پیوست الف: حل مسائل خودآزمایی

پ-۱ حل مسائل خودآزمایی فصل اول

۱. $A = ۲\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z \quad , \quad B = \hat{a}_x + \hat{a}_z \quad , \quad C = \hat{a}_x - ۲\hat{a}_y + ۲\hat{a}_z$

الف) $A + B = ۳\hat{a}_x - \hat{a}_y + ۲\hat{a}_z$

ب) $\left| B - C \right| = \left| ۲\hat{a}_y - \hat{a}_z \right| = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$

ج) $B \cdot C = (\hat{a}_x + \hat{a}_z) \cdot (\hat{a}_x - ۲\hat{a}_y + ۲\hat{a}_z) = (۱)(۱) + (۰)(-۲) + (۱)(۲) = ۳$

د) $A \times B = \hat{a}_x [(-۱)(۱) - (۱)(۰)] + \hat{a}_y [(۱)(۱) - (۲)(۱)] + \hat{a}_z [(۲)(۰) - (-۱)(۱)]$

$= -\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z$

ه) $A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۲ \end{vmatrix} = -۱ - ۲ - (-۲ - ۴) = ۳$

■

۲. الف) $A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$

توجه کنید که وقتی دو سطر یک دترمینان تعویض شوند مقدار آن منفی می‌شود. با تعویض سطرهای ۲ و ۳ داریم:

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = B \cdot (C \times A)$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر در دترمینان فوق ابتدا سطرهای ۱ و ۲ و سپس در دترمینان حاصل سطرهای ۲ و ۳ را تعویض کنیم، نتیجه $C \cdot (A \times B)$ به دست می‌آید. پس، به طور خلاصه:

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

ب) طرفین رابطه را در دستگاه مختصات مستطیلی (یا در هر دستگاه مختصات دیگر) بسط داده و مساوی بودن دو طرف را نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{D}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\hat{a}_x(B_yC_z-B_zC_y)+\hat{a}_y(B_zC_x-B_xC_z)+\hat{a}_z(B_xC_y-B_yC_x)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{D}&=\hat{a}_x(A_yD_z-A_zD_y)+\hat{a}_y(A_zD_x-A_xD_z)+\hat{a}_z(A_xD_y-A_yD_x)\\&=\hat{a}_x(A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zB_xC_z)+\\&\quad\hat{a}_y(A_zB_yC_z-A_zB_zC_y-A_xB_xC_y+A_xB_yC_x)+\\&\quad\hat{a}_z(A_xB_zC_x-A_xB_xC_z-A_yB_yC_z+A_yB_zC_y)=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{C})=(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}.\mathbf{B})=(C_x\hat{a}_x+C_y\hat{a}_y+C_z\hat{a}_z)(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)$$

آنگاه:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}.\mathbf{B})&=\hat{a}_x(A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zB_xC_z)+\\&\quad\hat{a}_y(A_zB_yC_z-A_zB_zC_y-A_xB_xC_y+A_xB_yC_x)+\\&\quad\hat{a}_z(A_xB_zC_x-A_xB_xC_z-A_yB_yC_z+A_yB_zC_y)\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}.\mathbf{B})$$

ج)

$$\underbrace{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}_{=\mathbf{E}}.(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}.\mathbf{C})(\mathbf{B}.\mathbf{D})-(\mathbf{B}.\mathbf{C})(\mathbf{A}.\mathbf{D})$$

با استفاده از نتیجه بند (الف) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E}.(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=\mathbf{D}.(\mathbf{E}\times\mathbf{C})=\mathbf{D}.[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}]=-\mathbf{D}.[\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]$$

حال با استفاده از نتیجه بند (ب)، داریم:

$$\begin{aligned}&=-\mathbf{D}.[\mathbf{A}(\mathbf{C}.\mathbf{B})-\mathbf{B}(\mathbf{C}.\mathbf{A})]=-(\mathbf{D}.\mathbf{A})(\mathbf{C}.\mathbf{B})+(\mathbf{D}.\mathbf{B})(\mathbf{C}.\mathbf{A})\\&=(\mathbf{A}.\mathbf{C})(\mathbf{B}.\mathbf{D})-(\mathbf{B}.\mathbf{C})(\mathbf{A}.\mathbf{D})\end{aligned}$$

د) با به کار بستن نتیجه بند (ب)، داریم:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})+\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$=[\mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}.\mathbf{B})]+[\mathbf{C}(\mathbf{B}.\mathbf{A})-\mathbf{A}(\mathbf{B}.\mathbf{C})]+[\mathbf{A}(\mathbf{C}.\mathbf{B})-\mathbf{B}(\mathbf{C}.\mathbf{A})]=0$$

■

۳. با استفاده از روابط ۱-۴۸ تا ۱-۵۲، داریم:

