۲۲. مطلوب است محاسبه $\int_V A\, dV$ وقتی که A در دستگاه مختصات کروی به‌صورت $A = \frac{1}{r^2}\hat{a}_r$ بیان شود، V حجم $\frac{1}{8}$ کره‌ای به شعاع a، مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات و محدود به $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ باشد.

۱-۸ مسائل

۱. بردارهای $A = 5\hat{a}_r - 3\hat{a}_\varphi + 2\hat{a}_z$ و $B = 2\hat{a}_r + \hat{a}_\varphi - 3\hat{a}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای دارای مبدأ مشترک می‌باشند. مطلوب است تعیین

الف) $A . B$ ب) $A \times B$

ج) بردار واحدی که بر بردارهای A و B عمود باشد.

د) زاویه بین بردارهای A و B.

۲. بردارهای $A = 2\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z$ و $B = \alpha\hat{a}_x + \beta\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$ داده شده‌اند. مطلوب است محاسبه α و β برای حالات زیر:

الف) بردارهای A و B موازی باشند.

ب) بردارهای A و B بر یکدیگر عمود بوده و $|A + B| = 3\sqrt{2}$ باشد.

۳. دو بردار A و B دارای مبدأ مشترک هستند. نشان دهید که مساحت مثلثی که A و B دو ضلع آن باشند از رابطه $S = \frac{1}{2}|A \times B|$ به دست می‌آید.

۴. دو بردار A و B داده شده‌اند. نشان دهید که:

الف) مؤلفه بردار A در امتداد بردار B برابر است با $C = \frac{B\,(A.B)}{|B|^2}$.

ب) مؤلفه بردار A در امتداد عمود بر بردار B برابر است با $D = A - \frac{B\,(A.B)}{|B|^2}$.

۵. سه بردار A، B و C دارای مبدأ مشترک می‌باشند. نقاط انتهایی این سه بردار تشکیل صفحه‌ای می‌دهند که آن را P می‌نامیم. ثابت کنید که بردار $A \times B + B \times C + C \times A$ بر صفحه P عمود می‌باشد.

۶. سه بردار $A = 2\hat{a}_y$، $B = \hat{a}_x$ و $C = 2\hat{a}_z$ داده شده‌اند. با استفاده از نتیجه مسئله ۵ تعیین کنید کدام‌یک از بردارهای زیر بر صفحه متشکل از نقاط انتهایی بردارهای A، B و C عمود، با آن موازی، یا نه موازی و نه عمود بر آن می‌باشد.

الف) $D = 2\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z$ ب) $D = \hat{a}_x - \hat{a}_y - \hat{a}_z$ ج) $D = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y$

۷. سه نقطه $M(-1, 2, 3)$، $N(4, -2, -1)$ و $Q(1, 3, 2)$ تشکیل یک صفحه می‌دهند. مطلوب است تعیین بردار واحدی که بر صفحه مزبور عمود باشد و در جهت دور شدن از مبدأ مختصات باشد (وقتی که مبدأ در امتداد این بردار واحد قرار گیرد).

۸. نقطه $M(۲,-۲,۳)$ در دستگاه مختصات مستطیلی مفروض است. مختصات نقطه M را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی به دست آورید.

۹. نقاط $M(۵,\pi/۴,۳)$ و $N(۴,۳\pi/۴,۳)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند. مختصات نقاط M و N را در دستگاههای مختصات مستطیلی و کروی به دست آورید.

۱۰. نقاط $M(۵,۳\pi/۴,۵\pi/۴)$ و $N(۴,\pi/۳,۲\pi/۳)$ در دستگاه مختصات کروی داده شده‌اند. مختصات نقاط M و N را در دستگاههای مختصات مستطیلی و استوانه‌ای به دست آورید.

۱۱. بردار $\mathbf{A} = -۳\hat{a}_x + ۲\hat{a}_y - ۵\hat{a}_z$ در نقطه $M(۱,\sqrt{۳},-۲)$ در دستگاه مختصات مستطیلی داده شده است. بردار $\mathbf{A}$ را در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بیان کنید.

۱۲. بردار $\mathbf{B} = -۲\hat{a}_r + ۳\hat{a}_\varphi + \hat{a}_z$ در نقطه $N(۵,\pi/۳,۳)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است. بردار $\mathbf{B}$ را در دستگاههای مختصات مستطیلی و کروی بیان کنید.

۱۳. بردار $\mathbf{C} = ۳\hat{a}_r - \hat{a}_\theta - ۲\hat{a}_\varphi$ در نقطه $P(۱,\pi/۴,۳\pi/۴)$ در دستگاه مختصات کروی داده شده است. بردار $\mathbf{C}$ را در دستگاههای مختصات مستطیلی و استوانه‌ای بیان کنید.

