{V}_1} |E_1|^2 d\mathcal{V} = |E_1|^2 b$

$\mathcal{V}_2$= حجم مکعب مستطیلی به قاعده واحد سطح و ارتفاع a در ناحیه ۲ ؛ $\int_{\mathcal{V}_2} |E_2|^2 d\mathcal{V} = |E_2|^2 a$

$$C = \frac{\varepsilon_1 b |E_1|^2 + \varepsilon_2 a |E_2|^2}{V_0^2} = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2^2 b + \varepsilon_2 \sigma_1^2 a}{(\sigma_1 a + \sigma_2 b)^2}$$

■

۲۴. الف) با توجه به شکل ۴-۱۶-ج، برای دوبار نقطه‌ای Q و Q' (به طوری که Q به فاصله D از مرکز کره هادی باشد و $Q' = (-a/D)Q$ و به فاصله $b = a^2/D$ از مرکز کره باشد) پتانسیل در محل سطح کره صفر است. در این شکل Q بار اصلی در خارج کره و Q' بار تصویر در داخل کره است. به سادگی قابل درک است که اگر Q' نقش بار اصلی را پیدا کند آنگاه Q حکم تصویر را خواهد داشت. بنابراین مقدار و مکان بار تصویر را در مسئله حاضر می‌توان از روابط ۴-۱۲۲ به دست آورد، اگر تبدیلات زیر را انجام دهیم:

$$Q' \to Q \ , \ Q \to Q' \ , \ b \to d \ , \ D \to b$$

آنگاه:

$$Q' = -\frac{a}{D} Q \Rightarrow Q = -\frac{a}{b} Q' \ , \ b = \frac{a^2}{D} \Rightarrow d = \frac{a^2}{b}$$

یا

$$b = \frac{a^2}{d} \ , \ Q' = -\frac{a}{d} Q$$

ب)

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2}\right) \ , \ r \le a$$

$$r_1 = (r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta)^{1/2} \ , \ r_2 = (r^2 + b^2 + 2rb\cos\theta)^{1/2}$$

که r_1 و r_2 به ترتیب فاصله A از Q و Q' است.

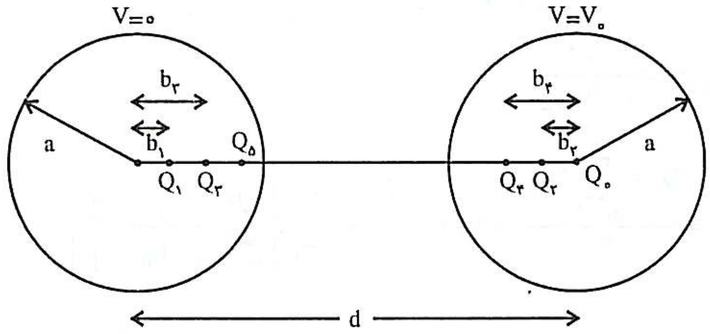
■

۲۵. الف) برای تعیین دو توزیع بار نقطه‌ای که کره‌های هادی را جایگزین نمایند، ابتدا مطابق شکل پ-۴۳ بار نقطه‌ای Q_0 را در مرکز کره‌ای که پتانسیل آن V_0 است قرار می‌دهیم. Q_0 را طوری تعیین می‌کنیم که پتانسیل حاصل از آن روی سطح کره برابر V_0 باشد، یعنی:

$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 a V_0$$

برای اینکه پتانسیل در محل سطح کره دیگر (کره سمت چپ شکل پ-۴۳) صفر باشد. لازم است که تصویر Q_0 را در این کره اضافه کنیم. این تصویر را Q_1 می‌نامیم که به فاصله b_1 از مرکز کره سمت چپ است.

$$Q_1 = -\frac{aQ_0}{d} \quad , \quad b_1 = \frac{a^2}{d}$$



شکل پ-۴۳

اما Q_1 در پتانسیل روی سطح کره سمت راست تأثیر می‌گذارد. برای خنثی نمودن این تأثیر باید تصویر Q_1 را در کره سمت راست به سیستم اضافه کنیم. این تصویر را Q_2 می‌نامیم و فاصله آن از مرکز کره سمت راست b_2 است.

