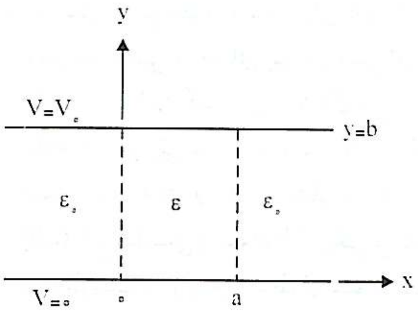
۲۵. دو کره هادی یکسان به شعاع a مفروضند که مراکز آنها به فاصله d از یکدیگر واقع است. پتانسیل یکی از کره‌ها $V_\circ$ و پتانسیل دیگری برابر صفر فرض می‌شود.
الف) دو توزیع بار نقطه‌ای تصویر بیابید که کره‌های هادی را جایگزین نمایند. (یعنی پتانسیل ناشی از این دو بار تصویر فقط در فضای اطراف کره‌ها مساوی پتانسیل ناشی از خود کره‌ها با اختلاف پتانسیل $V_\circ$ باشد.)
ب) ظرفیت بین دو کره هادی را به دست آورید.

۴-۱۰ مسائل

۱. بخشی از فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی را ماده عایقی با قابلیت گذردهی ε، مطابق شکل ۴-۲۶، فراگرفته است. پتانسیل صفحات هادی واقع در $y=\circ$ و $y=b$ به ترتیب برابر با صفر و $V_\circ$ می‌باشد. مطلوب است محاسبه:
الف) پتانسیل در همه نقاط بین دو صفحه هادی،
ب) چگالی سطحی بار الکتریکی آزاد روی صفحه هادی واقع در $y=b$،



شکل ۴-۲۶

ج) چگالی سطحی بار الکتریکی مقید روی سطح عایق واقع در $y=b$،
د) نشان دهید که چگالی توزیع مجموع بارهای الکتریکی آزاد و مقید در کلیه نقاط سطح $y=b$ همواره مقدار ثابتی دارد.

۲. فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی واقع در $y=\circ$ و $y=b$ را ماده عایقی غیرهمگن با قابلیت گذردهی $\varepsilon=f(x,z)$ اشغال نموده است. پتانسیل صفحه هادی واقع در $y=b$ برابر $V_\circ$ و پتانسیل صفحه هادی دیگر برابر صفر می‌باشد.
الف) نشان دهید که اگر تابع پتانسیل در عایق تغییراتی نسبت به x و z نداشته باشد، معادله لاپلاس همواره در آن صادق است. یادآوری می‌شود که به طور کلی در یک عایق غیرهمگن که قابلیت گذردهی آن تابعی از x، y و z باشد، معادله لاپلاس ($\nabla^2 V=\circ$) صادق نیست.
ب) تابع پتانسیل و میدان الکتریکی E را در ناحیه $\circ<y<b$ به دست آورده و ملاحظه کنید که پاسخها مستقل از $f(x,z)$ می‌باشند.
راهنمایی: ناحیه عایق را به عناصری به ابعاد $\Delta x\times\Delta z\times b$ تقسیم کنید و قابلیت گذردهی هر عنصر حجم را مقدار ثابتی فرض کنید. آنگاه پتانسیل را در یک عنصر حجم دلخواه به دست آورید و ملاحظه کنید که پاسخ مستقل از مکان عنصر حجم و قابلیت گذردهی عایق درون آن است.
ج) چگالیهای توزیع سطحی بارهای آزاد و مقید را روی یکی از صفحات مرزی به دست آورده و نشان دهید که مجموع آنها مستقل از $f(x,z)$ می‌باشد.

د) فرض کنید که قابلیت گذردهی عایق به کار رفته به‌صورت $\varepsilon=\varepsilon_0(1+x^2z^2)$، در فضایی محدود به $-1<x<1$، $0<y<b$ و $-1<z<1$ باشد (بقیه فضای بین صفحات هادی، یعنی $|x|>1$ و $|z|>1$ خلأ می‌باشد). انرژی ذخیره شده در عایق را محاسبه کنید.

