

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \quad + \quad \text{تقسیم بر } \epsilon_0 \quad \text{تقسیم بر } \epsilon_0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
 (3) \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \quad + \quad \text{تقسیم بر } \mu_0 \quad \text{تقسیم بر } \mu_0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
 (4) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 (5) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad \text{متابعت رابطه (5)}$$



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{X}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{X}$$

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

میدانهای متغیر با زمان (میدانهای الکترومغناطیسی)

در فصلهای دوم تا ششم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن، یعنی میدانهایی که نسبت به زمان تغییراتی ندارند، را مطالعه نمودیم. میدانهای الکتریکی ساکن از بارهای الکتریکی که توزیع آنها تابعی از زمان نباشد پدید می آیند، در حالی که میدانهای مغناطیسی ساکن از جریانهای الکتریکی ثابت، یعنی جریانهایی که از حرکت بارهای الکتریکی با سرعت یکنواخت ناشی شوند، به وجود می آیند. کلیه مطالعات مربوط به میدانهای ساکن بر دو قانون تجربی کولمب و آمپر، به ترتیب برای میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، استوار می باشند. اگر مولدهای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی خود تابعی از زمان باشند (و این بدان مفهوم است که بارهای الکتریکی دارای حرکت شتابدار باشند) میدانهای پدید آمده از آنها نیز طبیعتاً تابعی از زمان خواهند بود. مطالعه قوانین حاکم بر میدانهای متغیر با زمان و بررسی ویژگیهای کلی و رفتار عمومی این میدانها، هدف اصلی ما در این فصل تشکیل می دهد. قوانین میدانهای متغیر با زمان، که معمولاً از آنها به عنوان معادلات ماکسول نام برده می شود، را می توان شکل تکامل یافته قوانین میدانهای ساکن قلمداد کرد. این تکامل بر اساس قانون تجربی فاراده و یک استنباط ریاضی توسط ماکسول استوار می باشد. یکی از مهم ترین وجوه تمایز میدانهای ساکن و میدانهای متغیر با زمان این است که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن مستقل از یکدیگرند، در حالی که وابستگی متقابل و وجود همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان اجتناب ناپذیر است. از این رو میدانهای متغیر با زمان را میدانهای الکترومغناطیسی می نامند تا وجود توأم آنها تفهیم گردد. معادلات ماکسول از جمله مهم ترین قوانین بنیادی فیزیک به شمار می روند و قادر به تشریح کلیه پدیده های الکترومغناطیسی در طیف وسیعی شامل فرکانس صفر (DC) تا بالاترین فرکانس موجود مانند اشعه ایکس می باشند.

۱-۷ قانون فاراده

فاراده طی آزمایشهایی نشان داد که اگر یک حلقه سیم فلزی در یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان قرار گیرد در آن جریان الکتریکی پدید خواهد آمد. لیکن وجود جریان الکتریکی در یک سیم هادی به منزله وجود میدان الکتریکی در آن است. بنابراین، آزمایشهای فاراده در حقیقت پدید آمدن میدان الکتریکی توسط میدان مغناطیسی متغیر با زمان را محقق می‌سازد. بیان دقیق قانون فاراده بدین عبارت است که یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان تولید نیروی محرکه الکتریکی^۱ روی یک مسیر بسته می‌نماید، به طوری که این نیروی محرکه مساوی منهای نرخ تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از سطحی محدود به آن مسیر بسته نسبت به زمان می‌باشد. به بیان ریاضی:

$$\text{emf} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (1-7)$$

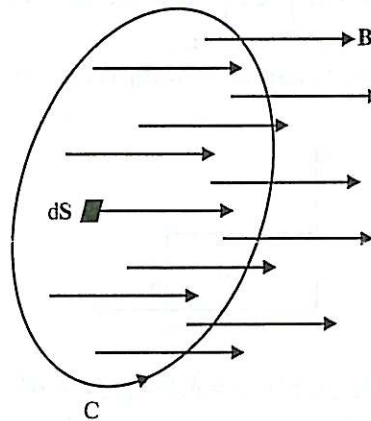
که emf نیروی محرکه الکتریکی و Ψ شار مغناطیسی می‌باشد. برای روشن ساختن مفهوم نیروی محرکه الکتریکی، میدان مغناطیسی متغیر با زمان \mathbf{B} و مسیر بسته C را در نظر می‌گیریم. فرض می‌شود که میدان الکتریکی ناشی از این میدان مغناطیسی با \mathbf{E} نشان داده شود. بر حسب تعریف، نیروی محرکه الکتریکی روی مسیر بسته C برابر است با $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ که همان سیرکولاسیون میدان \mathbf{E} حول مسیر بسته C می‌باشد. از طرف دیگر، شار مغناطیسی گذرنده از سطح S که محدود به منحنی بسته C باشد مساوی $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ است. پس رابطه ۱-۷ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2-7)$$

این رابطه شکل انتگرالی قانون فاراده را بیان می‌کند. در این رابطه $d\mathbf{L}$ بردار عنصر طول در امتداد منحنی C و $d\mathbf{S}$ بردار عنصر سطح روی سطح S و در امتداد عمود بر آن است. جهات بردارهای $d\mathbf{L}$ و $d\mathbf{S}$ مستقل از یکدیگر نیستند و از قاعده پیچ راستگرد پیروی می‌کنند، یعنی اگر پیچ راستگردی در امتداد عمود بر $d\mathbf{S}$ و در جهتی هماهنگ با جهت انتخاب شده برای مسیر بسته C بچرخد، پیشروی پیچ جهت بردار $d\mathbf{S}$ را نشان می‌دهد. اگر در امتداد مسیر بسته C یک سیم هادی با شکاف کوچکی قرار بگیرد، نیروی محرکه الکتریکی به منزله ظاهر شدن ولتاژی به اندازه $d\Psi/dt$ در شکاف خواهد بود. در صورتی که سیم تشکیل یک مدار بسته با مقاومت کل R را بدهد، آنگاه در آن جریانی به اندازه $(d\Psi/dt)/R$ پدید خواهد آمد. ولی باید توجه شود که پیدایش نیروی محرکه مستلزم وجود سیم هادی در امتداد مسیر C نیست و مفهوم نیروی محرکه را نباید لزوماً مترادف با ایجاد ولتاژ یا جریان در یک مدار دانست.

وجود علامت منفی در سمت راست روابط ۱-۷ و ۲-۷ بسیار اهمیت دارد و در حقیقت بیانگر اصل بقای انرژی است. این علامت نشان می‌دهد که نیروی محرکه به وجود آمده توسط یک شار مغناطیسی با تغییرات شار نسبت به زمان مخالفت می‌کند. این واقعیت تحت نام قانون لنز شناخته می‌شود. برای روشن ساختن قانون لنز و اینکه چگونه بیانگر اصل بقای انرژی است، سطح S محدود به

منحنی بسته C را در میدان مغناطیسی متغیر با زمان B ، مطابق شکل ۷-۱، در نظر می‌گیریم. برای سادگی سطح S را مسطح و میدان B را یکنواخت فرض می‌کنیم، در نتیجه شار گذرنده از S برابر با BS خواهد بود. اگر میدان B با زمان افزایش پیدا کند، شار $\Psi = BS$ نیز به همان صورت با زمان افزایش یافته و $d\Psi/dt$ مثبت خواهد بود. پس بر اساس رابطه ۷-۲، نیروی محرکه ایجاد شده در امتداد مسیر C ، یعنی $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ ، منفی خواهد بود. این بدان معنی است که اگر مسیر C با یک رشته سیم اشغال شود، جریانی در خلاف جهت انتخاب شده روی مسیر C در آن به وجود خواهد آمد. این جریان به نوبه خود تولید میدان مغناطیسی جدیدی می‌کند که در خلاف جهت dS و بنابراین در خلاف جهت میدان B بوده و با افزایش آن مخالفت می‌کند. بالعکس، اگر میدان B با زمان کاهش یابد، شار مغناطیسی گذرنده از سطح S نیز با زمان کاهش یافته و $d\Psi/dt$ منفی خواهد بود. آنگاه، نیروی محرکه ایجاد شده مثبت، جریان ایجاد شده در سیم در جهت انتخاب شده برای مسیر C و سرانجام میدان مغناطیسی حاصل از این جریان هم جهت با dS و بنابراین هم جهت با میدان B خواهد بود (در اینجا dS و B هم جهت فرض شده‌اند ولی اگر چنین هم نباشد نتیجه گیری ما هم چنان به قوت خود باقی است (چرا؟)). هم‌جهتی میدان جدید با میدان در حال کاهش B بدین معنی است که میدان جدید با کاهش میدان B مخالفت می‌کند. حال تصور کنید که علامت منفی در روابط ۷-۱ و ۷-۲ وجود نمی‌داشت. در آن صورت نتیجه گیریهای فوق باید برعکس شوند. مثلاً وقتی میدان B با زمان افزایش می‌یابد، میدان جدید به گونه‌ای خواهد بود که این افزایش را تقویت کند و منجر به میدان کل قوی‌تر از میدان B شود. اما این میدان کل قوی‌تر به نوبه خود میدان جدید قوی‌تری را به وجود می‌آورد و در نهایت میدان B به طور نامحدود افزایش می‌یابد. ولی وقوع افزایشهای پی‌درپی میدان نامحدود شدن آن مستلزم انرژی نامحدودی می‌باشد که ناقض اصل بقای انرژی است. پس وجود علامت منفی در روابط ۷-۱ و ۷-۲ بسیار مهم و اجتناب‌ناپذیر است.



شکل ۷-۱: سطح S و میدان B گذرنده از آن برای تشریح قانون لنز

مثال ۱-۷ یک حلقه سیم مستطیلی شکل به اضلاع ۱ و ۳ متر، مطابق شکل ۲-۷، در میدان مغناطیسی متغیر با زمان B قرار داده می‌شود. شکاف کوچک ab در یکی از اضلاع حلقه مطابق شکل ایجاد می‌شود. مطلوب است محاسبه V_{ab} در حالات زیر (سیم را هادی کامل فرض کنید):

الف) $B = 0.5 \cos 100\pi t \hat{a}_z \text{ T}$

ب) $B = 5 \times 10^{-6} \cos \left[3\pi \times 10^8 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \hat{a}_z \text{ T}$ که $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ می‌باشد.