الف)

$$\hat{a}_\varphi\times\hat{a}_x=(-\sin\varphi\,\hat{a}_x+\cos\varphi\,\hat{a}_y)\times\hat{a}_x=-\cos\varphi\,\hat{a}_z$$

ب)

$$\begin{aligned}\hat{a}_{r_s}\times\hat{a}_z&=(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z)\times\hat{a}_z\\&=-\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_y+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_x\\&=-\sin\theta(-\sin\varphi\,\hat{a}_x+\cos\varphi\,\hat{a}_y)=-\sin\theta\,\hat{a}_\varphi\end{aligned}$$

ج) $\hat{a}_{rc}\cdot\hat{a}_\theta=(\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\varphi\,\hat{a}_y)\cdot(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y-\sin\theta\,\hat{a}_z)$

$=\cos\theta\cos^2\varphi+\cos\theta\sin^2\varphi=\cos\theta$

د) $\hat{a}_\theta\times\hat{a}_z=(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y-\sin\theta\,\hat{a}_z)\times\hat{a}_z$

$=-\cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{a}_x=-\cos\theta(-\sin\varphi\,\hat{a}_x+\cos\varphi\,\hat{a}_y)=-\cos\theta\,\hat{a}_\varphi$

هـ) $\hat{a}_{rc}\cdot\hat{a}_{rs}=(\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\varphi\,\hat{a}_y)\cdot(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z)$

$=\sin\theta\cos^2\varphi+\sin\theta\sin^2\varphi=\sin\theta$

و) $\hat{a}_{rc}\times\hat{a}_{rs}=(\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\varphi\,\hat{a}_y)\times(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z)$

$=\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\hat{a}_z-\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,\hat{a}_z-\cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_y+\sin\varphi\cos\theta\,\hat{a}_x$

$=-\cos\theta(-\sin\varphi\,\hat{a}_x+\cos\varphi\,\hat{a}_y)=-\cos\theta\,\hat{a}_\varphi$

ز) $\hat{a}_{rs}\times\hat{a}_y=(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z)\times\hat{a}_y$

$=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_z-\cos\theta\,\hat{a}_x$

ح) $\hat{a}_x\cdot\hat{a}_{rc}=\hat{a}_x\cdot(\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\varphi\,\hat{a}_y)=\cos\varphi$

ط) $\hat{a}_{rs}\cdot\hat{a}_z=(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z)\cdot\hat{a}_z=\cos\theta$

■

۴. $A=\frac{3}{r}\hat{a}_r$, مقدار r در نقطه M $=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(4)^2}=6=r_M$

در نقطه M: $A=\frac{3}{6}\hat{a}_r=\frac{1}{2}\hat{a}_r$

$\hat{a}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z\ \Rightarrow\ A_y=\frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi$

$\sin\varphi=\sin\left[\tan^{-1}(y_M/x_M)\right]=\sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{-4}{-2}\right)\right]=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ (φ در ربع سوم)

$\sin\theta=\sin\left[\cos^{-1}(z_M/r_M)\right]=\sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{4}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$A_y=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{1}{3}$

■

۵. الف) بردار واحد عمود بر A و B را با $\hat{a}_1$ نشان می‌دهیم، آنگاه:

$$\hat{a}_1=\pm\frac{A\times B}{|A\times B|}=\pm\frac{46\,\hat{a}_x-14\,\hat{a}_y-26\,\hat{a}_z}{\sqrt{46^2+14^2+26^2}}=\pm(0{,}842\,\hat{a}_x-0{,}256\,\hat{a}_y-0{,}477\,\hat{a}_z)$$

ب) بردار واحد مورد نظر را در این حالت با $\hat{a}_2$ نشان می‌دهیم، آنگاه:

$$\hat{a}_2=\pm\frac{(A-B)\times(B-C)}{|(A-B)\times(B-C)|}$$

$A-B=2\,\hat{a}_x+14\,\hat{a}_y-4\,\hat{a}_z$, $B-C=-6\,\hat{a}_x-6\,\hat{a}_y+9\,\hat{a}_z$

$$\hat{a}_۲=\pm\frac{۱۰۲\hat{a}_x+۶\hat{a}_y+۷۲\hat{a}_z}{\sqrt{۱۰۲^۲+۶^۲+۷۲^۲}}=\pm(۰/۸۱۶\hat{a}_x+۰/۰۴۸\hat{a}_y+۰/۵۷۶\hat{a}_z)$$

ج) $$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\left|(A-B)\times(B-C)\right|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۲^۲+۶^۲+۷۲^۲}=۶۲/۵$$

