

$$= -\epsilon \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right); \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_0 e^{-y} \sin y \cosh x \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_0 e^{-y} \sin y \sinh x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = V_0 \sinh x e^{-y} (\cos y - \sin y) \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V_0 \sinh x (-\gamma e^{-y} \cos y)$$

$$\rho_V = -\epsilon \cdot [V_0 e^{-y} \sin y \sinh x - \gamma V_0 e^{-y} \cos y \sinh x]$$

$$\rho_V = V_0 \epsilon \cdot \sinh x e^{-y} (\gamma \cos y - \sin y)$$

ب) می‌توان نشان داد که برای این تابع پتانسیل مقدار $\nabla^2 V$ همواره برابر صفر است، مگر در $r=0$ که پتانسیل تعریف نشده است. بنابراین، توزیع بار، هر چه که باشد، در مبدأ مختصات قرار دارد. برای اینکه به ماهیت این توزیع بار پی ببریم کافی است توجه کنیم که $\sin \theta \cos \varphi$ را می‌توان نتیجه ضرب داخلی \hat{a}_r و \hat{a}_x دانست:

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x = (\sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_x = \sin \theta \cos \varphi$$

بنابراین:

$$V = V_0 \frac{\hat{a}_r \cdot \hat{a}_x}{r^2} = \frac{V_0 \cdot r \cdot \hat{a}_x}{r^3} = \frac{(V_0 \hat{a}_x) \cdot r}{r^3}$$

با مراجعه به رابطه ۲-۹۹، می‌دانیم که $V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ پتانسیل یک دو قطبی با گشتاور \mathbf{p} است. مقایسه این تابع با نتیجه بالا نشان می‌دهد که پتانسیل $V = \frac{V_0 \hat{a}_x \cdot r}{r^3}$ باید از یک دو قطبی با گشتاور $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 V_0 \hat{a}_x$ حاصل شده باشد.

■

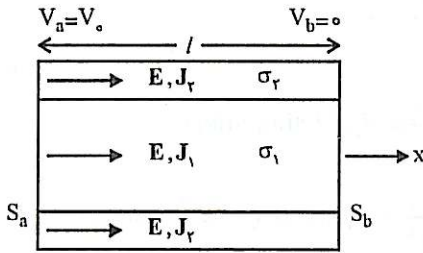
پ-۳ حل مسائل خودآزمایی فصل سوم

$$S = 1 \text{ mm}^2, I = 1 \text{ A}, N = 174 \times 10^{28} \Rightarrow J = \frac{I}{S} = 10^6 \text{ A/m}^2 \quad 1)$$

$$J = \rho v_d = Ne v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{Ne} = \frac{10^6}{(174 \times 10^{28})(1.6 \times 10^{-19})} = 7 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$t = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}} = \frac{100 \times 10^3}{7 \times 10^{-5}} = \frac{10}{7} \times 10^9 \text{ s} \approx 45,3 \text{ سال}$$

■



شکل پ-۱۵

۲. اعمال اختلاف پتانسیل V_0 بین دو سطح ابتدایی S_a و انتهایی S_b استوانه (شکل پ-۱۵) منجر به تشکیل میدان الکتریکی E می شود. این میدان در دو ناحیه هادی یکسان است و در هر سطح مقطع عمود بر محور استوانه توزیعی یکنواخت دارد. جریان به وجود آمده در مقاومت دارای چگالیهای متفاوتی در دو ناحیه هادی است. این مقاومت برابر است با:

$$R_{ab} = \frac{\int_a^b E \cdot dL}{\int_S \sigma E \cdot dS} ; E = E_x \hat{a}_x$$

$$\int_a^b E \cdot dL = \int_{x_1}^{x_1+l} (E_x \hat{a}_x) \cdot (dx \hat{a}_x) = E_x \cdot l = V_0$$

$$E_x = \frac{V_0}{l}$$

$$\int_S \sigma E \cdot dS = \int_{S_1} \sigma_1 E \cdot dS + \int_{S_r} \sigma_r E \cdot dS ; E \cdot dS = E_x \cdot dS$$

$$= \sigma_1 E_x \cdot S_1 + \sigma_r E_x \cdot S_r = \sigma_1 E_x (\pi a^2) + \sigma_r E_x [\pi (a+t)^2 - \pi a^2]$$

$$= \frac{V_0}{l} \pi [\sigma_1 a^2 - \sigma_r a^2 + \sigma_r (a+t)^2]$$

$$R_{ab} = \frac{l}{\pi [\sigma_1 a^2 + \sigma_r t (2a+t)]}$$

■

۳. اعمال اختلاف پتانسیل V_0 بین سطوح کره درونی به شعاع a و کره بیرونی به شعاع b منجر به تشکیل میدان الکتریکی E می شود که در دستگاه مختصات کروی فقط دارای مؤلفه شعاعی است. بدیهی است که چون چگالی جریانی روی سطح کره‌ای به شعاع r یکنواخت است، میدان الکتریکی نیز روی چنین کره‌ای اندازه ثابتی دارد. پس می توان نوشت:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S J_r dS = J_r \oint_S dS = J_r (4\pi r^2)$$

که S عبارت از سطح کره‌ای به شعاع r است.

$$J_r = \frac{I}{4\pi r^2} , E_r = \frac{J_r}{\sigma} = \frac{I}{4\pi \sigma r^2}$$

$$V_{ab} = V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{I dr}{4\pi\sigma r^2} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$R_{ab} = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow R_{ab} = \frac{b-a}{4\pi ab\sigma}$$

۴. بین دو ناحیه با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 شرایط مرزی همان روابطی هستند که در ۳-۶۵ و ۳-۶۶ داده شده‌اند. یعنی،

$$E_{t_1} = E_{t_2}, \quad \epsilon_1 E_{n_1} - \epsilon_2 E_{n_2} = \rho_S$$

اما در هر ناحیه همواره رابطه $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ برقرار است. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$E_{t_1} = \frac{J_{t_1}}{\sigma_1} = E_{t_2} = \frac{J_{t_2}}{\sigma_2} \Rightarrow \frac{J_{t_1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t_2}}{\sigma_2}$$

برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های عمودی چگالی جریان، از اصل پیوستگی جریان ساکن استفاده می‌کنیم. اگر عنصر سطح ΔS را در مرز مشترک دو ناحیه در نظر بگیریم، مقدار جریانی که از این عنصر سطح از ناحیه ۱ به سوی مرز می‌رود باید برابر مقدار جریانی باشد که از همین عنصر سطح وارد ناحیه ۲ می‌شود. به بیان دیگر،

$$J_{n_1} \Delta S = J_{n_2} \Delta S, \quad \Delta S = \Delta S \hat{\mathbf{a}}_n \Rightarrow J_{n_1} = J_{n_2} = J_n$$

اکنون از این شرط مرزی در رابطه $\epsilon_1 E_{n_1} - \epsilon_2 E_{n_2} = \rho_S$ استفاده می‌کنیم.

$$J_{n_1} = \sigma_1 E_{n_1} \Rightarrow E_{n_1} = \frac{J_{n_1}}{\sigma_1}, \quad J_{n_2} = \sigma_2 E_{n_2} \Rightarrow E_{n_2} = \frac{J_{n_2}}{\sigma_2}$$

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} J_{n_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_{n_2} = \rho_S \Rightarrow \rho_S = J_n \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right)$$

۵. با توجه به شکل پ-۱۶ داریم:

$$V = V_{,xy} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V = -V_{,x} \hat{\mathbf{a}}_x + x \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\rho_S = \epsilon \cdot \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$$

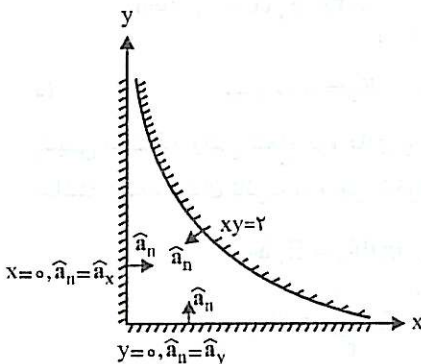
(i) برای سطح $x=0$ و $y>0$ داریم:

$$\rho_S = \epsilon \cdot [-V_{,x} (y \hat{\mathbf{a}}_x + x \hat{\mathbf{a}}_y)] \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = -\epsilon \cdot V_{,y}$$

(ii) برای سطح $x>0$ و $y=0$ داریم:

$$\rho_S = \epsilon \cdot [-V_{,x} (y \hat{\mathbf{a}}_x + x \hat{\mathbf{a}}_y)] \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = -\epsilon \cdot V_{,x}$$

(iii) برای سطح $xy=2$ ابتدا بردار واحد $\hat{\mathbf{a}}_n$ را به دست می‌آوریم.



شکل پ-۱۶

$$\hat{a}_n = \pm \frac{\nabla(\sqrt{xy})}{|\nabla(\sqrt{xy})|} = \pm \frac{y\hat{a}_x + x\hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{y=\sqrt{x}} = \pm \frac{\sqrt{2}\hat{a}_x + x\hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

چون بردار \hat{a}_n باید به طرف خارج جسم هادی باشد علامت (-) باید مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین:

$$\begin{aligned} \rho_S &= \varepsilon \cdot E \cdot \hat{a}_n = \varepsilon \cdot [-V \cdot (y\hat{a}_x + x\hat{a}_y)] \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}\hat{a}_x + x\hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + 4}} \right] \Big|_{y=\sqrt{x}} \\ &= \varepsilon \cdot V \cdot \frac{\sqrt{2}y + x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \Big|_{y=\sqrt{x}} = \varepsilon \cdot V \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\varphi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{a}_r \quad (۶. الف)$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] \hat{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \hat{a}_\varphi$$

$$= -\frac{E}{r} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \right] = 0$$

چون $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است، ویژگی لازم برای یک میدان الکتریکی ساکن را دارد.
ب) مؤلفه مماسی میدان، همان مؤلفه \hat{a}_θ است. مقدار این مؤلفه روی سطح کره عبارت است از:

$$E_t = E_\theta = -E \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \Big|_{r=a} = 0$$

$$\rho_S = \varepsilon \cdot E \cdot \hat{a}_n, \quad \hat{a}_n = \hat{a}_r \quad (ج)$$

$$\rho_S = \varepsilon \cdot E_r \Big|_{r=a} = \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) E \cdot \cos \theta \Big|_{r=a} = 2\varepsilon \cdot E \cdot \cos \theta, \quad r=a$$

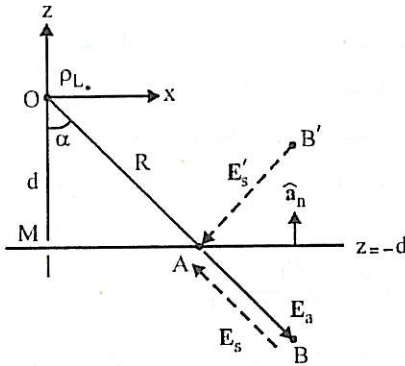
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{E}_a = \text{میدان اولیه}, \quad \mathbf{E}_s = \text{میدان ثانویه} \quad (د)$$

بدیهی است که وقتی شعاع کره هادی به سمت صفر میل کند ($a \rightarrow 0$)، یعنی کره هادی حضور نداشته باشد، میدان ثانویه به وجود نخواهد آمد. پس،

$$\mathbf{E}_a = \lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{E} = E \cdot \cos \theta \hat{a}_r - E \cdot \sin \theta \hat{a}_\theta = E \cdot \hat{a}_z$$

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_a = \sqrt{2} E \cdot \frac{a^2}{r^2} \cos \theta \hat{a}_r + E \cdot \frac{a^2}{r^2} \sin \theta \hat{a}_\theta$$

میدان اولیه یک میدان یکنواخت، با شدت E ، در امتداد محور z است.