حل:

مسیر بسته C را منطبق بر محیط حلقه مستطیلی شکل در نظر می‌گیریم. با انتخاب جهتی در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت برای مسیر بسته C و توجه به این نکته که میدان الکتریکی در درون سیم، که از جنس هادی کامل فرض می‌شود، صفر است، داریم:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_{\text{مسیر سیم}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = V_{ba} = -V_{ab}$$

اما از طرف دیگر، بر اساس رابطه ۲-۷، می‌توان نوشت:

$$-V_{ab} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

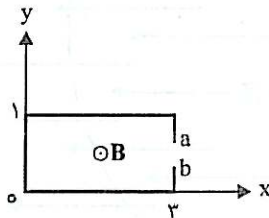
یا:

$$V_{ab} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

(الف)

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S (0.5 \cos 100\pi t \hat{a}_z) \cdot (dx dy \hat{a}_z) \\ &= 0.5 \cos 100\pi t \int_0^3 dx \int_0^1 dy = 1.5 \cos 100\pi t \text{ Wb} \end{aligned}$$

$$V_{ab} = \frac{d}{dt} (1.5 \cos 100\pi t) = -150 \sin 100\pi t \text{ V}$$



شکل ۲-۷: حلقه مستطیلی شکل از جنس هادی در میدان مغناطیسی B

بجز همان‌طور که در قسمت ۴-۷ خواهیم دید میدان الکتریکی، اعم از ساکن یا متغیر با زمان در درون اجسام هادی کامل صفر است.

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 5 \times 10^{-6} \int_0^{\pi} \cos \left[3\pi \times 10^6 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] dx \int_0^1 dy \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{10^{-5}}{\pi} \sin(3\pi \times 10^6 t) \text{ Wb}$$

پس:

$$V_{ab} = \frac{d}{dt} \left[\frac{10^{-5}}{\pi} \sin(3\pi \times 10^6 t) \right] = 3000 \cos(3\pi \times 10^6 t) \text{ V}$$

مثال ۲-۷ مقاومت $R = 200 \Omega$ بین دو نقطه a و b به حلقه سیم شکل ۲-۷ وصل می‌شود. میدان مغناطیسی \mathbf{B} همان مقادیر داده شده در بندهای (الف) و (ب) مثال ۱-۷ را دارا می‌باشد. مطلوب است محاسبه جریان $i(t)$ (جهت آن را از b به سمت a فرض کنید) که در مدار متشکل از مقاومت R و سیم هادی به وجود می‌آید.

حل:

با استفاده از رابطه ولتاژ-جریان برای مقاومت R می‌توان نوشت:

$$V_{ba} = i(t)R = -V_{ab} \Rightarrow i(t) = -V_{ab}/R$$

$$i(t) = -(-150\pi \sin 1000\pi t)/200 = 0.75\pi \sin 1000\pi t \text{ A} \quad (\text{الف})$$

$$i(t) = -[3000 \cos(3\pi \times 10^6 t)]/200 = -15 \cos(3\pi \times 10^6 t) \text{ A} \quad (\text{ب})$$

۲-۷ نیروهای محرکه ترانسفورماتوری و حرکتی

همان طور که از رابطه ۱-۷ برمی‌آید، ایجاد نیروی محرکه الکتریکی مستلزم شار مغناطیسی متغیر با زمان می‌باشد. از طرف دیگر، شار مغناطیسی Ψ هم تابعی از میدان \mathbf{B} و هم تابعی از سطح S است. اگر S ساکن بوده و تغییراتی نسبت به زمان نداشته باشد، رابطه ۲-۷ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-7)$$

در این حالت نیروی محرکه ایجاد شده را از نوع ترانسفورماتوری یا تبدیلی می‌نامند. در به دست آوردن رابطه ۳-۷، در حقیقت ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری در سمت راست رابطه ۲-۷ عوض شده است. تأکید می‌شود که مشتق‌گیری نسبت به زمان انجام می‌شود، در حالی که انتگرال‌گیری نسبت به مکان انجام می‌گیرد. از آنجا که میدان مغناطیسی \mathbf{B} در حالت کلی تابعی از زمان و مکان است، یعنی $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ، مشتق \mathbf{B} نسبت به زمان باید به شکل پارامی بیان شود. ولی در روابط ۱-۷ و ۲-۷، چون فقط تابعی از زمان است، مشتق‌گیری نسبت به زمان به صورت d/dt نوشته می‌شود.

تغییرات شار مغناطیسی نسبت به زمان ممکن است توسط یک میدان مغناطیسی ساکن که از سطحی متغیر با زمان، یعنی یک سطح متحرک، عبور کند نیز به وجود آید. در این حالت نیروی محرکه ایجاد شده را از

نوع حرکتی نامند. برای تعیین نیروی محرکه حرکتی، فرض می‌شود بار q با سرعت v در میدان مغناطیسی B حرکت کند. طبق قانون نیروی لورنتز در رابطه ۵-۴، نیروی اعمال شده بر بار q برابر $F=qv \times B$ است. ولی، از دید ناظری که با سرعت v ، همراه با بار q حرکت می‌کند، هیچ‌گونه حرکتی احساس نمی‌شود. بنابراین نیروی مزبور به ازای واحد بار، یعنی $F/q=v \times B$ ، را می‌توان به منزله یک میدان الکتریکی القایی تلقی کرد و آنگاه رابطه ۲-۷ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \quad (۴-۷)$$

نتیجه مزبور را وقتی که مسئله در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌گیرد دوباره به دست خواهیم آورد. در حالت کلی وقتی که B و S هر دو تابعی از زمان باشند، می‌توان نشان داد که:

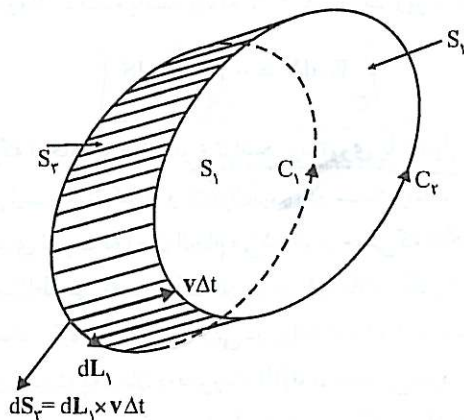
$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \quad (۵-۷)$$

با استفاده از رابطه ۵-۷ در رابطه ۲-۷، نیروی محرکه الکتریکی در حالت کلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \quad (۶-۷)$$

باید توجه شود که در روابط ۴-۷ و ۶-۷، عبارت است از میدان الکتریکی اندازه‌گیری شده توسط ناظری که با سرعت v نسبت به میدان B حرکت می‌کند. رابطه ۶-۷ به وضوح نشان می‌دهد که نیروی محرکه الکتریکی کل مساوی مجموع نیروهای محرکه ترانسفورماتوری و حرکتی است.

برای اثبات رابطه ۵-۷ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم. دو لحظه زمانی $t_1 = t$ و $t_2 = t + \Delta t$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم در لحظه t_1 ، $C = C_1$ و $S = S_1$ ، $B = B_1$ ، و در لحظه t_2 ، $C = C_2$ و $S = S_2$ ، $B = B_2$ باشد. شکل ۳-۷ سطوح S_1 و S_2 و منحنی‌های بسته C_1 و C_2 را نشان می‌دهد. بر اساس تعریف مشتق یک تابع می‌توان نوشت:



شکل ۳-۷: سطوح S_1 و S_2 و منحنی‌های C_1 و C_2 در دو لحظه متوالی برای اثبات رابطه ۵-۷

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 \right) / \Delta t \quad (۷-۷)$$

سطح S_2 که از حرکت منحنی بسته C_1 در فاصله زمانی Δt حاصل می‌شود همراه با سطوح S_1 و S_2 حجم V را تشکیل می‌دهند. با به کار بردن قضیه دیورژانس در لحظه t_2 برای میدان \mathbf{B}_2 در حجم V ، می‌توان نوشت:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}_2 \, dV = \oint_{S_1 + S_2 + S_3} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} = - \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_3} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_3 \quad (۸-۷)$$

وجود علامت منفی در جلوی انتگرال اول در سمت راست رابطه ۷-۸ به این دلیل است که بردار $d\mathbf{S}_1$ ، با توجه به جهت در نظر گرفته شده برای C_1 ، به سمت درون حجم V می‌باشد. از آنجا که $\nabla \cdot \mathbf{B}_2 = 0$ است، رابطه ۷-۸ به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = - \int_{S_3} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_3 \quad (۹-۷)$$

اگر عنصر طول dL_1 روی منحنی C_1 با سرعت \mathbf{v} حرکت کند، عنصر سطح ایجاد شده از این حرکت پس از گذشت زمان Δt ، همان‌طور که در شکل ۷-۳ نشان داده شده است، برابر با $dS_3 = dL_1 \times \mathbf{v} \Delta t$ است. آنگاه:

$$\int_{S_3} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_3 = \oint_{C_1} \mathbf{B}_2 \cdot (dL_1 \times \mathbf{v}) \Delta t \quad (۱۰-۷)$$

برای محاسبه سمت راست رابطه ۷-۱۰ لازم است که \mathbf{B}_2 در رابطه ۷-۱۰ و نیز در انتگرال روی S_1 در رابطه ۷-۹ بر حسب \mathbf{B}_1 بیان شود. برای این منظور، با استفاده از بسط سری تیلور، \mathbf{B}_2 را بر حسب \mathbf{B}_1 به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1 + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{t=t_1} \Delta t + \text{جملات از درجات بالاتر} \quad (۱۱-۷)$$

وقتی که Δt بسیار کوچک باشد و در حد به سمت صفر میل کند، می‌توان از جملات بالاتر شامل $(\Delta t)^2$ ، $(\Delta t)^3$ و ... صرف نظر کرد. اکنون با استفاده از رابطه ۷-۱۱ می‌توان نوشت:

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \Delta t \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{t=t_1} \cdot d\mathbf{S}_1 \quad (۱۲-۷)$$

و:

$$\oint_{C_1} \mathbf{B}_2 \cdot (dL_1 \times \mathbf{v}) \Delta t = \Delta t \oint_{C_1} \mathbf{B}_1 \cdot (dL_1 \times \mathbf{v}) + (\Delta t)^2 \text{ جمله‌ای شامل} \quad (۱۳-۷)$$

در رابطه ۷-۱۳ از جمله شامل $(\Delta t)^2$ صرف نظر می‌شود. حال با استفاده از روابط ۷-۱۰، ۷-۱۲ و ۷-۱۳ در رابطه ۷-۹، داریم:

$$\int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = \Delta t \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{t=t_1} \cdot d\mathbf{S}_1 - \Delta t \oint_{C_1} \mathbf{B}_1 \cdot (dL_1 \times \mathbf{v}) \quad (۱۴-۷)$$

با استفاده از نتیجه به دست آمده در رابطه ۷-۱۴، مشتق مورد نظر در رابطه ۷-۷ برابر است با (پس از حذف اندیس ۱):

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{L} \times \mathbf{v}) \quad (15-7)$$

سرانجام، استفاده از تساوی $\mathbf{B} \cdot (d\mathbf{L} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$ در رابطه ۷-۱۵ درستی رابطه ۷-۵ را محقق می‌سازد.

