

- شرایط مرزی بین دو ناحیه را مطالعه کردیم. این شرایط برای دو ناحیه عایق همان شکل میدانهای ساکن را دارا هستند.
- توابع پتانسیل برداری و نرده‌ای متغیر با زمان را تعریف کردیم و معادلات حاکم بر آنها و پاسخ این معادلات را به صورت روابط انتگرالی به دست آوردیم. ملاحظه کردیم که، به دلیل وجود تغییرات نسبت به زمان، اثرات میدانی نه به طور آنی بلکه پس از گذشت زمانی برابر با $\sqrt{\mu\epsilon}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ از نقطه‌ای با بردار مکان \mathbf{r}' به نقطه‌ای با بردار مکان \mathbf{r} انتقال پیدا می‌کنند.
- میدانهای شبه ساکن را به اختصار مورد بحث قرار دادیم. این میدانها از طرفی متغیر با زمانند و از طرف دیگر روابط میدانهای ساکن را با تقریب خوبی برآورده می‌سازند. کاربرد این میدانها وقتی مجاز است که ابعاد هندسی مورد نظر از طول موج بسیار کوچک تر باشند. مطالعه مدارهای الکتریکی با منابع ولتاژ و جریان متغیر با زمان، با استفاده از روابط KVL و KCL بر اساس میدانهای شبه ساکن استوار می‌باشد.
- میدانهای متغیر با زمان سینوسی را مورد بررسی قرار داده و آنها را بر حسب کمیت‌های فازوری بیان کردیم. دیدیم که برای به دست آوردن شکل فازوری روابط، کافی است $\partial/\partial t$ را با $j\omega$ و هر کمیت را با فازورش جایگزین کنیم.

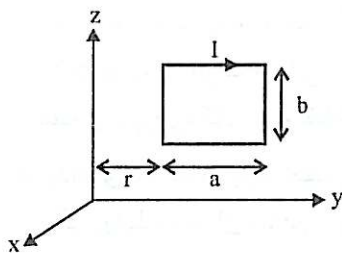
۷-۹ مسائل خودآزمایی

این مسائل را می‌توان به دو گروه دسته بندی نمود. گروه اول شامل مسائلی است که به کاربرد قانون فاراده مربوط می‌شود و در آنها هدف محاسبه نیروی محرکه الکتریکی القا شده در یک مدار یا جریان ناشی از آن است که از تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از مدار نسبت به زمان پدید می‌آید. در این مسائل فقط میدان مغناطیسی مستقیماً در محاسبات دخالت دارد. گروه دوم مسائل به بررسی جوانب مختلف میدانهای متغیر با زمان بر اساس معادلات ماکسول و شرایط مرزی اختصاص دارد و محاسبات شامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هر دو می‌باشد.

برای محاسبه نیروی محرکه الکتریکی می‌توان به دو روش عمل نمود: (i) نیروهای محرکه ترانسفورماتوری و حرکتی را جداگانه به دست آورده و سپس با جمع جبری آنها نیروی محرکه کل را تعیین کنیم؛ رابطه ۷-۶. (ii) شار مغناطیسی گذرنده از مدار را در لحظه t یک جا به دست آورده و سپس از آن نسبت به زمان مشتق می‌گیریم؛ رابطه ۷-۱. معمولاً تفاوت چندان از نظر سادگی و میزان محاسبات بین دو روش وجود ندارد. در صورتی که تغییرات زمانی شار مغناطیسی گذرنده از یک مدار فقط ناشی از تغییرات میدان مغناطیسی نسبت به زمان باشد و هیچ جزء مدار حرکتی نداشته باشد، فقط نیروی محرکه ترانسفورماتوری وجود دارد و دو روش مزبور یکسان هستند.

میدانهای متغیر با زمان و معادلات ماکسول طیف بسیار وسیعی از موضوعات الکترومغناطیس، از جمله انتشار امواج، آنتن‌ها، موجبرها و ادوات مایکروویو، و موجبرهای نوری را دربر می‌گیرند که هر

یک طی یک یا چند درس جداگانه مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. از این رو مسائل گروه دوم که به میدانهای متغیر با زمان اختصاص داده شده‌اند عمدتاً جهت کسب آشنایی‌های اولیه با این میدانها و تأکید بر خواص کلی آنها می‌باشند.

