

شکل ۲۷-۶

۲۸. شکل ۲۷-۶ مدار یک رله مغناطیسی را نشان می‌دهد. سطح مقطع بازوی متحرک و هسته هر دو برابر S و قابلیت نفوذ آنها برابر μ است. طول متوسط هسته l و طول بازو l' می‌باشد. سیم پیچ هسته دارای N دور بوده و از آن جریان I عبور داده می‌شود.

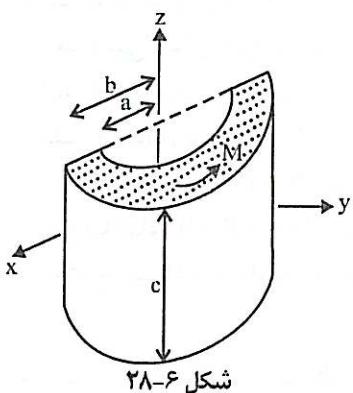
(الف) گشتاور مکانیکی اعمال شده بر بازوی متحرک را، وقتی که $d\phi = 0$ باشد، بدست آورید.
 (ب) مسئله را برای وقتی که یک شکاف کوچک هوا به فاصله $d \cong l' \cong l$ بین انتهای آزاد بازوی متحرک و هسته باشد تکرار کنید. (از رلوکتانس هسته در مقابل رلوکتانس هوا صرف نظر کنید).

۱۳-۶ مسائل

- (۱) یک جسم فرومغناطیسی، به صورت یک لایه نیم استوانه بینهایت طویل، بخشی از فضا محدود به $a < r < b$ و $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ را فراگرفته است. این جسم در امتداد محور Z به طور یکنواخت مغناطیس شده است. در صورتی که چگالی گشتاور مغناطیس برابر با $M = M_z \hat{a}_z$ باشد، مطلوب است محاسبه:
 (الف) چگالیهای سطحی و حجمی جریانهای مقید مغناطیسی،
 (ب) میدانهای مغناطیسی B و H در تمام نقاط فضا.

۲. یک میله آهنی طویل به شعاع a به گونه‌ای مغناطیس شده است که چگالی گشتاور مغناطیسی در آن با رابطه $[M = M_z \cdot (a/r) \hat{a}_\varphi + k_z \hat{a}_z]$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان می‌شود. محور میله بر محور Z منطبق است. میدانهای B و H را در تمام نقاط درون و بیرون میله محاسبه کنید.

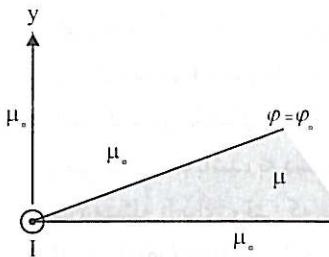
۳. یک آهنربا، به صورت یک لایه نیم استوانه مطابق شکل ۲۸-۶، فضای محدود به $b < r < a$ و $0 < \varphi < \pi$ ، $c/2 < z < c$ را فراگرفته است. چگالی گشتاور مغناطیسی در این آهنربا با رابطه $M = M_z \cdot \frac{a}{r} \hat{a}_\varphi$ بیان می‌شود. میدان B را در مبدأ مختصات محاسبه کنید.



شکل ۲۸-۶

۴. جسمی به شکل مخروط ناقص و از جنس ماده‌ای فرومغناطیس به طور یکنواخت در امتداد محورش مغناطیس شده است. چگالی گشتاور مغناطیسی را می‌توان با رابطه $M = M_z \hat{a}_z$ بیان کرد.

برای سادگی محور z را منطبق بر محور مخروط ناقص و مبدأ مختصات را منطبق بر رأس سطح جانبی آن فرض کنید. شعاعهای قاعده‌های مخروط ناقص برابر با a و b ($b > a$) و ارتفاع آن برابر h است. میدانهای B و H را در مبدأ مختصات محاسبه کنید.



شکل ۲۹-۶

۵. بخشی از فضا محدود به ناحیه $0 < \varphi < \mu$ را ماده‌ای فرومغناطیس با قابلیت نفوذ μ فراگرفته است. یک رشتہ سیم نازک حامل جریان I در امتداد محور z قرار داده می‌شود. شکل ۲۹-۶ سطح مقطع این سیستم مغناطیسی را نشان می‌دهد. میدانهای مغناطیسی B و H را در تمام نقاط فضا محاسبه کنید.