شکل پ-۱۷

$$E_a^A = \frac{\rho_L}{\sqrt{\pi \epsilon_0} R} \hat{a}_R ; \hat{a}_R = \overrightarrow{OA} \text{ بردار واحد در امتداد } OA$$

میدان ثانویه ایجاد شده در درون جسم هادی باید میدان اولیه را در هر نقطه در درون جسم خنثی سازد. میدان ثانویه از بارهای القایی آزاد، که روی سطح جسم در $z = -d$ ظاهر می‌شوند، پدید می‌آید. این بارهای القایی، صرف‌نظر از اینکه چگونه روی سطح جسم توزیع می‌شوند، در نقاط متقارن نسبت به صفحه $z = -d$ میدانهای ثانویه‌ای با اندازه‌های مساوی و با جهت‌های متقارن به گونه‌ای که در شکل نشان داده شده است به وجود می‌آورند. میدان کل در نقطه A عبارت است از:

$$E^A = E_a^A + E_s^A, \quad |E_s^A| = |E_s^A| = |-E_a^A|$$

$$E^A = -2 |E_a^A| \cos \alpha \hat{a}_n = -2 \frac{\rho_L}{\sqrt{\pi \epsilon_0} R} \cos \alpha \hat{a}_n$$

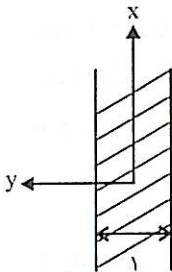
$$\text{اما } \cos \alpha = \frac{d}{R} \text{ و } R = (x^2 + d^2)^{1/2} \text{ پس،}$$

$$E^A = -\frac{\rho_L \cdot d}{\pi \epsilon_0 (x^2 + d^2)} \hat{a}_n$$

حال چگالی سطحی بار القایی، با استفاده از شرط مرزی ۳-۷۰، عبارت می‌شود از:

$$\rho_S = \epsilon_0 \cdot E^A \cdot \hat{a}_n = -\frac{\rho_L \cdot d}{\pi (x^2 + d^2)}, \quad z = -d$$

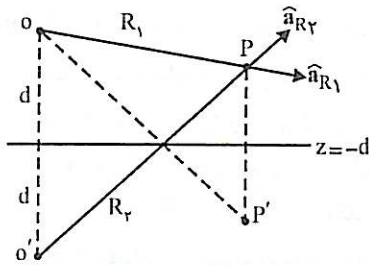
ب) نواری از سطح جسم هادی به عرض واحد در امتداد محور y ، مطابق شکل پ-۱۸ در نظر می‌گیریم. مقدار بار موجود در این نوار برابر است با:



شکل پ-۱۸

$$Q = \int_{\text{سطح نوار}} \rho_S dS = - \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_x^{x+1} \frac{\rho_L \cdot d}{\pi (x^2 + d^2)} dx$$

$$= -\frac{\rho_L \cdot d}{\pi} \left[\frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{x}{d} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = -\rho_L$$



شکل پ-۱۹

ج) نقطه P را در ناحیه $z > -d$ به صورت شکل پ-۱۹ در نظر می‌گیریم. میدان کل در این نقطه دارای دو قسمت است. (i) میدان اولیه ناشی از خط بار (ii) میدان ثانویه ناشی از بارهای القایی روی سطح هادی. میدان اولیه در نقطه P برابر است با:

$$E_a^P = \frac{\rho_L}{\sqrt{\pi \epsilon_0} R_1} \hat{a}_{R_1}$$

میدان ثانویه در نقطه P، به دلیل تقارن این میدان نسبت به صفحه $z = -d$ ، به اندازه میدان در P' است (P و P' دو نقطه قرینه نسبت به صفحه $z = -d$ هستند). یعنی،

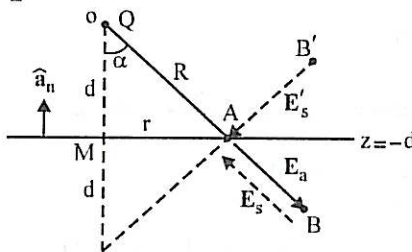
$$|E_s^P| = |E_s^{P'}| = |-E_a^{P'}| = \frac{\rho_L}{\sqrt{\pi \epsilon_0} R_2} ; \quad OP' = OP = R_2$$

جهت میدان ثانویه $E_s^{P'}$ ، \hat{a}_{R_2} است. بنابراین:

$$E_s^P = -\frac{\rho_L}{\sqrt{\pi \epsilon_0} R_2} \hat{a}_{R_2}$$

نتیجه مزبور نشان می‌دهد که E_s^P همانند میدانی است که از یک خط بار با چگالی $-\rho_L$ واقع در O' (تصویر O) ناشی شود. از این رو، با توجه به اینکه $E^P = E_a^P + E_s^P$ ، چنین نتیجه‌گیری می‌شود که میدان کل در نقطه دلخواه P در ناحیه $z > -d$ مساوی میدانی است که خط بار و تصویرش نسبت به سطح هادی و با چگالی ناهمنام در نقطه P به وجود می‌آورند.

این مسئله اصول روش تصویر را با توجه به نقش میدانهای اولیه و ثانویه تشریح می‌کند. این مسئله را با استفاده از قواعد روش تصویر (فصل ۴) با سادگی بیشتری می‌توان مطالعه کرد.



شکل پ-۲۰

۸. الف) میدان اولیه ناشی از بار نقطه‌ای Q منجر به القای بار الکتریکی روی سطح هادی می‌شود. چون میدان اولیه تابعی از φ نیست، توزیع بارهای القایی روی صفحه $z = -d$ نیز مستقل از φ خواهد بود و فقط تابعی از r (مختصه شعاعی در دستگاه استوانه‌ای) است. میدان اولیه در نقطه دلخواه A روی سطح هادی با توجه به شکل پ-۲۰ عبارت است از:

$$E_a^A = \frac{Q}{\sqrt{\pi \epsilon_0} R} \hat{a}_R ; \quad \hat{a}_R = \overrightarrow{OA} \text{ بردار واحد در جهت}$$

بارهای القایی باید آن چنان میدان ثانویه‌ای به وجود آورند که در هر نقطه در درون جسم هادی میدان اولیه را به طور کامل خنثی کند. به عبارت دیگر $E_s = -E_a$ برای $z < -d$. میدان ثانویه در ناحیه

$z > -d$ قرینه میدان ثانویه در ناحیه $z < -d$ است، زیرا میدان ثانویه باید نسبت به صفحه $z = -d$ متقارن باشد. بنابراین $|\mathbf{E}'_s| = |\mathbf{E}_s|$ بوده و آنگاه میدان کل در نقطه A برابر است با:

$$\mathbf{E}^A = \mathbf{E}_n^A + \mathbf{E}'_s^A = -\gamma |\mathbf{E}_n^A| \cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_n ; \cos \alpha = \frac{d}{R}$$

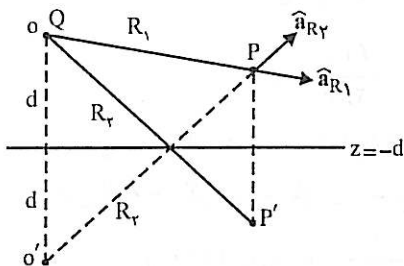
$$\mathbf{E}^A = -\gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{d}{R} \hat{\mathbf{a}}_n ; R = (r^2 + d^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{E}^A = -\frac{Qd}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{a}}_n \Rightarrow \rho_s = \epsilon_0 \mathbf{E}^A \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = -\frac{Qd}{2\pi (r^2 + d^2)^{3/2}}$$

ب) مقدار کل بار القا شده روی سطح هادی برابر است با:

$$Q_s = \int_{\text{سطح هادی}} \rho_s dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} -\frac{Qd}{2\pi (r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\varphi$$

$$= -\frac{Qd}{\gamma\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} = -Qd \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right]_0^{\infty} = -Q$$



شکل پ-۲۱

ج) میدانهای اولیه و ثانویه را در نقطه دلخواه P واقع در ناحیه $z > -d$ به ترتیب \mathbf{E}_n^P و \mathbf{E}'_s^P می‌نامیم (شکل پ-۲۱). آنگاه،

$$\mathbf{E}^P = \mathbf{E}_n^P + \mathbf{E}'_s^P$$

اما \mathbf{E}_n^P و \mathbf{E}'_s^P دو بردار قرینه نسبت به $z = -d$ هستند و دارای اندازه‌های یکسانند. اما چون میدان کل در ناحیه $z < -d$ صفر است،

$$\mathbf{E}'_s^P = -\mathbf{E}_n^P \Rightarrow |\mathbf{E}'_s^P| = |\mathbf{E}_n^P| = \left| -\mathbf{E}_n^P \right| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}$$

با توجه به اینکه \mathbf{E}'_s^P در جهت $-\hat{\mathbf{a}}_{R_1}$ است (بارهای القایی منفی اند، اگر $Q > 0$ باشد)، داریم:

$$\mathbf{E}'_s^P = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \hat{\mathbf{a}}_{R_1} , \mathbf{E}_n^P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \hat{\mathbf{a}}_{R_2}$$

پس:

$$\mathbf{E}^P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \hat{\mathbf{a}}_{R_2} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \hat{\mathbf{a}}_{R_1} , z > -d$$

رابطه مزبور نشان می‌دهد که میدان کل در هر نقطه واقع در ناحیه $z > -d$ مساوی میدانی است که بار نقطه‌ای Q (جمله اول) و تصویرش با بار $-Q$ (جمله دوم) به وجود می‌آورند.