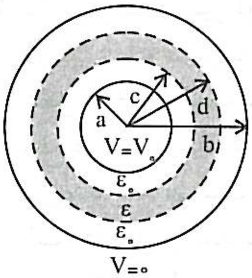
۳. ناحیه‌ای از فضای آزاد محدود به $0<y<b$ را در نظربگیرید. یک صفحه هادی با پتانسیل صفر در $y=0$ قرار داده می‌شود و پتانسیل $V=V_0\cos(x/a)$، که در آن a و V_0 مقادیر ثابتی هستند، در $y=b$ ایجاد می‌گردد. تابع پتانسیل و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در ناحیه $0<y<b$ به دست آورید.

۴. مسئله ۳ را برای وقتی که پتانسیل در $y=b$ برابر با $V=V_0 e^{-|x/a|}$ باشد تکرار نمایید از رفتار میدان الکتریکی در $x=0$ چه نتیجه‌گیری می‌کنید؟

۵. دو استوانه هم‌محور به شعاعهای a و b از جنس هادی کامل را در نظر بگیرید. بخشی از فضای بین دو استوانه، محدود به ناحیه $c<r<d$ را عایقی با قابلیت گذردهی ε اشغال می‌نماید. پتانسیل استوانه درونی $(r=a)$ و بیرونی به ترتیب برابر V_0 و صفر فرض می‌شود. شکل ۴-۲۷ استوانه‌های هادی و عایق را نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبه:

الف) تابع پتانسیل و میدان الکتریکی در کلیه نقاط بین دو استوانه هادی،

ب) ظرفیت به ازای واحد طول استوانه‌ها.



شکل ۴-۲۷

۶. در مسئله ۵، جسم عایق با یک جسم هادی کامل جایگزین می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) پتانسیل جسم هادی، ب) ظرفیت به ازای واحد طول استوانه‌ها.

۷. فضای بین دو سطح استوانه‌ای هم‌محور از جنس هادی و شعاعهای a و b $(a<b)$ را یک ماده عایق غیرهمگن با قابلیت گذردهی $\varepsilon=f(\varphi,z)$ اشغال می‌کند. پتانسیل استوانه‌های درونی و بیرونی به ترتیب برابر با V_0 و صفر است.

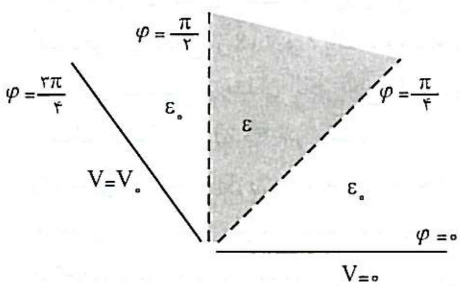
الف) با فرض اینکه تابع پتانسیل فقط تابعی از مختصه r باشد، نشان دهید که معادله لاپلاس در ناحیه عایق صادق است. سپس پتانسیل و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را به دست آورید.

ب) ظرفیت خازن به ازای واحد طول استوانه‌ها را برای وقتی‌که $\varepsilon=\varepsilon_0[1+\sin^2\varphi\sin^2(\pi z)]$ باشد، محاسبه کنید.

۸. دو نیم‌صفحه هادی واقع در $\varphi=0$ و $\varphi=3\pi/4$، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به ترتیب دارای پتانسیل صفر و V_0 می‌باشد. ناحیه $\pi/4<\varphi<\pi/2$ را عایقی با قابلیت گذردهی ε فراگرفته است. شکل ۴-۲۸ صفحات هادی و عایق را نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبه:

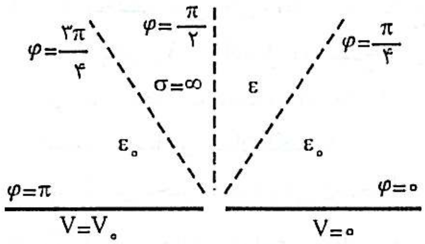
الف) تابع تغییرات پتانسیل در ناحیه $0<\varphi<3\pi/4$،

ب) میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در ناحیه عایق.