۶. مسئله ۵ را می‌توان به حالت کلی تری تعمیم داد، بدین ترتیب که ماده فرومغناطیس غیرهمگن بوده و قابلیت نفوذ آن با رابطه $f(\varphi) = \mu$ بیان شود؛ به طوری که همواره $1 \geq f(\varphi) \geq 0$ باشد. همچنین سیم حامل جریان I در امتداد محور z به جای خود باقی است.

(الف) استدلال نمایید که میدان B در تمام نقاط فضا دارای تابع تغییرات یکسانی به صورت $B(r) = B_0 \hat{a}_\varphi$ است، که B_0 مقدار ثابتی است.

(ب) میدانهای مغناطیسی B و H را برای وقتی که $f(\varphi)$ به شرح زیر باشد به دست آورید:

$$f(\varphi) = \begin{cases} \mu_r & \frac{2n\pi}{6} < \varphi < \frac{(2n+1)\pi}{6}, \quad n = 0, 1, \dots, 5 \\ 1 & \frac{(2n-1)\pi}{6} < \varphi < \frac{2n\pi}{6}, \quad n = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$

(ج) بند (ب) را برای وقتی که $f(\varphi) = 1 + \sin(\varphi/2)$ باشد تکرار نمایید.

۷. یک رشتہ سیم نازک حامل جریان I در امتداد محور z در نظر بگیرید. فرض کنید قابلیت نفوذ مغناطیسی فضای اطراف سیم با رابطه $f(r) = \mu r$ ، که مختصه شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای است، بیان شود.

(الف) استدلال نمایید که میدان مغناطیسی H در تمام نقاط فضا دارای تابع تغییرات یکسانی به صورت $H(r) = H_0 \hat{a}_r$ است، که H_0 مقدار ثابتی است، (فرض کنید $1 \geq f(r) \geq 0$ باشد).

(ب) میدانهای H و B و چگالیهای سطحی و حجمی جریانهای مقید مغناطیسی را برای وقتی که $f(r) = r$ به شرح زیر باشد. محاسبه نمایید.

$$f(r) = \begin{cases} r^2 & 1 < r < 2 \\ 1 & r > 2 \end{cases}$$

۸. مسئله ۷ را می‌توان به حالت کلی تری تعمیم داد، بدین ترتیب که قابلیت نفوذ مغناطیسی فضای اطراف سیم حامل جریان I تابعی از دو مختصه r و z باشد، یعنی $f(r, z) = \mu$. در این حالت نیز می‌توان استدلال نمود که میدان مغناطیسی H در تمام نقاط فضا دارای تابع تغییرات یکسانی، مستقل از $f(r, z)$ ، به صورت $H(r, z) = H_0 \hat{a}_r$ است. با استفاده از این ویژگی میدان H مطلوب است محاسبه:

الف) انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک لایه استوانه‌ای به طول c و شعاعهای درونی و بیرونی a و b که محور آن بر سیم حامل جریان I منطبق است، و قابلیت نفوذ آن با رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\mu = \mu_0 \cdot \left[1 + \frac{I}{b} \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right) \right], \quad a < r < b, \quad 0 < z < c$$

ب) میدان B و چگالی حجمی جریانهای مقید مغناطیسی برای وقتی که قابلیت نفوذ ماده‌ای که فضای اطراف سیم حامل جریان I را فرا می‌گیرد برابر با $(1 + e^{-r/a})^z \mu_0 \mu$ باشد.

۹. نواحی $a < z < -a$ از فضارابه ترتیب دو ماده با قابلیتهای نفوذ مغناطیسی μ_1 و μ_2 فراگرفته‌اند. یک صفحه بینهایت جریان با چگالی یکنواخت $J_S = J_S \hat{a}_y$ در $z=0$ قرار داده می‌شود. ناحیه $-a < z < a$ خلاً فرض می‌شود. میدانهای H و B را در تمام نقاط فضا محاسبه کنید.

