

۱۵. نشان دهید که شرط لورنتز در رابطه ۷-۶، رابطه پیوستگی ۷-۲۶-۵ را بیان می‌کند.

۱۶. عنصر جریان $i(t) = I \Delta l \cos \omega t$ را در مبدأ مختصات و در امتداد محور z در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه ۷-۸۴ پتانسیل برداری A ناشی از این جریان را به دست آورید (توجه کنید که چون Δl بسیار کوچک است، $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$ می‌باشد. به علاوه چگالی حجمی این جریان را می‌توانید به صورت فازور به شکل $\mathbf{J} = I \Delta l \delta(x') \delta(z') \delta(y') \hat{\mathbf{a}}_z$ بنویسید) و سپس میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} را محاسبه کنید.

۱۷. معادلات موج برای توابع پتانسیل برداری A و نردهای V را برای یک محیط غیرهمگن به دست آورید. شرط لورنتز را به صورت $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{A}) = -\mu \epsilon^2 \partial V / \partial t$ در نظر بگیرید.

۱۸. برای اجسام با رسانایی محدود $\sigma > 0$ می‌توان قابلیت گذردهی $\hat{\epsilon}$ را تعریف کرد، به طوری که $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ باشد.

الف) نشان دهید که $\hat{\epsilon} = \epsilon + (\sigma / j\omega)$ می‌باشد.

ب) اگر میدان $\hat{\mathbf{D}}$ را به صورت $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ تعریف کنیم. نشان دهید که شرط مرزی برای مؤلفه عمودی $\hat{\mathbf{D}}$ در مرز دو ناحیه به صورت $\hat{D}_{n1} - \hat{D}_{n2} = 0$ بیان می‌شود.

ج) با استفاده از نتیجه بند (ب) و استفاده از شرط مرزی $D_{n1} - D_{n2} = \rho_S$ نشان دهید که:

$$\rho_S = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1}{j\omega \hat{\epsilon}_2} E_{n1} = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1}{j\omega \hat{\epsilon}_1} E_{n2}$$

۱۹. فازور میدان الکتریکی در محیطی که با پارامترهای μ ، ϵ و $\sigma > 0$ مشخص شده است عبارت است از:

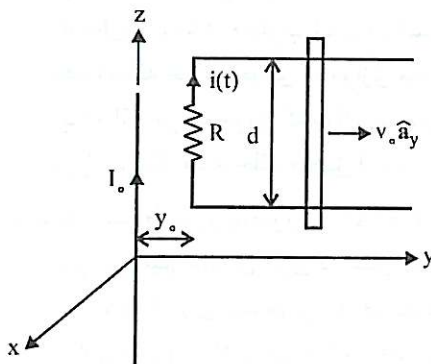
$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\gamma z} \hat{\mathbf{a}}_x$$

که $\gamma = \alpha + j\beta$ ضریب ثابتی است.

الف) میدان مغناطیسی \mathbf{H} و ضریب γ را محاسبه نمایید.

ب) در صورتی که $\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \ll 1$ باشد، مقادیر تقریبی α و β را بر حسب μ ، ϵ ، σ و ω محاسبه کنید.

۷-۱۰ مسائل



شکل ۷-۱۳

۱. یک رشته سیم طویل در امتداد محور z حامل جریان

ثابت I_0 می‌باشد. در مجاورت این سیم دو ریل

موازی محور y و به فاصله d از یکدیگر روی صفحه

yz قرار گرفته و یک میله فلزی با سرعت $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{a}}_y$

روی آنها می‌لغزد. بین ریلها مقاومت R ، مطابق

شکل ۷-۱۳، وصل شده و فرض می‌شود که میله

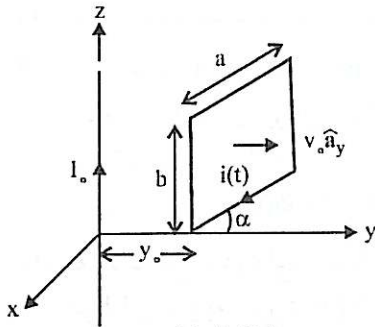
لغزنده در لحظه $t = 0$ در $y = y_0$ قرار دارد. مطلوب