۹. بار روی سطح $r=a$: مقدار بار روی سطح $r=a$ باید برابر صفر باشد، زیرا در غیر این صورت وجود بار روی این سطح منجر به تشکیل میدان الکتریکی غیر صفر در ناحیه هادی $a < r < b$ می‌گردد. پس،

$$\rho_S = 0, \quad r=a$$

بار روی سطح $r=b$: بار موجود در استوانه درونی باید کاملاً روی سطح خارجی آن یعنی $r=b$ توزیع شود. به دلیل تقارن استوانه‌ای، توزیع بار یکنواخت خواهد بود.

$$\rho_S = \frac{\rho_{L_1}}{2\pi b(1)} = \frac{\rho_{L_1}}{2\pi b}, \quad r=b$$

بار روی سطح $r=c$: توزیع بار روی سطح $r=b$ تولید میدان الکتریکی $E = \frac{\rho_{L_1}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$ را در ناحیه $r > b$ می‌کند. این نتیجه را می‌توان به سادگی از قانون گوس به دست آورد. این میدان، باری روی سطح $r=c$ القا می‌کند (از طریق جابه‌جایی الکترونهای آزاد در لایه بیرونی) به گونه‌ای که میدان کل در ناحیه هادی $c < r < d$ صفر شود. اگر چگالی توزیع بار روی سطح $r=c$ را ρ_{S_c} بنامیم باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{\rho_{L_1}}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{2\pi c \rho_{S_c}}{2\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{a}_r = 0, \quad c < r < d$$

$$\rho_{L_1} + 2\pi c \rho_{S_c} = 0 \Rightarrow \rho_S = \rho_{S_c} = -\frac{\rho_{L_1}}{2\pi c}, \quad r=c$$

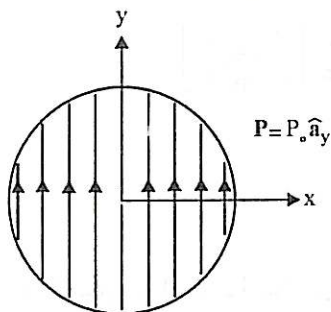
بار روی سطح $r=d$: چون مقدار خالص بار در لایه بیرونی به ازای واحد طول باید ρ_{L_2} باشد، با فرض آنکه چگالی توزیع بار روی سطح $r=d$ برابر ρ_{S_d} باشد، داریم:

$$\rho_{L_2} = \rho_{S_d}(2\pi d) + \rho_{S_c}(2\pi c) \Rightarrow \rho_{S_d} = \frac{1}{2\pi d} (\rho_{L_2} - \rho_{S_c}(2\pi c))$$

$$\rho_{S_d} = \frac{1}{2\pi d} (\rho_{L_2} + \rho_{L_1}), \quad r=d$$

به طور خلاصه:

$$\rho_S = \begin{cases} 0 & r=a \\ \rho_{L_1}/2\pi b & r=b \\ -\rho_{L_1}/2\pi c & r=c \\ (\rho_{L_1} + \rho_{L_2})/2\pi d & r=d \end{cases}$$



شکل پ-۲۲

۱۰. مطابق شکل پ-۲۲ داریم:

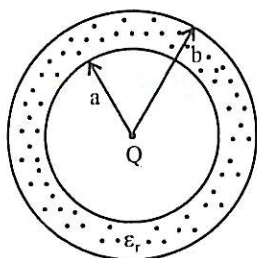
$$\rho_{PS} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = P_0 \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_r ; \hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\hat{\mathbf{a}}_r = \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$\rho_{PS} = P_0 \sin \varphi , \quad r = a$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (P_0 \hat{\mathbf{a}}_y) = 0$$

■



شکل پ-۲۳

۱۱. الف) به دلیل وجود تقارن کروی، مطابق شکل پ-۲۳، میدانهای \mathbf{D}

و \mathbf{E} فقط مؤلفه شعاعی داشته و فقط تابعی از r هستند.

$$\mathbf{D} = D_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r , \quad \mathbf{E} = E_r(r) \hat{\mathbf{a}}_r$$

با به کار بردن قانون گوس برای میدان \mathbf{D} ، داریم:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad \text{بار آزاد محصور در } S$$

که S سطح کره‌ای به شعاع r و مرکزی منطبق بر بار Q است.

$$D_r(4\pi r^2) = Q \Rightarrow D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} , \quad 0 < r < \infty$$

پس، در ناحیه عایق داریم:

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} , \quad a < r < b$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_r b^2}$$

در نتیجه قابلیت گذردگی ماده عایق برابر با $\epsilon = \epsilon_r \frac{b^2}{r^2}$ است.

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_r \mathbf{E}$$

(ب)

$$= \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r - \frac{Q}{4\pi b^2} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_r \cdot (-\hat{\mathbf{a}}_r) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) & r = a \\ \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_r \cdot (\hat{\mathbf{a}}_r) = 0 & r = b \end{cases}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left[\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{\mathbf{a}}_r \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right] \quad (\text{ج})$$

$$= -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(-\frac{Qr^2}{4\pi b^2} \right) = \frac{Q}{4\pi b^2 r} \quad , \quad a < r < b$$

۱۲. الف) به دلیل تقارن استوانه‌ای، میدانهای \mathbf{D} و \mathbf{E} فقط مؤلفه شعاعی داشته و فقط تابعی از r هستند. با به کار بردن قانون گوس، می‌توان نوشت:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = S \text{ بار آزاد محصور در } S$$

که S سطح کل استوانه‌ای به طول l ، شعاع r و هم‌محور با لایه‌های عایق است.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{سطح قاعده}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{سطح جانبی}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r (4\pi r l)$$

$$S \text{ بار آزاد محصور در } S = \rho_{L_0} l \Rightarrow D_r (4\pi r l) = \rho_{L_0} l \Rightarrow D_r = \frac{\rho_{L_0}}{4\pi r}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_{L_0}}{4\pi r} \hat{\mathbf{a}}_r \quad , \quad 0 < r < \infty$$

ب) در هر ناحیه \mathbf{E} از رابطه $\mathbf{E} = \mathbf{D} / \epsilon$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_{L_0}}{4\pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{a}}_r & r < a, r > c \\ \frac{\rho_{L_0}}{4\pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{\rho_{L_0} b}{4\pi \epsilon_0 c r} \hat{\mathbf{a}}_r & a < r < b \\ \frac{\rho_{L_0}}{4\pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{\rho_{L_0}}{4\pi \epsilon_0 c} \hat{\mathbf{a}}_r & b < r < c \end{cases}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{\rho_{L_0} (c-b)}{4\pi c r} \hat{\mathbf{a}}_r & a < r < b \\ \frac{\rho_{L_0}}{4\pi c} \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \hat{\mathbf{a}}_r & b < r < c \\ 0 & r < a, r > c \end{cases}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{L.}(c-b)}{\gamma\pi c r} \hat{a}_r \right] = 0, \quad \nabla \cdot \left[\frac{\rho_{L.}}{\gamma\pi c} \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \hat{a}_r \right] = -\frac{\rho_{L.}}{\gamma\pi c r}$$

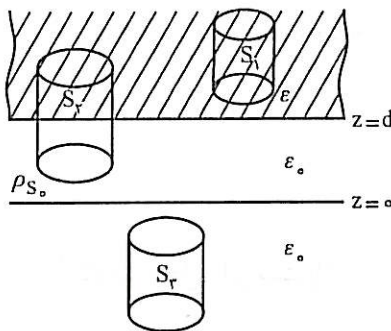
$$\rho_P = \begin{cases} 0 & r < b, r > c \\ \frac{\rho_{L.}}{\gamma\pi c r} & b < r < c \end{cases}$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n \quad (د)$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \frac{\rho_{L.}(c-b)}{\gamma\pi c a} \hat{a}_r \cdot (-\hat{a}_r) = -\frac{\rho_{L.}(c-b)}{\gamma\pi c a} & r = a \\ \frac{\rho_{L.}(c-b)}{\gamma\pi c b} \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_r) + \frac{\rho_{L.}}{\gamma\pi c} \left(\frac{c}{b} - 1 \right) \hat{a}_r \cdot (-\hat{a}_r) = 0 & r = b \\ \frac{\rho_{L.}}{\gamma\pi c} \left(\frac{c}{c} - 1 \right) \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_r) = 0 & r = c \end{cases}$$

به طور خلاصه:

$$\rho_{PS} = \begin{cases} -\frac{\rho_{L.}(c-b)}{\gamma\pi c a} & r = a \\ 0 & r = b, r = c \end{cases}$$



شکل پ-۲۴

۱۳. الف) چون توزیع بار مولد میدان اولیه و نیز ناحیه عایق در امتداد محورهای X و Y تا بینهایت ادامه داشته و در این امتدادها یکنواخت هستند، روشن است که کلیه کمیت‌های میدانی از قبیل P، E، D و چگالی‌های بارهای القایی نسبت به X و Y تغییراتی ندارند. از طرف دیگر، چون میدان اولیه (میدان یک صفحه بینهایت بار واقع در z=0) فقط مؤلفه z دارد و بر سطح ناحیه عایق عمود است. میدانهای P و E، D نیز فقط مؤلفه z خواهند داشت. حال یک سطح گوسی استوانه‌ای در نظر می‌گیریم به طوری که محور آن موازی محور z باشد. ابتدا، سطح گوسی را کاملاً در ناحیه عایق (S_۱) فرض می‌کنیم (شکل پ-۲۴). با به کار بردن قانون گوس، داریم:

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = S_1 \text{ بار آزاد محصور در } S_1 = 0$$

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{سطح جانبی}} + \int_{\text{قاعده بالا}} + \int_{\text{قاعده پایین}} = S_1' D_z(z_1') - S_1'' D_z(z_1'') = 0$$

S'_1 سطح قاعده بالا واقع در $z = z'_1$ و S''_1 سطح قاعده پایین واقع در $z = z''_1$ است. چون $S'_1 = S''_1$ داریم:

$$D_z(z'_1) = D_z(z''_1), \quad z'_1 > z''_1 > d \Rightarrow D_z = D_s = \text{مقدار ثابت}, \quad z > d$$

با اعمال قانون گوس روی سطح S_p ، نتیجه بالا مجدداً به دست می‌آید، به طوری که می‌توان گفت اندازه D برای ناحیه $z > 0$ (اعم از عایق و خلأ) مقدار ثابت D_s است. بالاخره با تکرار عمل فوق برای سطح بسته S_p نتیجه مشابهی به دست می‌آید، مبنی بر اینکه بردار D در ناحیه $z < 0$ نیز یکنواخت است و اندازه ثابتی برابر D'_s دارد. برای تعیین D_s و D'_s میدان ثانویه را محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_r} = D_s \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = D_s \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \hat{\mathbf{a}}_z \cdot (-\hat{\mathbf{a}}_z) = -\frac{D_s (\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}, \quad z = d$$