شکل ۴-۲۸

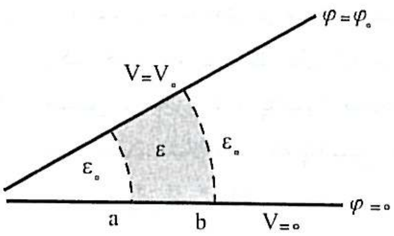
۹. دو نیم‌صفحه هادی واقع در $\varphi = \circ$ و $\varphi = \pi$، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به ترتیب دارای پتانسیل صفر و $V_\circ$ می‌باشند. ناحیه $\pi/۲ < \varphi < \pi/۴$ را عایقی با قابلیت گذردهی ε و ناحیه $۳\pi/۴ > \varphi > \pi/۲$ را جسمی از جنس هادی کامل، مطابق شکل ۴-۲۹، فراگرفته است. مطلوب است محاسبه:



شکل ۴-۲۹

الف) پتانسیل جسم هادی، ب) شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق.

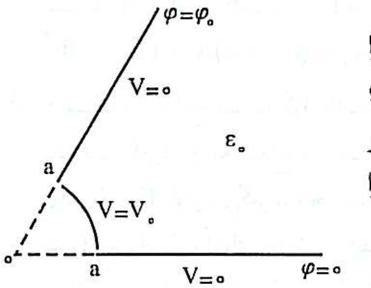
۱۰. دو نیم‌صفحه هادی واقع در $\varphi = \circ$ و $\varphi = \varphi_\circ$ به ترتیب دارای پتانسیل صفر و $V_\circ$ می‌باشند. بخشی از فضای بین دو نیم‌صفحه محدود به $a<r<b$ را ماده عایقی با قابلیت گذردهی ε، مطابق شکل ۴-۳۰، فرا گرفته است. تابع تغییرات پتانسیل و انرژی ذخیره شده به ازای واحد طول $(\circ<z<۱)$ را در جسم عایق به دست آورید.



شکل ۴-۳۰

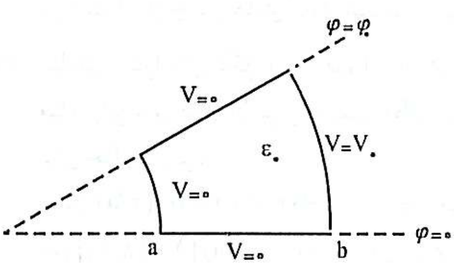
۱۱. مسئله ۱۰ را برای وقتی که عایق به کار رفته غیرهمگن و دارای قابلیت گذردهی $\varepsilon = \varepsilon_\circ(۱+r/b)$، $a<r<b$ باشد، تکرار نمایید.

۱۲. شکل ۴-۳۱، سطح مقطع سیستمی متشکل از سه هادی را نشان می‌دهد. پتانسیل دو سطح هادی واقع در $r>a$, $\varphi=\circ$؛ $r>a$, $\varphi=\varphi_\circ$ برابر صفر بوده و پتانسیل سطح سوم واقع در $r=a$, $\circ<\varphi<\varphi_\circ$ برابر $V_\circ$ است. تابع تغییرات پتانسیل را در ناحیه $r>a$, $\circ<\varphi<\varphi_\circ$ به دست آورید.



شکل ۴-۳۱

۱۳. شکل ۴-۳۲ سطح مقطع فضایی محدود به سطوح $\varphi=\circ$، $\varphi=\varphi_\circ$، $r=a$ و $r=b$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای را نشان می‌دهد. همه سطوح مزبور از جنس هادی کامل فرض می‌شوند. پتانسیل سطح هادی واقع در $r=b$ برابر $V_\circ$ و پتانسیل سه سطح دیگر برابر صفر است. پتانسیل و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در فضای درونی هادیها محاسبه کنید.