است محاسبه جریان $i(t)$ برای $t > 0$ که از مقاومت

R می‌گذرد، در صورتی که:

الف) ریلها و میله لغزنده هادی کامل فرض شوند،

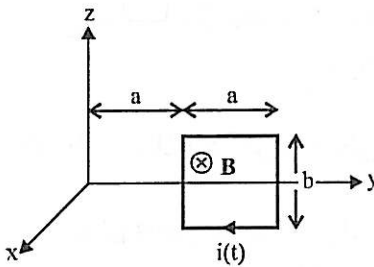
ب) ریلها مقاومتی به اندازه R_0 به ازای واحد طول داشته و مقاومت میله لغزنده ناچیز باشد.



شکل ۷-۱۴

۲. یک حلقه فلزی مستطیلی با مقاومت کل R و به اضلاع a و b به گونه‌ای قرار گرفته که، همان‌طور که در شکل ۷-۱۴ نشان داده شده است، با صفحه yz زاویه α ساخته در حالی که یک ضلع آن که موازی محور z است روی صفحه yz واقع است. این حلقه در میدان مغناطیسی سیمی که حامل جریان I_0 بوده و در امتداد محور z قرار دارد با سرعت $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{a}}_y$ به حرکت درآورده می‌شود. فرض می‌شود که در لحظه $t=0$ ضلعی از حلقه که روی yz قرار

دارد به فاصله y_0 از محور z باشد. جریان القا شده در حلقه، $i(t)$ ، را برای $t > 0$ به دست آورید. راهنمایی: برای محاسبه شار مغناطیسی گذرنده از حلقه، سطح بسته‌ای را که یک وجه آن حلقه و بقیه وجه آن موازی یا منطبق بر صفحات مختصات باشند در نظر بگیرید و از ویژگی سیمولوله‌ای بودن میدان \mathbf{B} استفاده کنید.



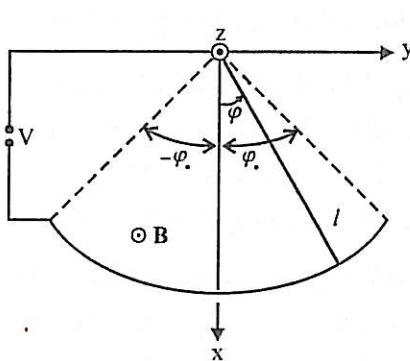
شکل ۷-۱۵

۳. یک حلقه مستطیلی شکل با مقاومت R و به اضلاع a و b مطابق شکل ۷-۱۵، موازی با صفحه yz در نظر بگیرید. در لحظه $t=0$ حلقه روی صفحه yz قرار دارد به گونه‌ای که مختصات مرکز آن $(0, 3a/2, 0)$ می‌باشد. این حلقه با سرعت \mathbf{v} در میدان $\mathbf{B} = (B_0/r) \hat{\mathbf{a}}_\phi$ ، که از یک سیم جریان منطبق بر محور z ناشی می‌شود، به حرکت درآورده می‌شود. مطلوب است محاسبه جریان القا شده در حلقه، $i(t)$ ، برای $t > 0$ ، در صورتی که:

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{a}}_x + v_y \hat{\mathbf{a}}_y + v_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{ج}) \quad \mathbf{v} = v_y \hat{\mathbf{a}}_y + v_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{ب}) \quad \mathbf{v} = v_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{الف})$$

۴. در مسئله ۳، فرض کنید که حلقه مستطیلی به جای حرکت خطی دارای حرکتی دورانی با سرعت زاویه‌ای ω باشد. مطلوب است محاسبه جریان $i(t)$ برای وقتی که:
 الف) حلقه حول محوری که موازی محور z بوده و از مرکز حلقه، $(0, 3a/2, 0)$ ، می‌گذرد، بچرخد.
 ب) حلقه حول محوری که موازی محور z و از نقطه $(0, 2a, 0)$ می‌گذرد، بچرخد. در این حالت محور دوران بر یک ضلع حلقه منطبق است.