میدان ثانویه حاصل از توزیع ρ_{ps} عبارت است از:

$$\mathbf{E}_s = \begin{cases} \frac{\rho_{ps}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z > d \\ -\frac{\rho_{ps}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z < d \end{cases}$$

و میدان اولیه که حاصل از صفحه بار در $z = 0$ است، عبارت است از:

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \frac{\rho_{s_0}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z > 0 \\ -\frac{\rho_{s_0}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z < 0 \end{cases}$$

آنگاه میدان کل برابر است با:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_s = \begin{cases} \frac{\rho_{s_0} + \rho_{ps}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z < 0 \\ \frac{\rho_{s_0} - \rho_{ps}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & 0 < z < d \\ \frac{\rho_{s_0} + \rho_{ps}}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_z & z > d \end{cases}$$

در ناحیه $z > d$ ، از طرف دیگر $\mathbf{E} = \frac{D_s}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{\mathbf{a}}_z$ است، پس:

$$\frac{D_s}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho_{s_0} + \rho_{ps}}{2\epsilon_0} = \frac{\rho_{s_0}}{2\epsilon_0} - \frac{D_s (\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow D_s = \frac{\epsilon_r \rho_{s_0}}{\epsilon_r + 1}$$

با به کار بردن شرط مرزی در $z=0$ ، D برای $z < 0$ به دست می‌آید.

$$D_z(z > 0) - D_z(z < 0) = \rho_{S_0} \Rightarrow D_z(z < 0) = \frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1} - \rho_{S_0} = -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1}$$

پس به طور خلاصه:

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1} \hat{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}$$

(ب) میدان E از رابطه $E = \frac{D}{\epsilon}$ در هر ناحیه به دست می‌آید.

$$E = \begin{cases} \frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0 (\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z & z > d \\ \frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_0 (\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z & 0 < z < d \\ -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0 (\epsilon_r + 1)} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}$$

(ج) قبلاً $\rho_p = 0$ را محاسبه کرده‌ایم. برای چگالی بارهای سطحی مقید داریم:

$$\rho_{PS} = -\frac{D_n(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} = -\left(\frac{\epsilon_r \rho_{S_0}}{\epsilon_r + 1}\right) \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right)$$

$$\rho_{PS} = -\rho_{S_0} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}, \quad z = d$$

۱۴. ابتدا میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا با استفاده از قانون گوس به دست می‌آوریم.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \text{بار آزاد محصور در } S$$

که S سطح کره‌ای به شعاع r و هم‌مرکز با کره عایق است. از آنجا که میدان D فقط مؤلفه شعاعی داشته و این مؤلفه فقط تابعی از r می‌باشد، داریم:

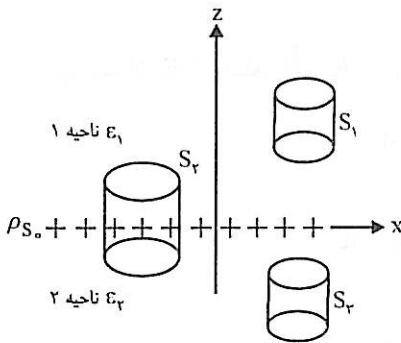
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r (4\pi r^2)$$

از طرفی:

$$Q = \int_V \rho_V dV = \begin{cases} \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) & r < a \\ \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) & r > a \end{cases}$$

$$D = D_r \hat{a}_r = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3} \hat{a}_r & r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{3r^2} \hat{a}_r & r > a \end{cases} \Rightarrow E = \frac{D}{\epsilon} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} \hat{a}_r & r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon r^2} \hat{a}_r & r > a \end{cases}$$

$$V(r=0) = \int_{\infty}^0 E \cdot dL = \int_0^a \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} dr + \int_a^{\infty} \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon r^2} dr = \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon} + \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon} = \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon} (\epsilon_r + 1)$$



شکل پ-۲۵

۱۵. الف) از آنجا که توزیع بار و نواحی عایق (۱) و (۲) در امتداد محورهای x و y تا بینهایت ادامه داشته و در این امتدادها یکنواخت هستند، میدانهای حاصل تابعی از x و y نخواهند بود. بنابراین D و E همه جا فقط دارای مؤلفه \hat{a}_z هستند. حال مطابق شکل پ-۲۵ اگر سطح بسته استوانه‌ای شکل S_1 را در ناحیه (۱) به صورتی در نظر بگیریم که محور آن موازی محور z باشد، یا به کار بردن قانون گوس روی S_1 داریم:

$$\oint_{S_1} D \cdot dS = S_1 \text{ بار آزاد محصور در } = 0$$

$$\oint_{S_1} D \cdot dS = \int_{\text{سطح جانبی}} + \int_{\text{قاعده بالا}} + \int_{\text{قاعده پایین}} = 0 + S'_1 D'_{1z} - S''_1 D''_{1z} = 0$$

S'_1 و S''_1 به ترتیب مساحت‌های قاعده‌های فوقانی و تحتانی S_1 بوده و D'_{1z} مقدار D_z روی S'_1 و D''_{1z} مقدار D_z روی S''_1 است. چون $S'_1 = S''_1$ ، داریم:

$$D'_{1z} = D''_{1z} = D_{1z} = \text{مقدار ثابت}$$

با تکرار عمل فوق برای سطح بسته S_2 در ناحیه (۲)، به طور مشابه نتیجه می‌گیریم:

$$D'_{2z} = D''_{2z} = D_{2z} = \text{مقدار ثابت}$$

نتایج مزبور به این مفهوم است که میدان D در هر یک از نواحی $z > 0$ و $z < 0$ مقدار ثابتی داشته و همواره در امتداد \hat{a}_z برای $z > 0$ و $-\hat{a}_z$ برای $z < 0$ است. حال قانون گوس را برای سطح استوانه‌ای بسته S_2 که بخشی از توزیع بار را در بر می‌گیرد می‌نویسیم:

$$\oint_{S_2} D \cdot dS = D_{1z} S'_2 + D_{2z} S''_2 = \rho_{S_2} S''_2$$

که S'_2 سطح قاعده بالا، S''_2 سطح قاعده پایین و S''_2 سطح مقطع صفحه xy و S_2 است. اما $S'_2 = S''_2 = S''_2$ ، بنابراین:

$$D_{1z} + D_{2z} = \rho_{S_2} \quad (1)$$

همچنین پایستار بودن میدان E ایجاب می نماید که $\oint_C E \cdot dL = 0$ باشد. در اینجا منحنی بسته C را محور Z از $-\infty$ تا $+\infty$ انتخاب می کنیم (یا هر خط راستی موازی محور Z). آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_z dz = \int_{-\infty}^0 -E_{\gamma z} dz + \int_0^{+\infty} E_{\nu z} dz = 0$$

توجه کنید که برای $z > 0$ ، $E = E_{\nu z} \hat{a}_z$ و برای $z < 0$ ، $E = -E_{\gamma z} \hat{a}_z$ است. اما:

$$\int_{-\infty}^0 -E_{\gamma z} dz = \int_{+\infty}^0 E_{\gamma z} dz = - \int_0^{+\infty} E_{\gamma z} dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_z dz = \int_0^{+\infty} (E_{\nu z} - E_{\gamma z}) dz = (E_{\nu z} - E_{\gamma z}) \int_0^{+\infty} dz = 0$$

تساوی سمت راست بالا وقتی امکان پذیر است که:

$$E_{\nu z} - E_{\gamma z} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{D_{\nu z}}{\epsilon_1} - \frac{D_{\gamma z}}{\epsilon_2} = 0 \quad (2)$$

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲)، سرانجام $D_{\nu z}$ و $D_{\gamma z}$ به شرح زیر به دست می آیند:

$$D_{\nu z} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}, \quad D_{\gamma z} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}$$

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases}, \quad E = \frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{z}{|z|} \hat{a}_z, \quad -\infty < z < \infty$$

$$P = D - \epsilon_0 E = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z & z < 0 \end{cases} \quad (ب)$$

$$\rho_{PS_1} = P(z > 0) \cdot \hat{a}_{n_1} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_z) = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}, \quad z = 0^+$$

$$\rho_{PS_2} = P(z < 0) \cdot \hat{a}_{n_2} = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0} \hat{a}_z \cdot (\hat{a}_z) = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}, \quad z = 0^-$$

$$\rho_{PS} = \rho_{PS_1} + \rho_{PS_2} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho_{S_0}, \quad z = 0$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot P = 0, \quad \text{تمام نقاط فضا,} \quad (ج)$$

۱۶. الف) میدانهای E و D در هر یک از ناحیه های ۱ و ۲ فقط دارای مؤلفه شعاعی استوانه ای بوده و به علاوه این مؤلفه ها فقط تابعی از r خواهند بود (در هر ناحیه به تنهایی). شرط مرزی $E_{t_1} = E_{t_2}$ در

مرز $z=0$ ایجاب می‌کند که $E_{r_1} = E_{r_2}$ به ازای هر r باشد. بنابراین برحسب دستگاه مختصات استوانه‌ای، داریم:

$$E = E_r(r) \hat{a}_r, \text{ همه جا}$$

$$D = \begin{cases} \epsilon_1 E_r(r) \hat{a}_r & 0 < \varphi < \pi \quad (z > 0) \\ \epsilon_2 E_r(r) \hat{a}_r & \pi < \varphi < 2\pi \quad (z < 0) \end{cases}$$

برای تعیین E_r از قانون گوس استفاده می‌کنیم. سطح گوسی S را به صورت استوانه‌ای هم‌محور با خط بار، به طول واحد و به شعاع r در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\oint_S D \cdot dS = S \text{ بار آزاد محصور در } S = \rho_{L_0}$$

$$\oint_S D \cdot dS = \int_{\text{قاعده‌های استوانه گوسی}} D \cdot dS + \int_{\text{سطح جانبی}} D \cdot dS = \int_{\text{نیمه فوقانی سطح جانبی } (z > 0)} D \cdot dS + \int_{\text{نیمه تحتانی سطح جانبی } (z < 0)} D \cdot dS$$

$$= (\epsilon_1 E_r)(\pi r) + (\epsilon_2 E_r)(\pi r) = \pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r E_r = \rho_{L_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_{L_0}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \Rightarrow E = \frac{\rho_{L_0}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_r, \quad 0 < r < \infty$$

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 \rho_{L_0}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_r & 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < \pi \\ \frac{\epsilon_2 \rho_{L_0}}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \hat{a}_r & 0 < r < \infty, \quad \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

توجه کنید که در پاسخهای مزبور $\frac{\hat{a}_r}{r} = \frac{y \hat{a}_y + z \hat{a}_z}{y^2 + z^2}$ است.

