.۲۲

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \quad , \quad A\, dV = \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_r$$

$$\hat{a}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y + \cos\theta\,\hat{a}_z$$

$$\int_V A\, dV = \hat{a}_x \int_0^a dr \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi + \hat{a}_y \int_0^a dr \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$+ \hat{a}_z \int_0^a dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi$$

با توجه به اینکه $\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{2}$ ، $\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 1$ و $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}$ است، داریم:

$$\int_V A\, dV = \frac{\pi a}{4}(\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z)$$

■

پ-۲ حل مسائل خودآزمایی فصل دوم

۱. الف) معادلات حرکت الکترون در بین صفحات انحراف دهنده عبارتند از:

$$y = \frac{1}{2} a t^2 \quad , \quad x = v_0 t$$

پس از حذف t از دو معادله مزبور، معادله مسیر حرکت الکترون برابر است با:

$$y = \frac{1}{2} a \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

اندازه بردار شتاب، $|a|$ ، را با استفاده از قانون نیوتون و قانون کولمب به دست می‌آوریم:

$$F = ma = eE \Rightarrow |a| = \frac{e}{m}|E| = \frac{eE_0}{m} \Rightarrow y = \frac{eE_0}{2mv_0^2} x^2$$

به ازای $x=L$، داریم:

$$y_L = \frac{eE_0 L^2}{2mv_0^2}$$

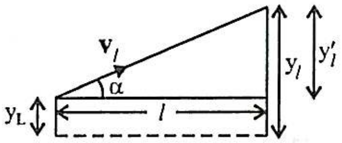
بردار سرعت در بین صفحات انحراف دهنده عبارت است از:

$$\mathbf{v} = v_x\,\hat{a}_x + v_y\,\hat{a}_y = v_0\,\hat{a}_x + |a| t\,\hat{a}_y$$

که در آن $v_y = |a| t = \frac{eE_0 t}{m}$ است. در لحظه خروج الکترون از بین صفحات انحراف دهنده، $x=L$ و $t = \frac{L}{v_0}$ است. پس:

$$\mathbf{v}\big|_{x=L} = \mathbf{v}_l = v_0\,\hat{a}_x + \frac{eE_0 L}{mv_0}\hat{a}_y$$

ب) با توجه به شکل پ-۴ داریم:



شکل پ-۴

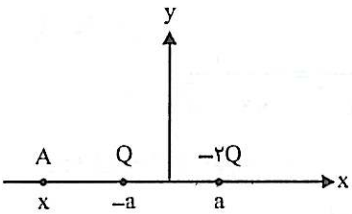
$$y_l = y_L + y'_l$$

$$y'_l = l \tan\alpha = l\frac{v_y}{v_x} = l\frac{\frac{eE_\circ L}{mv_\circ}}{v_\circ} = \frac{eE_\circ lL}{mv_\circ^۲}$$

$$y_l = \frac{eE_\circ L^۲}{۲mv_\circ^۲} + \frac{eE_\circ lL}{mv_\circ^۲} = \frac{eE_\circ L}{mv_\circ^۲}\left(\frac{L}{۲}+l\right) = \frac{eV_\circ L}{mdv_\circ^۲}\left(\frac{L}{۲}+l\right)$$

■

۲. اگر A نقطه‌ای باشد که در آن شدت میدان الکتریکی صفر است، این نقطه باید در امتداد خطی باشد که بارهای ۲Q- و Q را به یکدیگر وصل می‌کند و نیز باید در سمت چپ بار Q قرار گیرد. با توجه به این نکات نقطه A را مطابق شکل پ-۵ در نظر می‌گیریم. آنگاه:



شکل پ-۵

$$E = \frac{-۲Q}{۴\pi\varepsilon_\circ(-x+a)^۲}\hat{a}_x + \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ(-x-a)^۲}\hat{a}_x = \circ$$

$$\frac{۲}{(a-x)^۲} - \frac{۱}{(a+x)^۲} = \circ \Rightarrow ۲(a+x)^۲ = (a-x)^۲ \Rightarrow \sqrt{۲}(a+x) = \pm(a-x)$$

با علامت +: $\sqrt{۲}(a+x) = a-x \Rightarrow x = -(۳-۲\sqrt{۲})a > \circ$ غیرقابل قبول،

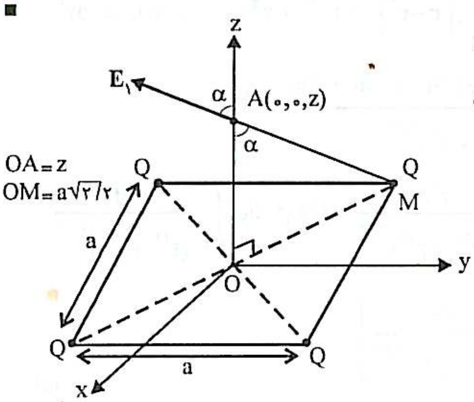
با علامت -: $\sqrt{۲}(a+x) = -(a-x) \Rightarrow x = -(۳+۲\sqrt{۲})a < \circ$

$$x \cong -۵/۸۲a$$

بنابراین، میدان در نقطه $(-۵/۸۲a, \circ, \circ)$ صفر است.

■

۳. به دلیل تقارن توزیع بارها، میدان کل در نقطه A(۰,۰,z) فقط مؤلفه z خواهد داشت (شکل پ-۶).



شکل پ-۶

$$E_{tot} = ۴\,|E_۱|\cos\alpha\,\hat{a}_z$$

$$|E_۱| = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ AM^۲}$$

$$AM^۲ = OA^۲ + OM^۲ = z^۲ + \left(\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = z^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

$$\cos\alpha = \frac{OA}{AM} = \frac{z}{\sqrt{z^۲ + a^۲/۲}}$$

$$E = \frac{Qz}{\pi\varepsilon_\circ\left(z^۲+a^۲/۲\right)^{۳/۲}}\hat{a}_z$$

■

.۴
$$\mathbf{E}=\int_C \frac{\rho_{L\circ}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dL'}{۴\pi\varepsilon_\circ\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{۳}}$$

$$\mathbf{r}=r\,\hat{a}_r \quad,\quad \mathbf{r}'=z'\hat{a}_z \quad,\quad dL'=dz' \quad,\quad \mathbf{r}-\mathbf{r}'=r\,\hat{a}_r-z'\hat{a}_z \quad,\quad \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{۳}=(r^{۲}+z'^{۲})^{۳/۲}$$

$$\mathbf{E}=\int_\circ^\infty \frac{\rho_{L\circ}(r\,\hat{a}_r-z'\hat{a}_z)\,dz'}{۴\pi\varepsilon_\circ(r^{۲}+z'^{۲})^{۳/۲}}=\frac{\rho_{L\circ}}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[r\,\hat{a}_r\int_\circ^\infty\frac{dz'}{(r^{۲}+z'^{۲})^{۳/۲}}-\hat{a}_z\int_\circ^\infty\frac{z'\,dz'}{(r^{۲}+z'^{۲})^{۳/۲}}\right]$$

با استفاده از:

$$\int\frac{dx}{(x^{۲}+a^{۲})^{۳/۲}}=\frac{x}{a^{۲}\sqrt{x^{۲}+a^{۲}}} \quad,\quad \int\frac{x\,dx}{(x^{۲}+a^{۲})^{۳/۲}}=-\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+a^{۲}}}$$

نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{E}(r,\varphi,\circ)=\frac{\rho_{L\circ}}{۴\pi\varepsilon_\circ r}(\hat{a}_r-\hat{a}_z)$$

■

.۵ الف) میدان الکتریکی کل در نقطه A از حاصل جمع میدانهای دو نیم خط بار به دست می‌آید. ابتدا میدان حاصل از نیم خط باری را که با محور x زاویه $\varphi_\circ$ می‌سازد به دست می‌آوریم. این میدان را $E_۱$ می‌نامیم، آنگاه:

$$\mathbf{E}_۱=\int_{C_۱} \frac{\rho_{L\circ}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dL'}{۴\pi\varepsilon_\circ\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{۳}}$$

که در آن $C_۱$ نیم خط باری است که با محور x زاویه $\varphi_\circ$ می‌سازد. در این مسئله $\mathbf{r}$، $\mathbf{r}'$ و dL' عبارتند از:

$$\mathbf{r}=z\hat{a}_z \quad,\quad \mathbf{r}'=r'\hat{a}_r=r'\cos\varphi_\circ\,\hat{a}_x+r'\sin\varphi_\circ\,\hat{a}_y$$