■

۶. الف) $$\overrightarrow{CB}=-۸\hat{a}_x+\hat{a}_y+۳\hat{a}_z\ ,\ \overrightarrow{CA}=-۱۰\hat{a}_x+۴\hat{a}_y+۸\hat{a}_z$$

$$\text{ABC مساحت}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|=\frac{۱}{۲}\left|-۴\hat{a}_x+۳۴\hat{a}_y-۲۲\hat{a}_z\right|$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+۳۴^۲+۲۲^۲}=۲۰/۳$$

ب) $$\text{بردار واحد عمود بر سطح ABC}: \hat{a}=\pm\frac{\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|}=\frac{\pm(-۴\hat{a}_x+۳۴\hat{a}_y-۲۲\hat{a}_z)}{\sqrt{۴^۲+۳۴^۲+۲۲^۲}}$$

$$=\pm(-۰/۰۹۸۳\hat{a}_x+۰/۸۳۶\hat{a}_y-۰/۵۴۱\hat{a}_z)$$

■

۷. الف) $$A=۲xyz\hat{a}_x-۵(x+y+z)\hat{a}_z$$

با استفاده از $x=r\cos\varphi$، $y=r\sin\varphi$ و $\hat{a}_x=\cos\varphi\,\hat{a}_r-\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi$ در عبارت سمت راست A، داریم:

$$A=۲r^۲z\sin\varphi\cos\varphi(\cos\varphi\,\hat{a}_r-\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi)-۵[r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z]\hat{a}_z$$

$$=r^۲z\ \sin۲\varphi(\cos\varphi\,\hat{a}_r-\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi)-۵[r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z]\hat{a}_z$$

ب) $$A=(۲^۲)(۳)\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)\left(\cos\frac{\pi}{۳}\hat{a}_r-\sin\frac{\pi}{۳}\hat{a}_\varphi\right)-۵\left[۲\left(\cos\frac{\pi}{۳}+\sin\frac{\pi}{۳}\right)+۳\right]\hat{a}_z$$

$$|A|=\left|۳\sqrt{۳}\,\hat{a}_r-۹\hat{a}_\varphi-۲۸/۶۶\hat{a}_z\right|=\sqrt{(۳\sqrt{۳})^۲+۹^۲+۲۸/۶۶^۲}=۳۰/۵$$

■

۸. الف) φ و θ در نقطه A به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$x=۳\ ,\ y=-۴\ ,\ z=۵\ \Rightarrow\ r=\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}=۵\sqrt{۲}$$

$$\varphi=\tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)\ ,\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=-\frac{۴}{۵}\ ,\ \cos\varphi=\frac{۳}{۵}\ (\text{در ربع چهارم }\varphi)$$

$$\theta=\cos^{-۱}\left(\frac{z}{r}\right)\ ,\ \cos\theta=\frac{۵}{۵\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\theta$$

با استفاده از جدول ۱-۲ داریم:

$$\hat{a}_x=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_r+\cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_\theta-\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

$$=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۳}{۵}\right)\hat{a}_r+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۳}{۵}\right)\hat{a}_\theta-\left(-\frac{۴}{۵}\right)\hat{a}_\varphi=۰/۴۲۴\hat{a}_r+۰/۴۲۴\hat{a}_\theta+۰/۸\hat{a}_\varphi$$

ب) $$\hat{a}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y-\sin\theta\,\hat{a}_z$$

$$=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۳}{۵}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(-\frac{۴}{۵}\right)\hat{a}_y-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{a}_z=۰/۴۲۴\hat{a}_x-۰/۵۶۶\hat{a}_y-۰/۷۰۷\hat{a}_z$$

■

۹. مؤلفه بردار A در امتداد بردار B: A_B ، بردار واحد در امتداد بردار B: $\hat{a}_B = \frac{B}{|B|}$

$$A_B = \hat{a}_B . A = \frac{B . A}{|B|}$$

$$\mathbf{A}_B = A_B \hat{a}_B = \frac{B . A}{|B|} \frac{B}{|B|} = \frac{B(B . A)}{|B|^2}$$

برای $A = -4\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$ و $B = 3\hat{a}_x + 4\hat{a}_y - \hat{a}_z$، داریم:

$$\mathbf{A}_B = \frac{(3\hat{a}_x + 4\hat{a}_y - \hat{a}_z)(-12+8-3)}{(3^2+4^2+1^2)} = -0/8077\hat{a}_x - 1/077\hat{a}_y + 0/269\hat{a}_z$$

■

۱۰.

$$\frac{d\hat{a}_r}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y) = \frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\hat{a}_x + \frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\hat{a}_y = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y = \hat{a}_\varphi$$

$$\frac{d\hat{a}_\varphi}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(-\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y) = -\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\hat{a}_x + \frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\hat{a}_y = -\cos\varphi\,\hat{a}_x - \sin\varphi\,\hat{a}_y = -\hat{a}_r$$

■

۱۱. الف) معادله خطی که A را به B وصل نماید عبارت است از: $\frac{x-2}{y-1} = \frac{8-2}{2-1}$ در صفحه $z=-2$.
این معادله به صورت $x = 6y - 4$ ساده می‌شود.