(ب) $\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n$ ، اما در $z=0$ ، D و E فقط دارای مؤلفه \hat{a}_y بوده و $\hat{a}_n = \pm \hat{a}_z$ و از آنجا که $\hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0$ است، بنابراین $\rho_{PS} = 0$ خواهد شد.

$$\rho_P = -\nabla \cdot P \quad (\text{ج})$$

$$P = D - \epsilon_0 E = \frac{P_0}{r} \hat{a}_r, \quad P_0 = \text{مقدار ثابت}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \left(\frac{P_0}{r} \hat{a}_r \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{P_0}{r} \right) = 0$$

۱۷. الف) مشابه بحثی نظیر آنچه که برای مسئله ۱۶ انجام شد، میدانهای E و D در دستگاه مختصات کروی به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$E = E_r(r) \hat{a}_r, \text{ همه جا}$$

$$D = \begin{cases} \epsilon_1 E_r(r) \hat{a}_r & 0 < \theta < \frac{\pi}{\gamma} (z > 0) \\ \epsilon_2 E_r(r) \hat{a}_r & \frac{\pi}{\gamma} < \theta < \pi (z < 0) \end{cases}$$

برای تعیین E_r از قانون گوس استفاده می‌کنیم. سطح گوسی S را به صورت کره‌ای به شعاع r و مرکزی منطبق بر بار Q در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\oint_S D \cdot dS = \int_{\text{نیمه فوقانی سطح}} D \cdot dS + \int_{\text{نیمه تحتانی سطح}} D \cdot dS = (\epsilon_1 E_r) (\gamma \pi r^2) + (\epsilon_2 E_r) (\gamma \pi r^2) = Q$$

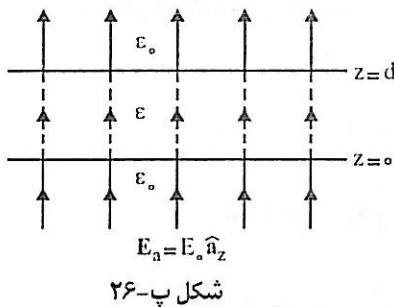
$$E_r = \frac{Q}{\gamma \pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} \Rightarrow E = \frac{Q}{\gamma \pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} \hat{a}_r, \quad 0 < r < \infty$$

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 Q}{\gamma \pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} \hat{a}_r & 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{\gamma} \\ \frac{\epsilon_2 Q}{\gamma \pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} \hat{a}_r & 0 < r < \infty, \quad \frac{\pi}{\gamma} < \theta < \pi \end{cases}$$

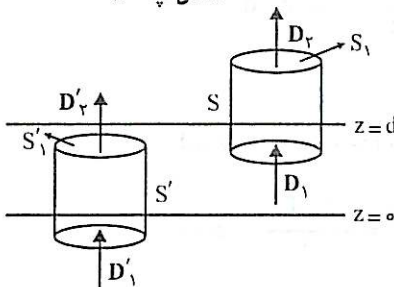
ب) $\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n$ ، اما در $z=0$ ، $P = (\rho_s / r^2) \hat{a}_{rc}$ ، که ρ_s مقدار ثابتی است و $\hat{a}_n = \pm \hat{a}_z$. چون $\hat{a}_{rc} \cdot \hat{a}_z = 0$ ، $\rho_{PS} = 0$ است.

$$\rho_p = -\nabla \cdot P = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\rho_s}{r^2} \right) \right] = 0 \quad \text{ج}$$

■



شکل پ-۲۶



شکل پ-۲۷

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{(1 + z/d)^2}$$

۱۸

الف) با توجه به اینکه جسم عایق در امتداد محورهای x و y از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد (شکل پ-۲۶) و قابلیت گذردگی جسم، تابعی از x و y نیست و بالاخره با توجه به اینکه میدان اولیه فقط دارای مؤلفه \hat{a}_z است، می‌توان استدلال نمود که میدانهای D ، E و P فقط مؤلفه \hat{a}_z داشته و فقط تابعی از z هستند. حال اگر یک سطح گوسی استوانه‌ای در نظر بگیریم به طوری که محور آن موازی محور z باشد (شکل پ-۲۷)، با به کار بردن قانون گوس و توجه به اینکه بار آزاد در فضا وجود ندارد، داریم:

$$\oint_S D \cdot dS = (D_{z_2} - D_{z_1}) S_1 = 0 \Rightarrow D_{z_2} = D_{z_1}$$

$$\oint_{S'} D \cdot dS = (D'_{z_2} - D'_{z_1}) S'_1 = 0 \Rightarrow D'_{z_2} = D'_{z_1}$$

از بحث مذکور چنین نتیجه می‌گیریم که بردار D در تمام فضا یکنواخت است، یعنی:

$$D = D_0 \hat{a}_z, \quad -\infty < z < \infty$$

میدان کل در هر ناحیه از فضا از مجموع میدانهای اولیه و ثانویه حاصل می‌شود. میدان ثانویه در بیرون عایق ($z < 0$, $z > d$) عبارت است از:

$$E_{s1} = E - E_a = \left(\frac{D_0}{\epsilon_0} - E_0 \right) \hat{a}_z, \quad z < 0, \quad z > d$$

چون E_s خود یک میدان الکتریکی ساکن است، میدانی پایستار است و باید شرط $\oint_C E_s \cdot dL = 0$ را برآورده سازد. در اینجا مسیر بسته C را خط مستقیمی موازی محور z از $-\infty$ تا $+\infty$ (دایره‌ای به شعاع ∞) در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$\oint_C E_s \cdot dL = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{D_0}{\epsilon_0} - E_0 \right) dz + \int_d^{\infty} \left(\frac{D_0}{\epsilon_0} - E_0 \right) dz + \int_{-\infty}^d E_{sz} dz = 0$$

که $E_{sz} = E_s \cdot \hat{a}_z$ میدان ثانویه در ناحیه عایق است. چون E_{sz} محدود است، $\int_{-\infty}^d E_{sz} dz$ نیز محدود خواهد بود. حال اگر $\frac{D_0}{\epsilon_0} - E_0 \neq 0$ باشد، انتگرالهای \int_d^{∞} و $\int_{-\infty}^0$ هر کدام بینهایت (با علامت یکسان) شده و صفر شدن \oint_C امکان‌پذیر نخواهد بود. بنابراین $\frac{D_0}{\epsilon_0} - E_0 = 0$ الزامی است. بدین ترتیب $D_0 = \epsilon_0 E_0$ و $D = \epsilon_0 E_0 \hat{a}_z$, $-\infty < z < \infty$

(ب) با در دست داشتن D ، میدان E به سادگی از رابطه $E = \frac{D}{\epsilon}$ به دست می‌آید.

$$E = \begin{cases} E_0 \hat{a}_z & z < 0, \quad z > d \\ \frac{E_0}{\epsilon} \left(1 + \frac{z}{d} \right) \hat{a}_z & 0 < z < d \end{cases}$$

$$P = D - \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0 \left[1 - \frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{z}{d} \right) \right] \hat{a}_z, \quad 0 < z < d$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot P = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon d} \left(1 + \frac{z}{d} \right), \quad 0 < z < d$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \epsilon_0 E_0 \left[1 - \frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{d}{d} \right) \right] \hat{a}_z \cdot (+\hat{a}_z) = 0 & z = d \\ \epsilon_0 E_0 \left[1 - \frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{0}{d} \right) \right] \hat{a}_z \cdot (-\hat{a}_z) = -\frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon} & z = 0 \end{cases}$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} 0 & z = d \\ -\frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon} & z = 0 \end{cases}$$

۱۹. با به کار بردن روشی شبیه آنچه که در بند (الف) مسئله ۱۸ مورد استفاده قرار گرفت، نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{a}}_z, \quad -\infty < z < \infty$$

توجه کنید که نتیجه مذکور در مسئله ۱۸ مستقل از تابع تغییرات قابلیت گذردهی برحسب z به دست آمد و بنابراین برای این مسئله نیز صادق است. حال با در دست داشتن \mathbf{D} ، \mathbf{E} را محاسبه می‌کنیم. در ناحیه عایق، $1 < z < 2$ ، داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{a}}_z}{\epsilon_0 [1 + \chi / (\chi - z)]} = \frac{\mathbf{E}_0}{\chi} (\chi - z) \hat{\mathbf{a}}_z, \quad 1 < z < 2$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = [\epsilon_0 \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0}{\chi} (\chi - z)] \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0 z}{\chi} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad 1 < z < 2$$

$$\rho_{PS} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$$

$$\rho_{PS} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0 (1)}{\chi} \hat{\mathbf{a}}_z \cdot (-\hat{\mathbf{a}}_z) = -\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0}{\chi} & z=1 \\ \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0 (2)}{\chi} \hat{\mathbf{a}}_z \cdot (\hat{\mathbf{a}}_z) = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0}{\chi} & z=2 \end{cases}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0 z}{\chi} \right) = -\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_0}{\chi}, \quad 1 < z < 2$$

میدان کل و میدان ثانویه عبارتند از:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\mathbf{E}_0}{\chi} (\chi - z) \hat{\mathbf{a}}_z & 1 < z < 2 \\ \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{a}}_z & z > 2, z < 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{E} - \mathbf{E}_a = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0 \hat{\mathbf{a}}_z = \begin{cases} -\frac{\mathbf{E}_0 z}{\chi} \hat{\mathbf{a}}_z & 1 < z < 2 \\ \mathbf{0} & z < 1, z > 2 \end{cases}$$

۲۰. الف) اعمال اختلاف پتانسیل V_0 بین دو صفحه هادی، میدان الکتریکی یکنواخت \mathbf{D} را بین صفحات به وجود می‌آورد. در این بند و سایر بندهای این مسئله، میدان هر ناحیه را که بین دو صفحه هادی محصور باشد با میدان دو صفحه هادی بینهایت تقریب می‌زنیم. اگر چگالی سطحی توزیع بار ρ_{S_0} فرض شود، داریم:

$$\mathbf{D} = \begin{cases} -\rho_{S_0} \hat{\mathbf{a}}_z & 0 < z < d \\ \mathbf{0} & z < 0, z > d \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \begin{cases} -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \hat{\mathbf{a}}_z & t < z < d \\ -\frac{\rho_{S_0}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \hat{\mathbf{a}}_z & 0 < z < t \\ \mathbf{0} & z < 0, z > d \end{cases}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\int \rho_{S_1} dS}{\int_+^- E \cdot dL} = \frac{\rho_{S_1} A}{\int_d^t -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} dz + \int_t^0 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} dz} = \frac{\rho_{S_1} A}{\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_2}} \right)} = \frac{A \epsilon_0 \epsilon_{r_1} \epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_2} (d-t) + \epsilon_{r_1} t}$$

جالب توجه است که خازنهای دو ناحیه با یکدیگر سری هستند و به سادگی می توان نشان داد که

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} A}{d-t} \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} A}{t} \quad \text{که در آن} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