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}'=-r'\cos\varphi_\circ\,\hat{a}_x-r'\sin\varphi_\circ\,\hat{a}_y+z\hat{a}_z \;\Rightarrow\; \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|=(r'^{۲}+z^{۲})^{۱/۲} \quad,\quad dL'=dr'$$

$$\mathbf{E}_۱(\circ,\circ,z)=\frac{\rho_{L\circ}}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^\infty\frac{-r'\cos\varphi_\circ\,\hat{a}_x-r'\sin\varphi_\circ\,\hat{a}_y+z\hat{a}_z}{(r'^{۲}+z^{۲})^{۳/۲}}dr'$$

$$=\frac{\rho_{L\circ}}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[-\cos\varphi_\circ\,\hat{a}_x\int_\circ^\infty\frac{r'\,dr'}{(r'^{۲}+z^{۲})^{۳/۲}}-\sin\varphi_\circ\,\hat{a}_y\int_\circ^\infty\frac{r'\,dr'}{(r'^{۲}+z^{۲})^{۳/۲}}\right.$$

$$\left.+z\hat{a}_z\int_\circ^\infty\frac{dr'}{(r'^{۲}+z^{۲})^{۳/۲}}\right]$$

اما:

$$\int_\circ^\infty\frac{r'\,dr'}{(r'^{۲}+z^{۲})^{۳/۲}}=\left[-\frac{۱}{(r'^{۲}+z^{۲})^{۱/۲}}\right]_\circ^\infty=\frac{۱}{\sqrt{z^{۲}}}=\frac{۱}{|z|}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dr'}{(r'^{2}+z^{2})^{3/2}}=\left[\frac{r'}{z^{2}(r'^{2}+z^{2})^{1/2}}\right]_{0}^{\infty}=\frac{1}{z^{2}}$$

آنگاه:

$$E_1(0,0,z)=\frac{\rho_{L0}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|}(-\cos\varphi_0\,\hat{a}_x-\sin\varphi_0\,\hat{a}_y)+\frac{1}{z}\hat{a}_z\right]$$

میدان حاصل از نیم خط بار منطبق بر محور x را می‌توان از عبارت میدان E_1 به ازای $\varphi_0=0$ به دست آورد. این میدان را E_2 می‌نامیم.

$$E_2(0,0,z)=E_1(0,0,z)\Big|_{\varphi_0=0}=\frac{\rho_{L0}}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{|z|}\hat{a}_x+\frac{1}{z}\hat{a}_z\right)$$

$$E_{tot}=E_1+E_2=\frac{\rho_{L0}}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1+\cos\varphi_0}{|z|}\hat{a}_x-\frac{\sin\varphi_0}{|z|}\hat{a}_y+\frac{2}{z}\hat{a}_z\right]$$

ب) به ازای $\varphi_0=\pi$ داریم:

$$E=\frac{\rho_{L0}}{2\pi\varepsilon_0 z}\hat{a}_z$$

می‌دانیم که میدان الکتریکی حاصل از یک خط بینهایت بار با چگالی ثابت ρ_{L0} در نقطه‌ای به فاصله R از خط بار از رابطه $E=\frac{\rho_{L0}}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{a}_R$ به دست می‌آید (رابطه ۲-۲۴). در اینجا $\hat{a}_R$ بردار واحد در امتداد R و از خط بار به سمت نقطه‌ای که میدان در آن مورد نظر است می‌باشد. برای خط باری که روی محور x واقع باشد، فاصله نقطه‌ای روی محور z از خط همان $|z|$ است. اما $\hat{a}_R$ برابر $\hat{a}_z$ است اگر $z>0$ و برابر $-\hat{a}_z$ است اگر $z<0$ باشد. پس، می‌توان نوشت: $E=\pm\frac{\rho_{L0}}{2\pi\varepsilon_0|z|}\hat{a}_z$، که با حذف علامت قدر مطلق، سرانجام داریم:

$$E=\frac{\rho_{L0}}{2\pi\varepsilon_0 z}\hat{a}_z$$

■

۶. الف)

$$E=\int_C\frac{\rho_L(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dL'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}\quad;\quad \rho_L=\begin{cases}|z| & |z|<a\\ 0 & |z|>a\end{cases}$$

$$\mathbf{r}=r\,\hat{a}_r+z\,\hat{a}_z\ ,\ \ \mathbf{r}'=z'\hat{a}_z\ ,\ \ \mathbf{r}-\mathbf{r}'=r\,\hat{a}_r+(z-z')\,\hat{a}_z$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}=[r^{2}+(z-z')^{2}]^{3/2}\ ,\quad dL'=dz'$$

$$E(r,\varphi,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{-a}^{a}\frac{\rho_L(z')[r\,\hat{a}_r+(z-z')\,\hat{a}_z]}{[r^{2}+(z-z')^{2}]^{3/2}}dz'\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(r\hat{a}_r+z\hat{a}_z)\underbrace{\int_{-a}^{a}\frac{|z'|\,dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}}_{=I_1}-\hat{a}_z\underbrace{\int_{-a}^{a}\frac{z'\,|z'|}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}}_{=I_2}\right\}$$

$$I_1=\int_{-a}^{0}\frac{-z'dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}+\int_{0}^{a}\frac{z'dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

اما:

$$\int\frac{z'dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}=\frac{zz'-(r^2+z^2)}{r^2\sqrt{r^2+(z-z')^2}}=f(r,z,z')$$

$$I_1=f(r,z,a)+f(r,z,-a)-2f(r,z,0)$$

$$I_2=\int_{-a}^{0}\frac{-z'^2dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}+\int_{0}^{a}\frac{z'^2dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

لیکن:

$$\int\frac{z'^2dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{3/2}}=\frac{z^2(z'-z)-r^2(z'+z)}{r^2\sqrt{r^2+(z-z')^2}}+\ln\left[\sqrt{r^2+(z-z')^2}-(z-z')\right]$$

$$=g(r,z,z')$$

$$I_2=g(r,z,a)+g(r,z,-a)-2g(r,z,0)$$

سرانجام:

$$E(r,\varphi,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big\{(r\hat{a}_r+z\hat{a}_z)[f(r,z,a)+f(r,z,-a)-2f(r,z,0)]$$
$$-\hat{a}_z[g(r,z,a)+g(r,z,-a)-2g(r,z,0)]\Big\}$$

ب) $\rho_L=\begin{cases} z & |z|<a \\ 0 & |z|>a\end{cases}$ روی محور z

به نحو مشابهی می‌توان نشان داد که در این حالت،

$$E(r,\varphi,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(r\hat{a}_r+z\hat{a}_z)[f(r,z,a)-f(r,z,-a)]-\hat{a}_z[g(r,z,a)-g(r,z,-a]\right\}$$

روی صفحه xy، یعنی وقتی که $z=0$ است، نتایج مزبور به میزان زیادی ساده می‌شوند. خلاصه این نتایج عبارتند از:

الف) $$E(r,\varphi,0)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)\hat{a}_r$$

ب) $$E(r,\varphi,0)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}-\ln\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}\right)\hat{a}_z$$

■

۷.
$$E=\int_C \frac{\rho_{L_\circ}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dL'}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}$$

$$\mathbf{r}=z\hat{a}_z\ ,\quad \mathbf{r}'=R\,\hat{a}_r=R\,(\cos\varphi'\,\hat{a}_x+\sin\varphi'\,\hat{a}_y)\ ,\quad dL'=R\,d\varphi'$$

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}'=z\hat{a}_z-R\,(\cos\varphi'\,\hat{a}_x+\sin\varphi'\,\hat{a}_y)\ \Rightarrow\ \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3=(R^2+z^2)^{3/2}$$

$$E(0,0,z)=\int_0^{\varphi_\circ}\frac{R\rho_{L_\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ(R^2+z^2)^{3/2}}(-R\cos\varphi'\,\hat{a}_x-R\sin\varphi'\,\hat{a}_y+z\hat{a}_z)\,d\varphi'$$

$$=\frac{R\rho_{L_\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ(R^2+z^2)^{3/2}}\left[-R\,\hat{a}_x\int_0^{\varphi_\circ}\cos\varphi'\,d\varphi'-R\,\hat{a}_y\int_0^{\varphi_\circ}\sin\varphi'\,d\varphi'+z\hat{a}_z\int_0^{\varphi_\circ}d\varphi'\right]$$

$$E(0,0,z)=\frac{R\rho_{L_\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ(R^2+z^2)^{3/2}}[-R\sin\varphi_\circ\,\hat{a}_x+R\,(\cos\varphi_\circ-1)\,\hat{a}_y+z\varphi_\circ\,\hat{a}_z]$$

■

۸.
$$E=\int_S \frac{\rho_{S_\circ}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dS'}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}$$

$$\mathbf{r}'=a\,\hat{a}_r+z'\,\hat{a}_z\ ,\quad \mathbf{r}=z\hat{a}_z\ ,\quad \mathbf{r}-\mathbf{r}'=(z-z')\,\hat{a}_z-a\,\hat{a}_r=(z-z')\,\hat{a}_z-a\,(\cos\varphi'\hat{a}_x+\sin\varphi'\hat{a}_y)$$