$$\int_C A.dL = \int_C (y\hat{a}_x + x\hat{a}_y).(dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y) = \int_C ydx + xdy$$

$$= \int_2^8 \frac{1}{6}(x+4)\,dx + \int_1^2 (6y-4)\,dy = 14$$

ب)

$$\int_C A.dL = \int_C ydx + xdy = \int_C y(4y\,dy) + (2y^2)\,dy = \int_1^2 6y^2\,dy = 14$$

اگر A را بتوان به صورت گرادیان یک تابع نرده‌ای بیان داشت، آنگاه میدان A حتماً پایستار خواهد بود. کمی دقت نشان می‌دهد که می‌توان A را به صورت $A = \nabla(xy + k_0)$، (k_0 مقدار ثابتی است) نوشت. پس، A میدانی پایستار خواهد بود.

■

۱۲.

$$\oint_C A.dL = \oint_C [(2x^2 + z^2)\hat{a}_x + (xz - z^2)\hat{a}_z].[dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z]$$

$$= \underbrace{\oint_C (2x^2+z^2)\,dx}_{=I_1} + \underbrace{\oint_C (xz - z^2)\,dz}_{=I_2}$$

$$I_1 = \int_0^0 (2(0^2) + z^2)\,dx + \int_0^2 (2x^2 + 0^2)\,dx + \int_2^0 [2x^2 + (2-x)^2]\,dx = -\frac{8}{3}$$

$$I_2 = \int_2^0 (0z - z^2)\,dz + \int_0^0 (x0 - 0^2)\,dz + \int_0^2 [(2-z)z - z^2]\,dz = \frac{4}{3}$$

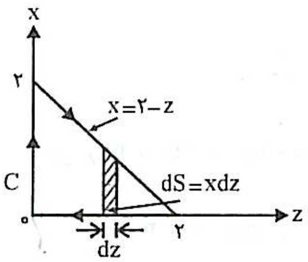
$$\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{L} = I_۱ + I_۲ = -\frac{۸}{۳} + \frac{۴}{۳} = -\frac{۴}{۳}$$

براساس قضیه استوکس و شکل پ-۱ داریم:

$$\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}).d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = z\hat{a}_y \quad , \quad d\mathbf{S} = x dz(-\hat{a}_y) = (z-۲)dz\hat{a}_y$$

$$\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \int_۰^۲ (z-۲)z dz = -\frac{۴}{۳}$$



شکل پ-۱

■

۱۳. الف)

$$\oint_{abcda} \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \int_a^b \mathbf{A}.d\mathbf{L} + \int_b^c \mathbf{A}.d\mathbf{L} + \int_c^d \mathbf{A}.d\mathbf{L} + \int_d^a \mathbf{A}.d\mathbf{L}$$

$$\mathbf{A} = xy\,\hat{a}_x + yz\,\hat{a}_y + zx\,\hat{a}_z$$

$$K_۱ = \int_a^b \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \int_۰^۱ xy\,dx = ۰ \;;\; d\mathbf{L} = dx\,\hat{a}_x \;,\; y = z = ۰$$

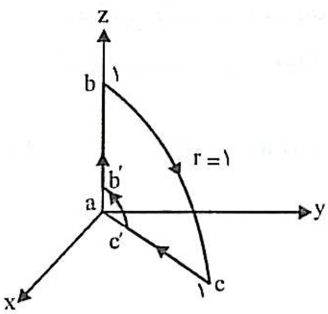
$$K_۲ = \int_b^c \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \int_۰^۱ yz\,dy = ۰ \;;\; d\mathbf{L} = dy\,\hat{a}_y \;,\; x = ۱, z = ۰$$

$$K_۳ = \int_c^d \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \int_۱^۰ x\,dx + \int_۱^۱ yz\,dy + \int_۰^۱ zx\,dz = -\frac{۱}{۳} \;;\; y = ۱ \;,\; x + z = ۱$$

$$K_۴ = \int_d^a \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \int_۰^۰ xy\,dx + \int_۱^۰ yz\,dy + \int_۱^۰ zx\,dz = -\frac{۱}{۳} \;;\; x = ۰ \;,\; y = z$$

$$\oint_{abcda} \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \sum_{i=۱}^{۴} K_i = ۰ + ۰ - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} = -\frac{۲}{۳}$$

ب) چون بردار $\mathbf{A}$ در $r=۰$ نامحدود است، مسیر C را در همسایگی مبدأ تغییر داده و به صورت قوس $c'b'$ با شعاع ε که $\varepsilon \to ۰$، مطابق شکل پ-۲، در نظر می‌گیریم.