۱۰. دو ماده مغناطیسی با قابلیتهای نفوذ μ_1 و μ_2 به ترتیب نواحی $0 < z < 0$ و $0 < x < 0$ از فضای اشغال نموده‌اند. ناحیه $0 < z < a$ خلاً می‌باشد. یک صفحه بینهایت جریان با چگالی ثابت

$$J_S = J_S \hat{a}_x \quad \text{در } z=0 \quad \text{قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه:}$$

الف) میدانهای H و B در تمام نقاط فضا،

ب) چگالی جریان سطحی مقید روی $x=0$ و $z=0$.

۱۱. مسئله ۱۰ را می‌توان حالت خاصی از موردی دانست که در آن قابلیت نفوذ ماده فرومغناطیس که فضای $z > 0$ را فراگرفته است تابعی پیوسته (یا مجموعی از توابع پیوسته) به صورت $f(x)$ باشد. ناحیه $z > 0$ هم‌چنان خلاً بوده و صفحه بینهایت جریان با چگالی توزیع $J_S = J_S \hat{a}_x$ هم‌چنان در $z=0$ قرار دارد.

الف) استدلال نمایید که میدان مغناطیسی H در کلیه نقاط ناحیه $z > 0$ تغییراتی مستقل از x داشته و به صورت $H = H \hat{a}_y$ قابل بیان است، که H مقدار ثابتی است.

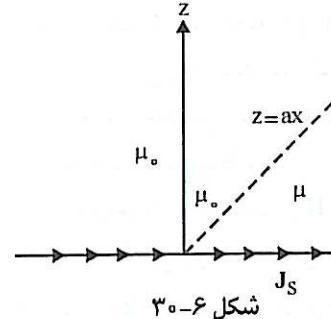
ب) با استفاده از ویژگی مذبور، قانون مداری آمپر و خصوصیت سیم‌لوله‌ای میدان B ، میدانهای H و B چگالی حجمی جریان مقید مغناطیسی را برای وقتی که $f(x) = 3 + 2e^{-x^2}$ باشد محاسبه کنید.

۱۲. مسئله ۱۱ را می‌توان به حالت کلی تری تعمیم داد،

بدین ترتیب که قابلیت نفوذ مغناطیسی ماده‌ای که فضای $z > 0$ را فرا می‌گیرد تابعی از x و z باشد،

یعنی $f(x, z) = \mu_0 \mu f(x, z)$. در این حالت نیز می‌توان استدلال نمود که میدان مغناطیسی H تغییراتی

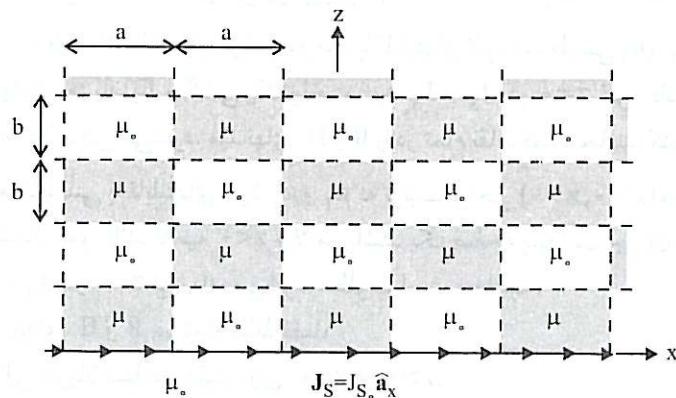
مستقل از x و z داشته و در هر یک از نواحی $z > 0$ و $z < 0$ اندازه ثابتی دارد. به عنوان مثال، سیستم نشان



داده شده در شکل ۶-۳ را در نظر بگیرید. میدانهای H و B را در تمام نقاط فضا و چگالی سطحی جریان مقید را روی سطح $z=ax$ برای $z > 0$ به ازای $a = \sqrt{3}$ محاسبه کنید.

۱۳. ناحیه $z > 0$ از فضا را جسمی که قابلیت نفوذ مغناطیسی آن نسبت به x و z متناوباً بین μ_0 و μ تغییر می‌کند فراگرفته است. یک صفحه بینهایت جریان با چگالی توزیع $J = J_S \hat{a}_x$ در $z=0$ قرار داده می‌شود. شکل ۳۱-۶ سطح مقطع جسم و توزیع جریان را نشان می‌دهد. میدانهای H و B را در کلیه نقاط فضا به دست آورید.