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3=[(z-z')^2+a^2]^{3/2}\ ,\quad dS'=a\,d\varphi'\,dz'$$

$$E(0,0,z)=\frac{a\rho_{S_\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ}\left\{\int_{-h}^{h}\left[\hat{a}_z\int_0^{2\pi}\frac{(z-z')\,d\varphi'}{[(z-z')^2+a^2]^{3/2}}-\frac{a}{[(z-z')^2+a^2]^{3/2}}\left(\hat{a}_x\int_0^{2\pi}\cos\varphi'd\varphi'\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\hat{a}_y\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\,d\varphi'\right)\right]dz'\right\}$$

$$E=(0,0,z)=\frac{a\rho_{S_\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ}\hat{a}_z\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-h}^{h}\frac{(z-z')\,dz'}{[(z-z')^2+a^2]^{3/2}}$$

با توجه به اینکه،

$$\int_{-h}^{h}\frac{(z-z')\,dz'}{[(z-z')^2+a^2]^{3/2}}=\left[\frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+a^2}}\right]_{-h}^{h}$$

سرانجام:

$$E(0,0,z)=\frac{a\rho_{S_\circ}}{2\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{\sqrt{(z-h)^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{(z+h)^2+a^2}}\right]\hat{a}_z$$

■

۹. بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ مساوی بردارهای نظیر در مسئله ۸ هستند. پس:

$$E(\circ,\circ,z)=\frac{a\rho_{S_\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ}\left\{\widehat{a}_z\int_\circ^{\varphi_\circ}d\varphi'\int_{-h}^{h}\frac{(z-z')\,dz'}{[(z-z')^2+a^2]^{3/2}}\right.$$

$$\left.-\int_{-h}^{h}\frac{a\,dz'}{[(z-z')^2+a^2]^{3/2}}\left[\widehat{a}_x\int_\circ^{\varphi_\circ}\cos\varphi'\,d\varphi'+\widehat{a}_y\int_\circ^{\varphi_\circ}\sin\varphi'\,d\varphi'\right]\right\}$$

$$E(\circ,\circ,z)=\frac{\rho_{S_\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ}\left\{-\left[\frac{z-h}{\sqrt{(z-h)^2+a^2}}-\frac{z+h}{\sqrt{(z+h)^2+a^2}}\right][\sin\varphi_\circ\,\widehat{a}_x+(1-\cos\varphi_\circ)\widehat{a}_y]\right.$$

$$\left.+a\varphi_\circ\left[\frac{1}{\sqrt{(z-h)^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{(z+h)^2+a^2}}\right]\widehat{a}_z\right\}$$

■

$$E(\circ,\circ,\circ)=\int_S\frac{\rho_{S_\circ}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dS'}{4\pi\varepsilon_\circ|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$.۱۰

$$\mathbf{r}=\mathbf{o}\quad,\quad\mathbf{r}'=a\,\widehat{a}_r=a(\sin\theta'\cos\varphi'\,\widehat{a}_x+\sin\theta'\sin\varphi'\,\widehat{a}_y+\cos\theta'\,\widehat{a}_z)$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=a\ ,\ dS'=a^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

$$E(\circ,\circ,\circ)=\int_\circ^{\pi/2}\int_\circ^{\pi/2}\frac{-a^3\rho_{S_\circ}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'}{4\pi\varepsilon_\circ a^3}(\sin\theta'\cos\varphi'\,\widehat{a}_x+\sin\theta'\sin\varphi'\,\widehat{a}_y+\cos\theta'\,\widehat{a}_z)$$

$$=-\frac{\rho_{S_\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\widehat{a}_x\int_\circ^{\pi/2}\sin^2\theta'\,d\theta'\int_\circ^{\pi/2}\cos\varphi'\,d\varphi'+\widehat{a}_y\int_\circ^{\pi/2}\sin^2\theta'\,d\theta'\int_\circ^{\pi/2}\sin\varphi'\,d\varphi'\right.$$

$$\left.+\widehat{a}_z\int_\circ^{\pi/2}\sin\theta'\cos\theta'\,d\theta'\int_\circ^{\pi/2}d\varphi'\right]$$

با توجه به اینکه،

$$\int_\circ^{\pi/2}\sin^2\theta'\,d\theta'=\frac{\pi}{4}\ ,\ \int_\circ^{\pi/2}\sin\theta'\cos\theta'\,d\theta'=\frac{1}{2}\ ,\ \int_\circ^{\pi/2}\sin\varphi'\,d\varphi'=\int_\circ^{\pi/2}\cos\varphi'\,d\varphi'=1$$

سرانجام داریم:

$$E(\circ,\circ,\circ)=-\frac{\rho_{S_\circ}}{16\varepsilon_\circ}(\widehat{a}_x+\widehat{a}_y+\widehat{a}_z)$$

■

۱۱. الف)

$$z=a \text{ میدان بار در صفحه } : E_۱ = \begin{cases} \dfrac{\rho_{S_\circ}}{۲\varepsilon_\circ}\hat{a}_z & z>a \\ \dfrac{-\rho_{S_\circ}}{۲\varepsilon_\circ}\hat{a}_z & z<a \end{cases}$$

$$z=-a \text{ میدان بار در صفحه } : E_۲ = \begin{cases} \dfrac{-\rho_{S_\circ}}{۲\varepsilon_\circ}\hat{a}_z & z>-a \\ \dfrac{\rho_{S_\circ}}{۲\varepsilon_\circ}\hat{a}_z & z<-a \end{cases}$$

z	$-a$		a
$E_۱$	$(-\rho_{S_\circ}/۲\varepsilon_\circ)\hat{a}_z$	$(-\rho_{S_\circ}/۲\varepsilon_\circ)\hat{a}_z$	$(\rho_{S_\circ}/۲\varepsilon_\circ)\hat{a}_z$
$E_۲$	$(\rho_{S_\circ}/۲\varepsilon_\circ)\hat{a}_z$	$(-\rho_{S_\circ}/۲\varepsilon_\circ)\hat{a}_z$	$(-\rho_{S_\circ}/۲\varepsilon_\circ)\hat{a}_z$
$E_۱+E_۲$	o	$(-\rho_{S_\circ}/\varepsilon_\circ)\hat{a}_z$	o

$$E = E_۱ + E_۲ = \begin{cases} -\dfrac{\rho_{S_\circ}}{\varepsilon_\circ}\hat{a}_z & -a<z<a \\ o & z<-a, z>a \end{cases}$$

ب) در محل $z=z'$، لایه باری به ضخامت dz' را می‌توان به منزله یک صفحه بار بینهایت در نظر گرفت که چگالی آن برابر $\rho_S = \left(a-|z'|\right)dz'$ است. میدان حاصل از این لایه بار برابر است با:

$$dE = \begin{cases} \left[\dfrac{a-|z'|}{۲\varepsilon_\circ}\right]dz'\hat{a}_z & z>z' \\ \left[-\dfrac{a-|z'|}{۲\varepsilon_\circ}\right]dz'\hat{a}_z & z<z' \end{cases}$$

$$E = \int dE = \begin{cases} \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{a-|z'|}{۲\varepsilon_\circ}dz'\hat{a}_z = \int_{\circ}^{a} \frac{a-z'}{\varepsilon_\circ}dz'\hat{a}_z & z>a \\ \displaystyle -\int_{-a}^{a} \frac{a-|z'|}{۲\varepsilon_\circ}dz'\hat{a}_z = -\int_{\circ}^{a} \frac{a-z'}{\varepsilon_\circ}dz'\hat{a}_z & z<-a \\ \displaystyle\int_{-a}^{z} \frac{a-|z'|}{۲\varepsilon_\circ}dz'\hat{a}_z - \int_{z}^{a} \frac{a-|z'|}{۲\varepsilon_\circ}dz'\hat{a}_z & -a<z<a \end{cases}$$

$$\int_{0}^{a} \frac{a-z'}{\varepsilon_0}dz' = \frac{a^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\int_{-a}^{z} \frac{a-|z'|}{2\varepsilon_0}dz' - \int_{z}^{a} \frac{a-|z'|}{2\varepsilon_0}dz' =$$

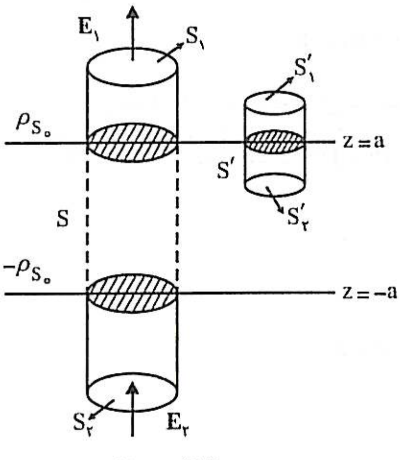
$$\begin{cases} \int_{-a}^{0} \frac{a+z'}{2\varepsilon_0}dz' + \int_{0}^{z} \frac{a-z'}{2\varepsilon_0}dz' - \int_{z}^{a} \frac{a-z'}{2\varepsilon_0}dz' = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(az - \frac{z^2}{2}\right) & 0<z<a \\ \int_{-a}^{z} \frac{a+z'}{2\varepsilon_0}dz' - \int_{z}^{0} \frac{a+z'}{2\varepsilon_0}dz' - \int_{0}^{a} \frac{a-z'}{2\varepsilon_0}dz' = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(az + \frac{z^2}{2}\right) & -a<z<0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه + و - متناظر با $z>0$ و $z<0$ را می‌توان به صورت $\frac{z}{|z|}$ نوشت، به طور خلاصه داریم:

$$E = \begin{cases} \frac{a^2|z|}{2\varepsilon_0 z}\hat{a}_z & |z|>a \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\left(az - \frac{z^3}{2|z|}\right)\hat{a}_z & |z|<a \end{cases}$$