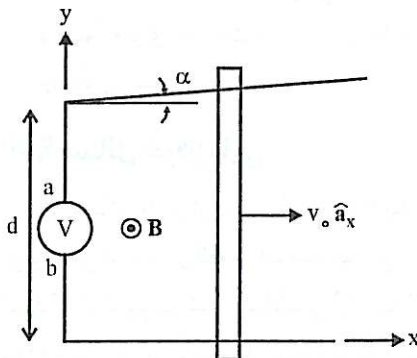


شکل ۷-۷

۱. میدان مغناطیسی ساکن $\mathbf{B} = (B_0/r)\hat{\mathbf{a}}_\rho$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای مفروض است. یک حلقه سیم مستطیلی شکل با مقاومت کل R ، که مطابق شکل ۷-۷ در صفحه yz واقع و اضلاع آن موازی محورهای y و z می‌باشند، با سرعت $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{a}}_y$ حرکت می‌کند. جریان I پدید آمده در حلقه را تعیین کنید. B_0 و v_0 مقادیر ثابتی هستند.

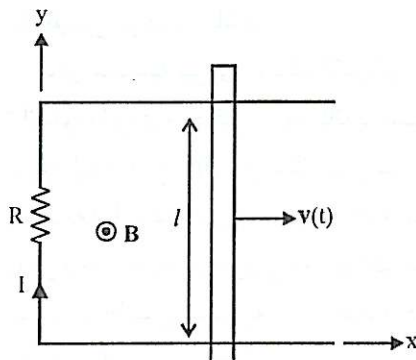
۲. مسئله ۱ را برای حالتی که میدان مغناطیسی \mathbf{B} متغیر با زمان و به صورت زیر باشد تکرار نمایید.

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{r} \cos \omega t \hat{\mathbf{a}}_\rho$$



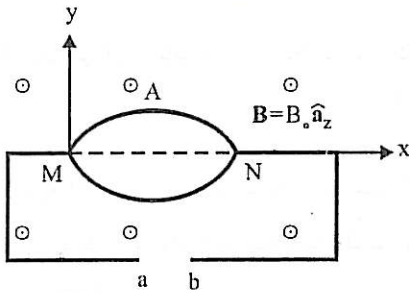
شکل ۸-۷

۳. یک میله فلزی روی دو ریل غیرموازی، که زاویه بین آنها α می‌باشد، با سرعت $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{a}}_x$ حرکت می‌کند. میله لغزنده دارای طول کافی بوده به طوری که اتصال آن با ریلها همواره برقرار می‌ماند. شکل ۸-۷ ریلها و میله را نشان می‌دهد. V_{ab} را برای میدان $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{a}}_z$ محاسبه نمایید. فرض کنید در لحظه $t=0$ میله در $x=0$ واقع است.



شکل ۹-۷

۴. شکل ۹-۷ سیستمی متشکل از یک میله فلزی که روی دو ریل موازی می‌لغزد را نشان می‌دهد. بین ریلها مقاومت R وصل می‌شود و از آنها میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{a}}_z$ عبور داده می‌شود. میله با سرعت اولیه v_0 در لحظه $t=0$ به حرکت درآورده می‌شود. در صورتی که جرم میله برابر m بوده و از مقاومت میله و ریلها صرف‌نظر شود، مطلوب است محاسبه:
الف) سرعت حرکت میله به صورت تابعی از زمان،
ب) جریان به وجود آمده در مقاومت R .

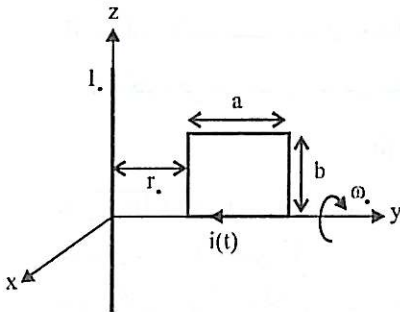


شکل ۷-۱۰

۵. یک قطعه سیم نازک از جنس هادی، مطابق شکل ۷-۱۰، بین دو نقطه ثابت M و N در میدان B به ارتعاش درآورده می‌شود. فرض کنید ارتعاشات پایدار بوده و معادله حرکت یک نقطه دلخواه سیم در امتداد عمودی از رابطه زیر به دست می‌آید:

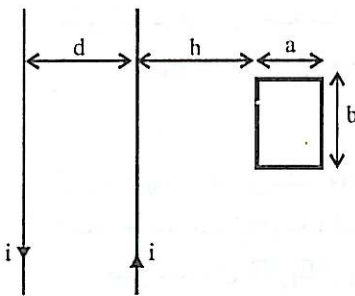
$$y(x,t) = y_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos \omega t$$

که y_0 (دامنه ارتعاشات)، d (فاصله بین نقاط M و N) و ω (فرکانس زاویه‌ای ارتعاشات) مقادیر ثابتی هستند. اختلاف پتانسیل به وجود آمده بین نقاط a و b را محاسبه نمایید. سیم ارتعاش کننده و سیمهای رابط را از جنس هادی کامل فرض کنید.