اگر \mathbf{B} نسبت به زمان تغییراتی نداشته باشد، $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}$ شده و رابطه ۷-۶ به رابطه ۷-۴ ساده می‌شود. همچنین اگر سطح S و مسیر C ساکن باشند، $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ شده و از رابطه ۷-۶، رابطه ۷-۳ نتیجه می‌گردد.

مثال ۷-۳ یک میله فلزی روی دو ریل موازی و به فاصله l از یکدیگر با سرعت $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{a}}_x$ حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی ساکن $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{a}}_z$ ، مطابق شکل ۷-۴، از صفحه ریلها عبور داده می‌شود. ولت‌متر در شکل مذکور چه عددی را نشان می‌دهد؟ میله و ریلها هادی کامل فرض می‌شوند. مثال را به دو روش با استفاده از الف) رابطه ۷-۱، ب) رابطه ۷-۴ حل کنید.

حل:

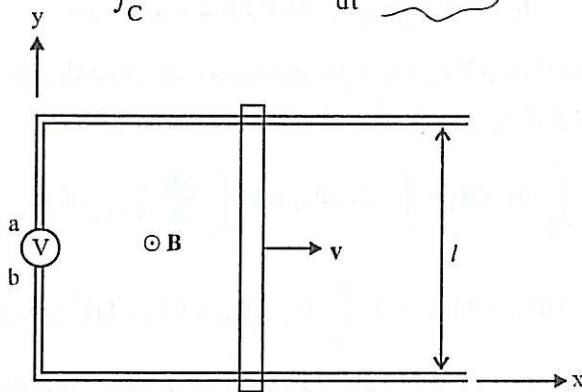
الف) شار مغناطیسی گذرنده از سطح S ، محدود به میله و ریلها و محور y ، عبارت است از:

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (B_z \hat{\mathbf{a}}_z) \cdot (dx dy \hat{\mathbf{a}}_z) = B_z \int_0^l dy \int_0^x dx = B_z \cdot lx$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = B_z l \frac{dx}{dt} = B_z l v_x$$

با جایگزین نمودن نتیجه مزبور در رابطه ۷-۱، داریم:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = V_{ab} = -\frac{d\Psi}{dt} = -B_z l v_x$$



شکل ۷-۴: میله لغزنده روی دو ریل موازی در میدان مغناطیسی B

(ب) یا به کار بردن رابطه ۷-۴، می توان نوشت :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = V_{ab} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

اما با توجه به اینکه فقط آن قسمت از مسیر C که شامل میله لغزنده است دارای حرکت است، داریم :

$$V_{ab} = \int_C (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{a}}_x \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z) \cdot (dy \hat{\mathbf{a}}_y) = -v \cdot B \cdot \int_C dy = -v \cdot B \cdot l$$

■

مثال ۷-۴ اگر در مثال ۷-۳، $\mathbf{B} = B_0 \cos \omega_0 t \hat{\mathbf{a}}_z$ باشد، دوباره ولتاژ V_{ab} را از دو روش به دست آورید.

حل: الف)

$$\Psi = \int_S (\mathbf{B} \cdot \cos \omega_0 t \hat{\mathbf{a}}_z) \cdot (dx dy \hat{\mathbf{a}}_z) = B_0 l x \cos \omega_0 t$$

$$V_{ab} = -\frac{d\Psi}{dt} = -B_0 l (dx/dt) \cos \omega_0 t + B_0 \omega_0 x \sin \omega_0 t$$

با فرض آنکه $x = x_0 + v_0 t$ ، که x_0 موقعیت میله را در $t = 0$ بیان می کند، V_{ab} برابر است با :

$$V_{ab} = -B_0 l v_0 \cos \omega_0 t + B_0 \omega_0 l (x_0 + v_0 t) \sin \omega_0 t$$

(ب) محاسبه V_{ab} را می توان با استفاده از رابطه ۷-۵ نیز انجام داد. به سادگی می توان نشان داد که :

$$\oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = -B_0 v_0 l \cos \omega_0 t$$

و:

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -B_0 \omega_0 l x \sin \omega_0 t$$

با استفاده از نتایج مزبور در رابطه ۷-۵ و توجه به اینکه $x = x_0 + v_0 t$ است، جواب به دست آمده برای V_{ab} در بند الف) دوباره حاصل می شود.

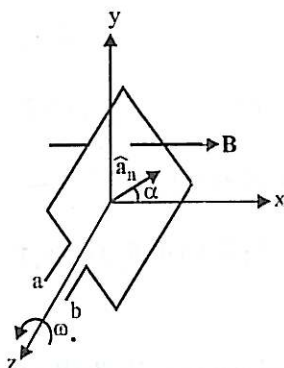
■

مثال ۷-۵ اصول کار مولدهای برق متناوب بر قانون فاراده مبتنی است. به منظور آشنایی با چگونگی کار این گونه مولدها، مثال ساده یک حلقه سیم مستطیلی شکل که در میدان مغناطیسی ساکن $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{a}}_x$ حول محور z با سرعت زاویه ای ω_0 می چرخد، مطابق شکل ۷-۵، را در نظر بگیرید و ولتاژ القا شده بین دو انتهای سیم را محاسبه نمایید.

حل:

شار مغناطیسی گذرنده از سطح حلقه عبارت است از :

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (B_0 \hat{\mathbf{a}}_x) \cdot (S \hat{\mathbf{a}}_n) = B_0 S \cos \alpha$$



شکل ۷-۵: یک حلقه سیم مستطیلی شکل در حال چرخش حول محور z در معرض یک میدان مغناطیسی ساکن برای نشان دادن اصول کار مولدهای برق متناوب

که S مساحت حلقه و α زاویه بین بردار واحد عمود بر سطح حلقه (\hat{a}_n) و \hat{a}_x می‌باشد. بدیهی است که زاویه α با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار آن در لحظه t از رابطه $\alpha = \omega \cdot t$ به دست می‌آید. در اینجا فرض شده است که در لحظه $t = 0$ ، $\alpha = 0$ بوده است. بنابراین:

$$\Psi = B \cdot S \cos \omega \cdot t$$

و:

$$\oint_{\text{محیط حلقه}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = V_{ab} = -\frac{d\Psi}{dt} = B \cdot \omega \cdot S \sin \omega \cdot t$$

در صورتی که به جای یک حلقه، سیم پیچی متشکل از N حلقه مساوی داشته باشیم، ولتاژ حاصل N برابر خواهد بود.

■

۳-۷ معادلات ماکسول

معادلات ماکسول برای میدانهای ساکن را در فصول قبل آموخته‌ایم. برای یادآوری، این معادلات را بار دیگر مطرح می‌کنیم. برای میدان الکتریکی ساکن:

$$\mathcal{A} \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 & (۱۶-۷) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & (۱۷-۷) \end{cases}$$

و برای میدان مغناطیسی ساکن:

$$\mathcal{A} \begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} & (۱۸-۷) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (۱۹-۷) \end{cases}$$

قبلاً اشاره کردیم که معادلات ماکسول برای میدانهای متغیر با زمان را می‌توان تعمیمی از معادلات میدانهای ساکن تلقی کرد. تکامل معادلات ماکسول از حالت میدانهای ساکن به میدانهای متغیر با زمان

بر اساس قانون فاراده و یک بررسی ریاضی توسط ماکسول استوار می‌باشد. برای سطح ساکن S ، محدود به منحنی بسته C ، قانون فاراده به صورت رابطه ۷-۳ نوشته می‌شود. با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ را به یک انتگرال سطح تبدیل می‌کنیم، آنگاه:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (۷-۲۰)$$

برای آنکه رابطه ۷-۲۰ برای هر سطح دلخواه S صادق باشد، لازم است که عبارات زیر دو انتگرال سطح مساوی باشند. پس:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۷-۲۱)$$

رابطه ۷-۲۱ یکی از معادلات ماکسول برای میدانهای متغیر با زمان بوده و به عنوان شکل نقطه‌ای قانون فاراده نیز شناخته می‌شود. روشن است که اگر میدان \mathbf{B} تغییراتی نسبت به زمان نداشته باشد، رابطه ۷-۲۱ به رابطه ۷-۱۶ ساده می‌شود و به عبارت دیگر رابطه ۷-۲۱ را می‌توان شکل تکامل یافته رابطه ۷-۱۶ قلمداد کرد.