شکل پ-۲

$$\oint_{abca} \mathbf{A}.d\mathbf{L} \;,\; \mathbf{A} = \frac{e^{-r}}{r}\hat{a}_\theta$$

$$d\mathbf{L} = dr\,\hat{a}_r + r\,d\theta\,\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi \;,\; \mathbf{A}.d\mathbf{L} = e^{-r}d\theta$$

$$\oint \mathbf{A}.d\mathbf{L} = \oint e^{-r}d\theta = \int_{b'}^{b} + \int_b^c + \int_c^{c'} + \int_{c'}^{b'}$$

$$K_۱ = \int_{b'}^{b} e^{-r}d\theta = \int_۰^۰ e^{-r}d\theta = ۰ \;,\; K_۲ = \int_b^c e^{-r}d\theta = \int_۰^{\pi/۲} e^{-۱}d\theta = \frac{\pi}{۲e}$$

$$K_۳ = \int_c^{c'} e^{-r} d\theta = \int_{\pi/۲}^{\pi/۲} e^{-r} d\theta = ۰ \quad , \quad K_۴ = \int_{c'}^{b'} e^{-r} d\theta = \int_{\pi/۲}^{۰} e^{-\varepsilon} d\theta = -\frac{\pi}{۲} \underset{\varepsilon \to ۰}{e^{-\varepsilon}} = -\frac{\pi}{۲}$$

$$\oint_{abca} \mathbf{A} . d\mathbf{L} = \sum_{i=۱}^{۴} K_i = \frac{\pi}{۲} \left(\frac{۱}{e} - ۱ \right)$$

بند (ب) را می‌توان با استفاده از قضیه استوکس با سادگی بیشتری حل کرد.

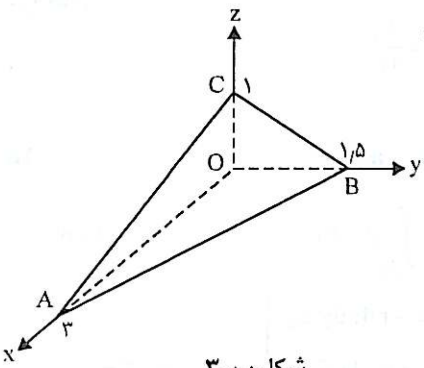
$$I = \oint_{abca} \mathbf{A} . d\mathbf{L} = \int_{S_{abca}} (\nabla \times \mathbf{A}) . d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{۱}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right] \widehat{a}_\varphi = -\frac{۱}{r} e^{-r} \widehat{a}_\varphi \quad , \quad d\mathbf{S} = r\, dr\, d\theta \widehat{a}_\varphi$$

$$I = \int_{S_{abca}} \left(-\frac{۱}{r} e^{-r} \widehat{a}_\varphi \right) . (r\, dr\, d\theta \widehat{a}_\varphi) = -\int_{S_{abca}} e^{-r} dr\, d\theta = -\int_۰^۱ e^{-r} dr \int_۰^{\pi/۲} d\theta = \frac{\pi}{۲} \left(\frac{۱}{e} - ۱ \right)$$

■

۱۴. سطح بسته S محدود به صفحات $x + ۲y + ۳z = ۳$، $z = ۰$، $y = ۰$ و $x = ۰$ است (شکل پ-۳).



شکل پ-۳

$$\oint_S \mathbf{A} . d\mathbf{S} = \int_{AOC} \mathbf{A} . (-dx\, dz \widehat{a}_y) + \int_{COB} \mathbf{A} . (-dy\, dz \widehat{a}_x)$$

$$+ \int_{AOB} \mathbf{A} . (-dx\, dy \widehat{a}_z) + \int_{ABC} \mathbf{A} . d\mathbf{S}$$

$$K_۱ = -\int_{AOC} (\mathbf{A} . \widehat{a}_y)\, dx\, dz = -\int_{AOC} y^۲ z x\, dx\, dz = ۰ \; ; \; y = ۰ \quad \text{زیرا}$$

$$K_۲ = -\int_{COB} (\mathbf{A} . \widehat{a}_x)\, dy\, dz = -\int_{COB} x^۲ y z\, dy\, dz = ۰ \; ; \; x = ۰ \quad \text{زیرا}$$

$$K_۳ = -\int_{AOB} (\mathbf{A} . \widehat{a}_z)\, dx\, dy = -\int_{AOB} z^۲ x y\, dx\, dy = ۰ \; ; \; z = ۰ \quad \text{زیرا}$$