شکل ۷-۱۱

۶. یک رشته سیم نازک طویل در امتداد محور z حامل جریان ثابت I_0 می‌باشد. یک حلقه سیم مستطیلی شکل با مقاومت R ، مطابق شکل ۷-۱۱، حول محور y با سرعت زاویه‌ای ω به چرخش درآورده می‌شود. جریان ایجاد شده در حلقه، $i(t)$ ، را محاسبه کنید.



شکل ۷-۱۲

۷. یک خط انتقال برق، متشکل از دو سیم موازی به فاصله d از یکدیگر، حامل جریان $i(t) = I_0 \cos \omega t$ می‌باشد. یک حلقه سیم مستطیلی شکل با مقاومت R ، مطابق شکل ۷-۱۲، در کنار این خط انتقال قرار داده می‌شود. حلقه در صفحه خطوط انتقال فرض می‌شود. جریان القا شده در حلقه را محاسبه نمایید. میدان مغناطیسی خطوط انتقال را شبه ساکن فرض کنید.

۸. مسئله ۷ را برای یک خط انتقال سه‌فاز تکرار کنید. فرض کنید خطوط انتقال در یک صفحه واقع بوده و فاصله خطوط کناری از خط میانی برابر d باشد. جریان خطوط را به صورت زیر در نظر بگیرید و از تقریب میدانهای شبه ساکن برای محاسبه میدان مغناطیسی خطوط جریانی استفاده کنید.

$$i_1 = I_0 \cos \omega t \quad , \quad i_2 = I_0 \cos(\omega t + 120^\circ) \quad , \quad i_3 = I_0 \cos(\omega t + 240^\circ)$$

۹. یک میدان مغناطیسی در خلأ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به صورت زیر داده شده است:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} H_0 \sin \omega t \hat{\mathbf{a}}_z & r < a \\ \mathbf{0} & r > a \end{cases}$$

میدان الکتریکی \mathbf{E} وابسته به این میدان مغناطیسی را محاسبه نمایید.

۱۰. مسئله ۹ را برای میدانهای مغناطیسی زیر در خلأ تکرار کنید.

(الف) (ب)

$$\mathbf{H} = \begin{cases} H_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \sin \omega t \hat{\mathbf{a}}_z & r < a \\ \mathbf{0} & r > a \end{cases} \quad \mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{0} & r < a \\ H_0 \sin \omega t \hat{\mathbf{a}}_z & a < r < b \\ \mathbf{0} & r > b \end{cases}$$

۱۱. میدان الکتریکی در محیطی با $\mu = \mu_0$ و $\sigma = 0$ برابر با $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_x$ است که E_0 مقداری ثابت است. میدان مغناطیسی \mathbf{H} و قابلیت گذردهی محیط (ϵ) را محاسبه نمایید.

۱۲. میدان الکتریکی در فضای بین دو صفحه هادی، واقع در $x=0$ و $x=d$ ، عبارت است از:

$$\mathbf{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{c\pi t}{d}\right) \hat{\mathbf{a}}_z$$

که $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ است. فضای بین صفحات خلأ می‌باشد. مطلوب است محاسبه:

(الف) میدان مغناطیسی \mathbf{H} ،

(ب) چگالی جریان سطحی روی صفحات هادی.

۱۳. ناحیه $z < 0$ خلأ و ناحیه $z > 0$ با عایق کاملی با قابلیت گذردهی $\epsilon = 9\epsilon_0$ اشغال شده است. میدانهای الکتریکی در این دو ناحیه عبارتند از:

$$\mathbf{E}_1 = [E_i \cos(\omega t - \beta z) + E_r \cos(\omega t + \beta z)] \hat{\mathbf{a}}_x, \quad z < 0$$

$$\mathbf{E}_2 = E_t \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{a}}_x, \quad z > 0$$

که $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ می‌باشد. مطلوب است:

(الف) محاسبه میدانهای مغناطیسی \mathbf{H}_1 و \mathbf{H}_2 وابسته به میدانهای الکتریکی \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 ،

(ب) تعیین نسبتهای E_t/E_i و E_r/E_i .