۵) یک سیم طویل را به صورت $y = |x|$ شکل داده و در معرض میدان مغناطیسی ثابت $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{a}}_z$ قرار می‌دهیم. میله‌ای فلزی که مقاومت آن به ازای واحد طول برابر R است با سرعت ثابت $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{a}}_y$ روی سیم مزبور به حرکت درآورده می‌شود، به گونه‌ای که همواره با سیم اتصال داشته و موازی محور x باشد. در لحظه $t=0$ میله روی محور x قرار دارد. همچنین از مقاومت سیم در مقایسه با مقاومت میله صرف‌نظر می‌شود مطلوب است محاسبه:
 الف) جریان پدید آمده در میله، ب) انرژی تلف شده در میله پس از یک ثانیه از شروع حرکت.

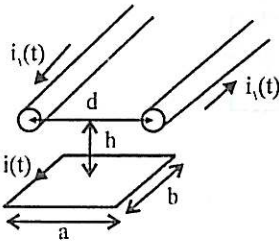


شکل ۷-۱۶

همانند یک آونگ در دامنه زاویه‌ای $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ نوسان می‌کند. که φ ، همان‌طور که در شکل ۷-۱۶ نشان داده شده است، زاویه میله از محور x می‌باشد. انتهای میله روی یک ریل هادی که به شکل یک قوس دایره است می‌لغزد. سرعت زاویه‌ای میله نوسانی و به صورت $\omega = A \sin \omega_0 t$ فرض می‌شود که A یک ضریب ثابت می‌باشد. در لحظه $t=0$ میله در $\varphi = -\varphi_0$ قرار دارد. با استفاده از روابط

$$\mathbf{v} = r \omega \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad \text{و} \quad \omega = d\varphi/dt$$

ضریب ثابت A را به دست آورده، سپس ولتاژ V را محاسبه کنید.

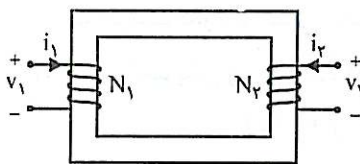


شکل ۷-۱۷

یک خط انتقال هوایی، متشکل از دو سیم موازی به فاصله d از یکدیگر، حامل جریان $i_1(t) = I_1 \cos \omega t$ می‌باشد. در زیر این خط انتقال یک حلقه مستطیلی شکل با مقاومت R و اضلاع a و b موازی با صفحه سیمها قرار داده می‌شود، به طوری که حلقه و خط انتقال دارای صفحه منصف مشترکی بوده و فاصله صفحه سیمها از صفحه حلقه برابر با h باشد؛ شکل ۷-۱۷ خط انتقال و حلقه مستطیلی را نشان می‌دهد. جریان القا شده در حلقه را به دست

آورید. نتیجه را برای حالتی که حلقه روی صفحه سیمهای خط انتقال قرار گیرد خلاصه نمایید. از تقریب میدانهای شبه ساکن برای محاسبه میدان مغناطیسی خطوط جریان استفاده کنید.

۸. مسئله ۷ را برای وقتی که مرکز حلقه به فاصله c از صفحه منصف خط انتقال باشد تکرار کنید.