با استفاده از رابطه ۱-۸۱ داریم:

$$K_۴ = \int_{ABC} \mathbf{A} . d\mathbf{S} = \int_{AOB} \mathbf{A} . \widehat{a}_n \frac{dx\, dy}{| \widehat{a}_n . \widehat{a}_z |}$$

$$\widehat{a}_n = \frac{\nabla (x + ۲y + ۳z)}{| \nabla (x + ۲y + ۳z) |} = \frac{\widehat{a}_x + ۲\widehat{a}_y + ۳\widehat{a}_z}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۴}} (\widehat{a}_x + ۲\widehat{a}_y + ۳\widehat{a}_z)$$

$$|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z| = \frac{3}{\sqrt{14}}\ ,\ \mathbf{A}\cdot\hat{a}_n = \frac{1}{\sqrt{14}}(x^2yz + 2y^2zx + 3z^2xy)$$

$$K_4 = \int_{AOB} (1/3)(x^2yz + 2y^2zx + 3z^2xy)\,dx\,dy \quad ; \quad z = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y$$

$$= \frac{1}{3}\int_{AOB}\left[(x^2y + 2y^2x)\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y\right) + 3xy\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y\right)^2\right]dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_{AOB}(-x^2y - 2xy^2 + 3xy)\,dx\,dy$$

با توجه به اینکه روی سطح AOB، $x=3-2y$ است، داریم:

$$K_4 = \frac{1}{3}\int_0^{3/2}\left[\int_0^{3-2y}(-x^2y - 2xy^2 + 3xy)\,dx\right]dy = \frac{27}{160}$$

سرانجام،

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{4} K_i = \frac{27}{160}$$

■

۱۵. $$\mathbf{A} = r\cos\varphi\,\hat{a}_r + r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi + \hat{a}_z$$

الف)
$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1: z=0,\ 0\le r\le a\ ,\ d\mathbf{S} = -r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z \\ S_2: z=l,\ 0\le r\le a\ ,\ d\mathbf{S} = r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z \\ S_3: r=a,\ 0\le z\le l\ ,\ d\mathbf{S} = a\,d\varphi\,dz\,\hat{a}_r \end{array}\right\}\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi$$

$$I_1 = \int_{S_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = -\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi = -\pi a^2$$

$$I_2 = \int_{S_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi = \pi a^2$$

$$I_3 = \int_{S_3}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^l dz = 0$$

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = I_1 + I_2 + I_3 = -\pi a^2 + \pi a^2 + 0 = 0$$

ب) با فرض آنکه سطح بسته مورد نظر در $\frac{1}{8}$ اول فضا ($x\ge 0$، $y\ge 0$ و $z\ge 0$) باشد، می‌توان نوشت:

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \left(\int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} + \int_{S_4} + \int_{S_5}\right)\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$S_۱: x=۰,\ \ ۰\le r\le a,\ \varphi=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \ ۰\le z\le l,\ d\mathbf{S}=dr\,dz\,\hat{a}_\varphi$$

$$S_۲: y=۰,\ \ ۰\le r\le a,\ \varphi=۰,\ \ ۰\le z\le l,\ d\mathbf{S}=-dr\,dz\,\hat{a}_\varphi$$

$$S_۳: z=۰,\ \ ۰\le r\le a,\ \ ۰\le\varphi\le\frac{\pi}{۲},\ d\mathbf{S}=-r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z$$

$$S_۴: z=l,\ \ ۰\le r\le a,\ \ ۰\le\varphi\le\frac{\pi}{۲},\ d\mathbf{S}=r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z$$

$$S_۵: r=a,\ \ ۰\le z\le l,\ \ ۰\le\varphi\le\frac{\pi}{۲}\ ,\ d\mathbf{S}=a\,d\varphi\,dz\,\hat{a}_r$$

$$I_۱=\int_{S_۱}\mathbf{A}.d\mathbf{S}=\int_۰^a r\,dr\int_۰^l dz=\frac{۱}{۲}a^۲ l$$

$$I_۲=\int_{S_۲}\mathbf{A}.d\mathbf{S}=۰\ ,\ \ (\text{چون } \sin\varphi=۰)$$

$$I_۳=\int_{S_۳}\mathbf{A}.d\mathbf{S}=-\int_۰^a r\,dr\int_۰^{\pi/۲}d\varphi=-\frac{۱}{۴}\pi a^۲$$

$$I_۴=\int_{S_۴}\mathbf{A}.d\mathbf{S}=\int_۰^a r\,dr\int_۰^{\pi/۲}d\varphi=\frac{۱}{۴}\pi a^۲$$

$$I_۵=\int_{S_۵}\mathbf{A}.d\mathbf{S}=a^۲\int_۰^{\pi/۲}\cos\varphi\,d\varphi\int_۰^l dz=a^۲ l$$

$$\oint_S\mathbf{A}.d\mathbf{S}=I_۱+I_۲+\cdots+I_۵=\frac{۳}{۲}a^۲ l$$

■

۱۶. $$\nabla.\mathbf{A}=\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{۱}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=۲\cos\varphi+\cos\varphi+۰=۳\cos\varphi$$