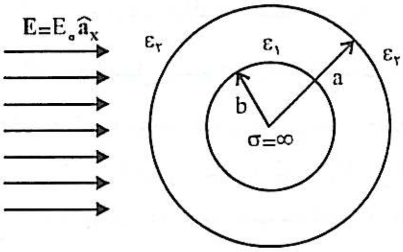
شکل ۴-۳۲

۱۴. یک محفظه استوانه‌ای محدود به سطوح هادی $r=a$، $z=0$ و $z=d$ مفروض است. پتانسیل سطح $r=a$ برابر V_0 و پتانسیل دو سطح هادی دیگر برابر صفر است. فضای درون محفظه خلأ فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) پتانسیل و میدان الکتریکی در درون محفظه؛ $r<a$ و $0<z<d$،

ب) انرژی ذخیره شده در درون محفظه.

۱۵. یک استوانه هادی بینهایت طویل به شعاع b، با یک لایه عایق به ضخامت $a-b$ و قابلیت گذردهی ε_1 پوشیده شده است. این استوانه، مطابق شکل ۴-۳۳ به طور عمودی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $E=E_0\,\hat{a}_x$ قرار دارد. محور استوانه، منطبق بر محور z و پتانسیل صفحه $x=0$، برابر صفر است. نشان دهید که پتانسیل در فضای اطراف استوانه برابر است با:



شکل ۴-۳۳

$$V(r,\varphi)=\begin{cases}-2E_0\left(Ar+\dfrac{B}{r}\right)\cos\varphi & b\le r\le a\\ -E_0\left(r-\dfrac{C}{r}\right)\cos\varphi & r\ge a\end{cases}$$

که در آن $C=a^2[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)a^2+(\varepsilon_2+\varepsilon_1)b^2]/A_0$، $B=-\varepsilon_2 a^2 b^2/A_0$، $A=\varepsilon_2 a^2/A_0$ و $A_0=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)b^2$ است.

۱۶. با استفاده از نتایج مسئله ۱۵ پتانسیل و میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا، وقتی که استوانه‌ای بینهایت طویل و به شعاع a با مشخصات الکتریکی زیر در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $E=E_0\,\hat{a}_x$ قرار می‌گیرد، محاسبه کنید. محور استوانه را منطبق بر محور z فرض کنید.

الف) استوانه از ماده‌ای عایق با قابلیت گذردهی ε تشکیل شده و فضای اطراف آن خلأ است.

ب) استوانه به‌صورت حفره‌ای، که فضای درون آن خلأ باشد، در یک ناحیه عایق با قابلیت گذردهی ε فرض می‌شود. میدان اولیه E در این ناحیه عایق وجود دارد.

ج) استوانه از جنس هادی کامل است. در این حالت، مسئله کاملاً مانند مثال ۴-۷ می‌باشد.

۱۷. میله‌ای استوانه‌ای شکل و مستقیم از ماده‌ای هادی با رسانایی غیریکنواخت σ تشکیل شده و شعاع میله برابر a و طول آن برابر l است. مطلوب است محاسبه مقاومت میله بین دو سطح انتهایی آن برای حالات زیر:

الف) $\sigma=\sigma_0\,(r/a)$ $(r\le a)$، که r فاصله از محور میله بوده و σ_0 مقداری ثابت است.

ب) $\sigma=\sigma_0\,(r/a)\,[1+(z/l)]$ برای $0\le z\le l$ و $r\le a$. محور z منطبق بر محور میله فرض می‌شود.

راهنمایی: نتیجه بند (الف) را برای طول dz به کار برده و سپس نسبت به z انتگرال بگیرد.