■

۱۲. الف) سطح گوسی S را مطابق شکل پ-۷ در نظر گرفته و برای محاسبه میدان در نواحی $|z| > a$ به‌کار می‌بریم. باید توجه شود که این سطح گوسی نسبت به صفحه $z=0$ الزاماً دارای تقارن نیست. چون توزیع بار در جهات x و y تا بینهایت ادامه دارد و تابعی از x و y نیست، میدان حاصل نیز تابعی از x و y نخواهد بود. به عبارت دیگر میدان الکتریکی در هر صفحه $z=z_0$ مقدار ثابتی دارد. به علاوه، میدان فقط دارای مؤلفه z بوده و در نواحی $|z|>a$ همواره در جهت $+\hat{a}_z$ است. بدین ترتیب، میدان E بر سطح جانبی استوانه S مماس بوده و روی سطوح قاعده آن اندازه ثابتی دارد. اکنون می‌توان نوشت:



شکل پ-۷

$$\oint_S E.dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(\text{بار محصور در } S)$$

$$\oint_S E.dS = \int_{S_1} E_1.dS + \int_{S_2} E_2.dS + \underbrace{\int_{\text{سطح جانبی}} E.dS}_{=0\ (\text{چون } dS \perp E)} = E_1S_1 - E_2S_1$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}(S_1\rho_{S_0}-S_1\rho_{S_0})=0$$

در نتیجه:

$$S_1(E_1-E_2)=0 \;\Rightarrow\; E_1=E_2$$

اگر سطح گوسی را کاملاً در ناحیه $z>a$ یا در ناحیه $z<-a$ در نظر بگیریم، به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که میدان الکتریکی در این نواحی یکنواخت است و تابعی از z نخواهد بود. پس، $E_1=E_2=E_0$ و

$$\mathbf{E}=E_0\,\hat{a}_z\ ,\ \ |z|>a\ ;\ E_0=\text{مقدار ثابت}$$

اما، وجود یک میدان یکنواخت غیر صفر از $z=-\infty$ تا $z=-a$ سپس از $z=a$ تا $z=\infty$ امکان‌پذیر نخواهد بود. زیرا، به دلیل پایستار بودن میدان الکتریکی ساکن، داریم:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=\int_{-\infty}^{-a}E_0\,dz+\int_{-a}^{a}E_0\,dz+\int_{a}^{\infty}E_0\,dz=0$$

در اینجا مسیر C را محور z از $-\infty$ تا $+\infty$ (دایره‌ای به شعاع ∞) در نظر گرفته‌ایم. روشن است که اگر $E_0\neq 0$ باشد $\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=\infty$ خواهد شد و پایستار بودن $\mathbf{E}$ نقض می‌شود. در نتیجه $E_0=0$ و

$$\mathbf{E}=0\ ,\ \ |z|>a$$

حال با داشتن این نتیجه، میدان الکتریکی در ناحیه $|z|<a$ را می‌توان به سادگی با استفاده از سطح گوسی S' محاسبه نمود.

$$\oint_{S'}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\,(\text{بار محصور در } S')$$

$$\oint_{S'}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\underbrace{\int_{S'_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}_{=0\ (\mathbf{E}=0\ \text{چون})}+\int_{S'_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}+\underbrace{\int_{\text{سطح جانبی}}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}_{=0\ (d\mathbf{S}\perp\mathbf{E}\ \text{چون})}=E_n\,S'_1$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{S_0}S'_1)\;\Rightarrow\;E_n=\frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}$$

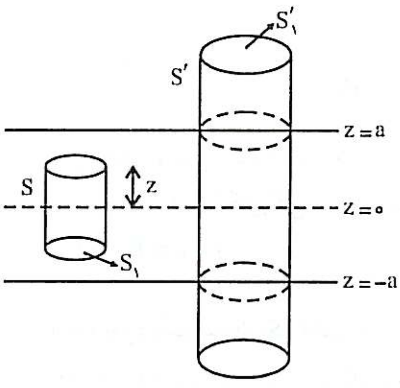
به طور خلاصه داریم:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}-\dfrac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\hat{a}_z & |z|<a\\[2mm] 0 & |z|>a\end{cases}$$

ب)

$$\rho_V=\begin{cases}a-|z| & |z|<a\\ 0 & |z|>a\end{cases}$$

مشابه استدلالی که در بند (الف) بیان گردید، به دلیل آنکه توزیع بار تابعی از x و y نمی‌باشد و در جهات x و y تا بینهایت ادامه دارد، میدان الکتریکی ایجاد شده تابعی از x و y نخواهد بود. به علاوه، میدان الکتریکی فقط دارای مؤلفه $\hat{a}_z$ است. (توزیع بار را می‌توان مجموعه‌ای از صفحات بینهایت بار تلقی کرد که هر کدام فقط مؤلفه $\hat{a}_z$ تولید می‌کند و بنابراین همه توزیع نیز فقط همین مؤلفه را خواهد داشت.) چون توزیع بار تابع زوجی از z است، میدان الکتریکی در جهت $+\hat{a}_z$ برای $z>0$ و در جهت $-\hat{a}_z$ برای $z<0$ می‌باشد. با این توضیحات برای محاسبه میدان در ناحیه $|z|<a$ سطح گوسی S را به صورت شکل پ-۸ در نظر می‌گیریم به طوری که نسبت به $z=0$ متقارن باشد. در این صورت اندازه میدان روی قاعده‌های فوقانی و تحتانی سطح S یکسان خواهد بود (به دلیل تقارن توزیع بار نسبت به $z=0$) با نوشتن قانون گوس روی سطح S، داریم:



شکل پ-۸

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\text{بار محصور در S})=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\int_{\text{قاعده پایین}}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}+\int_{\text{قاعده بالا}}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}+\underbrace{\int_{\text{سطح جانبی}}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}_{=0}=E_z S_1+E_z S_1=2E_z S_1$$

$$Q=\int_V \rho_V\, dV=S_1\int_{-z}^{z}\left(a-|z'|\right)dz'=2S_1\int_0^{z}(a-z')\,dz'=2S_1\left(az-\frac{1}{2}z^2\right)$$

$$E_z=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(az-\frac{1}{2}z^2\right)\qquad z>0,\, z<a$$

$$E_z=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(a|z|-\frac{1}{2}z^2\right)\qquad z<0,\, z>-a$$

برای محاسبه میدان الکتریکی در نواحی $|z|>a$، سطح گوسی S' را در نظر می‌گیریم. این سطح نیز نسبت به $z=0$ متقارن است. مشابه بالا، داریم:

$$\oint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\text{بار محصور در } S')=\frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=2E_z S'_1$$

$$Q'=S'_1\int_{-a}^{a}\left(a-|z'|\right)dz'=2S'_1\left(az'-\frac{1}{2}z'^2\right)\Big|_0^a=a^2S'_1$$

$$E_z = \frac{a^2}{2\varepsilon_0} \quad |z| > a$$

با در نظر گرفتن جهت میدان الکتریکی، نهایتاً داریم:

$$E = \begin{cases} \frac{a^2}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z & z > a \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\left(az - \frac{1}{2}z^2\right)\hat{a}_z & 0 < z < a \\ -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(a|z| - \frac{1}{2}z^2\right)\hat{a}_z & -a < z < 0 \\ -\frac{a^2}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z & z < -a \end{cases}$$

نتیجه مزبور را می‌توان به شکل ساده‌تر زیر نوشت

$$E = \begin{cases} \frac{a^2}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{a}_z & |z| > a \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\left(az - \frac{z^3}{2|z|}\right)\hat{a}_z & |z| < a \end{cases}$$

■

۱۳. الف) سطح گوسی S را به صورت استوانه‌ای به شعاع r، طول l و محوری منطبق بر محور z در نظر می‌گیریم. روشن است که چون توزیع بار تابعی از φ و z نیست میدان ایجاد شده نیز تابعی از φ و z نخواهد بود. به علاوه میدان فقط دارای مؤلفه شعاعی است. به طور خلاصه:

$$E = E_r(r)\hat{a}_r$$

$$\oint_S E.dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(\text{بار محصور در } S) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S E.dS = \underbrace{\oint_{\text{سطوح قاعده}} E.dS}_{=0\ (\text{چون } E \perp dS)} + \oint_{\text{سطح جانبی}} E.dS = E_r(2\pi r l)$$

$$Q = \begin{cases} 0 & r<a \\ 2\pi a l \rho_{S_0} & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases} \Rightarrow E = \begin{cases} 0 & r<a \\ \frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}\hat{a}_r & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases}$$