شکل ۷-۱۸

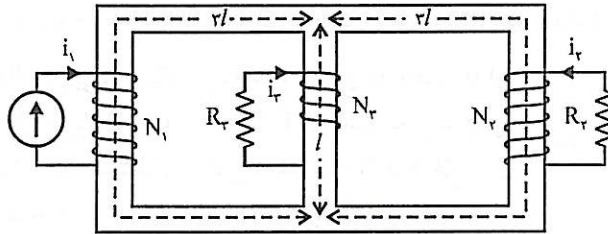
یک ترانسفورماتور را که سیم‌پیچهای اولیه و ثانویه آن به ترتیب دارای N_1 و N_2 دور باشند در نظر بگیرید. سطح مقطع هسته ترانسفورماتور برابر S ، طول متوسط آن برابر l و قابلیت نفوذ آن برابر $\mu = \mu_1 \mu_2$ می‌باشد. از سیم‌پیچهای اولیه و ثانویه جریانهای $i_1(t)$ و $i_2(t)$ می‌گذرند. از مقاومت سیم‌پیچها و تلفات هسته صرف‌نظر می‌شود. همچنین فرض می‌شود که میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانهای مزبور کاملاً در هسته محصور بوده و توزیعی یکنواخت در سطح مقطع آن دارند. شکل ۷-۱۸ این ترانسفورماتور را نشان می‌دهد. تحقیق کنید که:

$$\text{الف) } v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad \text{و} \quad v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu S N_1 N_2}{l}, \quad L_{22} = \frac{\mu S N_2^2}{l}, \quad L_{11} = \frac{\mu S N_1^2}{l}$$

ب) رابطه $\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$ بین ولتاژهای اولیه و ثانویه برقرار است. تحت چه شرط ایده‌آلی رابطه $\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_1}{N_2}$ که معمولاً به عنوان یکی از روابط مهم ترانسفورماتور مورد استفاده قرار می‌گیرد، نیز برقرار خواهد بود؟ برای اینکه به ماهیت این رابطه پی برده شود، جریان $i_2(t)$ را برای وقتی که $N_1 = 100$ ، $N_2 = 200$ ، $\mu_r = 10^4$ ، $S = 5 \text{ cm}^2$ ، $l = 10 \text{ cm}$ ، $i_1(t) = 2 \cos(100\pi t) \text{ A}$ و مقاومت $R_s = 10 \Omega$ به ثانویه وصل شود محاسبه کنید.

۱۰. در مدار مغناطیسی شکل ۷-۱۹، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ را برای وقتی که $i_1(t) = \sin(1000t) \text{ A}$ ، $N_1 = N_2 = 200$ ، $N_3 = 100$ ، $\mu_r = 10^4$ ، $S = 20 \text{ cm}^2$ ، $l = 10 \text{ cm}$ ، $R_2 = R_3 = 2 \Omega$ محاسبه کنید. از تقریبهای معقول در محاسبات استفاده کنید.



شکل ۷-۱۹

۱۱) میدان الکتریکی در محیطی با قابلیت نفوذ $\mu = \mu_0$ و رسانایی $\sigma = 0$ برابر است با:

$$\mathbf{E} = 2 \cos(10^8 t - \frac{2}{3}z) \hat{\mathbf{a}}_x + 3 \sin(10^8 t - \frac{2}{3}z) \hat{\mathbf{a}}_y$$

مطلوب است محاسبه:

الف) میدان مغناطیسی وابسته به میدان الکتریکی مزبور،

ب) قابلیت گذردهی نسبی محیط، ϵ_r .

۱۲) میدان الکتریکی زیر در خلأ، که فاقد بار الکتریکی آزاد می‌باشد، وجود دارد.

$$\mathbf{E} = (5\hat{\mathbf{a}}_x - 2\hat{\mathbf{a}}_y + c\hat{\mathbf{a}}_z) \cos(\omega t - 2x - 3y + \sqrt{3}z)$$

که c مقدار ثابتی است. مطلوب است محاسبه:

الف) مقدار ثابت c ، ب) میدان مغناطیسی وابسته به میدان الکتریکی مزبور،

ج) فرکانس زاویه‌ای ω .

۱۳. ناحیه $x > 0$ هادی کامل و ناحیه $x < 0$ خلأ می‌باشد. میدان مغناطیسی در ناحیه خلأ عبارت است از:

$$\mathbf{H} = H_0 \cos(ax) \cos(3 \times 10^9 t - 6y) \hat{\mathbf{a}}_z$$

که H_0 و a مقادیر ثابتی هستند. مطلوب است محاسبه:

الف) چگالی جریان الکتریکی سطحی روی صفحه $x = 0$ ،

ب) میدان الکتریکی وابسته به میدان مغناطیسی مزبور، ج) مقدار ثابت a .