۱۴. بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را به گونه‌ای که در مسائل ۱۱، ۱۲ و ۱۳ تعریف شده‌اند در نظر بگیرید. مطلوب است محاسبه عبارات زیر:

الف) $(\mathbf{A}+\mathbf{B}).\mathbf{C}$

ب) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ در نقطه $N(۵,\pi/۳,۳)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای

ج) $(\mathbf{A}.\mathbf{C})\mathbf{B}$ در نقطه $P(۱,\pi/۴,۳\pi/۴)$ در دستگاه مختصات کروی

د) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).\mathbf{C}$

راهنمایی: کلیه محاسبات را در دستگاه مختصات مستطیلی انجام دهید، آنگاه نتیجه را اگر کمیت برداری باشد در دستگاه مورد نظر بیان کنید.

۱۵. بردارهای زیر را برحسب مختصات و بردارهای واحد در دستگاه مختصات کروی بیان کنید.

الف) $\mathbf{A} = y\,\hat{a}_x + x\,\hat{a}_y$

ب) $\mathbf{B} = \cos\varphi\,\hat{a}_r + \sin\varphi\,\hat{a}_\varphi + \sin\varphi\,\hat{a}_z$

۱۶. سه بردار $\mathbf{A} = ۲\hat{a}_x + ۵\hat{a}_y - \hat{a}_z$، $\mathbf{B} = -۳\hat{a}_x + ۲\hat{a}_z$ و $\mathbf{C} = \hat{a}_x - ۳\hat{a}_y + ۲\hat{a}_z$ دارای مبدأ مشترک $O(۰,۰,۰)$، که مرکز مختصات است، می‌باشند. مطلوب است محاسبه

الف) مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط انتهایی بردارهای $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ باشند.

ب) فاصله نقطه O از صفحه مثلث مذکور در بند (الف).

۱۷. صحت اتحادهای برداری زیر را تحقیق کنید:

الف) $(\mathbf{A}+\mathbf{B}).[(\mathbf{B}+\mathbf{C})\times(\mathbf{C}+\mathbf{A})]=2\mathbf{A}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

ب) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).[(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]=[\mathbf{A}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]^2$

ج) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).(\mathbf{C}\times\mathbf{D})-(\mathbf{B}\times\mathbf{C}).(\mathbf{D}\times\mathbf{A})=(\mathbf{A}.\mathbf{B})(\mathbf{C}.\mathbf{D})-(\mathbf{B}.\mathbf{C})(\mathbf{D}.\mathbf{A})$

د) $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2+|\mathbf{A}.\mathbf{B}|^2=|\mathbf{A}|^2\,|\mathbf{B}|^2$

هـ) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times(\ldots\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}))\ldots))=(-1)^{n-1}(\mathbf{A}.\mathbf{B})^{n-1}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هر کدام n بار در عبارت سمت چپ ظاهر می‌شوند.

۱۸. سه بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ مفروضند. نشان دهید که اگر $\mathbf{A}.(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$ باشد، هر یک از بردارها را می‌توان حاصل ترکیب خطی دو بردار دیگر دانست.

۱۹. فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار واقع در صفحه xy باشند که با محور x به ترتیب زوایای α و β می‌سازند. با استفاده از ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ صحت اتحادهای مثلثاتی زیر را تحقیق کنید.

الف) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta$

ب) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$

ج) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta$

د) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$

۲۰. مثلثی از سه بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ تشکیل شده است به طوری که $\mathbf{C}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$ می‌باشد؛ اندازه این بردارها را به ترتیب a، b و c فرض می‌کنیم. با استفاده از رابطه $\mathbf{C}.\mathbf{C}=(\mathbf{B}-\mathbf{A}).(\mathbf{B}-\mathbf{A})$ نشان دهید $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ که α زاویه بین بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ می‌باشد.

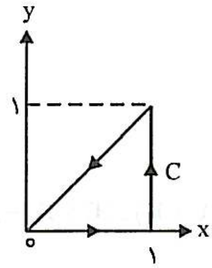
۲۱. مثلث ABC به اضلاع AB=c، BC=a و CA=b را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه برداری $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ و ضرب خارجی بردار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ یا $\overrightarrow{CA}$ در رابطه مزبور نشان دهید که:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

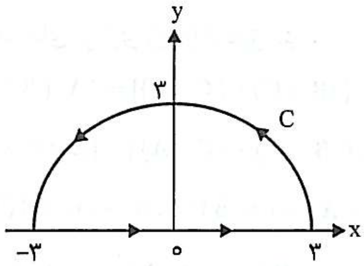
۲۲. مطلوب است محاسبه انتگرال خط $\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{L}$ برای بردار $\mathbf{A}=-(2x^2+y^2)\hat{a}_x+xy\,\hat{a}_y$ و مسیر بسته C مطابق شکل ۱-۳۰.

۲۳. مطلوب است محاسبه انتگرال خط $\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{L}$ برای بردار $\mathbf{A}=r\cos\varphi\,\hat{a}_r+\sin\varphi\,\hat{a}_\varphi$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای و مسیر بسته C مطابق شکل ۱-۳۱.

۲۴. مسائل ۲۲ و ۲۳ را با استفاده از قضیه استوکس تکرار نمایید.