ب) در این حالت نیز میدان الکتریکی تمام ویژگیهای بند (الف) را دارا خواهد بود. سطح گوسی نیز عیناً مانند حالت (الف) است. پس، می‌توان نوشت:

$$E = E_r(r)\hat{a}_r \quad , \quad \oint_S E.dS = E_r(2\pi r l) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad ; \quad Q: \text{بار محصور در } S$$

$$Q=\int_V \rho_V\, dV'=\int_V \rho_V\,(r'dr'd\varphi'\, dz')$$

$$=\frac{\rho_\circ}{a}\int_\circ^l dz'\int_\circ^{2\pi} d\varphi' \begin{cases}\int_\circ^r r'^2\, dr' & r<a\\ \int_\circ^a r'^2\, dr' & r>a\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2\pi\rho_\circ l}{3a} r^3 & r<a\\ \dfrac{2\pi\rho_\circ l}{3a} a^3 & r>a\end{cases}$$

$$\mathbf{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_\circ rl}\hat{a}_r=\begin{cases}\dfrac{\rho_\circ r^2}{3\varepsilon_\circ a}\hat{a}_r & r<a\\ \dfrac{\rho_\circ a^2}{3\varepsilon_\circ r}\hat{a}_r & r>a\end{cases}$$

■

۱۴. الف) سطح گوسی S را به صورت کره‌ای به شعاع r و به مرکز مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. روشن است که میدان فقط مؤلفه شعاعی داشته و این مؤلفه فقط تابعی از r است. با نوشتن قانون گوس، داریم:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\ (\text{بار محصور در } S)=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}$$

$$E_r(4\pi r^2)=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\begin{cases}\circ & r<a\\ 4\pi a^2\rho_{S_\circ} & a<r<b\\ \circ & r>b\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\mathbf{o} & r<a,\ r>b\\ \dfrac{\rho_{S_\circ}}{\varepsilon_\circ}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\hat{a}_r & a<r<b\end{cases}$$

ب) سطح گوسی S را به صورت بند (الف) و بار محصور در آن را با Q نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{E}=E_r(r)\hat{a}_r\ ,\quad \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}$$

$$E_r(4\pi r^2)=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_V\, dV'=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_\circ^\pi \sin\theta'\, d\theta'\int_\circ^{2\pi} d\varphi\begin{cases}\int_\circ^r \rho_\circ\left(1-\dfrac{r'^2}{a^2}\right) r'^2 dr' & r<a\\ \int_\circ^a \rho_\circ\left(1-\dfrac{r'^2}{a^2}\right) r'^2 dr' & r>a\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4\pi\rho_\circ}{\varepsilon_\circ} r^3\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{r^2}{5a^2}\right) & r<a\\ \dfrac{8\pi\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\dfrac{a^3}{15} & r>a\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_\circ r}{\varepsilon_\circ}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{r^2}{5a^2}\right)\hat{a}_r & r<a\\ \dfrac{2\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\dfrac{a^3}{15r^2}\hat{a}_r & r>a\end{cases}$$

■

۱۵. توزیع بار بین دو استوانه را می‌توان مجموع دو توزیع بار دانست: یک توزیع حجمی با چگالی $+\rho_{\circ}$ در استوانه‌ای به شعاع a و یک توزیع حجمی با چگالی $-\rho_{\circ}$ در استوانه‌ای به شعاع b. میدان در نقطه دلخواه A در درون استوانه به شعاع b را می‌توان مجموع میدانهای حاصل از دو توزیع مذکور دانست. میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله d از محور استوانه‌ای حاوی بار با چگالی $\rho_{\circ}$ (نقطه در درون استوانه فرض می‌شود) عبارت است از:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_{\circ}\,\mathrm{d}}{\text{۲}\varepsilon_{\circ}}\hat{\mathbf{a}}_{\mathrm{r}}$$

رابطه بالا را می‌توان به سادگی از قانون گوس نتیجه گرفت:

$$\oint_{S}\mathbf{E}\,.\,d\mathbf{S}=\frac{\text{۱}}{\varepsilon_{\circ}}\,(\text{بار محصور در S})\;\;;\;\;\mathbf{E}=\mathrm{E_r}(\mathrm{r})\,\hat{\mathbf{a}}_{\mathrm{r}}\;\;,\;\;\mathrm{S}=l\;\text{سطح بسته استوانه‌ای به شعاع d و طول}$$

$$\mathrm{E_r}(\text{۲}\pi\,\mathrm{d}l)=\frac{\text{۱}}{\varepsilon_{\circ}}(\pi\,\mathrm{d}^{\text{۲}}l\rho_{\circ})\;\Rightarrow\;\mathrm{E_r}=\frac{\rho_{\circ}\,\mathrm{d}}{\text{۲}\varepsilon_{\circ}}$$

با به کار بردن این نتیجه برای دو استوانه بار به شعاعهای a و b مذکور، داریم*:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{A}}=\mathbf{E}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{a}}+\mathbf{E}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{b}}=\frac{\rho_{\circ}}{\text{۲}\varepsilon_{\circ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{\rho_{\circ}}{\text{۲}\varepsilon_{\circ}}\overrightarrow{\mathrm{O'A}}=\frac{\rho_{\circ}}{\text{۲}\varepsilon_{\circ}}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{O'A}})=\frac{\rho_{\circ}}{\text{۲}\varepsilon_{\circ}}\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{A}}=\frac{\rho_{\circ}}{\text{۲}\varepsilon_{\circ}}\mathbf{C}\;\;;\;\;\mathbf{C}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$$

چون $\mathbf{C}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ بردار ثابتی است، میدان الکتریکی در درون استوانه به شعاع b یکنواخت است.

■

۱۶. الف) $$\rho_{\mathrm{V}}=\varepsilon_{\circ}\,\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\varepsilon_{\circ}}{\mathrm{r}^{\text{۲}}}\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{r}}(\mathrm{r}^{\text{۲}}\mathrm{E_r})\;\;;\;\;\mathbf{E}=\mathrm{E_r}\,\hat{\mathbf{a}}_{\mathrm{r}}$$

$$\mathrm{r}^{\text{۲}}\mathrm{E_r}=\begin{cases}\dfrac{Q}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}} & a<r<b\\ \circ & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

بدیهی است که $\frac{\partial}{\partial\mathrm{r}}(\mathrm{r}^{\text{۲}}\mathrm{E_r})$ همه جا صفر است، به جز در r=a و r=b که در آنها میدان ناپیوسته است. برای تعیین کامل مشتق $\mathrm{r}^{\text{۲}}\mathrm{E_r}$ از تابع پله $u(r)$ برای بیان $\mathrm{r}^{\text{۲}}\mathrm{E_r}$ استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{r}^{\text{۲}}\mathrm{E_r}=\frac{Q}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}}[u(r-a)-u(r-b)]$$

$$\frac{d}{dr}(\mathrm{r}^{\text{۲}}\mathrm{E_r})=\frac{Q}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}}[\delta(r-a)-\delta(r-b)]$$

$$\rho_{\mathrm{V}}=\frac{Q}{\text{۴}\pi r^{\text{۲}}}[\delta(r-a)-\delta(r-b)]=\frac{Q}{\text{۴}\pi a^{\text{۲}}}\delta(r-a)-\frac{Q}{\text{۴}\pi b^{\text{۲}}}\delta(r-b)$$

این توزیع حجمی را می‌توان به صورت دو توزیع سطحی به ترتیب زیر بیان داشت:

---

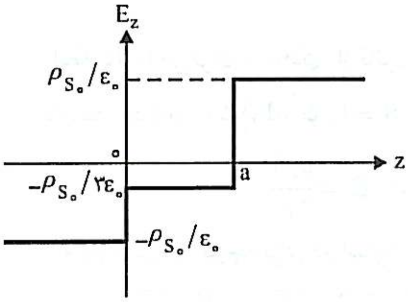
* O و O′ به ترتیب محل تقاطع محورهای دو استوانه به شعاعهای a و b و صفحه عمود بر آنها است که از نقطه A بگذرد.

$$\rho_S = \begin{cases} \dfrac{Q}{۴\pi a^۲} & r=a \\ -\dfrac{Q}{۴\pi b^۲} & r=b \end{cases}$$

ب) $$\rho_V = \varepsilon_۰ \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_۰ \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) = \frac{۱}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{۱-e^{-r}}{۴\pi}\right) = \frac{e^{-r}}{۴\pi r} \quad , \quad ۰ < r < \infty$$

ج) $$\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{a}}_z$$

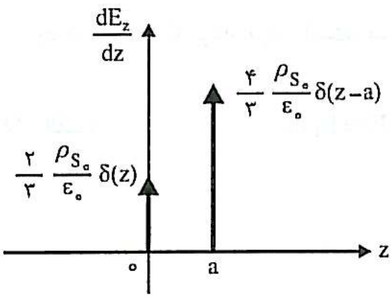
$$\rho_V = \varepsilon_۰ \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_۰ \frac{\partial E_z}{\partial z} = \varepsilon_۰ \frac{dE_z}{dz}$$