۱۸. فضای نیم‌کروی $r\le a$ و $0\le\theta\le\pi/2$ را در دستگاه مختصات کروی در نظر بگیرید. فرض کنید پتانسیل روی سطح $r=a$ و $0\le\theta\le\pi/2$ برابر $V=V_0\cos^3\theta$ و پتانسیل روی صفحه $\theta=\pi/2$ برابر صفر باشد. پتانسیل را در کلیه نقاط واقع در ناحیه $\theta<\pi/2$ که شامل درون نیم‌کره و بخش فوقانی بیرون نیم‌کره است، محاسبه کنید.

۱۹. یک کره از جنس هادی کامل و به شعاع b با یک لایه عایق به ضخامت $a-b$ و قابلیت گذردهی ε_1 پوشیده شده است. توجه کنید که a شعاع بیرونی این لایه عایق می‌باشد. این کره در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}=E_0\hat{a}_z$ قرار داده می‌شود. قابلیت گذردهی فضای اطراف کره که میدان اولیه $\mathbf{E}$ در آن وجود دارد برابر با ε_2 است. نشان دهید که پتانسیل در درون پوشش عایق و فضای اطراف کره هادی برابر است با (مرکز کره را مبنای پتانسیل فرض کنید):

$$V(r,\theta)=\begin{cases}-3E_0\left(Ar+\dfrac{B}{r^2}\right)\cos\theta & b\le r\le a\\[2ex] -E_0\left(r-\dfrac{C}{r^2}\right)\cos\theta & r\ge a\end{cases}$$

که در آن $C=a^3[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)a^3+(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)b^3]/A_0$ ، $B=-\varepsilon_2a^3b^3/A_0$ ، $A=\varepsilon_2a^3/A_0$ و $A_0=(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)a^3+2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)b^3$ است.

۲۰. با استفاده از نتایج به دست آمده در مسئله ۱۹، پتانسیل و میدان الکتریکی را در کلیه نقاط فضا برای وقتی‌که کره‌ای به شعاع a و با مشخصات الکتریکی زیر در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}=E_0\hat{a}_z$ قرار گیرد، محاسبه کنید. مرکز کره را منطبق بر مبدأ مختصات و نیز مبنای پتانسیل فرض کنید.

الف) کره از ماده‌ای عایق با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ تشکیل شده و فضای اطراف آن خلأ ($\varepsilon_2=\varepsilon_0$) است. در این حالت مسئله کاملاً مانند مثال ۴-۹ است.

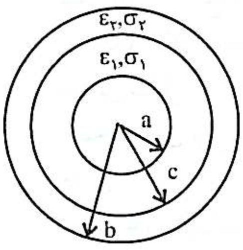
ب) کره به‌صورت حفره‌ای، که فضای درون آن خلأ باشد، در یک ناحیه عایق با قابلیت گذردهی $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ تعبیه شده است. میدان اولیه قبل از ایجاد حفره کروی در ناحیه عایق برقرار بوده است.

ج) کره از جنس هادی کامل بوده و فضای اطراف آن خلأ است.

۲۱. فضای بین دو سطح کروی هادی و هم‌مرکز، به شعاعهای a و b ($a<b$)، را دو ماده یکی با قابلیت گذردهی ε_1 و رسانایی σ_1 و دیگری با قابلیت گذردهی ε_2 و رسانایی σ_2، مطابق شکل ۴-۳۴، اشغال نموده‌اند. مطلوب است محاسبه:

الف) مقاومت بین دو سطح کروی،

ب) ظرفیت بین دو سطح کروی.



شکل ۴-۳۴

۲۲. بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho_V = \rho_\circ x/(x^2+1)^2$ در خلأ توزیع شده است. پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار را در تمام نقاط فضا به دست آورید. در تعیین تابع پتانسیل از شرایط $V=\circ$ در $x=\circ$ و $E \to \circ$ وقتی‌که $x \to \infty$، استفاده کنید.