۱۴ ناحیه $z < 0$ خلأ و ناحیه $z > 0$ عایق کاملی با قابلیت گذردهی $\epsilon = 5\epsilon_0$ می باشد. میدانهای الکتریکی در این دو ناحیه عبارتند از:

$$\mathbf{E}_1 = [\cos(\omega t - x - z) + R \cos(\omega t - x + z)] \hat{\mathbf{a}}_y, \quad z < 0$$

$$\mathbf{E}_2 = T \cos(\omega t - x - \xi z) \hat{\mathbf{a}}_y, \quad z > 0$$

که R ، T و ξ مقادیر ثابتی می باشند. مطلوب است محاسبه:

الف) فرکانس زاویه ای ω ، ب) ضریب ثابت ξ ، ج) ضرایب R و T .

۱۵. یک محفظه مکعب مستطیلی شکل، که کلیه دیواره های آن هادی کامل فرض می شوند، محدود به سطوح $x=0$ ، $x=a$ ، $y=0$ ، $y=b$ ، $z=0$ و $z=c$ می باشد. فضای درون محفظه خلأ است. میدان الکتریکی در درون محفظه عبارت است از:

$$\mathbf{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right) \sin(\omega t) \hat{\mathbf{a}}_y$$

مطلوب است محاسبه:

الف) میدان مغناطیسی وابسته به این میدان الکتریکی، ب) فرکانس زاویه ای ω ،

ج) چگالی توزیع بار الکتریکی روی سطوح $z=c$ و $y=0$ ،

د) چگالی توزیع جریان روی سطوح $x=0$ و $y=b$.

۱۶. میدان مغناطیسی در درون یک کابل هم محور، که شعاعهای درونی و بیرونی آن به ترتیب برابر با a و b

می باشند برابر با $\mathbf{H} = \frac{H_0}{r} \cos(\omega t - \gamma z) \hat{\mathbf{a}}_\phi$ است. فضای درونی کابل را ماده عایقی با قابلیت

گذردهی $\epsilon = 9\epsilon_0$ و قابلیت نفوذ $\mu = \mu_0$ فرا گرفته است. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان الکتریکی وابسته به میدان مغناطیسی مزبور، ب) فرکانس زاویه ای ω ،

ج) چگالی جریان الکتریکی روی سطوح $r=a$ و $r=b$.

۱۷. میدان الکتریکی $\mathbf{E} = E_0 e^{-(\alpha x + \beta y)} \cos(10^8 t - \gamma z/3) \hat{\mathbf{a}}_y$ در خلأ مفروض است. با استفاده از

معادلات کرل و دیورژانس ماکسول ضرایب ثابت α و β را محاسبه کنید. چگالیهای منابع، ρ و \mathbf{J} ، در تمام نقاط صفر هستند.

۱۸. نواحی $z > 0$ و $z < 0$ از فضا را به ترتیب عایقهای کاملی با قابلیتهای گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 اشغال

نموده اند. ضرایب نفوذ هر دو عایق برابر با μ_0 می باشند. یک جریان: سطحی با چگالی توزیع

یکنواخت $\mathbf{J}_s = J_s \sin \omega t \hat{\mathbf{a}}_y$ در مرز دو ناحیه ($z=0$) قرار داده می شود.

الف) نشان دهید که میدان \mathbf{H} فقط مؤلفه x داشته و این مؤلفه فقط تابعی از z می باشد.

ب) با استفاده از معادلات ماکسول نشان دهید که در هر دو ناحیه $z > 0$ و $z < 0$ معادله حاکم بر \mathbf{H}

به صورت $\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$ می باشد. این معادله را برای \mathbf{H} با ویژگیهای مندرج در بند (الف)

حل نموده، سپس با اعمال شرایط مرزی برای میدانها در مرز $z=0$ ، پاسخ کامل برای \mathbf{E} و \mathbf{H} را در کلیه نقاط فضا به دست آورید.