شکل پ-۹

با توجه به نمودار تغییرات E_z نسبت به z در شکل پ-۹، مشتق E_z به صورت شکل پ-۱۰ خواهد بود.

$$\rho_V = \frac{۲\rho_{S_۰}}{۳}\delta(z) + \frac{۴\rho_{S_۰}}{۳}\delta(z-a)$$



شکل پ-۱۰

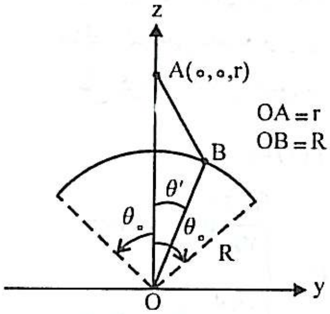
توجه کنید که اندازه توابع ضربه در ۰=z و z=a برابر میزان ناپیوستگی در E_z است. این ناپیوستگی در ۰=z برابر با $\frac{-\rho_{S_۰}}{۳\varepsilon_۰} - \left(-\frac{\rho_{S_۰}}{\varepsilon_۰}\right) = \frac{۲\rho_{S_۰}}{۳\varepsilon_۰}$ و در z=a برابر با $\frac{\rho_{S_۰}}{\varepsilon_۰} - \left(-\frac{\rho_{S_۰}}{۳\varepsilon_۰}\right) = \frac{۴\rho_{S_۰}}{۳\varepsilon_۰}$ است. چگالی حجمی مزبور، به دلیل در برداشتن توابع ضربه‌ای یک بُعدی، در حقیقت توزیعهای سطحی است.

$$\rho_S = \begin{cases} \dfrac{۲\rho_{S_۰}}{۳} & z=۰ \\ \dfrac{۴\rho_{S_۰}}{۳} & z=a \end{cases}$$

عبارت $\frac{dE_z}{dz}$ را می‌توانستیم مستقیماً با بیان E_z برحسب توابع پله نیز به دست آوریم.

$$E_z = -\frac{\rho_{S_۰}}{\varepsilon_۰} + \frac{۲\rho_{S_۰}}{۳\varepsilon_۰}u(z) + \frac{۴\rho_{S_۰}}{۳\varepsilon_۰}u(z-a) \Rightarrow \frac{dE_z}{dz} = \frac{۲\rho_{S_۰}}{۳\varepsilon_۰}\delta(z) + \frac{۴\rho_{S_۰}}{۳\varepsilon_۰}\delta(z-a)$$

■



شکل پ-۱۱

۱۷. با توجه به شکل پ-۱۱ پتانسیل در نقطه A برابر است با :

$$V(\mathbf{r})=\int_S \frac{\rho_{S\circ}\, dS'}{4\pi\varepsilon_\circ \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}$$

$$\mathbf{r}=r\,\hat{\mathbf{a}}_z \quad , \quad \mathbf{r}'=R\,\hat{\mathbf{a}}_r$$

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|=(R^2+r^2-2Rr\cos\theta')^{1/2}=AB$$

$$V(\circ,\circ,r)=\int_S \frac{\rho_{S\circ} R^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'}{4\pi\varepsilon_\circ (R^2+r^2-2Rr\cos\theta')^{1/2}}$$

با استفاده از $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{a+b\cos x}}=-\frac{2}{b}\sqrt{a+b\cos x}$ داریم :

$$V(\circ,\circ,r)=\frac{\rho_{S\circ} R^2}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^{2\pi} d\varphi' \int_\circ^{\theta_\circ} \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta'}}$$

$$=\frac{\rho_{S\circ} R^2}{2\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{Rr}\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta'}\,\Big|_\circ^{\theta_\circ}\right]$$

$$=\frac{\rho_{S\circ} R}{2\varepsilon_\circ r}\left[\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta_\circ}-\left|R-r\right|\right]$$

■

۱۸. $\mathbf{r}=\mathbf{o} \quad , \quad \mathbf{r}'=r'\hat{\mathbf{a}}_r \quad , \quad \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|=r' \quad , \quad dS'=r' dr' d\varphi'$

$$V=\int_S \frac{\rho_{S\circ}\, dS'}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}=\int_{r'=a}^{b}\int_{\varphi'=\circ}^{\pi}\frac{\rho_{S\circ}\, r' dr' d\varphi'}{4\pi\varepsilon_\circ r'}$$

$$=\frac{\rho_{S\circ}}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_a^b dr'\int_\circ^\pi d\varphi'=\frac{\rho_{S\circ}(b-a)}{4\varepsilon_\circ}$$

■

۱۹. $$V(\circ,\circ,\circ)=\int_S \frac{\rho_{S\circ}\, dS'}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{o} \quad , \quad \mathbf{r}'=a\,\hat{\mathbf{a}}_r \quad , \quad \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|=a \quad , \quad dS'=a^2\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

$$V(\circ,\circ,\circ)=\frac{\rho_{S\circ}\, a}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^{\pi/2}\sin\theta' d\theta'\int_\circ^{\pi/2} d\varphi'=\frac{\rho_{S\circ}\, a}{8\varepsilon_\circ}$$

■

۲۰. الف) میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را با استفاده از قانون گوس به دست می‌آوریم. روشن است که $\mathbf{E}$ فقط مؤلفه شعاعی داشته و این مؤلفه فقط تابعی از r می‌باشد، زیرا توزیع بار مستقل از θ و φ است. سطح گوسی S را به صورت کره‌ای به شعاع r و مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم.

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,(\text{بار محصور در S}) \quad , \quad \mathbf{E} = E_r(r)\,\hat{a}_r$$

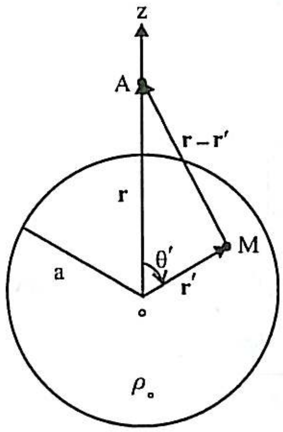
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = E_r(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases}\rho_0\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) & r<a\\ \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) & r>a\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \begin{cases}\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{a}_r & r<a\\ \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r & r>a\end{cases}$$

$$V(r) = -\int_\infty^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \begin{cases}-\int_\infty^r \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr & r>a\\ -\int_\infty^a \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr - \int_a^r \frac{\rho_0 r\,dr}{3\varepsilon_0} & r<a\end{cases} = \begin{cases}\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} & r>a\\ \frac{\rho_0(3a^2-r^2)}{6\varepsilon_0} & r<a\end{cases}$$

ب) بدیهی است که به دلیل تقارن کروی توزیع بار، پتانسیل تابعی از θ و φ نخواهد بود. بنابراین، اگر ضمن محاسبه پتانسیل مقدار معینی برای θ، مثلاً $\theta = 0$، در نظر بگیریم به عمومیت مسئله هیچ لطمه‌ای وارد نمی‌آید. پتانسیل نقطه A روی محور z (به منزله یک نقطه عام)، مطابق شکل پ-۱۲، را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$V(r) = \int_V \frac{\rho_0\,dV'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$dV' = r'^2 \sin\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'$$



شکل پ-۱۲

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}| = MA = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{1/2}$$

$$V(r) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{r'^2\sin\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'}{(r'^2+r^2-2rr'\cos\theta')^{1/2}}$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \left[\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta'\,d\theta'}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta')^{1/2}}\right] r'^2\,dr'$$

اما:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta'\,d\theta'}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta')^{1/2}} = \left[\frac{1}{rr'}(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta')^{1/2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{rr'}\left[(r+r') - |r-r'|\right]$$

برای $r>a$، همواره $r > r'$ بوده و $\left| r-r' \right| = r-r'$ ، بنابراین:

$$V(r)=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}\int_0^a r'[(r+r')-(r-r')]dr' = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}\int_0^a 2r'^2 dr' = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r}$$

برای $r<a$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$V(r)=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}\left[\int_0^r r'[(r+r')-(r-r')]dr' + \int_r^a r'[(r+r')-(r'-r)]dr'\right]$$

$$=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}\left[\int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^a 2rr'dr'\right] = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(a^2-\frac{1}{3}r^2\right)$$

به طور خلاصه،

$$V(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} & r>a\\[2ex] \dfrac{\rho_0(3a^2-r^2)}{6\varepsilon_0} & r<a\end{cases}$$

■

۲۱. برای بند (الف) مسئله ۱۱ داریم:

$$E=\begin{cases}-\dfrac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\hat{a}_z & |z|<a\\ 0 & |z|>a\end{cases} \quad , \quad V=\int_z^\infty E.dL \quad , \quad E=E_z\hat{a}_z \quad , \quad dL=dz\hat{a}_z$$

$$V=\int_z^\infty E_z dz=\begin{cases}\displaystyle\int_z^\infty (0)dz=0 & z>a\\[2ex] \displaystyle 0+\int_z^a -\frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}dz=\frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}(z-a) & a>z>-a\\[2ex] \displaystyle\int_{-a}^a -\frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}dz+\int_{-\infty}^{-a}(0)dz=-\frac{2\rho_{S_0}a}{\varepsilon_0} & -a>z\end{cases}$$