(ب) در این حالت فرض می شود که اعمال اختلاف پتانسیل V منجر به تشکیل توزیع باری با چگالی ρ_{S_1} روی بخش $A/2$ مربوط به ϵ_{r_1} و توزیع باری با چگالی ρ_{S_2} روی بخش $A/2$ مربوط به ϵ_{r_2} گردد.

$$D_1 = -\rho_{S_1} \hat{a}_z, \quad E_1 = -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} \hat{a}_z \quad \text{در ناحیه ۱:}$$

$$D_2 = -\rho_{S_2} \hat{a}_z, \quad E_2 = -\frac{\rho_{S_2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} \hat{a}_z \quad \text{در ناحیه ۲:}$$

اما:

$$V_1 = \int_+^- E_1 \cdot dL = \int_d^0 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} dz = \frac{\rho_{S_1} d}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} \quad \text{رؤی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۱}$$

$$V_2 = \int_+^- E_2 \cdot dL = \int_0^t -\frac{\rho_{S_2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} dz = \frac{\rho_{S_2} t}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} \quad \text{رؤی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۲}$$

تساوی اختلاف پتانسیلهای محاسبه شده از طریق دو مسیر نتیجه زیر را به دست می دهد:

$$\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_{r_1}} = \frac{\rho_{S_2}}{\epsilon_{r_2}}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_{S_1} \frac{A}{2} + \rho_{S_2} \frac{A}{2}}{\frac{\rho_{S_1} d}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}}} = \epsilon_0 \epsilon_{r_1} \frac{A}{2d} \left(1 + \frac{\rho_{S_2}}{\rho_{S_1}} \right)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{2d} (\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}) = C_1 + C_2; \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} A}{2d}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} A}{2d}$$

$$D_1 = -\rho_{S_1} \hat{a}_z, \quad E_1 = \begin{cases} -(\rho_{S_1} / \epsilon_0 \epsilon_{r_1}) \hat{a}_z & 1 < z < d \\ -(\rho_{S_1} / \epsilon_0 \epsilon_{r_2}) \hat{a}_z & 0 < z < 1 \end{cases} \quad \text{(ج) در ناحیه ۱:}$$

$$D_2 = -\rho_{S_2} \hat{a}_z, \quad E_2 = -\frac{\rho_{S_2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} \hat{a}_z \quad \text{در ناحیه ۲:}$$

اما:

$$V_1 = \int_+^- E_1 \cdot dL = \int_d^1 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} dz + \int_1^0 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} dz = \frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-1}{\epsilon_{r_1}} + \frac{1}{\epsilon_{r_2}} \right) \quad \text{رؤی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۱}$$

$$V_+ = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_\gamma \cdot d\mathbf{L} = \int_d^0 -\frac{\rho_{S_\gamma}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma}} dz = -\frac{\rho_{S_\gamma} d}{\epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma}}$$

ژوی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۲

از تساوی اختلاف پتانسیلهای محاسبه شده از طریق دو مسیر، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\rho_{S_1} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_2}} \right) = \rho_{S_\gamma} \frac{d}{\epsilon_{r_\gamma}} \Rightarrow \frac{\rho_{S_\gamma}}{\rho_{S_1}} = \frac{\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_2}}}{\frac{d}{\epsilon_{r_\gamma}}}$$

$$C = \frac{Q}{V_+} = \frac{\rho_{S_1} \frac{A}{\gamma} + \rho_{S_\gamma} \frac{A}{\gamma}}{\frac{\rho_{S_\gamma} d}{\epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma}}} = \epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma} \frac{A}{\gamma d} \left(1 + \frac{\rho_{S_1}}{\rho_{S_\gamma}} \right) = \epsilon_0 \frac{A}{\gamma} \left(\frac{\epsilon_{r_\gamma}}{d} + \frac{\epsilon_{r_1} \epsilon_{r_\gamma}}{t \epsilon_{r_1} + (d-t) \epsilon_{r_2}} \right)$$

جالب توجه است که، $C = C_\gamma + \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$ که در آن:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} A}{d-t} \frac{1}{\gamma}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} A}{t} \frac{1}{\gamma}, \quad C_\gamma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma} A}{d} \frac{1}{\gamma}$$

$$\mathbf{D}_1 = -\rho_{S_1} \hat{\mathbf{a}}_z \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \begin{cases} -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} \hat{\mathbf{a}}_z & t < z < d \\ -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} \hat{\mathbf{a}}_z & 0 < z < t \end{cases} \quad \text{در ناحیه ۱}$$

$$\mathbf{D}_\gamma = -\rho_{S_\gamma} \hat{\mathbf{a}}_z \Rightarrow \mathbf{E}_\gamma = \begin{cases} -\frac{\rho_{S_\gamma}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma}} \hat{\mathbf{a}}_z & t < z < d \\ -\frac{\rho_{S_\gamma}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma}} \hat{\mathbf{a}}_z & 0 < z < t \end{cases} \quad \text{در ناحیه ۲}$$

$$V_+ = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{L} = \int_d^t -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}} dz + \int_t^0 -\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}} dz = \frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_2}} \right)$$

ژوی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۱

$$V_+ = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_\gamma \cdot d\mathbf{L} = \int_d^t -\frac{\rho_{S_\gamma}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma}} dz + \int_t^0 -\frac{\rho_{S_\gamma}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_\gamma}} dz = \frac{\rho_{S_\gamma}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_\gamma}} + \frac{t}{\epsilon_{r_\gamma}} \right)$$

ژوی مسیری بین دو صفحه در ناحیه ۲

از تساوی اختلاف پتانسیلهای محاسبه شده از طریق دو مسیر نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_2}} \right) = \frac{\rho_{S_\gamma}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_\gamma}} + \frac{t}{\epsilon_{r_\gamma}} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V_+} = \frac{(\rho_{S_1} + \rho_{S_\gamma}) \frac{A}{\gamma}}{V_+} = \frac{\rho_{S_1}}{\rho_{S_1}} \left(1 + \frac{\rho_{S_\gamma}}{\rho_{S_1}} \right) \frac{A}{\gamma} \frac{1}{\frac{\rho_{S_1}}{\epsilon_0} \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r_1}} + \frac{t}{\epsilon_{r_2}} \right)}$$

$$= \frac{\epsilon_s A (d-t) \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) + t \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \right)}{2 \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r2}} + \frac{t}{\epsilon_{r3}} \right) \left(\frac{d-t}{\epsilon_{r1}} + \frac{t}{\epsilon_{r2}} \right)}$$

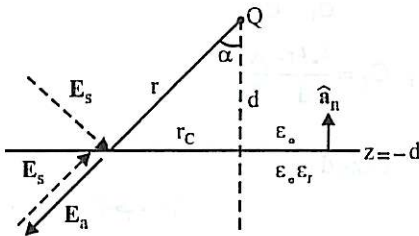
می‌توان نشان داد که: $C = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)}$ که C_1 و C_2 همانند بند (ج)

$$\text{بوده و } C_2 = \frac{\epsilon_s \epsilon_{r2} A}{2(d-t)} \text{ و } C_3 = \frac{\epsilon_s \epsilon_{r3} A}{2t} \text{ است.}$$

■

۲۱. الف) بار نقطه‌ای Q تولید میدان اولیه $E_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$ را می‌نماید (شکل پ-۲۸). این میدان جسم

عایق را قطبی می‌کند. بردار پلاریزاسیون، همانند بردار E_a با γ تغییر می‌کند، یعنی $P = (P_s / \gamma^2) \hat{a}_r$



که P_s مقدار ثابتی است. به عبارت دیگر، چون

جسم عایق از یک طرف ($z < -d$) تا بینهایت ادامه

دارد، قطبی شدن همه مولکولهای جسم در امتداد

میدان اولیه و متناسب با شدت آن صورت

می‌پذیرد. حال چگالی بارهای مقید القایی را به

شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

شکل پ-۲۸

$$\rho_p = -\nabla \cdot P = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0$$

$$\rho_{ps} = P \cdot \hat{a}_n = \frac{P_s}{r^2} \hat{a}_r \cdot (\hat{a}_z) = -\frac{P_s \cos \alpha}{r^2} = -\frac{P_s d}{r^2} = -\frac{P_s d}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}}, \quad z = -d$$

میدان ثانویه E_s عبارت است از:

$$E_s = E - E_a = \frac{P}{\epsilon - \epsilon_s} - E_a = \underbrace{\left(\frac{P_s}{\epsilon - \epsilon_s} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_s} \right)}_{= E_{s0}} \frac{\hat{a}_r}{r^2}, \quad z < -d$$

$$= \frac{E_{s0} (r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z)}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}}, \quad z < -d$$

با استفاده از تقارن E_s نسبت به $z = -d$ ، داریم:

$$E_s = \frac{E_{s0} [r_c \hat{a}_{r_c} + (z + 2d) \hat{a}_z]}{[r_c^2 + (z + 2d)^2]^{3/2}}, \quad z > -d$$

توجه کنید که از رابطه $r = r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z$ استفاده شده است. میدان اولیه و میدان کل عبارتند از:

$$E_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_s} \frac{r_c \hat{a}_{r_c} + z \hat{a}_z}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_s = \begin{cases} \mathbf{E}_\gamma = \frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} \frac{\mathbf{r}_c \hat{\mathbf{a}}_{r_c} + z \hat{\mathbf{a}}_z}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{E_s \cdot [\mathbf{r}_c \hat{\mathbf{a}}_{r_c} + (z + \gamma d) \hat{\mathbf{a}}_z]}{[r_c^2 + (z + \gamma d)^2]^{3/2}} & z > -d \\ \mathbf{E}_\gamma = \frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} \frac{\mathbf{r}_c \hat{\mathbf{a}}_{r_c} + z \hat{\mathbf{a}}_z}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{E_s \cdot (\mathbf{r}_c \hat{\mathbf{a}}_{r_c} + z \hat{\mathbf{a}}_z)}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}} & z < -d \end{cases}$$

حال شرایط مرزی را در $z = -d$ اعمال می‌کنیم. مؤلفه‌های مماسی میدان \mathbf{E} در $z = -d$ در واقع همان مؤلفه‌های $\hat{\mathbf{a}}_{r_c}$ به ازای $z = -d$ هستند، که همان‌طور که از عبارات سمت راست \mathbf{E} در بالا پیدا است، با یکدیگر برابرند. اما، برای مؤلفه‌های عمودی داریم:

$$D_{n_1} = D_{n_\gamma} \Rightarrow \epsilon_0 E_{z_1} = \epsilon E_{z_\gamma} \Big|_{z=-d}$$

$$\frac{d E_s}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{-Qd}{\sqrt{\pi\epsilon_0} (r_c^2 + d^2)^{3/2}} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \left[\frac{-E_s \cdot d}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{-Qd}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}} \right]$$

از این رابطه E_s برابر است با:

$$E_s = -\frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}$$

از طرفی:

$$E_s = \frac{P}{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)} - \frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} = -\frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \Rightarrow P = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{\sqrt{\pi}(\epsilon_r + 1)}$$

$$\rho_{PS} = -\frac{P \cdot d}{(r_c^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{Q(\epsilon_r - 1)d}{\sqrt{\pi}(\epsilon_r + 1)(r_c^2 + d^2)^{3/2}}$$

(ب) برای میدان کل در ناحیه $z < -d$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\gamma &= \left(\frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} + E_s \right) \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{r^2}, \quad z < -d \\ &= \left[\frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} - \frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right] \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{r^2} = \frac{[\sqrt{\pi}Q/(\epsilon_r + 1)]}{\sqrt{\pi\epsilon_0} r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \end{aligned}$$

نتیجه فوق نشان می‌دهد که \mathbf{E}_γ همانند میدانی است که از یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات و به اندازه $\frac{\sqrt{\pi}Q}{\epsilon_r + 1}$ کولمب به وجود آمده باشد.