حال باید دید که بقیه معادلات میدانهای ساکن، یعنی روابط ۷-۱۷ تا ۷-۱۹، چگونه برای میدانهای متغیر با زمان تحول پیدا می‌کنند. آیا این روابط در شکل موجود خود برای میدانهای متغیر با زمان صادقند؟ در زمانی که این سؤال برای ماکسول مطرح بود هیچ قانون تجربی دیگری علاوه بر قوانین نیروی کولمب و آمپر و قانون فاراده وجود نداشت که بتوان از آن استمداد جست. از این رو، ماکسول تنها با یک بررسی ریاضی اقدام به یافتن پاسخ نمود. ماکسول استدلال نمود که اگر روابط ۷-۱۷ تا ۷-۱۹ برای میدانهای متغیر با زمان معتبر فرض شوند، مجموعه معادلات باید مجموعه‌ای سازگار باشد. وی مشخصاً توجه خود را به رابطه ۷-۱۸ معطوف نمود و با گرفتن دیورژانس از طرفین آن ملاحظه نمود که از طرفی $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و از طرف دیگر بر اساس معادله پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$ است، که در رابطه ۳-۱۸ داده شده و بیانگر اصل بقای بار الکتریکی است، بنابراین $\nabla \cdot \mathbf{J}$ لزوماً صفر نخواهد بود. ماکسول برای رفع این تناقض اقدام به اصلاح رابطه $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ نموده و آن را، به طوری که خواهیم دید، به $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ تغییر داد. برای آنکه چگونگی این اصلاح روشن شود، فرض می‌شود جهت رفع تناقض مذکور رابطه ۷-۱۸ به صورت زیر نوشته شود:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{X} \quad (۷-۲۲)$$

که \mathbf{X} برداری مجهول است. حال با گرفتن دیورژانس از طرفین رابطه ۷-۲۲ و استفاده از رابطه پیوستگی، می‌توان نوشت:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{X} = 0$$

و:

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۷-۲۳)$$

اکنون با فرض آنکه رابطه $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ برای میدانهای متغیر با زمان معتبر است، رابطه ۷-۲۳ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (۲۴-۷)$$

ساده ترین جواب این معادله عبارت از $\mathbf{X} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ است. با جایگزین نمودن \mathbf{X} در رابطه ۷-۲۲، داریم:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (۲۵-۷)$$

تأکید می شود که رابطه ۷-۲۵ از سایر روابط موجود استخراج نشده است، بلکه به گونه ای نوشته شده است که با سایر روابط تناقضی نداشته باشد.

رابطه ۷-۲۵، رابطه مهم دیگری برای میدانهای متغیر با زمان می باشد. این رابطه که اولین بار توسط ماکسول بیان گردید نه بر اساس یک تجربه فیزیکی بلکه بر اساس یک استنباط ریاضی به آن پی برده شد. این یکی از موارد معدودی است که یک نتیجه گیری ریاضی بر تجربه آزمایشگاهی تقدم پیدا کرده است. در اغلب موارد، بشر ابتدا به یک پدیده فیزیکی از طریق تجربه پی برده و سپس قوانین حاکم بر آن را به شکل ریاضی بیان کرده است. ولی در مورد بالا، یک کار ریاضی محض از وجود پدیده ای (امواج الکترومغناطیس) خبر می داد که هنوز برای بشر شناخته نشده بود. خود ماکسول این پدیده را پیش بینی کرد و نتیجه گرفت که امواج الکترومغناطیس در خلأ با سرعت $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ حرکت می کنند. این سرعت به سرعت نور که در آن زمان اندازه گیری شده بود بسیار نزدیک بود و ماکسول اولین کسی بود که ادعا کرد نور از جنس امواج الکترومغناطیس است. درستی رابطه ۷-۲۵ بعد از زمان ماکسول به طور تجربی تحقیق گردید و در اعتبار آن هیچ گونه خللی نیست.

به طور خلاصه، مجموعه سازگاری از روابط حاکم بر رفتار میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان در اختیار داریم که به نام معادلات ماکسول شناخته می شوند. این روابط عبارتند از:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{الف}-۲۶-۷) \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{ب}-۲۶-۷) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{ج}-۲۶-۷) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{د}-۲۶-۷) \\ \text{به چهار معادله فوق، می توان معادله پیوستگی را نیز اضافه کرد:} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t \quad (\text{ه}-۲۶-۷) \end{array} \right.$$

بدیهی است که در صورت نبودن تغییرات نسبت به زمان، $\partial / \partial t = 0$ بوده و روابط ۷-۲۶-الف تا ه به روابط میدانهای ساکن ساده می شوند. حال به بررسی دقیق تر این روابط و مقایسه میدانهای ساکن و متغیر با زمان می پردازیم.

روابط ۷-۲۶-الف تا ه شامل چند نکته مهم می باشند. اول آنکه، بر خلاف میدان الکتریکی ساکن، میدان الکتریکی متغیر با زمان یک میدان پایستار نیست. زیرا، همان طور که رابطه ۷-۲۶-الف نشان

می دهد، $\nabla \times \mathbf{E}$ و به طور معادل $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ صفر نیستند. بنابراین، حرکت بار الکتریکی روی یک مسیر بسته در میدان الکتریکی متغیر با زمان مستلزم صرف انرژی است. این نتیجه همچنین نشان می دهد که میدان الکتریکی متغیر با زمان رانمی توان به صورت گرادیان یک تابع پتانسیل نرده ای بیان کرد. در حقیقت، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در میدان الکتریکی متغیر با زمان، به معنای دقیق کلمه، یک کمیت تک مقداری نیست، زیرا $V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ تابعی از مسیری است که a را به b وصل می کند. مفهوم اختلاف پتانسیل تا وقتی که تغییرات زمانی میدان الکتریکی «کند» باشد و به بیان دیگر تا وقتی که فرکانس «پایین» باشد، بر اساس تقریب شبه ساکن که شرح مختصر آن بعداً خواهد آمد، همانند اختلاف پتانسیل برای میدان الکتریکی ساکن مورد استفاده قرار می گیرد.

نکته دوم آنکه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان را می توان مولد یکدیگر محسوب کرد. تولید میدان الکتریکی توسط میدان مغناطیسی متغیر با زمان از قانون فاراده استنباط می شود که به تفصیل درباره آن بحث شد. لیکن همان طور که از رابطه ۷-۲۶ ب برمی آید، میدان الکتریکی متغیر با زمان نیز می تواند منشأ میدان مغناطیسی باشد. در حقیقت، به همان صورت که جریانی با چگالی \mathbf{J} تولید میدان مغناطیسی \mathbf{H} می کند، میدان الکتریکی متغیر با زمان با جریان معادلی به چگالی $\partial \mathbf{D} / \partial t$ در تولید میدان مغناطیسی \mathbf{H} سهیم است. این جریان معادل به نام جریان جابه جایی شناخته می شود.

نکته سوم اینکه چون رابطه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ برای میدانهای مغناطیسی ساکن و متغیر با زمان هر دو صادق است، ویژگی سیملوله ای بودن میدان \mathbf{B} ، برای حالتی که تغییرات زمانی موجود باشند، هم چنان به قوت خود باقی می ماند.

بالاخره، می توان نشان داد که معادلات دیورژانس ماکسول در روابط ۷-۲۶ ج و ۷-۲۶ د از معادلات کرل ماکسول و معادله پیوستگی، که در روابط ۷-۲۶ الف، ۷-۲۶ ب و ۷-۲۶ ج هیجان شده اند، مستقل نیستند. برای بررسی این نکته ابتدا از طرفین رابطه ۷-۲۶ الف دیورژانس می گیریم:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (7-27)$$

از رابطه ۷-۲۷ ب برمی آید که $\nabla \cdot \mathbf{B}$ باید صفر یا مساوی مقدار ثابتی نسبت به زمان باشد. اما هر مقداری غیر از صفر برای $\nabla \cdot \mathbf{B}$ در یک نقطه از فضا به منزله وجود دائمی یک بار مغناطیسی مجرد در آن نقطه است. وجود بار مغناطیسی به طور تجربی به اثبات نرسیده است و بنابراین باید $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ باشد. (اما اگر به فرض بار مغناطیسی هم وجود می داشت، مقدار ثابت مذکور نمی تواند منشأ میدان متغیر با زمان باشد.) به همین ترتیب اگر از طرفین رابطه ۷-۲۶ ب دیورژانس گرفته و رابطه ۷-۲۶ د را مورد استفاده قرار دهیم، داریم:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0$$

یا:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0 \quad (7-28)$$

$$J = \begin{cases} \rho & \text{برق} \\ \sigma E & \text{هدایت} \\ \frac{\partial D}{\partial t} & \text{جابجایی} \end{cases}$$

آنگاه:

$$\nabla \cdot D = \rho + \text{مقدار ثابت نسبت به زمان} \quad (۷-۲۹)$$

اما مقدار ثابت نسبت به زمان در این رابطه باید صفر باشد، چراکه مقدار ثابت غیر صفر در یک نقطه از فضا به منزله وجود همیشگی یک بار الکتریکی ساکن در آن نقطه به جز بار الکتریکی با چگالی ρ خواهد بود. بنابراین رابطه $\nabla \cdot D = \rho$ از روابط ۷-۲۶-ب و ۷-۲۶-۵ مستقل نیست.

در پایان بررسی معادلات ماکسول، بر این نکته تأکید می شود که منشأ اولیه میدانهای الکترومغناطیس بارهای الکتریکی هستند که توسط چگالیهای ρ و J در معادلات ظاهر می شوند. بنابراین، اگر بگوییم میدان مغناطیسی متغیر با زمان تولید میدان الکتریکی می کند، باید در نظر داشت که میدان مغناطیسی خود از یک جریان الکتریکی به وجود آمده است. پس این جریان یا بار الکتریکی متحرک است که منشأ اولیه میدانها می باشد.