۱۴. میدان الکتریکی در فضای محصور بین سطوح هادی $r=a$ ، $r=b$ ، $z=0$ و $z=d$ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، عبارت است از:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{r} \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) \cos \omega t \hat{\mathbf{a}}_r$$

که E_0 مقداری ثابت است. فضای استوانه‌ای شکل خلأ فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه:

(الف) میدان مغناطیسی \mathbf{H} وابسته به میدان الکتریکی \mathbf{E} ، (ب) فرکانس زاویه‌ای ω ،

(ج) چگالی توزیع بار الکتریکی روی سطوح $r=a$ و $r=b$ ($0 < z < d$)،

(د) چگالی توزیع جریان سطحی روی کلیه سطوح هادی فضای استوانه‌ای شکل.

۱۵. نشان دهید که شرط لورنتز در رابطه ۷-۶، رابطه پیوستگی ۷-۲۶-۵ را بیان می‌کند.

۱۶. عنصر جریان $i(t) = I \Delta l \cos \omega t$ را در مبدأ مختصات و در امتداد محور z در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه ۷-۸۴ پتانسیل برداری A ناشی از این جریان را به دست آورید (توجه کنید که چون Δl بسیار کوچک است، $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$ می‌باشد. به علاوه چگالی حجمی این جریان را می‌توانید به صورت $\mathbf{J} = I \Delta l \delta(x') \delta(z') \delta(y') \hat{\mathbf{a}}_z$ بنویسید) و سپس میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} را محاسبه کنید.

۱۷. معادلات موج برای توابع پتانسیل برداری A و نردهای V را برای یک محیط غیرهمگن به دست آورید. شرط لورنتز را به صورت $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{A}) = -\mu \epsilon^2 \partial V / \partial t$ در نظر بگیرید.

۱۸. برای اجسام با رسانایی محدود $\sigma > 0$ می‌توان قابلیت گذردهی $\hat{\epsilon}$ را تعریف کرد، به طوری که $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ باشد.

الف) نشان دهید که $\hat{\epsilon} = \epsilon + (\sigma / j\omega)$ می‌باشد.

ب) اگر میدان $\hat{\mathbf{D}}$ را به صورت $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ تعریف کنیم. نشان دهید که شرط مرزی برای مؤلفه عمودی $\hat{\mathbf{D}}$ در مرز دو ناحیه به صورت $\hat{D}_{n1} - \hat{D}_{n2} = 0$ بیان می‌شود.

ج) با استفاده از نتیجه بند (ب) و استفاده از شرط مرزی $D_{n1} - D_{n2} = \rho_S$ نشان دهید که:

$$\rho_S = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1}{j\omega \hat{\epsilon}_2} E_{n1} = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \sigma_1}{j\omega \hat{\epsilon}_1} E_{n2}$$

۱۹. فازور میدان الکتریکی در محیطی که با پارامترهای μ ، ϵ و $\sigma > 0$ مشخص شده است عبارت است از:

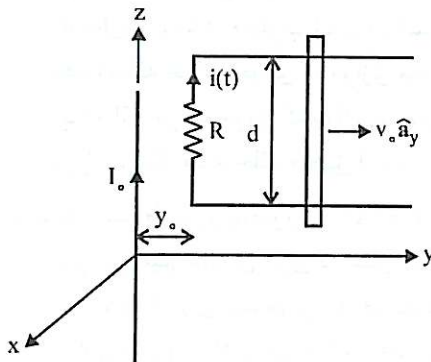
$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\gamma z} \hat{\mathbf{a}}_x$$

که $\gamma = \alpha + j\beta$ ضریب ثابتی است.

الف) میدان مغناطیسی \mathbf{H} و ضریب γ را محاسبه نمایید.

ب) در صورتی که $\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \ll 1$ باشد، مقادیر تقریبی α و β را بر حسب μ ، ϵ ، σ و ω محاسبه کنید.