راهنمایی: این مسئله حالت خاصی از مسئله ۱۲ است.



شکل ۳۱-۶

۱۴. در مسئله ۲۶ فصل ۵، فرض کنید که فضای بالای سطح جریان ($y > a^2 + x^2 > a^2$) را ماده‌ای با قابلیت نفوذ مغناطیسی μ فراگرفته است، در حالی که زیر سطح جریان خلاً است. میدانهای H و B را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

۱۵. برای توزیع جریان مسئله ۲۷ فصل ۵ (شکل ۵)، فرض کنید ناحیه $\alpha < \varphi < 0$ را ماده‌ای مغناطیسی با قابلیت نفوذ μ فراگرفته است. ناحیه $2\pi < \varphi < \alpha$ همچنان خلاً است. میدانهای H و B را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

۱۶. مرز مشترک دو ناحیه ۱ و ۲ را صفحه‌ای به معادله $1 - 2y - 6z = 3x$ تشکیل می‌دهد. ماده‌ای مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی $\mu_1 = 7$ ناحیه ۱ ($1 - 2y - 6z > 3x > 2y - 6z$) را فراگرفته، در حالی که ناحیه ۲ خلاً می‌باشد. میدان مغناطیسی در ناحیه ۲ عبارت است از $H_2 = 4\hat{a}_x - \hat{a}_y + 3\hat{a}_z$. مطلوب است محاسبه:

- (الف) میدان مغناطیسی H_1 در ناحیه ۱،
 (ب) چگالی جریان سطحی مغناطیسی در مرز دو ناحیه.

۱۷. در مسئله ۱۶ میدان اولیه‌ای که قبل از حضور ماده مغناطیسی وجود داشته است را به دست آورید.

۱۸. ناحیه $-a < z < a$ از فضا را یک ماده مغناطیسی خطی و همگن فراگرفته است. وقتی که میدان اولیه یکنواختی باشد $A/m | H_a | = 3$ به ماده مغناطیسی اعمال شود، چگالی گشتاور

مغناطیسی، $A/m = \hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$ در آن ایجاد می‌گردد. قابلیت نفوذ نسبی ماده مغناطیسی و مؤلفه‌های میدان اولیه H_a را محاسبه کنید.

۱۹. ناحیه $1 < y < d$ - از فضای رایک ماده مغناطیسی غیرهمگن با قابلیت نفوذ $\mu = \mu_0(1+y^2)$ است. میدان اولیه یکنواخت H_a به این ماده اعمال می‌شود. مطلوب است محاسبه میدانهای کل H و B در تمام نقاط فضای رایک وقتی که:

$$H_a = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 5\hat{a}_z \quad A/m \quad (ج) \quad H_a = 3\hat{a}_y \quad A/m \quad (ب) \quad H_a = 2\hat{a}_x \quad A/m \quad (الف)$$

۲۰. ناحیه $d < z < d+I$ از فضای رایک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی r μ فراگرفته است. یک رشته سیم نازک بینهایت طویل در امتداد محور x حامل جریان I در جهت مثبت این محور می‌باشد.

(الف) نشان دهید که چگالی جریان سطحی مغناطیسی از رابطه

$$J_{ms} = \frac{(\mu_r - 1)Id}{\pi(\mu_r + 1)(y^2 + d^2)} \hat{a}_x$$

به دست می‌آید و چگالی جریان حجمی مغناطیسی برابر صفر است.

(ب) نشان دهید که میدان مغناطیسی B در ناحیه $d < z < d+I$ برابر میدان حاصل از یک سیم بینهایت طویل در امتداد محور x و حامل جریان $(1/\mu_r + 1)I$ در جهت مثبت این محور می‌باشد.