۲۳. بار الکتریکی با چگالی حجمی $\rho_V = \rho_\circ/(r^3+1)^{-2}$ در خلأ توزیع شده است در اینجا r مختصه شعاعی در دستگاه مختصات کروی است. پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار را در تمام نقاط فضا به دست آورید. در تعیین تابع پتانسیل فرض کنید: $r^2 E \to \circ$ وقتی‌که $r \to \circ$ و $V \to \circ$ وقتی‌که $r \to \infty$.

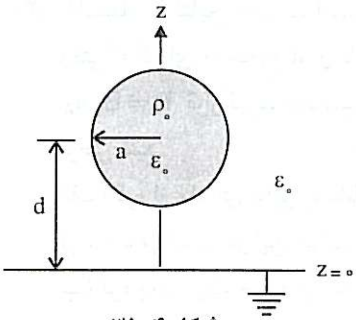
۲۴. یک استوانه عایق بینهایت طویل به شعاع a و قابلیت گذردهی ε به طور دائم قطبی شده و دارای پلاریزاسیون ثابت $\mathbf{P} = P_\circ \hat{a}_y$ می‌باشد. محور عایق استوانه‌ای، منطبق بر محور zفرض می‌شود. میدان الکتریکی ناشی از این عایق قطبی شده را در درون و بیرون آن با استفاده از حل معادله لاپلاس محاسبه کنید. اگر اندازه میدان اولیه‌ای که عایق را قطبی کرده است برابر با $kP_\circ/\varepsilon_\circ$ باشد، قابلیت گذردهی نسبی عایق چقدر است؟

۲۵. یک کره عایق به شعاع a و قابلیت گذردهی ε به طور دائم قطبی شده و پلاریزاسیون ثابت $\mathbf{P} = P_\circ \hat{a}_z$ را دارا می‌باشد. مرکز عایق کروی منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود. میدان الکتریکی ناشی از این عایق قطبی شده را به دست آورید. اگر اندازه میدان اولیه‌ای که عایق را قطبی کرده است برابر با $kP_\circ/\varepsilon_\circ$ باشد، قابلیت گذردهی نسبی عایق چقدر است؟

۲۶. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت $\rho_V = \rho_\circ$ در فضایی کروی به شعاع a در خلأ توزیع شده است. این بار کروی در بالای یک صفحه هادی بینهایت زمین شده، مطابق شکل ۴-۳۵، قرار می‌گیرد. فاصله مرکز کره بار از صفحه هادی برابر d است (d>a). مطلوب است محاسبه:

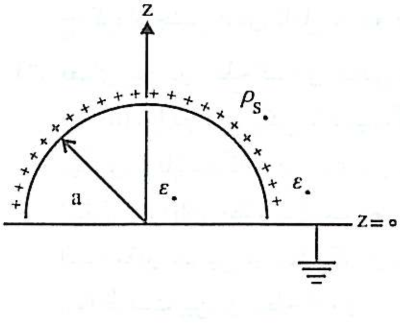
الف) میدان الکتریکی در نقطه‌ای دلخواه روی محور z،

ب) پتانسیل در مرکز کره بار.



شکل ۴-۳۵

۲۷. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت $\rho_{S_\circ}$ روی سطح نیم‌کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. این نیم‌کره بار در مقابل یک صفحه هادی بینهایت زمین شده، مطابق شکل ۴-۳۶، قرار می‌گیرد. مرکز نیم‌کره روی صفحه هادی واقع بوده ولی بار الکتریکی با صفحه هادی تماس ندارد. پتانسیل را در یک نقطه دلخواه روی محور نیم‌کره بار (محور z)، محاسبه کنید. فضای اطراف توزیع بار $(z>\circ)$ خلأ است.