شکل انتگرالی معادلات ماکسول

روابط ۷-۲۶-الف، ب، ج و د شکل نقطه ای یا دیفرانسیلی معادلات ماکسول هستند. این روابط مشتقات میدانها نسبت به زمان و مکان را دربردارند، بنابراین اگر در برخی از نقاط فضا میدانها ناپیوسته باشند (ناپیوستگی میدانها در مرز دو ناحیه با خصوصیات متفاوت، مثلاً در مرز بین دو عایق یا در مرز بین یک عایق و یک هادی، روی می دهد) روابط نقطه ای مذکور مفید نخواهند بود. زیرا به دلیل ناپیوستگی میدانها برخی مشتقات موجود در این روابط نامحدود می شوند. در چنین مواردی به روابط دیگری نیاز است. این روابط همان شکل انتگرالی معادلات ماکسول هستند و با به کار بستن قضایای دیورژانس و استوکس، روابط ۱-۱۰۶ و ۱-۱۲۷، از معادلات نقطه ای ماکسول به دست می آیند. روابط انتگرالی مترادف بار و روابط ۷-۲۶-الف تا ه به طور خلاصه عبارتند از:

$$\left. \begin{array}{l} \text{قانون مدیرس آمپر} \\ \text{قانون گوس برای میدان الکتریکی} \\ \text{قانون گوس برای میدان مغناطیسی} \\ \text{اصل بقا بار الکتریکی} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \oint_C E \cdot dL = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad (۷-۳۰-الف) \\ \oint_C H \cdot dL = - \int_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS \quad (۷-۳۰-ب) \\ \oint_S D \cdot dS = - \int_V \rho dV \quad (۷-۳۰-ج) \\ \oint_S B \cdot dS = 0 \quad (۷-۳۰-د) \\ \oint_S J \cdot dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (۷-۳۰-ه) \end{array}$$

S سطح باز است
 dS محدود بر S
 S سطح بسته
 dS محدود بر S

در روابط ۷-۳۰-الف و ۷-۳۰-ب، S سطح بازی است که محدود به منحنی بسته C باشد. جهت بردارهای dL و dS در این دو رابطه از قاعده پیچ راستگرد یا قاعده معادلی به نام قاعده انگشتان دست

راست پیروی می نمایند (اگر چهار انگشت دست راست در جهت C قرار بگیرند، انگشت شست جهت dS را نشان خواهد داد). اما در روابط $\beta = \omega \cdot \lambda = \omega \cdot \frac{c}{v} = \frac{\omega}{v}$ ج تا ه، S سطح بسته‌ای است که حجم آن V می باشد و بردار dS عمود بر S و به سمت خارج آن است. روابط $\beta = \omega \cdot \lambda = \omega \cdot \frac{c}{v} = \frac{\omega}{v}$ الف تا و-۳۰ هبه ترتیب بیان کننده قانون فاراده، قانون مداری آمپر، قانون گوس برای میدان الکتریکی، قانون گوس برای میدان مغناطیسی و اصل بقای بار الکتریکی می باشند.

مثال ۶-۷ میدان الکتریکی برای یک موج الکترومغناطیس در خلأ عبارت است از:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_x$$

میدان مغناطیسی \mathbf{H} را برای این موج محاسبه نموده و ضریب ثابت β را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_y = E_0 \beta \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_y \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

پس:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -(E_0 \beta / \mu_0) \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_y$$

در نتیجه:

$$\mathbf{H} = (E_0 \beta / \mu_0 \omega) \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_y$$

برای تعیین β ، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} را در رابطه ۷-۲۶ ب جایگزین می کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= -\frac{\partial H_y}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_x = -(E_0 \beta^2 / \mu_0 \omega) \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_x \\ &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -E_0 \epsilon_0 \omega \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_x \end{aligned}$$

بلافاصله نتیجه می گیریم که:

$$\beta^2 / (\mu_0 \omega) = \epsilon_0 \omega \Rightarrow \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

■

به طوری که از عبارات میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} در مثال ۶-۷ برمی آید، این موج در امتداد محور Z حرکت می کند. اگر جمله $\cos(\omega t - \beta z)$ به صورت $\cos[\omega(t - \frac{z}{v})]$ نوشته شود، سرعت حرکت موج برابر با:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 3 \times 10^8 \text{ متر بر ثانیه}$$

محاسبه می گردد. این سرعت مساوی سرعت نور در خلأ می باشد.

۴-۷ شرایط مرزی

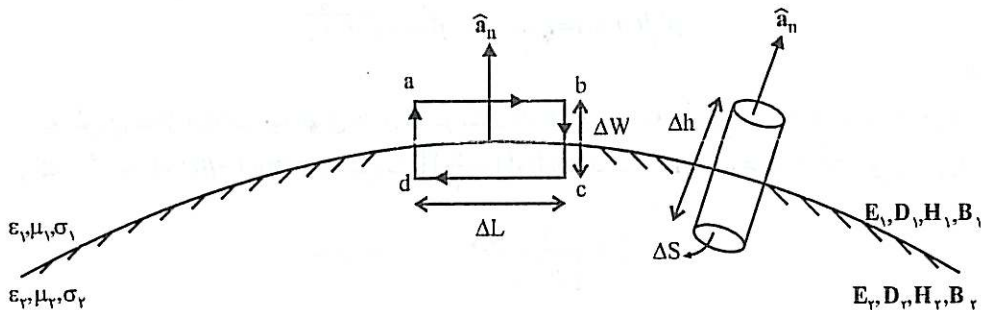
برای به دست آوردن شرایط مرزی، دو ناحیه ۱ و ۲ را به ترتیب با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 ، قابلیت‌های نفوذ μ_1 و μ_2 و رسانایی‌های σ_1 و σ_2 در نظر می‌گیریم. میدان‌های نواحی ۱ و ۲ را نیز به ترتیب با $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1$ و $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{B}_2$ نشان می‌دهیم. روش کار همانند روش به کار رفته برای میدان‌های ساکن در قسمت‌های ۳-۹ و ۶-۳ می‌باشد. برای تعیین شرایط مرزی مؤلفه‌های مماسی، مسیر بسته مستطیلی شکل $abcd$ را به طول ΔL و عرض ΔW ، مطابق شکل ۶-۷، در نظر می‌گیریم، به طوری که اضلاع ab و cd موازی با سطح مرزی و اضلاع bc و da عمود بر آن باشند. آنگاه رابطه ۷-۳۰ الف را در cd میدان الکتریکی و رابطه ۷-۳۰ ب را برای میدان مغناطیسی به کار می‌بریم:

$$\oint_{abcd} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_{\text{سطح } abcd} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (۳۱-۷)$$

$$\oint_{abcd} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\text{سطح } abcd} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (۳۲-۷)$$

وقتی که ΔW به سمت صفر میل کند، سطح مستطیل $abcd$ نیز به سمت صفر میل می‌کند و آنگاه انتگرال سمت راست رابطه ۳۱-۷ و آن قسمت از انتگرال سمت راست رابطه ۳۲-۷ که شامل $\partial \mathbf{D} / \partial t$ است به سمت صفر میل می‌کنند. از این پس، موقعیت مسئله کاملاً همانند حالت میدان‌های ساکن است که در قسمت‌های ۳-۹ و ۶-۳ مطالعه کردیم. به عبارت دیگر، در ادامه بررسی رابطه ۳۱-۷ می‌توان محاسبات مربوط به مؤلفه مماسی میدان \mathbf{E} در قسمت ۳-۹ را تکرار کرد و نتیجه ۳-۶۵ را گرفت. به همین ترتیب، در ادامه بررسی رابطه ۳۲-۷ می‌توان محاسبات مربوط به مؤلفه مماسی میدان \mathbf{H} را تکرار کرد و نتیجه ۶-۳۴ را به دست آورد. پس به طور خلاصه، شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی میدان‌های متغیر با زمان \mathbf{E} و \mathbf{H} عبارتند از:

$$E_{t_1} - E_{t_2} = 0 \quad (۳۳-۷)$$



شکل ۶-۷: شرایط مرزی در مجاورت دو جسم

$$\hat{\mathbf{a}}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \quad (34-7)$$

که \mathbf{J}_S چگالی جریان سطحی موجود در مرز و $\hat{\mathbf{a}}_n$ بردار واحد عمود بر مرز و در جهت ناحیه ۲ به سمت ناحیه ۱ است.

جهت تعیین شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی میدانها، یک سطح بسته استوانه‌ای شکل به قاعده ΔS و ارتفاع Δh و عمود بر سطح مرزی، مطابق شکل ۷-۶، در نظر می‌گیریم. آنگاه رابطه ۷-۳۰ ج را برای میدان الکتریکی و رابطه ۷-۳۰ د را برای میدان مغناطیسی به کار می‌بریم:

$$\oint_{\text{سطح کل استوانه}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{حجم استوانه}} \rho dV \quad (35-7)$$

$$\oint_{\text{سطح کل استوانه}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (36-7)$$

با مراجعه به قسمتهای ۳-۹ و ۳-۶ در می‌یابیم که روابط ۷-۳۵ و ۷-۳۶ مبنای تعیین شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی میدانهای ساکن \mathbf{D} و \mathbf{B} نیز بودند. بنابراین، تجزیه و تحلیل ریاضی شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی میدانهای ساکن و متغیر با زمان \mathbf{D} و \mathbf{B} هیچ‌گونه تفاوتی ندارد و به طبع نتایج به دست آمده نیز یکسان خواهند بود. بنابراین روابط ۳-۶۶ و ۶-۳۷ برای میدانهای متغیر با زمان نیز معتبرند:

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \quad (37-7)$$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \quad (38-7)$$

با استفاده از بردار واحد $\hat{\mathbf{a}}_n$ ، شرایط مرزی را می‌توان به شکل برداری به شرح زیر بیان کرد:

$$\hat{\mathbf{a}}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \quad (39-7)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \quad (40-7)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \quad (41-7)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (42-7)$$

ذکر چند نکته در مورد شرایط مرزی ضرورت دارد. اول آنکه شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی، یعنی روابط ۷-۴۱ و ۷-۴۲، از شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی، یعنی روابط ۷-۳۹ و ۷-۴۰، مستقل نیستند. این به آن دلیل است که معادلات دیورژانس ماکسول از معادلات کرل آن مستقل نیستند و همان‌طور که دیدیم شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی از شکل انتگرالی معادلات دیورژانس و شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی از شکل انتگرالی معادلات کرل نتیجه‌گیری شدند. بنابراین در حل مسائل الکترومغناطیس استفاده از شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی کفایت می‌کند.

نکته دوم آنکه اگر یکی از نواحی مثلاً ناحیه ۲ هادی کامل باشد، کلیه میدانها در آن صفر می‌باشند. زیرا در اجسام هادی کامل، میدان الکتریکی اعم از ساکن یا متغیر با زمان همواره صفر است و با صفر بودن \mathbf{E} از رابطه ۲۶-۷ الف می‌توان نتیجه گرفت که \mathbf{B} نیز باید صفر باشد. به طور خلاصه در اجسام هادی کامل داریم:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathbf{H} = \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (۴۳-۷)$$

آنگاه شرایط مرزی ۷-۳۹ تا ۷-۴۲ برای وقتی که ناحیه ۲ هادی کامل و ناحیه ۱ عایق باشد به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$E_{t1} = 0 \quad (۴۴-۷)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_S \quad (۴۵-۷)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_n \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_S \quad (۴۶-۷)$$

$$B_{n1} = 0 \quad (۴۷-۷)$$

یک تفاوت قابل توجه بین میدانهای ساکن و متغیر با زمان در اجسام هادی این است که، برخلاف میدان الکتریکی که چه ساکن و چه متغیر با زمان همواره در یک محیط هادی صفر است، میدان مغناطیسی اگر متغیر با زمان باشد در جسم هادی صفر است ولی اگر ساکن باشد می‌تواند مقادیر غیر صفر را دارا باشد. زیرا، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن مستقل از یکدیگرند و صفر بودن میدان الکتریکی منجر به صفر شدن میدان مغناطیسی نمی‌شود. بنابراین، در روابط ۷-۳۹ تا ۷-۴۲ اگر میدانها ساکن باشند و ناحیه ۲ هادی کامل و ناحیه ۱ عایق فرض شود، کافی است فقط $\mathbf{E}_2 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{0}$ را به کار برد.