$$Q_2 = -\frac{aQ_1}{d-b_1} = \frac{a^2 Q_0}{d(d-b_1)} \quad , \quad b_2 = \frac{a^2}{d-b_1}$$

ولی باز هم حضور Q_2 روی پتانسیل کره سمت چپ تأثیر می‌گذارد. برای خنثی نمودن این تأثیر باید تصویر Q_2 را در کره سمت چپ به سیستم اضافه کنیم. این تصویر را Q_3 می‌نامیم و فاصله آن را از مرکز کره سمت چپ b_3 در نظر می‌گیریم.

$$Q_3 = -\frac{aQ_2}{d-b_2} = -\frac{a^3 Q_0}{d(d-b_1)(d-b_2)} \quad , \quad b_3 = \frac{a^2}{d-b_2}$$

باز حضور Q_3 در پتانسیل کره سمت راست مؤثر است و ضرورت دارد که تصویر Q_3 را در این کره به سیستم اضافه کنیم این روند تا بینهایت ادامه می‌یابد و سرانجام به دو توزیع بار نقطه‌ای مطلوب می‌انجامد. به طور خلاصه، در کره با پتانسیل $V = V_0$ توزیع زیر را داریم:

$$Q_0, Q_2, Q_4, \ldots, Q_{2m}, \ldots$$

که،

$$\begin{cases} Q_{2m} = Q_0 \prod_{n=1}^{2m} \dfrac{a}{d-b_{n-1}} & \text{به فاصله } b_{2m} \text{ از مرکز کره} \ , \ m=1,2,3,\ldots \\ b_{2m} = \dfrac{a^2}{d-b_{2m-1}} & b_0 = 0 \end{cases}$$

در کره با پتانسیل $V=0$ توزیع زیر را داریم:

$$Q_1, Q_3, Q_5, \ldots, Q_{2m-1}, \ldots$$

که،

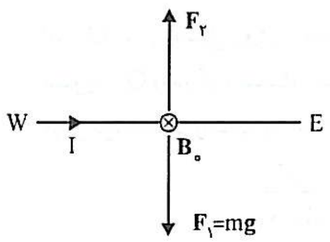
$$\begin{cases} Q_{2m-1} = -Q_0 \prod_{n=1}^{2m-1} \dfrac{a}{d-b_{n-1}} \\ b_{2m-1} = \dfrac{a^2}{d-b_{2m-2}} \end{cases}$$

$m=1,2,3,\ldots$ ، به فاصله b_{2m-1} از مرکز کره

ب)
$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} Q_{2m}}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0 a \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\prod_{n=1}^{2m} \frac{a}{d-b_{n-1}} \right) \right]$$

■

پ-۵ حل مسائل خودآزمایی فصل پنجم



شکل پ-۴۴

۱. با توجه به شکل پ-۴۴ داریم:

$$|F_2| = \int_0^l B_0 I\, dL = B_0 I l \;;$$ میدان B_0 بر جریان I عمود است

$$|F_1| = |F_2| \;,\; B_0 I l = mg$$

$$I = \frac{mg}{B_0 l} = \frac{30 \times 10^{-3} \times 9/8}{1 \times 0/3 \times 10^{-4}} = 9800 \text{ A}$$

■

۲.
$$F = \oint_C I\, dL \times B_0$$

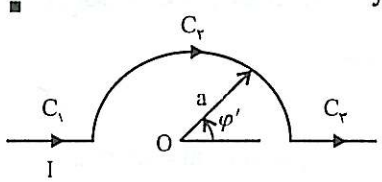
چون B_0 بردار ثابتی است، می‌توان نوشت:

$$F = I \left(\oint_C dL \right) \times B_0$$

اما:

$$\oint_C dL = 0 \Rightarrow F = 0$$

■



شکل پ-۴۵

۳. با توجه به شکل پ-۴۵ داریم:

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1+C_2+C_3} \frac{dL' \times \hat{a}_R}{R^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \right)$$