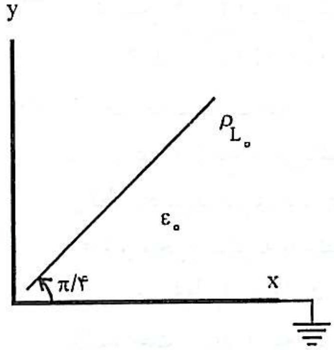


شکل ۴-۳۶

۲۸. دو نیم‌صفحه هادی زمین شده و عمود بر هم و یک نیم خط بار الکتریکی با چگالی توزیع یکنواخت $\rho_{L_\circ}$ را، مطابق شکل ۴-۳۷ در نظر بگیرید. نیم خط بار روی صفحه xy قرار داشته و با محور x زاویه $\pi/۴$ می‌سازد ولی با صفحات هادی تماس ندارد. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان الکتریکی در نقطه‌ای به مختصات $(x, y, \circ)$ واقع در $\frac{۱}{۴}$ اول فضا ($x>\circ$ و $y>\circ$)،

ب) پتانسیل در نقطه مذکور در بند (الف).



شکل ۴-۳۷

۲۹. در مسئله ۲۸ نیم خط بار الکتریکی را با یک نیم‌صفحه بار الکتریکی با چگالی توزیع یکنواخت $\rho_{S_\circ}$ واقع در $\varphi=\varphi_\circ$ $(\circ<\varphi_\circ<\pi/۲)$ جایگزین نمایید. آنگاه میدان الکتریکی و سپس پتانسیل را در نقطه‌ای به مختصات (x,y,z) واقع در $\frac{۱}{۴}$ اول فضا ($x>\circ$ و $y>\circ$) محاسبه کنید.

۳۰. خط باری به طول بینهایت و با چگالی یکنواخت $\rho_{L_\circ}$ به موازات و به فاصله d از محور یک استوانه هادی زمین شده، به طول بینهایت و به شعاع a، قرار دارد $(a<d)$. مطلوب است:

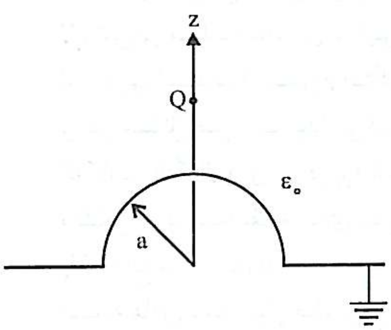
الف) تعیین چگالی توزیع و مکان یک خط بار تصویر به گونه‌ای که بتوان استوانه هادی را با آن جایگزین نمود.

ب) با استفاده از نتیجه بند (الف)، ظرفیت به ازای واحد طول یک خط انتقال متشکل از دو سیم موازی استوانه‌ای که شعاع هر یک برابر a و فاصله محورهایشان از یکدیگر برابر ۲d باشد را به دست آورید.

راهنمایی: دو سیم استوانه‌ای را با دو خط بار بینهایت موازی، با چگالیهای توزیع $\rho_{L_\circ}$ و $-\rho_{L_\circ}$ در مکانهای مناسبی جایگزین نمایید.

۳۱. بار نقطه‌ای Q به فاصله d از مرکز یک کره هادی زمین شده به شعاع a $(a<d)$ قرار دارد. چه مقدار انرژی باید صرف نمود تا بار Q به نقطه‌ای به فاصله ۲d از مرکز کره هادی انتقال یابد؟

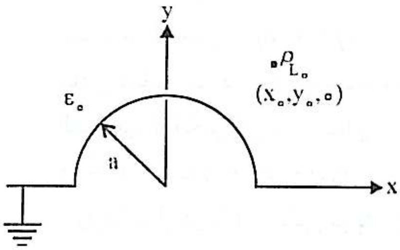
۳۲. یک صفحه بینهایت هادی را که دارای یک برجستگی نیم کروی به شعاع a می‌باشد، مطابق شکل ۴-۳۸ در نظر بگیرید. برای سادگی، صفحه هادی را در $z=\circ$ و مرکز نیم‌کره را منطبق بر مبدأ مختصات فرض کنید. بار نقطه‌ای Q روی محور نیم‌کره و به فاصله d از مرکز آن قرار داده می‌شود $(d>a)$. پتانسیل را در نقطه‌ای به مختصات (r, θ, φ) واقع در ناحیه $r\geq a$ و $\circ\leq\theta\leq\pi/۲$ به دست آورید.