الف) $$\oint_S\mathbf{A}.d\mathbf{S}=\int_V(\nabla.\mathbf{A})dV\ ,\ dV=r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$=۳\int_۰^a r\,dr\int_۰^{۲\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int_۰^l dz=۰$$

ب) $$\oint_S\mathbf{A}.d\mathbf{S}=۳\int_۰^a r\,dr\int_۰^{\pi/۲}\cos\varphi\,d\varphi\int_۰^l dz=\frac{۳}{۲}a^۲ l$$

■

۱۷. روش انتگرال‌گیری مستقیم:

$$\oint_S\mathbf{A}.d\mathbf{S}=\int_{S_۱}\mathbf{A}.d\mathbf{S}+\int_{S_۲}\mathbf{A}.d\mathbf{S}$$

$$S_۱: r=۳\ ,\ z>۰\ ,\ d\mathbf{S}=۹\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{a}_r\ ,\ ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}\ ,\ ۰\le\varphi\le۲\pi$$

$$S_۲ : z = ۰ \ , \ ۰ \le r \le ۳ \ , \ dS = -r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_z \ , \ \theta = \frac{\pi}{۲} \ , \ ۰ \le \varphi \le ۲\pi$$

$$I_۱ = \int_{S_۱} A.dS = \int_{S_۱} z\hat{a}_x .(۹\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{a}_r)$$

$$\hat{a}_x . \hat{a}_r = \sin\theta\cos\varphi \ , \ z = r\cos\theta = ۳\cos\theta$$

$$I_۱ = ۲۷\int_۰^{\pi/۲} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_۰^{۲\pi} \cos\varphi\,d\varphi = ۰ \ , \ I_۲ = \int_{S_۲} A.dS = \int (۰\,\hat{a}_x).dS = ۰$$

$$\oint_S A.dS = I_۱ + I_۲ = ۰ + ۰ = ۰$$

روش قضیه دیورژانس:

$$\nabla.A = \underbrace{\frac{\partial A_x}{\partial x}}_{=۰} + \underbrace{\frac{\partial A_y}{\partial y}}_{=۰} + \underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial z}}_{=۰} = ۰ \ \Rightarrow \ \oint_S A.dS = \int_V \underbrace{(\nabla.A)}_{=۰} dV = ۰$$

■

۱۸. الف)

$$\int_V xyz\,dV = \int_۰^۱ x\,dx \int_۰^{۱-x} y\,dy \int_۰^{۱-x-y} z\,dz$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ x\,dx \int_۰^{۱-x} \underbrace{(y\,dy)(۱-x-y)^۲}_{=[y^۳ - ۲y^۲(۱-x) + y(۱-x)^۲]dy}$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ x \left[\frac{۱}{۴}y^۴ - \frac{۲}{۳}y^۳(۱-x) + \frac{۱}{۲}y^۲(۱-x)^۲\right]_۰^{۱-x} dx$$

$$= \frac{۱}{۲۴}\int_۰^۱ x(۱-x)^۴\,dx = \frac{۱}{۲۴}\int_۰^۱ (x-۱+۱)(x-۱)^۴\,dx$$

$$= \frac{۱}{۲۴}\left\{\int_۰^۱ (x-۱)^۵\,dx + \int_۰^۱ (x-۱)^۴\,dx\right\} = \frac{۱}{۷۲۰}$$

ب)

$$\int_V \frac{dV}{r} = \int_۰^a dr \int_۰^{۲\pi} d\varphi \int_۰^l dz = ۲\pi a l$$

ج)

$$\int_V y\,dV = \int_V r\sin\theta\,\sin\varphi\,dV = \int_V r^۳\sin^۲\theta\,\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$V : ۰ \le r \le ۱, \ ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}, \ ۰ \le \varphi \le \frac{\pi}{۲}$$

$$\int_V y\,dV = \int_۰^۱ r^۳\,dr \int_۰^{\pi/۲} \sin^۲\theta\,d\theta \int_۰^{\pi/۲} \sin\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{۱۶}$$

■

۱۹. الف)
$$\mathbf{A}=y\,\hat{a}_x - x\hat{a}_y \;\Rightarrow\; \nabla.\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0+0+0=0$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

$$=(0-0)\hat{a}_x+(0-0)\hat{a}_y+(-1-1)\hat{a}_z=-2\,\hat{a}_z$$

ب)
$$\mathbf{B}=r\cos\varphi\,\hat{a}_r - r\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

$$\nabla.\mathbf{B}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cos\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-r\sin\varphi)+0=\cos\varphi$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=[0-0]\hat{a}_r+[0-0]\hat{a}_\varphi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-r^2\sin\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi)\right]\hat{a}_z=-\sin\varphi\,\hat{a}_z$$