۱۹. در مسئله ۱۸ فرض کنید که صفحه‌ای از جنس هادی کامل در $z = -d$ قرار داده می‌شود. میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} را در نواحی $z > 0$ و $-d < z < 0$ محاسبه کنید.

۲۰. نشان دهید که معادلات حاکم بر میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} در محیطی با قابلیت گذردهی ϵ و قابلیت نفوذ μ که در آن منابع، یعنی بار الکتریکی و جریان با چگالیهای حجمی ρ و \mathbf{J} ، وجود دارند، عبارتند از:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = j\omega \mu \mathbf{J} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

۲۱. الف) تحقیق کنید که توابع $\Psi_1 = f(t - \sqrt{\mu\epsilon}z)$ و $\Psi_2 = g(t + \sqrt{\mu\epsilon}z)$ پاسخ عمومی معادله

دیفرانسیل پاره‌ای $0 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ می‌باشند. در اینجا f و g توابع دلخواهی هستند که مشتقات اول

و دوم آنها نسبت به t و z وجود دارند.

ب) فرض کنید که جریان سطحی \mathbf{J}_s در مسئله ۱۸ به جای اینکه تغییرات سینوسی نسبت به زمان داشته باشد، تغییراتی دلخواه دارد که با تابع $f(t)$ بیان می‌شود. به عبارت دیگر $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s f(t) \hat{\mathbf{a}}_y$. با استفاده از نتیجه بند الف) و با استناد به پاسخ مسئله ۱۸ میدان \mathbf{E} را در نواحی $z > 0$ و $z < 0$ برحسب $f(t)$ بیان کنید.

۲۲. در مسئله ۲۱ میدانهای الکترومغناطیس ناشی از یک جریان سطحی با توزیع یکنواخت و با تغییرات

زمانی دلخواه مورد بررسی قرار گرفت. روش به کار رفته در مسئله مزبور، در حالت کلی، به خصوص در ارتباط با آنتن‌ها، موجبرها و سایر ادوات الکترومغناطیسی، قابل استفاده نیست. در این موارد معمولاً پاسخ میدان را ابتدا برای تغییرات زمانی سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω به دست آورده، سپس از خطی بودن معادلات ماکسول (به فرض اینکه ϵ ، μ و σ تابعی از میدان نباشند) و از خواص انتگرال فوریه استفاده کرده و میدانها را برای حالتی که تغییرات زمانی منابع با تابع $f(t)$ بیان شود، ولی توزیع مکانی آنها عیناً برابر با حالت تغییرات زمانی سینوسی باشد، به دست می‌آورند.

الف) فرض کنید منبعی که فازور آن واحد باشد (به عبارت دیگر تغییرات زمانی منبع به صورت $\cos \omega t$ است) تولید میدان الکتریکی فازوری $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega)$ را بنماید. نشان دهید که میدان الکتریکی برای وقتی که تغییرات زمانی منبع با تابع دلخواه $f(t)$ بیان گردد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$

ب) با به کار بردن انتگرال بالا، بند (ب) مسئله ۲۱ را تکرار کنید.

۲۳. نشان دهید که برای میدانهای متغیر با زمان شرط مرزی برای مؤلفه عمودی \mathbf{B} را می‌توان ناشی از شرط

مرزی برای مؤلفه مماسی \mathbf{E} و شرط مرزی برای مؤلفه عمودی \mathbf{D} را می‌توان ناشی از شرایط مرزی برای مؤلفه مماسی \mathbf{H} و مؤلفه عمودی \mathbf{J} دانست. یک کاربرد مهم این ویژگی اعمال شرایط مرزی در فصل مشترک دو ناحیه عایق (مثلاً در موجبرهای نوری) است. در این موارد اعمال شرایط مرزی فقط برای مؤلفه‌های مماسی \mathbf{E} و \mathbf{H} کفایت می‌کند.