شکل ۴-۳۸

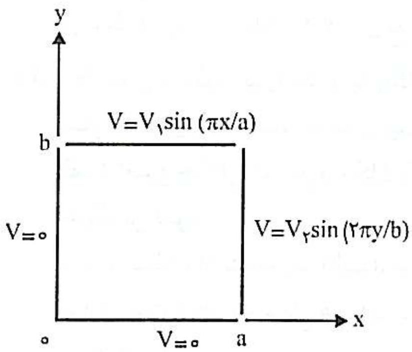
۳۳. در شکل ۴-۳۸ فرض کنید بار Q در نقطه دلخواه $M(x_0, y_0, z_0)$ قرار داشته باشد ($\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} > a, z_0 > 0$). پتانسیل را در نقطه‌ای به مختصات (x,y,z) به دست آورید.

۳۴. یک صفحه بینهایت هادی راکه دارای برجستگی نیم استوانه‌ای به شعاع a می‌باشد، مطابق شکل ۴-۳۹ در نظر بگیرید. برای سادگی صفحه هادی را در $y=0$ و محور استوانه را منطبق بر محور z فرض کنید. یک خط بار بینهایت طویل با چگالی توزیع یکنواخت ρ_{L_0} و به موازات محور z از نقطه $(x_0, y_0, 0)$ می‌گذرد ($y_0 > 0$ و $\sqrt{x_0^2+y_0^2} > a$). پتانسیل را در نقطه‌ای به مختصات (x,y,z) محاسبه کنید.



شکل ۴-۳۹

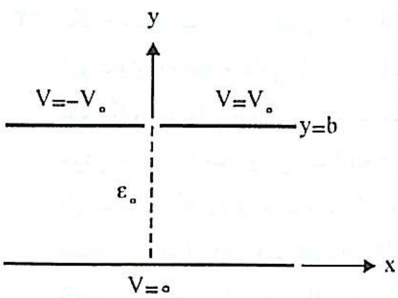
۳۵. در این مسئله هدف استفاده از اصل جمع آثار برای شرایط مرزی در حل معادله لاپلاس است. برای این منظور، یک فضای مستطیلی محدود به ناحیه $0<x<a$ ، $0<y<b$ و $-\infty < z < \infty$ را در نظر بگیرد. پتانسیل سطوح $x=0$ و $y=0$ برابر صفر، پتانسیل روی سطح $x=a$ برابر $V_2 \sin(2\pi y/b)$، و پتانسیل روی سطح $y=b$ برابر $V_1 \sin(\pi x/a)$ است، که V_1 و V_2 مقادیر ثابتی هستند. شکل ۴-۴۰ ابعاد و پتانسیلهای سطوح این فضای مستطیلی را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۴۰

الف) ثابت کنید که اصل جمع آثار را می‌توان برای شرایط مرزی در حل معادله لاپلاس به کار برد.
ب) پتانسیل را در درون فضای مستطیلی محاسبه کنید.

۳۶. استفاده از خواص سری فوریه را در حل معادله لاپلاس در موارد متعددی در این فصل ملاحظه نموده‌ایم. استفاده از مفهوم انتگرال فوریه نیز در برخی مسائل ضرورت پیدا می‌کند. به عنوان مثالی که کاربرد انتگرال فوریه را در برداشته باشد، سیستمی متشکل از دو نیم‌صفحه هادی با پتانسیلهای V_0 و $-V_0$ واقع در $y=b, x>0$ و $y=b, x<0$، و یک صفحه هادی با پتانسیل صفر واقع در $y=0$ را مطابق شکل ۴-۴۱ در نظر بگیرید. پتانسیل را در ناحیه $0<y<b$ به دست آورید.



شکل ۴-۴۱