در صورتی که نواحی ۱ و ۲ دارای رسانایی‌های محدود و غیر صفر σ_1 و σ_2 باشند، در آنها جریانهای الکتریکی با چگالیهای $\mathbf{J}_1 = \sigma_1 \mathbf{E}_1$ و $\mathbf{J}_2 = \sigma_2 \mathbf{E}_2$ پدید می‌آیند. شرط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی جریانها را می‌توان با استفاده از رابطه ۷-۳۰-۵، که در آن سطح بسته S همانند سطح استوانه‌ای در شکل ۷-۶ باشد، به دست آورد. نتیجه عبارت است از:

$$\hat{\mathbf{a}}_n \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = -\nabla_t \cdot \mathbf{J}_S - \frac{\partial \rho_S}{\partial t} \quad (۴۸-۷)$$

که ∇_t دیورژانس در صفحه مماس بر سطح مرزی را بیان می‌کند. اگر رسانایی هر دو ناحیه محدود باشد، یعنی هیچ‌کدام از نواحی هادی کامل نباشند، جریان سطحی در مرز به وجود نخواهد آمد و $\mathbf{J}_S = \mathbf{0}$ است. آنگاه:

$$\hat{\mathbf{a}}_n \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} \quad (۴۹-۷)$$

در صورتی که یکی از نواحی هادی کامل بوده و ناحیه دیگر دارای رسانایی محدود باشد، مثلاً $\sigma_2 = \infty$ و $\sigma_1 \neq \infty$ ، جریان $\mathbf{J}_2 = \mathbf{0}$ و جریان سطحی با چگالی \mathbf{J}_S در مرز تشکیل می‌شود. آنگاه:

$$\hat{\mathbf{a}}_n \cdot \mathbf{J}_1 = -\nabla_t \cdot \mathbf{J}_S - \frac{\partial \rho_S}{\partial t} \quad (۵۰-۷)$$

بالاخره در صورتی که یکی از نواحی عایق کامل (مثلاً $\sigma_v = 0$) و دیگری دارای رسانایی محدود باشد، داریم:

$$\hat{a}_n \cdot \mathbf{J}_1 = 0 \quad (51-7)$$

شرط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی جریانه‌ها را می‌توان با استفاده از شرط مرزی برای مؤلفه‌های مماسی میدان الکتریکی \mathbf{E} به صورت زیر نوشت:

$$\hat{a}_n \times \left(\frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1} - \frac{\mathbf{J}_2}{\sigma_2} \right) = 0 \quad (52-7)$$

بدیهی است که شرط مرزی برای مؤلفه‌های عمودی میدان \mathbf{D} ، رابطه دیگری به دست می‌دهد که از آن و رابطه ۴۹-۷ می‌توان ρ_s را محاسبه کرد.

پاسخهای میدانهای الکترومغناطیس را باید از حل همزمان معادلات ماکسول به دست آورد. این پاسخها باید کلیه شرایط مرزی را نیز برآورده سازند. با معلوم بودن منابع \mathbf{J} و ρ (که توسط رابطه پیوستگی به یکدیگر مربوطند)، چهار بردار \mathbf{E} ، \mathbf{D} ، \mathbf{H} و \mathbf{B} مجهولات مسئله را تشکیل می‌دهند. با توجه به اینکه هر بردار دارای سه مؤلفه است، در حالت کلی مسئله دارای دوازده مجهول است. پس به چهار معادله برداری که معادل با دوازده معادله نرده‌ای است نیاز می‌باشد. هر کدام از معادلات کرل ماکسول به سه معادله نرده‌ای تجزیه می‌شود. بنابراین، دو معادله کرل ماکسول شش معادله نرده‌ای را به وجود می‌آورند. هر کدام از معادلات دیورژانس ماکسول به منزله یک معادله نرده‌ای است، ولی چون این معادلات از معادلات کرل مستقل نیستند به حساب آورده نخواهند شد. شش معادله مورد نیاز دیگر از روابط:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (53-7)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (54-7)$$

به دست می‌آیند. به این ترتیب تعداد معادلات مساوی تعداد مجهولات بوده و امکان حل مسئله به روش تحلیلی یا عددی موجود می‌باشد. در ادامه پاسخ کلی معادلات ماکسول را با استفاده از توابع پتانسیل به دست می‌آوریم.

۷-۵ توابع پتانسیل و پاسخ آنها

مفهوم پتانسیل مغناطیسی برداری \mathbf{A} ، که در قسمت ۵-۶ ارائه کردیم، بر اساس سیملوله‌ای بودن میدان مغناطیسی \mathbf{B} استوار بوده و چون برای میدان مغناطیسی متغیر با زمان، همانند میدان مغناطیسی ساکن، معادله $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ صادق است، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (55-7)$$

با استفاده نمودن از رابطه ۷-۵۵ در رابطه ۷-۲۶-الف، داریم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

یا:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (56-7)$$

از آنجا که معادله $\nabla \times \nabla V = 0$ همواره برای تابع دلخواه V صادق است، می توان از رابطه ۷-۵۶ نتیجه گرفت که:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

یا:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (57-7)$$

در صورت عدم تغییرات نسبت به زمان $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ بوده و رابطه ۷-۵۷ به $\mathbf{E} = -\nabla V$ ، که همان رابطه بین میدان الکتریکی ساکن و پتانسیل است، ساده می شود.

حال با جایگزین نمودن $\mathbf{H} = \nabla \times (\mathbf{A} / \mu)$ و $\mathbf{D} = -\varepsilon (\nabla V + \partial \mathbf{A} / \partial t)$ در رابطه ۷-۲۶ ب، داریم:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (58-7)$$

با استفاده از اتحاد $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})$ در رابطه ۷-۵۸، می توان نوشت:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (59-7)$$

می دانیم یک بردار وقتی به طور کامل مشخص می شود که کرل و دیورژانس آن هر دو معلوم باشند. کرل بردار \mathbf{A} را در رابطه ۷-۵۵ تعیین کرده ایم و در انتخاب دیورژانس آن می توانیم هر تصمیم مقتضی را اتخاذ کنیم. به منظور ساده کردن رابطه ۷-۵۹ و حذف وابستگی آن به تابع V ، دیورژانس \mathbf{A} را به صورت زیر فرض می کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (60-7)$$

آنگاه، رابطه ۷-۵۹ به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (61-7)$$

رابطه ۷-۶۰ موسوم به شرط لورنتز^۱ می باشد و برای میدانهای ساکن به $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ساده می شود که در قسمت ۵-۶ نیز نشان داده شده است.

برای به دست آوردن معادله حاکم بر تابع V رابطه ۷-۵۷ را در رابطه ۷-۲۶ ج به کار برده و از $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ استفاده می کنیم:

$$-\nabla \cdot \left[\varepsilon \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] = \rho \quad (62-7)$$

در صورتی که ε مقدار ثابتی باشد، از رابطه ۷-۶۲ نتیجه می گیریم که:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

و با استفاده از شرط لورنتز، سرانجام داریم:

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (63-7)$$

روابط ۶۱-۷ و ۶۳-۷ را معادلات موج غیرهمگن برای پتانسیل برداری A و پتانسیل نرده‌ای V می‌نامند. در صورتی که تغییرات نسبت به زمان وجود نداشته باشد، این روابط به معادلات پواسون که در روابط ۱-۴ و ۷۵-۵ داده شده‌اند، ساده می‌شوند.

پاسخ معادلات ۶۱-۷ و ۶۳-۷ برای حالت ساکن رادر حقیقت می‌توان روابط ۲-۹۳ و ۵-۶۰ دانست که دوباره در زیر نوشته می‌شوند:

$$V(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (64-7)$$

$$A(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (65-7)$$

بدیهی است که برای حالت غیرساکن نتایج مزبور باید تغییر پیدا کنند، اما چگونه؟ برای یافتن پاسخ معادلات ۶۱-۷ و ۶۳-۷ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. ابتدا عنصر بار $\rho(t)\Delta V'$ را به منزله یک بار نقطه‌ای متغیر با زمان در مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم و پتانسیل نرده‌ای حاصل از آن را به دست می‌آوریم. به دلیل تقارن کروی این بار، پتانسیل V تابعی از θ و φ نخواهد بود و فقط می‌تواند تابعی از r و t باشد. آنگاه معادله ۶۳-۷ برای تمام نقاط فضا به جز مبدأ مختصات، که بار نقطه‌ای حضور دارد، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad r > 0 \quad (66-7)$$

با به کار بردن تابع V_1 ، به طوری که $V_1 = rV$ باشد، معادله ۶۶-۷ بر حسب V_1 عبارت می‌شود از:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = 0, \quad r > 0 \quad (67-7)$$

پاسخ معادله ۶۷-۷ به صورت $V_1(r,t) = f(t-r\sqrt{\mu\epsilon}) + g(t+r\sqrt{\mu\epsilon})$ می‌باشد که f و g توابعی دلخواهند مشروط بر اینکه مشتقات مرتبه اول و دوم آنها نسبت به t و r موجود باشند. این را می‌توان با جایگزینی مستقیم در معادله ۶۷-۷ به سادگی تحقیق کرد. تابع $g(t+r\sqrt{\mu\epsilon})$ به طوری که بعداً خواهیم دید بیانگر یک پاسخ فیزیکی مفید نخواهد بود، پس:

$$V(r,t) = \frac{1}{r} V_1(r,t) = \frac{1}{r} f(t-r\sqrt{\mu\epsilon}) \quad (68-7)$$