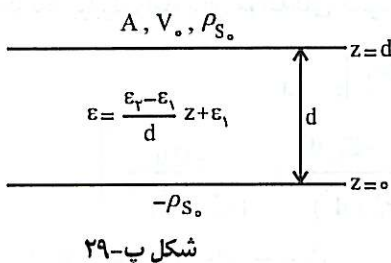
(ج) برای میدان کل در ناحیه $z > -d$ ، \mathbf{E}_γ دو قسمت وجود دارد. یک قسمت شامل $\frac{Q}{\sqrt{\pi\epsilon_0}} \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{r^2}$ است که همانند میدانی است که از بار Q واقع در مبدأ مختصات ناشی شود. قسمت دیگر شامل

$$\frac{E_s \cdot [\mathbf{r}_c \hat{\mathbf{a}}_{r_c} + (z + \gamma d) \hat{\mathbf{a}}_z]}{[r_c^2 + (z + \gamma d)^2]^{3/2}} = \frac{E_s \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{E_s \cdot \hat{\mathbf{a}}_R}{R^2}$$

$$= -\frac{Q(\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 1)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R ; \quad \mathbf{R} = r_c \hat{a}_r + (z + \gamma d) \hat{a}_z$$

که همانند میدانی است که از بار $-\frac{Q(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 1}$ واقع در $(x=0, y=0, z=-\gamma d)$ ناشی شود. این بار را می توان به منزله تصویر بار Q در ناحیه عایق تلقی کرد.

(این مسئله از نقطه نظر تصویر یک توزیع بار در مقابل یک جسم عایق دارای اهمیت است. حالت جالب دیگر مربوط به یک خط بینهایت بار به فاصله d از سطح یک نیم فضای عایق است.)



۲۲. الف) اعمال اختلاف پتانسیل V_0 به دو صفحه هادی، بارهایی با چگالی ρ_{S_0} و $-\rho_{S_0}$ روی صفحات به وجود می آورد (شکل پ-۲۹). برای میدان \mathbf{E} و \mathbf{D} می توان نوشت:

$$\mathbf{D} = -\rho_{S_0} \hat{a}_z, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{-\rho_{S_0} d}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d} \hat{a}_z$$

برای محاسبه ظرفیت C ، داریم:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_{S_0} A}{V_0}$$

$$V_0 = \int_d^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_d^0 -\frac{\rho_{S_0} d}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d} dz = \frac{\rho_{S_0} d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)$$

$$C = \frac{A(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}, \quad \rho_{S_0} = \frac{CV_0}{A} = \frac{V_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right] = -\rho_{S_0} \left[\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right] \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_{S_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right] = \rho_{S_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + (\epsilon_1 - \epsilon_0)d}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d} \right]$$

$$= \rho_{S_0} \frac{\epsilon_0 d (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{[(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d]^2} = \frac{V_0 \epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{\ln(\epsilon_2/\epsilon_1) [(\epsilon_2 - \epsilon_1)z + \epsilon_1 d]^2}, \quad 0 < z < d$$

۲۳. میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار در مثال ۲-۶، مطالعه شده است. کافی است چگالی

توزیع بار، ρ ، را با $q/\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)$ در نتایج به دست آمده جایگزین کنیم. آنگاه:

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{a}_r & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > a \end{cases}$$

پتانسیل حاصل از این توزیع بار در ناحیه $r < a$ ، که در روش محاسبه انرژی نیاز است، برابر است با:

$$V(r) = \int_r^\infty E \cdot dL = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^a \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^2} dr + \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad r \leq a$$

(i) محاسبه انرژی با استفاده از رابطه ۳-۸۷:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV = \frac{1}{2} \int \frac{q}{4\pi a^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi, \quad \text{حجم کره بار, } V$$

$$= \frac{3q^2}{64\pi\epsilon_0 a^4} \int_0^a r^2 \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right) dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3q^2}{20\epsilon_0 \pi a}$$

(ii) محاسبه انرژی با استفاده از رابطه ۳-۹۴:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{تمام فضا}} E^2 dV$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right)^2 \int_0^a r^4 dr + \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^3} \right] \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3q^2}{20\epsilon_0 \pi a}$$

۲۴. چون کره‌های به شعاع a و به شعاع c زمین شده‌اند، پتانسیل هر دوی آنها صفر است. اما کره میانی به شعاع b دارای بار غیر صفر بوده و در نتیجه پتانسیل غیر صفری، مثلاً برابر V_1 ، دارد. وجود پتانسیل V_1 بین کره میانی و کرات درونی و بیرونی مستلزم وجود میدان الکتریکی بین کره میانی و دو کره دیگر است. اما وجود میدان بین کره درونی و کره میانی فقط در صورت موجود بودن مقداری بار روی کره درونی میسر است. این بار از زمین تأمین می‌شود. از آنجا که خطوط میدان در فاصله کره میانی و کره درونی باید به طرف کره درونی باشند، بار کره درونی منفی خواهد بود. این بار را $-q_1$ می‌نامیم. به علاوه، وجود میدان غیر صفر در فاصله بین کره میانی و کره بیرونی مقداری بار روی کره بیرونی القا می‌کند که باز مقدارش منفی است و آن را $-q_2$ می‌نامیم. اکنون میدان الکتریکی را در نواحی مختلف به شرح زیر می‌نویسیم:

$$E = \begin{cases} E_1 = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & a < r < b \\ E_2 = \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & b < r < c \\ E_3 = \frac{q - q_1 - q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & r > c \end{cases}$$

چون پتانسیل در ناحیه $r \geq c$ باید صفر باشد (زیرا پتانسیل کره بیرونی صفر است)، لازم است که $E_r = 0$ باشد. آنگاه:

$$q - q_1 - q_2 = 0 \quad (1)$$

برای تعیین رابطه دیگری بین q_1 و q_2 از تساوی $V_{bc} = V_{ba}$ استفاده می‌کنیم.

$$V_{ba} = \int_b^a E_1 \cdot dL = \int_b^a -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$V_{bc} = \int_b^c E_r \cdot dL = \int_b^c \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \quad (2)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$q_1 = q \frac{a(c-b)}{b(c-a)}, \quad q_2 = q \frac{c(b-a)}{b(c-b)}$$

حال با داشتن پتانسیلهای هر یک از کره‌ها و بارهای آنها انرژی ذخیره شده در سیستم را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم.

$$W_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_S V dS$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_a} \rho_{S_a} V_a dS + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_b} \rho_{S_b} V_b dS + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_c} \rho_{S_c} V_c dS$$

اما $V_a = V_c = 0$ است.

$$V_b = V_{ba} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$W_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_b} \rho_{S_b} V_b dS = \frac{1}{\epsilon_0} V_b \int_{S_b} \rho_{S_b} dS = \frac{1}{\epsilon_0} V_b q = \frac{1}{\epsilon_0} q \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

پس از جایگزینی q_1 بر حسب q ,

$$W_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{(c-b)(b-a)}{b^2(c-a)}$$

۲۵. الف) فرض می‌کنیم بار Q روی کره میانی پدید آید. آنگاه با استفاده از قانون گوس، داریم:

$$E = \begin{cases} E_1 = [Q_1 / (4\pi\epsilon_0 r^2)] \hat{a}_r & a < r < b \\ E_2 = [(Q_1 + Q) / (4\pi\epsilon_0 r^2)] \hat{a}_r & b < r < c \\ E_3 = [(Q_1 + Q - Q_2) / (4\pi\epsilon_0 r^2)] \hat{a}_r & r > c \end{cases}$$

برای تعیین Q از تساوی $V_c = V_{cb}$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_c^\infty \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{L} = \int_c^b \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{L} \Rightarrow \int_c^\infty \frac{Q_1 + Q - Q_2}{4\pi\epsilon_r r^2} dr = \int_c^b \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_r r^2} dr$$

$$(Q_1 + Q - Q_2) \left(\frac{1}{c}\right) = (Q_1 + Q) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow Q = -Q_1 + \frac{b}{c} Q_2$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_r r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & a < r < b \\ \frac{b Q_2}{4\pi\epsilon_r c r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & b < r < c \\ \frac{(b-c) Q_2}{4\pi\epsilon_r c r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & r > c \end{cases}$$

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \begin{cases} \int_r^b \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_r r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & a \leq r \leq b \\ \int_r^b \frac{b Q_2}{4\pi\epsilon_r c r^2} dr = \frac{b Q_2}{4\pi\epsilon_r c} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & b \leq r \leq c \\ \int_r^\infty \frac{(b-c) Q_2}{4\pi\epsilon_r c r^2} dr = \frac{(b-c) Q_2}{4\pi\epsilon_r c r} & r \geq c \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) & r \leq a \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{4} V_a Q_1 + \frac{1}{4} V_b Q - \frac{1}{4} V_c Q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_r} \left[\frac{(b-a) Q_1^2}{ab} + \frac{(c-b) Q_2^2}{c^2} \right] \quad (\text{ب})$$

۲۶. مقدار کار مورد نیاز برابر تفاوت انرژیهای الکتریکی ذخیره شده در میدانهای \mathbf{E}_a ناشی از توزیع بار روی کره به شعاع a و \mathbf{E}_b ناشی از توزیع بار روی کره‌ای به شعاع b است. میدانهای \mathbf{E}_a و \mathbf{E}_b به سادگی با استفاده از قانون گوس به دست می‌آیند.

$$\mathbf{E}_a = E_{a,r}(r) \hat{\mathbf{a}}_r$$

سطح کره‌ای به شعاع r و هم مرکز: S ، بار آزاد محصور در S : $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc}$
 با کره بار به شعاع a

$$\epsilon_r (E_{a,r})(4\pi r^2) = \begin{cases} 4\pi a^2 \rho_s & r > a \\ 0 & r < a \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E}_a = \begin{cases} \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_r r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