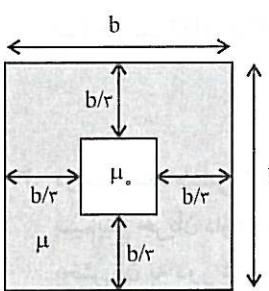
(ج) نشان دهید که میدان مغناطیسی B در ناحیه $d < z < d+I$ برابر میدانی است که از سیم اصلی حامل جریان I و یک جریان تصویر موازی با محور x که از نقطه $(-2d, 0, 0)$ بگذرد و حامل جریان $(1/\mu_r + 1)I$ در جهت مثبت این محور باشد حاصل می‌شود.

۲۱. فضای درون یک سیم‌وله بینهایت طویل به شعاع a رایک ماده مغناطیسی غیرهمگن با قابلیت نفوذ $f(r) = \mu_0 r$ ، که r فاصله یک نقطه در درون سیم‌وله از محور آن می‌باشد، فراگرفته است. تعداد دورهای سیم پیچ سیم‌وله در واحد طول برابر n است.

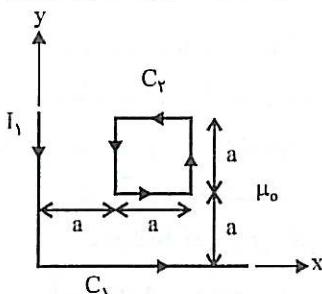
(الف) ضریب خودالقایی سیم‌وله را به ازای واحد طول بر حسب a ، n ، μ_0 و $f(r)$ محاسبه کنید.

(ب) نتیجه بند (الف) را برابر وقتی که $a = r$ و $f(r) = 1 + (r/a)$ باشد به دست آورید.

۲۲. چنبره‌ای مشکل از هسته آهنی، به صورت حلقه‌ای ضخیم و توخالی با سطح مقطع مربعی مطابق شکل ۶-۳۲، و تعداد کل N دور سیم پیچ است. شعاع متوسط چنبره برابر a ، قابلیت نفوذ بخش آهنی هسته آن برابر μ و قابلیت نفوذ قسمت توخالی آن برابر μ_0 می‌باشد. ابعاد سطح مقطع هسته چنبره در شکل نشان داده شده است. ضریب خودالقایی چنبره را با فرض $b > a$ به دست آورید.



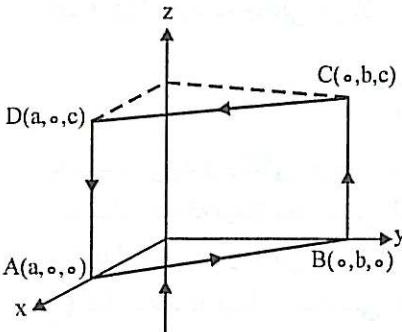
شکل ۶-۳۲



شکل ۱۳-۶

۲۳. دو مدار جریان C_1 و C_2 را مطابق شکل ۳۳-۶ در نظر بگیرید. مدار C_1 به صورت یک رشته سیم نازک طویل در امتداد بخش‌های مثبت محورهای x و y است، در حالی که مدار C_2 به صورت یک حلقه مربعی به ضلع a واقع روی صفحه xy می‌باشد که مرکز آن به فاصله $3a/2$ از محورهای x و y است. ضریب القای متقابل بین مدارهای C_1 و C_2 را محاسبه کنید.

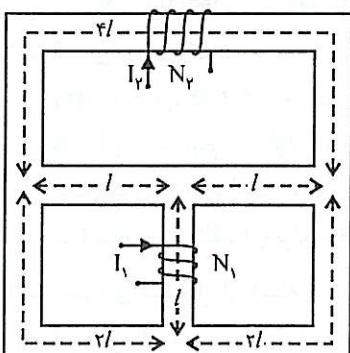
۲۴. مسئله ۲۳ را برای حالتی که آن بخش از مدار C_1 که منطبق بر محور x است در جهت منفی این محور ادامه یابد تکرار نمایید.



شکل ۱۳-۶

۲۵. ضریب القای متقابل بین یک رشته سیم نازک طویل منطبق بر محور z و مدار مستطیلی ABCD، که مختصات رئوس آن در شکل ۳۴-۶ نشان داده شده است، را محاسبه کنید.