برای بند (ب) مسئله ۱۱، نمی‌توان ∞ را به عنوان مبنا در نظر گرفت، زیرا تابع پتانسیل نامحدود می‌شود. از این رو $z=0$ را به عنوان مبنا انتخاب می‌کنیم.

$$E=\begin{cases}\dfrac{a^2}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z & z>a\\[2ex] \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(az-\dfrac{z^2}{2}\right)\hat{a}_z & a>z>0\\[2ex] \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(az+\dfrac{z^2}{2}\right)\hat{a}_z & 0>z>-a\\[2ex] -\dfrac{a^2}{2\varepsilon_0}\hat{a}_z & z<-a\end{cases}$$

برای $z>0$، داریم:

$$V=\begin{cases}\displaystyle\int_z^0 \frac{1}{\varepsilon_0}\left(az-\frac{z^2}{2}\right)dz=-\frac{z^2}{2\varepsilon_0}\left(a-\frac{z}{3}\right) & 0<z<a\\[2ex] \displaystyle\int_z^a \frac{a^2}{2\varepsilon_0}dz+\int_a^0\frac{1}{\varepsilon_0}\left(az-\frac{z^2}{2}\right)dz=\frac{a^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{3}-z\right) & z>a\end{cases}$$

برای $z<0$، داریم:

$$V=\begin{cases}\displaystyle\int_z^0 \frac{1}{\varepsilon_0}\left(az+\frac{z^2}{2}\right)dz=-\frac{z^2}{2\varepsilon_0}\left(a+\frac{z}{3}\right) & -a<z<0\\[2ex] \displaystyle\int_z^{-a} \frac{-a^2}{2\varepsilon_0}dz+\int_{-a}^0\frac{1}{\varepsilon_0}\left(az+\frac{z^2}{2}\right)dz=\frac{a^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{3}+z\right) & z<-a\end{cases}$$

به طور خلاصه:

$$V(z)=\begin{cases}-\dfrac{z^2}{2\varepsilon_0}\left(a-\dfrac{|z|}{3}\right) & |z|<a\\[2ex] \dfrac{a^2}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{a}{3}-|z|\right) & |z|>a\end{cases}$$

برای بند (الف) مسئله ۱۳ داریم:

$$E=\begin{cases}\dfrac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\dfrac{a}{r}\hat{a}_r & a<r<b\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

در این مسئله نیز نمی‌توان ∞ را به عنوان مبنا در نظر گرفت. برای سادگی $r=0$ را به منزله مبنا در نظر می‌گیریم.

$$E=E_r\hat{a}_r\ ,\quad dL=dr\,\hat{a}_r\quad ,\quad E.dL=E_r\,dr$$

$$V=\begin{cases}\displaystyle\int_r^0 (0)\,dr=0 & r\le a\\[2ex] \displaystyle 0+\int_r^a \frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}dr=\frac{\rho_{S_0}a}{\varepsilon_0}(\ln a-\ln r)=\frac{\rho_{S_0}a}{\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r} & a\le r\le b\\[2ex] \displaystyle \frac{\rho_{S_0}a}{\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b}+\int_\infty^b 0\,dr=\frac{\rho_{S_0}a}{\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b} & r\ge b\end{cases}$$

در بند (ب) مسئله ۱۳ داریم:

$$E=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0 a}\hat{a}_r & 0\le r\le a\\[2ex] \dfrac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0 r}\hat{a}_r & r\ge a\end{cases}$$

همانند حالت قبل مبنا را در $r=0$ فرض می‌کنیم.

$$V=\begin{cases}\int_r^0 \frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0 a}dr=-\frac{\rho_0 r^3}{9\varepsilon_0 a} & 0\le r\le a\\ \int_a^0 \frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0 a}dr+\int_r^a \frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0 r}dr=-\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}-\ln\frac{a}{r}\right) & r\ge a\end{cases}$$

برای مسئله ۱۴، انتخاب ∞ به عنوان مبنا اشکالی ندارد. برای بند (الف) داریم:

$$E=\begin{cases}\frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^2}\hat{a}_r & a<r<b\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

$$E\,.\,dL=(E_r\hat{a}_r)\,.\,(dr\,\hat{a}_r)=E_r\,dr$$

$$V=\begin{cases}\int_r^\infty (0)\,dr=0 & r\ge b\\ 0+\int_r^b \frac{\rho_{S_0}}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^2}dr=\frac{\rho_{S_0}a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right) & a\le r\le b\\ \frac{\rho_{S_0}a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\int_r^a 0\,dr=\frac{\rho_{S_0}a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) & r\le a\end{cases}$$

برای بند (ب) مساله ۱۴ داریم:

$$E=\begin{cases}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5a^2}\right)\hat{a}_r & r<a\\ \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{a}_r & r>a\end{cases}$$

$$V=\begin{cases}\int_r^\infty \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}=\frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r} & r\ge a\\ \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 a}+\int_r^a \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5a^2}\right)dr=\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{r^2}{a^2}+\frac{1}{10}\frac{r^4}{a^4}\right) & r\le a\end{cases}$$

■

۲۲. الف)
$$V(0,0,z)=\int_0^{\varphi_0}\frac{\rho_{L_0}R\,d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}=\frac{\rho_{L_0}R\varphi_0}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$$

ب) برای $\varphi_\circ = 2\pi$، داریم:

$$V=\frac{\rho_{L_\circ} R}{2\varepsilon_\circ \sqrt{z^2+R^2}} \Rightarrow E=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z=\frac{\rho_{L_\circ} Rz}{2\varepsilon_\circ (z^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$

ج)
$$E=-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z=\frac{-d}{dz}\left[\frac{\rho_{L_\circ} R\varphi_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{a}_z=\frac{\rho_{L_\circ} R\varphi_\circ}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$

$$\neq\frac{\rho_{L_\circ} R}{4\pi\varepsilon_\circ (z^2+R^2)^{3/2}}[-R\sin\varphi_\circ \hat{a}_x+R(\cos\varphi_\circ-1)\hat{a}_y+z\varphi_\circ \hat{a}_z]$$

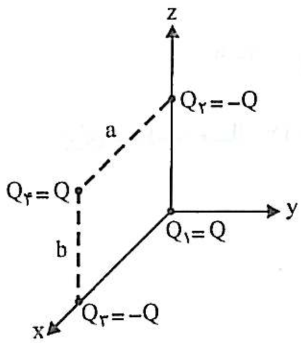
همان طور که ملاحظه می‌شود فقط مؤلفه z به درستی به دست آمده است و مؤلفه‌های x و y با روش مزبور برابر صفر شده‌اند. علت تناقض این است که معمولاً،

$$E(0,0,z)=-\nabla V(x,y,z)\Big|_{x=y=0}\neq-\nabla V(0,0,z)$$

البته در حالت خاص $\varphi_\circ = 2\pi$ این تناقض ظاهر نمی‌شود. برای رفع این تناقض باید V را در یک نقطه دلخواه به مختصات (x,y,z) محاسبه کرد و سپس گرادیان آن را استخراج نمود و آنگاه مقادیر مورد نظر را جایگزین کرد.

■

۲۳. با استفاده از رابطه ۲-۹۷ و شکل پ-۱۳ داریم:



شکل پ-۱۳

$$V(\mathbf{r})=\frac{\sum_{j=1}^{4}Q_j}{4\pi\varepsilon_\circ r}+\frac{\sum_{j=1}^{4}Q_j\,\mathbf{r}.\mathbf{r}'_j}{4\pi\varepsilon_\circ r^3}+\frac{\sum_{j=1}^{4}Q_j[3(\mathbf{r}.\mathbf{r}'_j)^2-(rr'_j)^2]}{8\pi\varepsilon_\circ r^5}+\cdots$$

$$\begin{cases}Q_1=Q\\ \mathbf{r}'_1=\mathbf{o}\end{cases},\quad \begin{cases}Q_2=-Q\\ \mathbf{r}'_2=b\,\hat{a}_z\end{cases},\quad \begin{cases}Q_3=-Q\\ \mathbf{r}'_3=a\,\hat{a}_x\end{cases},\quad \begin{cases}Q_4=Q\\ \mathbf{r}'_4=a\,\hat{a}_x+b\,\hat{a}_z\end{cases}$$

$$K_1=\sum_{j=1}^{4}Q_j=Q-Q-Q+Q=0$$

$$K_2=\sum_{j=1}^{4}Q_j\mathbf{r}.\mathbf{r}'_j=Q\mathbf{o}.\mathbf{r}-Q\mathbf{r}.b\,\hat{a}_z-Q\mathbf{r}.a\,\hat{a}_x+Q\mathbf{r}.(a\,\hat{a}_x+b\,\hat{a}_z)=0$$

$$K_3=\sum_{j=1}^{4}Q_j[3(\mathbf{r}.\mathbf{r}'_j)^2-(rr'_j)^2]$$
$$=Q[3(\mathbf{r}.\mathbf{o})^2-(r(0))^2]-Q[3(\mathbf{r}.b\,\hat{a}_z)^2-(rb)^2]$$

$$-Q\,[3(\mathbf{r}.a\,\hat{a}_x)^2-(ra)^2]+Q[3(\mathbf{r}.(a\,\hat{a}_x+b\,\hat{a}_z))^2-(r\sqrt{a^2+b^2})^2]$$

$$\mathbf{r}.\hat{a}_x=r\,\hat{a}_r.\hat{a}_x=r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad \mathbf{r}.\hat{a}_z=r\,\hat{a}_r.\hat{a}_z=r\cos\theta$$