برای مشخص نمودن تابع f این‌طور استدلال می‌کنیم که اگر بار نقطه‌ای $\rho(t)\Delta V'$ ساکن فرض می‌شد، پتانسیل حاصل از آن برابر بود با:

$$V = \frac{\rho(t) \Delta V'}{4\pi\epsilon r} \quad (۶۹-۷)$$

مقایسه روابط ۶۸-۷ و ۶۹-۷ ما را به رابطه زیر برای تابع f رهنمون می‌سازد:

$$f(t-r\sqrt{\mu\epsilon}) = \frac{\rho(t-r\sqrt{\mu\epsilon}) \Delta V'}{4\pi\epsilon} \quad (۷۰-۷)$$

آنگاه:

$$V(r,t) = \frac{\rho(t-r\sqrt{\mu\epsilon}) \Delta V'}{4\pi\epsilon r} \quad (۷۱-۷)$$

اگر بار $\rho(t) \Delta V'$ در نقطه دلخواه $P(r')$ واقع باشد، پتانسیل حاصل از آن را می‌توان با جایگزین نمودن r با $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ در رابطه ۷۱-۷ به دست آورد:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mu\epsilon}) \Delta V'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۷۲-۷)$$

سرانجام برای یک توزیع بار در حجم V' پتانسیل حاصل را می‌توان با انتگرال گرفتن از عبارت سمت راست رابطه ۷۲-۷ به دست آورد:

$$V(\mathbf{r},t) = \int_{V'} \frac{\rho(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mu\epsilon})}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (۷۳-۷)$$

مقایسه روابط ۶۴-۷ و ۷۳-۷ چگونگی تغییر تابع پتانسیل نرده‌ای از حالت ساکن به حالت متغیر با زمان را روشن می‌سازد. رابطه ۷۳-۷ نشان می‌دهد که پتانسیل ناشی از بار الکتریکی با چگالی ρ در نقطه‌ای به فاصله $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ از آن بار و در لحظه t به مقدار چگالی بار در لحظه $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mu\epsilon}$ بستگی دارد. به عبارت دیگر، اثر $\rho(r')$ پس از گذشت زمان $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mu\epsilon}$ احساس می‌شود. از این رو، در رابطه ۷۳-۷ را پتانسیل «تأخیر یافته» می‌نامند. اکنون روشن می‌شود که چرا تابع $V(\mathbf{r},t)$ بیانگر یک پتانسیل فیزیکی نیست، زیرا اثر بار در فواصل دور از آن نمی‌تواند زودتر از اثر در محل خود بار حس شود.

به صورت مشابهی می‌توان نشان داد که پاسخ معادله ۶۱-۷ عبارت است از:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int_{V'} \frac{\mu \mathbf{J}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mu\epsilon})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (۷۴-۷)$$

با داشتن V و \mathbf{A} میدانهای \mathbf{B} و \mathbf{E} را می‌توان از روابط ۵۵-۷ و ۵۷-۷ به دست آورد. پاسخ \mathbf{A} به تنهایی نیز کفایت می‌کند، زیرا پس از یافتن \mathbf{B} ، میدان \mathbf{E} را می‌توان از رابطه ۲۶-۷-ب به دست آورد.

۶-۷ میدانهای شبه ساکن

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم معادلات ماکسول قادر به تشریح کلیه پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی از فرکانس صفر تا بالاترین فرکانسهای موجود هستند. ولی این معادلات از نوع دیفرانسیل پاره‌ای و شامل

کمیت‌های مختلفی می‌باشند و حل آنها در همه موارد از سادگی و آسانی چندانی برخوردار نیست. معادلات ماکسول برای میدانهای ساکن به مراتب ساده‌تر بوده و به خصوص شکل انتگرالی آنها در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی بسیار مفید واقع می‌شود. به عنوان مثال رابطه $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ بیان می‌کند که مجموع اختلاف پتانسیلها حول یک مسیر بسته برابر صفر است و این چیزی جز بیان قانون KVL نیست. همچنین، از رابطه پیوستگی برای جریانهای ساکن نتیجه $\oint_C \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$ حاصل می‌شود و بیان می‌کند که مجموع جبری جریانهای وارد شده به یک سطح بسته (یا یک گره در اصطلاح مدارهای الکتریکی) برابر صفر است. این نتیجه نیز همان بیان قانون KCL است. همچنین تعاریف مقاومت، خازن و خودالقا را بر حسب میدانهای ساکن انجام دادیم. گرچه اساس تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی بر میدانهای ساکن استوار است، قوانین KVL و KCL را در تجزیه و تحلیل مدارهایی که شامل منابع متغیر با زمان هستند نیز به کار می‌بریم. این قوانین، به معنای دقیق کلمه، فقط برای جریانها و ولتاژهای ثابت، که تغییراتی نسبت به زمان نداشته باشند، معتبرند. پس طبعاً می‌توان چنین نتیجه گرفت که قوانین حاکم بر مدارهای الکتریکی در حالتی که منابع ولتاژ و جریان متغیر با زمان هستند باید از نوعی تقریب برخوردار باشند و بلافاصله این سؤال به ذهن می‌آید که ماهیت این تقریب چیست و اندازه آن چقدر است؟

واقعیت این است که اگر تغییرات میدانها نسبت به زمان «کند» باشد، عملاً قوانین میدانهای ساکن با تقریب بسیار خوب برقرارند. به عنوان مثال اگر از سیم پیچ یک خودالقا، جریانی سینوسی با فرکانس ω عبور نماید، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان هر دو ایجاد می‌شوند. لیکن اگر ابعاد هندسی سیم پیچ از طول موج λ ، که از رابطه $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\mu\epsilon}$ به دست می‌آید، بسیار کوچک تر باشد (مترادف با تغییرات زمانی کند یا فرکانس پایین) سهم جریان جابه جایی $\partial \mathbf{D} / \partial t$ در تولید میدان مغناطیسی در درون سیم پیچ به مراتب از سهم جریان سیم پیچ کمتر بوده و گویی که میدان مغناطیسی همانند حالت ساکن فقط از جریان خود سیم پیچ ایجاد شده است. به عبارت دیگر، میدان \mathbf{H} از طرفی متغیر با زمان و مثلاً در اینجا سینوسی است و از طرف دیگر رابطه $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ، که به گونه دقیق فقط برای میدان مغناطیسی ساکن صادق می‌باشد، با تقریب بسیار خوبی برقرار است. میدانهایی که متغیر با زمان بوده و با تقریب خوبی در روابط میدانهای ساکن صدق کنند را میدانهای شبه ساکن می‌نامند. اساس تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی با منابع متغیر با زمان بر تقریب میدانهای شبه ساکن استوار است. در موارد عملی گاهی این تقریب را تا فرکانسهای حدود صد مگاهرتز و حتی چندین برابر آن نیز به کار می‌برند. بدیهی است که هر چه فرکانس بالاتر باشد این تقریب از دقت کمتری برخوردار است. در فرکانسهای بالا شامل امواج مایکروویو، امواج میلیمتری و نور تقریب میدانهای شبه ساکن به کلی از اعتبار ساقط می‌شود. از این رو، ادوات مربوط به فرکانسهای بالا را نمی‌توان به روش مداری بررسی کرد و باید آنها را به روش میدانی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. یک مورد مهم دیگر که مستلزم استفاده از روش میدانی است مربوط به تشعشع امواج الکترومغناطیس و آنتنهای آنهاست. محاسبه میدانهای شبه ساکن را می‌توان عیناً مطابق روش محاسبه میدانهای ساکن انجام داد. اگر محاسبه

میدانها را با استفاده از توابع پتانسیل انجام دهیم، روابط ۷-۶۴ و ۷-۶۵ را با چگالیهای متغیر با زمان $\rho = \rho(\mathbf{r}', t)$ و $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ به کار می‌بریم. در این صورت، پتانسیلها دیگر تأخیر یافته نیستند و اثرات میدانی به طور آنی از محل منابع به فواصل دور از آنها انتقال می‌یابند. محاسبه میدانهای شبه ساکن را می‌توان با استفاده از روشهای دیگر، مانند روش قانون گوس برای میدان الکتریکی و روش قانون مداری آمپر برای میدان مغناطیسی، در صورت سودمند بودن این روشها برای مسائل مورد نظر، نیز انجام داد.

۷-۷ میدانهای متغیر با زمان سینوسی

در بسیاری از موارد عملی، منابع، جریانها و ولتاژهایی تولید می‌کنند که تغییراتشان نسبت به زمان سینوسی است. در نتیجه میدانهای الکترومغناطیس حاصل از چنین منابعی نیز تغییراتی سینوسی نسبت به زمان دارند. به علاوه، میدانهایی که تابعیت زمانی آنها در حالت کلی غیر سینوسی باشد را می‌توان به صورت مجموعی از میدانهای سینوسی با فرکانسهای مختلف بیان کرد. این کار را می‌توان با استفاده از سری فوریه برای میدانهای متناوب غیر سینوسی یا انتگرال فوریه در حالت کلی انجام داد. بنابراین مطالعه میدانهایی که تغییرات زمانی آنها سینوسی باشند دارای اهمیت اساسی است. مطالعه میدانهای با تغییرات زمانی سینوسی را می‌توان با استفاده از کمیتهای فازوری با سادگی بیشتری انجام داد. فرض کنید تغییرات میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ به صورت زیر بیان شود:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi) \quad (۷۵-۷)$$

آنگاه می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) e^{j\omega t + \varphi}] = \text{Re}[\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad (۷۶-۷)$$

در رابطه ۷-۷۶، $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$ را فازور $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ می‌نامند. یک کمیت فازوری در حالت کلی مختلط و فقط تابعی از مکان می‌باشد. در حقیقت هدف از به کار بردن کمیتهای فازوری حذف متغیر زمان از معادلات می‌باشد. برای سایر کمیتهای به کار رفته در معادلات ماکسول، اعم از برداری یا نرده‌ای، می‌توان کمیتهای فازوری مربوطه را، مطابق آنچه که برای میدان \mathbf{E} انجام شد، تعریف کرد. برای به دست آوردن معادلات ماکسول بر حسب کمیتهای فازوری، ابتدا یکی از این معادلات، مثلاً معادله ۷-۲۶ الف، را به شرح زیر بر حسب کمیتهای فازوری می‌نویسیم:

$$\nabla \times [\text{Re}(\mathbf{E}_p e^{j\omega t})] = -\frac{\partial}{\partial t} [\text{Re}(\mathbf{B}_p e^{j\omega t})] \quad (۷۷-۷)$$