به طور مشابهی می توان نشان داد:

$$E_b = \begin{cases} \frac{\rho_S \cdot a^{\gamma}}{\epsilon \cdot r^{\gamma}} \hat{a}_r & r > b \\ 0 & r < b \end{cases}$$

$$E_a \text{ در میدان ذخیره شده در } E_a^{\gamma} dV = \frac{1}{\gamma} \epsilon \cdot \left(\frac{\rho_S \cdot a^{\gamma}}{\epsilon} \right)^{\gamma} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\gamma\pi} d\varphi \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^{\gamma}} = W_a$$

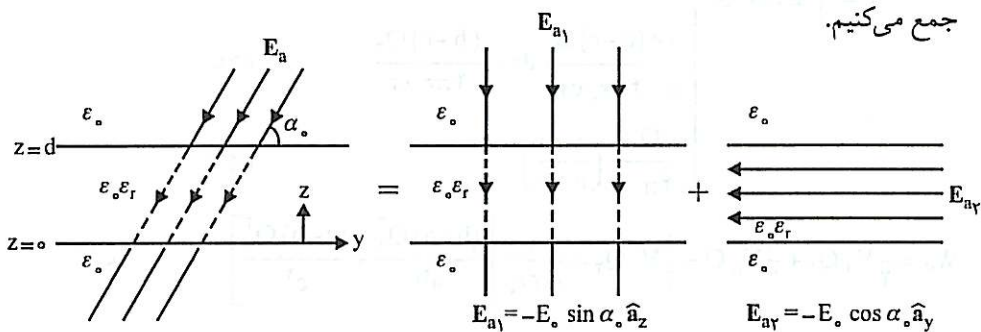
$$E_b \text{ در میدان ذخیره شده در } E_b^{\gamma} dV = \frac{1}{\gamma} \epsilon \cdot \left(\frac{\rho_S \cdot a^{\gamma}}{\epsilon} \right)^{\gamma} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\gamma\pi} d\varphi \int_b^{\infty} \frac{dr}{r^{\gamma}} = W_b$$

$$W_a = \frac{\gamma\pi a^{\gamma} \rho_S^{\gamma}}{\epsilon} , \quad W_b = \frac{\gamma\pi a^{\gamma} \rho_S^{\gamma}}{\epsilon \cdot b}$$

$$\Delta W = W_b - W_a = \frac{\gamma\pi a^{\gamma} (a-b) \rho_S^{\gamma}}{\epsilon \cdot b}$$

■

۲۷. الف) میدان الکتریکی E_a را به دو مؤلفه E_{a_1} و E_{a_2} در امتدادهای z و y ، مطابق شکل پ-۳۰، تجزیه می کنیم و مسئله را برای هر کدام از این مؤلفه ها جداگانه حل نموده و نتایج را با یکدیگر جمع می کنیم.



شکل پ-۳۰

(i) میدان E_{a_1} جسم عایق را به طور یکنواخت در امتداد محور z قطبی می کند. در این حالت، وضعیت مانند مثال ۳-۳ است. بردار چگالی شار الکتریکی D_1 در تمام نقاط فضا یکسان است و در بیرون عایق میدان ثانویه پدید نمی آید.

$$D_1 = \epsilon \cdot E_{a_1} = -\epsilon \cdot E_0 \cdot \sin \alpha_0 \cdot \hat{a}_z , \text{ در تمام نقاط فضا}$$

$$E_1 = \begin{cases} D_1 / \epsilon & z < 0, z > d \\ D_1 / \epsilon \cdot \epsilon_r & 0 < z < d \end{cases}$$

(ii) میدان E_{a_1} جسم عایق را به طور یکنواخت در امتداد محور y قطبی می‌کند. اگر بردار پلاریزاسیون را در این حالت P_γ بنامیم، می‌توان نوشت:

$$P_\gamma = -P \cdot \hat{a}_y$$

چگالیهای سطحی و حجمی بارهای القایی مقید برای این حالت عبارتند از:

$$\rho_{P_\gamma} = -\nabla \cdot P_\gamma = 0, \quad \rho_{PS_\gamma} = P_\gamma \cdot \hat{a}_n = -P \cdot \hat{a}_y \cdot (\pm \hat{a}_z) = 0$$

بنابراین، بارهای القایی مقید در این حالت ایجاد نمی‌شوند و بنابراین میدان ثانویه‌ای نیز پدید نمی‌آید. میدان کل در این حالت همان میدان اولیه است.

$$E_\gamma = E_{a_\gamma} = -E \cdot \cos \alpha \cdot \hat{a}_y, \quad D_\gamma = \begin{cases} \epsilon_r \cdot E_\gamma & z < 0, z > d \\ \epsilon_r \cdot \epsilon_r E_\gamma & 0 < z < d \end{cases}$$

اکنون می‌توان میدانهای D و E را به شرح زیر محاسبه کرد:

$$D = D_1 + D_\gamma$$

$$D = \begin{cases} \epsilon_r E_{a_\gamma} + \epsilon_r E_{a_1} = \epsilon_r E_a & z < 0, z > d \\ \epsilon_r \epsilon_r E_{a_\gamma} + \epsilon_r E_{a_1} = -\epsilon_r E \cdot (\epsilon_r \cos \alpha \cdot \hat{a}_y + \sin \alpha \cdot \hat{a}_z) & 0 < z < d \end{cases}$$

$$E = E_1 + E_\gamma$$

$$E = \begin{cases} E_{a_\gamma} + E_{a_1} = E_a & z < 0, z > d \\ E_{a_\gamma} + \frac{E_{a_1}}{\epsilon_r} = -E \cdot \left(\cos \alpha \cdot \hat{a}_y + \frac{\sin \alpha}{\epsilon_r} \hat{a}_z \right) & 0 < z < d \end{cases}$$

$$P = D - \epsilon_r E = -\epsilon_r E \cdot (\epsilon_r \cos \alpha \cdot \hat{a}_y + \sin \alpha \cdot \hat{a}_z) + \epsilon_r E \cdot \left(\cos \alpha \cdot \hat{a}_y + \frac{\sin \alpha}{\epsilon_r} \hat{a}_z \right) \quad (\text{ب})$$

$$P = -\epsilon_r E \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \hat{a}_z + \epsilon_r E \cdot \cos \alpha \cdot (1 - \epsilon_r) \hat{a}_y$$

$$\rho_{PS} = P \cdot \hat{a}_n = \begin{cases} P \cdot \hat{a}_z = -\epsilon_r E \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) & z = d \\ P \cdot (-\hat{a}_z) = \epsilon_r E \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) & z = 0 \end{cases}$$

■

۲۸. بار نقطه‌ای Q ، بارهای مثبت و منفی روی سطوح درونی و بیرونی محفظه کروی القا می‌کند. چگالی توزیع بار روی سطح درونی محفظه بستگی به مکان بار نقطه‌ای Q دارد، زیرا میدان ایجاد کننده این توزیع با تغییر مکان Q تغییر می‌کند. توزیع بار روی سطح خارجی، تحت تأثیر هیچ

میدانی نخواهد بود (میدان در ناحیه بین سطوح درونی و بیرونی محفظه صفر است) و به طور طبیعی به گونه‌ای یکنواخت توزیع می‌شود. میدان در خارج محفظه فقط به توزیع بار روی سطح بیرونی بستگی دارد و به دلیل تقارن این توزیع، میدان در خارج محفظه همواره برابر $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ خواهد بود. به عبارت دیگر جابه‌جایی بار Q در درون محفظه (البته به شرط آنکه به اندازه کافی آهسته انجام گیرد که بتوان از تغییرات زمانی صرف‌نظر کرد) هیچ تأثیری بر میدان در بیرون محفظه هادی نخواهد داشت!

$$C = \frac{\int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}, \quad R = \frac{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad .29$$

اگر ϵ و σ مقادیر ثابتی باشند داریم:

$$RC = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \frac{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

۳۰. انرژی ذخیره شده در میدان ناشی از توزیع باری روی سطح کره‌ای به شعاع a عبارت است از:

$$W_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad , \quad r=a$$

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e \Big|_{r=a} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=a} \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

چون F متناسب با Q^2 است، مثبت یا منفی بودن Q تأثیری در جهت این نیرو ندارد.

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad , \quad C = \frac{a}{d} [\epsilon_0 \epsilon_r x + \epsilon_0 (l-x)] \quad .31$$

$$Q = CV = \frac{aV}{d} [\epsilon_0 \epsilon_r x + \epsilon_0 (l-x)]$$

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) \hat{\mathbf{a}}_x = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{a} \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{[\epsilon_0 \epsilon_r x + \epsilon_0 (l-x)]^2} \hat{\mathbf{a}}_x$$

با جایگزین نمودن Q ، داریم:

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) a V^2}{2d} \hat{\mathbf{a}}_x$$

۳۲. ابتدا انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه می‌کنیم. میدان D در ناحیه $a < r < b$ عبارت است از:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r, \quad a < r < b$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad r < a, r > b$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & a < r < c \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_r r^2} \hat{\mathbf{a}}_r & c < r < b \\ \mathbf{0} & r < a, r > b \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_a^c \frac{Q^2 dr}{(4\pi)^2 \epsilon r^4} + \int_c^b \frac{Q^2 dr}{(4\pi)^2 \epsilon_r r^4} \right] \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_r} \right) \right] \frac{Q^2}{16\pi^2}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} \right) + \left(\frac{1}{\epsilon_r c} \right) \right] - \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_r b}$$

= W_e

جهت تفهیم استخراج گرادیان، W_e را به صورت زیر می‌نویسیم:

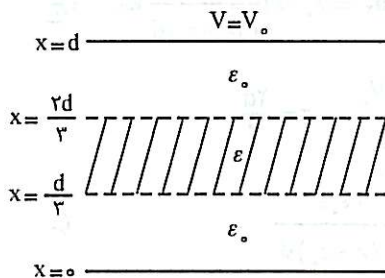
$$W_e = W_e - \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_r r} \Big|_{r=b}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{\mathbf{a}}_r \Big|_{r=b} = -\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_r b^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

پ-۴ حل مسائل خودآزمایی فصل چهارم

۱. الف) با توجه به شکل پ-۳۱، بدیهی است که پتانسیل

فقط تابعی از x می‌باشد، $V = V(x)$. پس می‌توان نوشت:



شکل پ-۳۱

$$V = \begin{cases} A_1 x + B_1 = V_1 & 0 \leq x \leq \frac{d}{3} \\ A_2 x + B_2 = V_2 & \frac{d}{3} \leq x \leq \frac{2d}{3} \\ A_3 x + B_3 = V_3 & \frac{2d}{3} \leq x \leq d \end{cases}$$