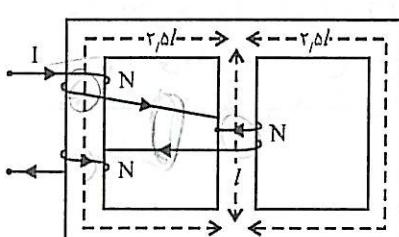
راهنمایی: یک سطح بسته که مستطیل ABCD یک وجه آن باشد را در نظر بگیرید و از رابطه $\oint_S dS = 0$ استفاده نمایید.



شکل ۱۳-۶

۲۶. شکل ۳۵-۶ یک مدار مغناطیسی با دو سیم پیچ جریان را نشان می‌دهد. هسته این مدار دارای سطح مقطع یکنواخت به مساحت S و قابلیت نفوذ μ است. سایر مشخصات مدار در شکل نشان داده شده‌اند. مطلوب است محاسبه:

- (الف) ضریب خودالقایی هر یک از سیم پیچها،
- (ب) ضریب القای متقابل بین دو سیم پیچ.



شکل ۱۳-۶

۲۷. در مدار مغناطیسی نشان داده شده در شکل ۳۶-۶، سیم پیچ جریان دارای سه بخش مساوی بوده که یک بخش آن به دور شاخه میانی و دو بخش دیگر به دور یک شاخه کناری هسته پیچیده شده‌اند. تعداد دورهای هر بخش سیم پیچ برابر N است. هسته مدار

دارای سطح مقطع یکنواخت به مساحت S و قابلیت نفوذ μ است و جریان I از سیم پیچ می‌گذرد.
مطلوب است محاسبه:

- (الف) شار مغناطیسی که از هر یک از شاخه‌های مدار می‌گذرد،
(ب) انرژی ذخیره شده در مدار مغناطیسی.

۲۸. یک سیملوله طویلاً به شعاع a و با π دور سیم پیچ به ازای واحد طول مفروض است. فضای درونی این سیملوله را یک ماده مغناطیسی غیرخطی که منحنی $H = B - \mu \alpha H^3$ بیان می‌شود فراگرفته است. از سیم پیچ این سیملوله جریان I عبور داده می‌شود. مطلوب است محاسبه:
(الف) انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول سیملوله،
(ب) ضریب خودالقایی معادل به ازای واحد طول به صورت تابعی از جریان I .

۲۹. جریان I با چگالی توزیع یکنواخت از یک سیم طویل استوانه‌ای به شعاع a می‌گذرد. سیم حامل جریان از یک ماده فرومغناطیس غیرخطی که منحنی $H = B - \mu \alpha H^3$ آن با رابطه $B = \mu \alpha H$ بیان می‌شود تشکیل شده است. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در واحد طول درون سیم را محاسبه کرده و سپس ضریب خودالقایی داخلی سیم به ازای واحد طول را به دست آورید.

۳۰. یک استوانه طویل به شعاع a ، که از ماده‌ای فرمغناطیس تشکیل شده است، به طور یکنواخت با چگالی گشتاور مغناطیسی M در امتداد عمود بر محورش مغناطیس شده است. برای سادگی محور استوانه را منطبق بر محور Z و چگالی گشتاور مغناطیسی را در جهت \hat{a}_x در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی H را در تمام نقاط فضای استفاده از مفهوم پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی و حل معادله لاپلاس مربوط به آن به دست آورید.

۳۱. مسئله ۳۰ را برابر و قتی که جسم مغناطیس شده به صورت کره‌ای به شعاع a با چگالی گشتاور مغناطیسی $M = M \cdot \hat{a}_z$ باشد تکرار کنید.

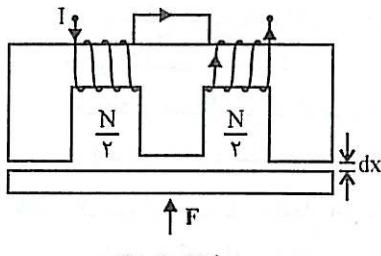
۳۲. یک حفاظ مغناطیسی ممکن است به صورت یک پوسته کروی با شعاع درونی a و شعاع بیرونی b باشد. این پوسته از یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی $\mu_r > 1$ ساخته می‌شود. نشان دهید که اگر حفاظ کروی در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت $B = B \cdot \hat{a}_z$ قرار گیرد، میدان در درون آن عبارت است از:

$$B^i = \frac{9\mu_r B}{(2\mu_r + 1)(a/b)^3 - 2(\mu_r + 1)} , \quad r < a$$

برای $\mu_r = 1000$ و $a/b = 0.1$ درصد کاهش میدان در درون حفاظ مغناطیسی را محاسبه کنید.