با جابه‌جایی ترتیب عملیات گرفتن کرل و گرفتن قسمت حقیقی در سمت چپ رابطه ۷-۷۷ و همچنین با جابه‌جایی ترتیب گرفتن مشتق نسبت به زمان و گرفتن قسمت حقیقی در سمت راست این رابطه، داریم:

$$\text{Re}[\nabla \times (\mathbf{E}_p e^{j\omega t})] = -\text{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_p e^{j\omega t})\right]$$

و:

$$\text{Re}[e^{j\omega t} (\nabla \times \mathbf{E}_p)] = -\text{Re}[j\omega \mathbf{B}_p e^{j\omega t}]$$

یا:

$$\operatorname{Re}[(\nabla \times \mathbf{E}_p + j\omega \mathbf{B}_p) e^{j\omega t}] = 0 \quad (7-78)$$

چون رابطه ۷-۷۸ باید به ازای جمیع مقادیر t صادق باشد، لازم است که عبارت درون پرانتز صفر باشد. آنگاه:

$$\nabla \times \mathbf{E}_p = -j\omega \mathbf{B}_p \quad (7-79 \text{ الف})$$

رابطه ۷-۷۹ الف شکل فازوری رابطه ۷-۲۶ الف نامیده می شود. مقایسه این دو رابطه نشان می دهد که اگر هر کمیت را با فازورش و $\partial/\partial t$ را با $j\omega$ جایگزین کنیم، معادله اصلی به معادله فازوری تبدیل می شود. به این ترتیب سایر معادلات ماکسول و رابطه پیوستگی در شکل فازوری به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\nabla \times \mathbf{H}_p = \mathbf{J}_p + j\omega \mathbf{D}_p \quad (7-79 \text{ ب})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_p = \rho_p \quad (7-79 \text{ ج})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_p = 0 \quad (7-79 \text{ د})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -j\omega \rho_p \quad (7-79 \text{ ه})$$

به سادگی می توان نشان داد که شرایط مرزی بر حسب کمیت های فازوری دقیقاً همان شکل ریاضی شرایط مرزی بر حسب کمیت های اصلی را دارند. همچنین، شکل انتگرالی معادلات ماکسول و سایر معادلات و روابط را می توان بر حسب کمیت های فازوری بیان داشت. کافی است $\partial/\partial t$ را با $j\omega$ ، $\partial^2/\partial t^2$ را با $-\omega^2$ و $(j\omega)^2$ و هر کمیت را با فازورش جایگزین کنیم. اغلب به دلیل استفاده مکرر از کمیت فازوری، اندیس p از علامت های به کار رفته حذف می شود. در ادامه بحث در این قسمت، ما نیز اندیس p را حذف می کنیم. معادلات موج برای توابع پتانسیل \mathbf{A} و \mathbf{V} در روابط ۷-۶۱ و ۷-۶۳ در شکل فازوری (پس از حذف اندیس p) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (7-80)$$

$$\nabla^2 \mathbf{V} + \beta^2 \mathbf{V} = -\rho/\epsilon \quad (7-81)$$

که $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ است. پاسخ های معادلات ۷-۸۰ و ۷-۸۱ را می توان از پاسخ های مربوط به تغییرات زمانی دلخواه که در روابط ۷-۷۳ و ۷-۷۴ داده شده اند به دست آورد. با توجه به اینکه برای تغییرات زمانی سینوسی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\sqrt{\mu\epsilon}) &= \operatorname{Re} \left[\rho(\mathbf{r}') e^{j\omega[t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\sqrt{\mu\epsilon}]} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\rho(\mathbf{r}') e^{-j\beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{j\omega t} \right] \end{aligned} \quad (7-82)$$

و به همین ترتیب:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mu\epsilon}) = \text{Re} \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-j\beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{j\omega t} \right] \quad (۸۳-۷)$$

بنابراین، پاسخهای معادلات ۷-۸۰ و ۷-۸۱ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-j\beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (۸۴-۷)$$

و:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{-j\beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (۸۵-۷)$$

سپس، میدانهای \mathbf{H} و \mathbf{E} از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{H} = (\nabla \times \mathbf{A}) / \mu \quad (۸۶-۷)$$

$$\mathbf{E} = (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}) / j\omega\epsilon = -\nabla V - j\omega\mathbf{A} \quad (۸۷-۷)$$

۸-۷ خلاصه فصل

در این فصل معادلات حاکم بر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان، ویژگیهای کلی این میدانها و رفتار عمومی آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. به طور خلاصه مهم‌ترین نکاتی که در این فصل آموختیم عبارتند از:

- بر اساس قانون تجربی فاراده، شار مغناطیسی متغیر با زمان تولید نیروی محرکه الکتریکی می‌کند. این نیروی محرکه مساوی منهای نمو شار نسبت به زمان می‌باشد ($\text{emf} = -d\Psi/dt$). علامت منفی در این رابطه به نام قانون لنز شناخته می‌شود و بیان‌کننده اصل بقای انرژی است.
- دو نوع نیروی محرکه، یکی از نوع ترانسفورماتوری و دیگری از نوع حرکتی می‌توان داشت.
- معادلات ماکسول را به عنوان کلی‌ترین روابط حاکم بر رفتار میدانهای الکترومغناطیس مورد بررسی قرار داده و آنها را در دو شکل نقطه‌ای و انتگرالی بیان کردیم.
- ملاحظه کردیم که میدان الکتریکی متغیر با زمان یک میدان غیرپایستار است و به منزله مولد میدان مغناطیسی محسوب می‌شود. همچنین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان، برخلاف میدانهای ساکن، از یکدیگر مستقل نیستند. یعنی، وابستگی متقابل و وجود همزمان آنها اجتناب‌ناپذیر است.
- نشان دادیم که معادلات دیورژانس ماکسول از معادلات کرل آن و معادله پیوستگی مستقل نیستند.
- میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، اعم از ساکن یا متغیر با زمان، همواره یک میدان سیملوله‌ای است.
- میدان الکتریکی، چه ساکن و چه متغیر با زمان، همواره در اجسام هادی کامل صفر است. میدانهای مغناطیسی نیز اگر متغیر با زمان باشند در هادیهای کامل صفرند، ولی اگر ساکن باشند می‌توانند در اجسام هادی مقادیر غیر از صفر داشته باشند.

- شرایط مرزی بین دو ناحیه را مطالعه کردیم. این شرایط برای دو ناحیه عایق همان شکل میدانهای ساکن را دارا هستند.
- توابع پتانسیل برداری و نرده‌ای متغیر با زمان را تعریف کردیم و معادلات حاکم بر آنها و پاسخ این معادلات را به صورت روابط انتگرالی به دست آوردیم. ملاحظه کردیم که، به دلیل وجود تغییرات نسبت به زمان، اثرات میدانی نه به طور آنی بلکه پس از گذشت زمانی برابر با $\sqrt{\mu\epsilon}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ از نقطه‌ای با بردار مکان \mathbf{r}' به نقطه‌ای با بردار مکان \mathbf{r} انتقال پیدا می‌کنند.
- میدانهای شبه ساکن را به اختصار مورد بحث قرار دادیم. این میدانها از طرفی متغیر با زمانند و از طرف دیگر روابط میدانهای ساکن را با تقریب خوبی برآورده می‌سازند. کاربرد این میدانها وقتی مجاز است که ابعاد هندسی مورد نظر از طول موج بسیار کوچک تر باشند. مطالعه مدارهای الکتریکی با منابع ولتاژ و جریان متغیر با زمان، با استفاده از روابط KVL و KCL بر اساس میدانهای شبه ساکن استوار می‌باشد.
- میدانهای متغیر با زمان سینوسی را مورد بررسی قرار داده و آنها را بر حسب کمیت‌های فازوری بیان کردیم. دیدیم که برای به دست آوردن شکل فازوری روابط، کافی است $\partial/\partial t$ را با $j\omega$ و هر کمیت را با فازورش جایگزین کنیم.

۷-۹ مسائل خودآزمایی

این مسائل را می‌توان به دو گروه دسته بندی نمود. گروه اول شامل مسائلی است که به کاربرد قانون فاراده مربوط می‌شود و در آنها هدف محاسبه نیروی محرکه الکتریکی القا شده در یک مدار یا جریان ناشی از آن است که از تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از مدار نسبت به زمان پدید می‌آید. در این مسائل فقط میدان مغناطیسی مستقیماً در محاسبات دخالت دارد. گروه دوم مسائل به بررسی جوانب مختلف میدانهای متغیر با زمان بر اساس معادلات ماکسول و شرایط مرزی اختصاص دارد و محاسبات شامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هر دو می‌باشد.

برای محاسبه نیروی محرکه الکتریکی می‌توان به دو روش عمل نمود: (i) نیروهای محرکه ترانسفورماتوری و حرکتی را جداگانه به دست آورده و سپس با جمع جبری آنها نیروی محرکه کل را تعیین کنیم؛ رابطه ۷-۶. (ii) شار مغناطیسی گذرنده از مدار را در لحظه t یک جا به دست آورده و سپس از آن نسبت به زمان مشتق می‌گیریم؛ رابطه ۷-۱. معمولاً تفاوت چندانی از نظر سادگی و میزان محاسبات بین دو روش وجود ندارد. در صورتی که تغییرات زمانی شار مغناطیسی گذرنده از یک مدار فقط ناشی از تغییرات میدان مغناطیسی نسبت به زمان باشد و هیچ جزء مدار حرکتی نداشته باشد، فقط نیروی محرکه ترانسفورماتوری وجود دارد و دو روش مزبور یکسان هستند.

میدانهای متغیر با زمان و معادلات ماکسول طیف بسیار وسیعی از موضوعات الکترومغناطیس، از جمله انتشار امواج، آنتن‌ها، موجبرها و ادوات مایکروویو، و موجبرهای نوری را دربر می‌گیرند که هر