ج)
$$\mathbf{C}=r^2\hat{a}_r+r\sin\theta\,\hat{a}_\theta$$

$$\nabla.\mathbf{C}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^4)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin^2\theta)+0=4r+2\cos\theta$$

$$\nabla\times\mathbf{C}=\frac{1}{r\sin\theta}[0-0]\hat{a}_r+\frac{1}{r}[0-0]\hat{a}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2)\right]\hat{a}_\varphi=2\sin\theta\,\hat{a}_\varphi$$

■

۲۰.
$$dL=a\,d\varphi$$

$$\int_C \mathbf{A}\,dL=\int_0^\pi(2\sin\varphi\,\hat{a}_r)(a d\varphi)=2a\int_0^\pi\sin\varphi(\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\varphi\,\hat{a}_y)\,d\varphi$$

$$=2a\left[\hat{a}_x\int_0^\pi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi+\hat{a}_y\int_0^\pi\sin^2\varphi\,d\varphi\right]$$

$$=a\left[\hat{a}_x\int_0^\pi\sin 2\varphi\,d\varphi+\hat{a}_y\int_0^\pi(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi\right]$$

$$=a\left[\hat{a}_x\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Big|_0^\pi+\hat{a}_y\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^\pi\right]=\pi a\,\hat{a}_y$$

■

۲۱.
$$d\mathbf{S}=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{a}_r$$

$$\mathbf{A}\times d\mathbf{S}=(a\cos\theta\,\hat{a}_\varphi)\times(a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{a}_r)=a^3\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{a}_\theta$$

$$\hat{a}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y-\sin\theta\,\hat{a}_z$$

$$\int_S\mathbf{A}\times d\mathbf{S}=a^3\Big[\hat{a}_x\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi+\hat{a}_y\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi$$
$$-\hat{a}_z\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\Big]$$

با توجه به اینکه $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=0$ و $\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{3}$ ، داریم:

$$\int_S\mathbf{A}\times d\mathbf{S}=-\frac{2\pi a^3}{3}\hat{a}_z$$

■

.۲۲

$$dV = r^{۲} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \quad , \quad A\, dV = \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_r$$

$$\hat{a}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y + \cos\theta\,\hat{a}_z$$

$$\int_V A\,dV = \hat{a}_x \int_{۰}^{a} dr \int_{۰}^{\pi/۲} \sin^{۲}\theta\, d\theta \int_{۰}^{\pi/۲} \cos\varphi\, d\varphi + \hat{a}_y \int_{۰}^{a} dr \int_{۰}^{\pi/۲} \sin^{۲}\theta\, d\theta \int_{۰}^{\pi/۲} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$+ \hat{a}_z \int_{۰}^{a} dr \int_{۰}^{\pi/۲} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_{۰}^{\pi/۲} d\varphi$$

با توجه به اینکه $\int_{۰}^{\pi/۲} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{۱}{۲}$ ، $\int_{۰}^{\pi/۲} \cos\theta\, d\theta = \int_{۰}^{\pi/۲} \sin\theta\, d\theta = ۱$ و $\int_{۰}^{\pi/۲} \sin^{۲}\theta\, d\theta = \frac{\pi}{۴}$ است، داریم:

$$\int_V A\,dV = \frac{\pi a}{۴}(\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z)$$

■

پ-۲ حل مسائل خودآزمایی فصل دوم

.۱ الف) معادلات حرکت الکترون در بین صفحات انحراف دهنده عبارتند از:

$$y = \frac{۱}{۲} a t^{۲} \quad , \quad x = v_{۰} t$$

پس از حذف t از دو معادله مزبور، معادله مسیر حرکت الکترون برابر است با:

$$y = \frac{۱}{۲} a \left(\frac{x}{v_{۰}}\right)^{۲}$$

اندازه بردار شتاب، $|a|$ ، را با استفاده از قانون نیوتون و قانون کولمب به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = e\mathbf{E} \;\Rightarrow\; |a| = \frac{e}{m}|E| = \frac{eE_{۰}}{m} \;\Rightarrow\; y = \frac{eE_{۰}}{۲ m v_{۰}^{۲}} x^{۲}$$

به ازای x=L، داریم:

$$y_L = \frac{eE_{۰} L^{۲}}{۲ m v_{۰}^{۲}}$$

بردار سرعت در بین صفحات انحراف دهنده عبارت است از:

$$\mathbf{v} = v_x\,\hat{a}_x + v_y\,\hat{a}_y = v_{۰}\,\hat{a}_x + |a| t\,\hat{a}_y$$

که در آن $v_y = |a| t = \frac{eE_{۰} t}{m}$ است. در لحظه خروج الکترون از بین صفحات انحراف دهنده، x=L و $t = \frac{L}{v_{۰}}$ است. پس:

$$\mathbf{v}\big|_{x=L} = \mathbf{v}_l = v_{۰}\,\hat{a}_x + \frac{eE_{۰} L}{m v_{۰}} \hat{a}_y$$