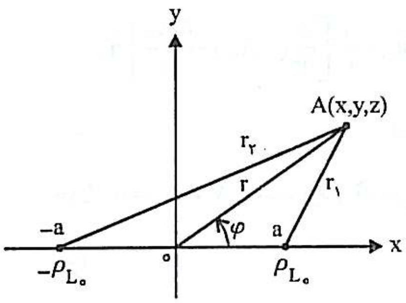
بنابراین:

$$\begin{aligned}K_3&=-Q(rb)^2[3\cos^2\theta-1]-Q(ra)^2[3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1]\\&\quad+Q\,[3r^2(a\sin\theta\cos\varphi+b\cos\theta)^2-r^2(a^2+b^2)]\\&=6\,ab\,Qr^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\end{aligned}$$

$$V(\mathbf{r})=\frac{K_3}{8\pi\varepsilon_0 r^5}=\frac{3abQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \quad , \quad r>>a \quad , \quad r>>b$$

■

۲۴. دو خط بار را در $x=a\,,y=0$ و $x=-a\,,y=0$ مطابق شکل پ-۱۴ در نظر می‌گیریم. پتانسیل خط بار ∞ با چگالی ثابت از رابطه ۲-۱۰۲ به دست می‌آید. با انتخاب مبنای پتانسیل مشترک $r_1=r_2=a$ برای هر خط بار (در واقع محور z مبنای مورد نظر با پتانسیل صفر است) پتانسیل کل حاصل از هر خط بار عبارت است از:



شکل پ-۱۴

$$V=-\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{a}+\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{a}=\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

روی سطوح هم‌پتانسیل، $V=k$ است، که k مقدار ثابتی است، بنابراین:

$$\frac{\rho_{L_0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}=k \;\Rightarrow\; \frac{r_2}{r_1}=k' , \quad k'=\exp(2\pi\varepsilon_0 k/\rho_{L_0})$$

اما:

$$r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2} \quad , \quad r_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$$

$$\frac{r_2}{r_1}=k' \Rightarrow \sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}=k'$$

$$\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=k'^2 \Rightarrow \left(x-\frac{k'^2+1}{k'^2-1}a\right)^2+y^2=\frac{4k'^2a^2}{(k'^2-1)^2}$$

که معادله یک دسته سطوح استوانه‌ای به شعاع $\left|\dfrac{2k'a}{k'^2-1}\right|$ و به محوری واقع در $y=0$ و $x=\dfrac{k'^2+1}{k'^2-1}a$ است.

■

۲۵. الف)
$$\mathbf{A}=\frac{1}{y^2}\left(y\,\hat{a}_x-\frac{x}{y}\hat{a}_y\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$
$$=(0-0)\hat{a}_x+(0-0)\hat{a}_y+\left(-\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^2}\right)\hat{a}_z\neq 0$$

چون $\nabla\times\mathbf{A}\neq 0$ است، بردار $\mathbf{A}$ نمی‌تواند بیانگر میدان الکتریکی ساکن باشد.

ب)
$$\mathbf{B}=\frac{1}{r}\hat{a}_\varphi$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{a}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{a}_\varphi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\hat{a}_z$$
$$=(0-0)\hat{a}_r+(0-0)\hat{a}_\varphi+\frac{1}{r}(0-0)\hat{a}_z=0$$

چون $\nabla\times\mathbf{B}=0$ است، بردار $\mathbf{B}$ می‌تواند بیان کننده یک میدان الکتریکی ساکن باشد.

ج)
$$\mathbf{C}=\frac{1}{r^2}(\cos\varphi\,\hat{a}_r+\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi)$$

$$\nabla\times\mathbf{C}=(0)\hat{a}_r+(0)\hat{a}_\varphi+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{r^2}\sin\varphi+\frac{1}{r^2}\sin\varphi\right)\hat{a}_z=0$$

چون $\nabla\times\mathbf{C}=0$ است، بردار $\mathbf{C}$ می‌تواند بیانگر یک میدان الکتریکی ساکن باشد.

د)
$$\mathbf{D}=\left(3+\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{a}_r-\left(3-\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

$$\nabla\times\mathbf{D}=(0)\hat{a}_r+(0)\hat{a}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{a}_\varphi$$
$$=\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(3r-\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(3+\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\right)\right]\hat{a}_\varphi$$
$$=\frac{1}{r}\left[-\left(3+\frac{2}{r^3}\right)\sin\theta+\left(3+\frac{2}{r^3}\right)\sin\theta\right]\hat{a}_\varphi=0$$

چون $\nabla\times\mathbf{D}=0$ است، بردار $\mathbf{D}$ شرط یک میدان الکتریکی ساکن را دارا است. ■

۲۶. الف)
$$V=V_0\,e^{-y}\sin y\sinh x$$

$$\rho_V=\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E})=\varepsilon_0\nabla\cdot(-\nabla V)=-\varepsilon_0\nabla^2 V$$

$$= -\varepsilon_{\circ}\left(\frac{\partial^{2}V}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}V}{\partial y^{2}}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^{2}V}{\partial z^{2}}=\circ$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=V_{\circ}\, e^{-y}\sin y \cosh x \;\Rightarrow\; \frac{\partial^{2}V}{\partial x^{2}}=V_{\circ}\, e^{-y}\sin y \sinh x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=V_{\circ}\sinh x\, e^{-y}(\cos y-\sin y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^{2}V}{\partial y^{2}}=V_{\circ}\sinh x\,(-2e^{-y}\cos y)$$

$$\rho_{V}=-\varepsilon_{\circ}\,[V_{\circ}\, e^{-y}\sin y \sinh x-2V_{\circ}\, e^{-y}\cos y \sinh x]$$

$$\rho_{V}=V_{\circ}\,\varepsilon_{\circ}\sinh x\; e^{-y}(2\cos y-\sin y)$$

ب) می‌توان نشان داد که برای این تابع پتانسیل مقدار $\nabla^{2}V$ همواره برابر صفر است، مگر در $r=\circ$ که پتانسیل تعریف نشده است. بنابراین، توزیع بار، هر چه که باشد، در مبدأ مختصات قرار دارد. برای اینکه به ماهیت این توزیع بار پی ببریم کافی است توجه کنیم که $\sin\theta\cos\varphi$ را می‌توان نتیجه ضرب داخلی $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_r$ دانست:

$$\hat{a}_r\cdot\hat{a}_x=(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_x=\sin\theta\cos\varphi$$

بنابراین:

$$V=V_{\circ}\frac{\hat{a}_r\cdot\hat{a}_x}{r^{2}}=\frac{V_{\circ}\,\mathbf{r}\cdot\hat{a}_x}{r^{3}}=\frac{(V_{\circ}\,\hat{a}_x)\cdot\mathbf{r}}{r^{3}}$$

با مراجعه به رابطه ۲-۹۹، می‌دانیم که $V=\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_{\circ}r^{3}}$ پتانسیل یک دو قطبی با گشتاور $\mathbf{p}$ است.

مقایسه این تابع با نتیجه بالا نشان می‌دهد که پتانسیل $V=\dfrac{V_{\circ}\hat{a}_x\cdot\mathbf{r}}{r^{3}}$ باید از یک دو قطبی با گشتاور $\mathbf{p}=4\pi\varepsilon_{\circ}V_{\circ}\,\hat{a}_x$ حاصل شده باشد.

■

پ-۳ حل مسائل خودآزمایی فصل سوم

۱.

$$S=1\,mm^{2}\,,\; I=1\,A\;,\quad N=8{,}4\times10^{28}\;\Rightarrow\; J=\frac{I}{S}=10^{6}\,A/m^{2}$$

$$J=\rho v_d=Nev_d\;\Rightarrow\; v_d=\frac{J}{Ne}=\frac{10^{6}}{(8{,}4\times10^{28})(1{,}6\times10^{-19})}=7\times10^{-5}\,m/s$$

$$t=\frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}=\frac{100\times10^{3}}{7\times10^{-5}}=\frac{10}{7}\times10^{9}\,s\cong45{,}3\ \text{سال}$$

■