شکل ۱-۳۰

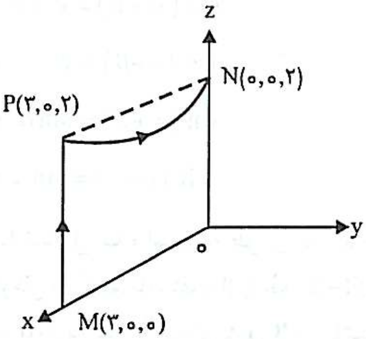


شکل ۱-۳۱

۲۵. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_M^N \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L}$ در امتداد مسیر C به شرح زیر و بردار A که در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌صورت $\mathbf{A} = 3r\cos\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_r + 4\sin\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_\varphi + 2\cos\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_z$ بیان می‌شود:

الف) مسیر C شامل یک پاره‌خط از نقطه $M(3,0,0)$ به نقطه $P(3,0,2)$ و یک نیم‌دایره مطابق شکل ۱-۳۲ می‌باشد.

ب) مسیر C عبارت از پاره‌خطی است که مستقیماً از M به N وصل می‌شود.



شکل ۱-۳۲

۲۶. مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ برای بردار $\mathbf{A} = xz\,\hat{\mathbf{a}}_x - yx^2\,\hat{\mathbf{a}}_y - xy\,\hat{\mathbf{a}}_z$ و S سطح مکعبی محدود به صفحات $x=\pm 1$، $y=\pm 1$ و $z=\pm 1$ است.

۲۷. مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ برای بردار $\mathbf{A} = r\sin\theta\,\hat{\mathbf{a}}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{a}}_\theta$ در دستگاه مختصات کروی، که S به‌صورت سطح نیم‌کره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ مختصات و محدود به صفحه xy می‌باشد

۲۸. مسائل ۲۶ و ۲۷ را با استفاده از قضیه دیورژانس تکرار نمایید.

۲۹. انتگرالهای حجم زیر را محاسبه نمایید:

الف) $\int_V x^2yz\,dV$ که V محدود به سطوح x=۰، y=۰، z=۰ و $x^2+y^2+z^2=1$ می‌باشد. در درون این حجم x>۰، y>۰ و z>۰ است.

ب) $\int_V r\cos^2\varphi\,dV$ که V محدود به سطوح r=۲ و z=۳ و z=-۳ است.

ج) $\int_V r\sin\theta\,dV$ که V فضای محصور بین دو نیم‌کره r=۱، r=۳ و صفحه z=۰ است.

۳۰. برای هر یک از میدانهای برداری زیر تعیین کنید آیا میدان از نوع سیملوله‌ای، چرخشی یا هر دو می‌باشد:

الف) $\mathbf{A}=2xy\,\hat{a}_x-y^2\,\hat{a}_y$ ب) $\mathbf{B}=x^2\,\hat{a}_x+y^2\,\hat{a}_y+z^2\,\hat{a}_z$

ج) $\mathbf{C}=r\sin^2\varphi\,\hat{a}_r+2\cos^2\varphi\,\hat{a}_\varphi$ د) $\mathbf{D}=\frac{1}{r}\hat{a}_r+r\cos\theta\,\hat{a}_\theta$

۳۱. از طریق بسط در دستگاه مختصات مستطیلی نشان دهید که دیورژانس کرل یک بردار و کرل گرادیان یک کمیت نرده‌ای همواره صفر است، یعنی:

الف) $\nabla.(\nabla\times\mathbf{A})=0$

ب) $\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}$

۳۲. از طریق بسط در دستگاه مختصات مستطیلی نشان دهید که:

الف) $\nabla.(f\mathbf{A})=f\nabla.\mathbf{A}+\mathbf{A}.\nabla f$

ب) $\nabla\times(f\mathbf{A})=(\nabla f)\times\mathbf{A}+f(\nabla\times\mathbf{A})$

ج) $\nabla.(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}.(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}.(\nabla\times\mathbf{B})$

۳۳. از طریق بسط در دستگاه مختصات مستطیلی نشان دهید که برای توابع نرده‌ای f و g داریم:

الف) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

ب) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

ج) $\nabla(e^f)=(\nabla f)e^f$

د) $\nabla^2(\nabla f)=\nabla(\nabla^2 f)$

توجه کنید که در بند (د)، لاپلاسین سمت راست از نوع کمیت نرده‌ای و لاپلاسین سمت چپ از نوع برداری می‌باشد.

۳۴. ثابت کنید:

$$\int_V (\nabla f)\, dV = \oint_S f\, d\mathbf{S}$$

که f یک کمیت نرده‌ای و V حجمی محدود به سطح بسته S است.

۳۵. ثابت کنید:

$$\int_S \nabla f \times d\mathbf{S} = -\oint_C f\, d\mathbf{L}$$

که f یک کمیت نرده‌ای و S سطحی باز محدود به منحنی بسته C است.

۳۶. ثابت کنید:

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A})\, dV = -\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

که A یک کمیت برداری و V حجمی محدود به سطح بسته S است.

۳۷. با استفاده از مفهوم گرادیان، معادله صفحه مماس بر سطح $x^۲ + ۴y^۲ + ۲z^۲ = ۱۰$ را در نقطه (۲،۱،۱) بنویسید.

۳۸. با استفاده از مفهوم گرادیان فاصله نقطه (۱،۱،۶) را از سطح $x + y - z^۲ = ۰$ به دست آورید.