۳۳. میدان مغناطیسی سیملوله کروی طی مثالی در بخش ۶-۸ این فصل مورد بررسی قرار گرفت. اگر تعداد کل دورهای سیم پیچ این سیملوله برابر N بوده و از آن جریان I بگذارد، آنگاه $A = NI/2a$ ، که a شعاع سطح کروی است که سیم پیچ روی آن تعییه شده است. مطلوب است محاسبه:

- (الف) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی و ضریب خودالقایی سیملوله کروی،
(ب) نیرویی که در جهت شعاعی به سیم پیچ سیملوله کروی اعمال می‌شود.



شکل ۳۷-۶

۳۴. شکل ۳۷-۶ مدار یک جراثقال مغناطیسی را نشان می‌دهد. سطح مقطع مدار و وزنه برابر S ، طول شاخه‌های افقی و عمودی هسته به ترتیب برابر با $2L$ و L و قابلیت نفوذ هسته و وزنه هر دو برابر با μ می‌باشد. جریان I از مدار سیم پیچ عبور داده می‌شود.

(الف) نیروی وارد آمده بر وزنه را برحسب I و مشخصات مدار مغناطیسی محاسبه کنید.

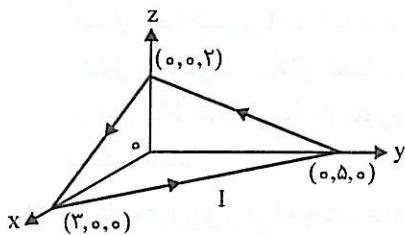
(ب) بند (الف) را برای حالتی که فاصله هوایی کوچکی به اندازه d بین وزنه و قطبها هسته وجود داشته باشد تکرار کنید. از رلوکتانس شاخه‌های هسته در مقابل رلوکتانس فواصل هوایی صرف نظر کنید.

(ج) در صورتی که $I=3\text{ A}$ ، $N=1000$ ، $S=100 \text{ cm}^2$ و $d=2 \text{ mm}$ باشد، حداقل جرمی که جراثقال می‌تواند بلند کند چقدر است؟

۳۵. فضای بین دو هادی یک کابل هم محور، که شعاعهای درونی و بیرونی آن به ترتیب برابر a و b می‌باشند، را ماده مغناطیسی غیرهمگنی با قابلیت نفوذ $(1 + e^{-r/a}) \cdot \mu = \mu$ فراگرفته است. از این کابل جریان I عبور داده می‌شود. فشار مغناطیسی وارد آمده بر هادی بیرونی را به دست آورید.

۳۶. یک حلقه جریان دلخواه با گشتاور مغناطیسی m در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار دارد.

(الف) نشان دهید که گشتاور مکانیکی اعمال شده بر حلقه جریان از رابطه $T = m \times B = mB$ به دست می‌آید.



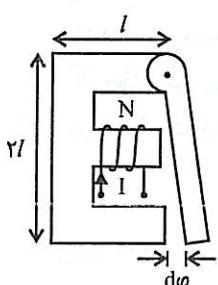
شکل ۳۸-۶

(ب) گشتاور اعمال شده بر حلقه جریان نشان داده شده در شکل ۳۸-۶ را وقتی که در میدان

$$B = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 5\hat{a}_z \text{ Wb/m}^2$$

۳۷. شکل ۳۹-۶ مدار یک رله مغناطیسی را نشان می‌دهد. سطح مقطع بازوی متحرک و هسته رله هر دو برابر S و قابلیت نفوذ آنها برابر μ است.

سیم پیچ هسته دارای N دور بوده و از آن جریان I می‌گذرد. گشتاور مکانیکی اعمال شده بر بازوی متحرک را به دست آورید.



شکل ۳۹-۶