۷-۱۰ مسائل



شکل ۷-۱۳

۱. یک رشته سیم طویل در امتداد محور z حامل جریان

ثابت I_0 می‌باشد. در مجاورت این سیم دو ریل

موازی محور y و به فاصله d از یکدیگر روی صفحه

yz قرار گرفته و یک میله فلزی با سرعت $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{a}}_y$

روی آنها می‌لغزد. بین ریلها مقاومت R ، مطابق

شکل ۷-۱۳، وصل شده و فرض می‌شود که میله

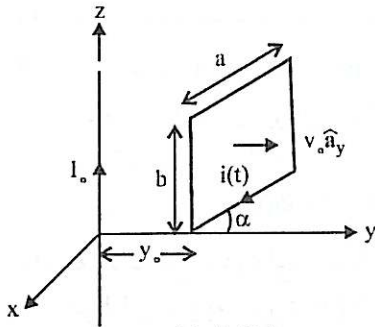
لغزنده در لحظه $t = 0$ در $y = y_0$ قرار دارد. مطلوب

است محاسبه جریان $i(t)$ برای $t > 0$ که از مقاومت

R می‌گذرد، در صورتی که:

الف) ریلها و میله لغزنده هادی کامل فرض شوند،

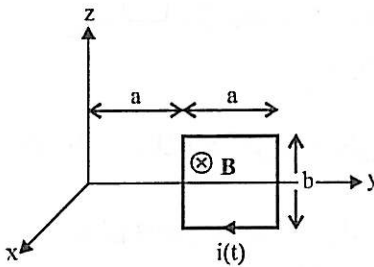
ب) ریلها مقاومتی به اندازه R_0 به ازای واحد طول داشته و مقاومت میله لغزنده ناچیز باشد.



شکل ۷-۱۴

۲. یک حلقه فلزی مستطیلی با مقاومت کل R و به اضلاع a و b به گونه‌ای قرار گرفته که، همان‌طور که در شکل ۷-۱۴ نشان داده شده است، با صفحه yz زاویه α ساخته در حالی که یک ضلع آن که موازی محور z است روی صفحه yz واقع است. این حلقه در میدان مغناطیسی سیمی که حامل جریان I_0 بوده و در امتداد محور z قرار دارد با سرعت $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{a}}_y$ به حرکت درآورده می‌شود. فرض می‌شود که در لحظه $t=0$ ضلعی از حلقه که روی yz قرار

دارد به فاصله y_0 از محور z باشد. جریان القا شده در حلقه، $i(t)$ ، را برای $t > 0$ به دست آورید. راهنمایی: برای محاسبه شار مغناطیسی گذرنده از حلقه، سطح بسته‌ای را که یک وجه آن حلقه و بقیه وجه آن موازی یا منطبق بر صفحات مختصات باشند در نظر بگیرید و از ویژگی سیمولوله‌ای بودن میدان \mathbf{B} استفاده کنید.



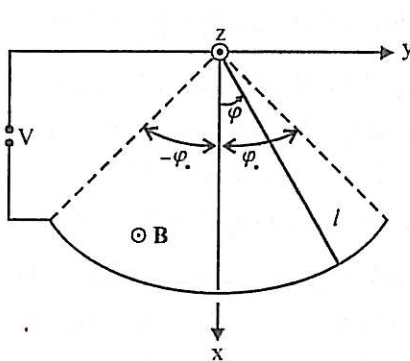
شکل ۷-۱۵

۳. یک حلقه مستطیلی شکل با مقاومت R و به اضلاع a و b مطابق شکل ۷-۱۵، موازی با صفحه yz در نظر بگیرید. در لحظه $t=0$ حلقه روی صفحه yz قرار دارد به گونه‌ای که مختصات مرکز آن $(0, 3a/2, 0)$ می‌باشد. این حلقه با سرعت \mathbf{v} در میدان $\mathbf{B} = (B_0/r) \hat{\mathbf{a}}_\phi$ ، که از یک سیم جریان منطبق بر محور z ناشی می‌شود، به حرکت درآورده می‌شود. مطلوب است محاسبه جریان القا شده در حلقه، $i(t)$ ، برای $t > 0$ ، در صورتی که:

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{a}}_x + v_y \hat{\mathbf{a}}_y + v_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{ج}) \quad \mathbf{v} = v_y \hat{\mathbf{a}}_y + v_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{ب}) \quad \mathbf{v} = v_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{الف})$$

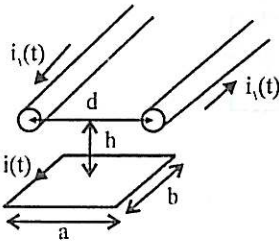
۴. در مسئله ۳، فرض کنید که حلقه مستطیلی به جای حرکت خطی دارای حرکتی دورانی با سرعت زاویه‌ای ω باشد. مطلوب است محاسبه جریان $i(t)$ برای وقتی که:
 الف) حلقه حول محوری که موازی محور z بوده و از مرکز حلقه، $(0, 3a/2, 0)$ ، می‌گذرد، بچرخد.
 ب) حلقه حول محوری که موازی محور z و از نقطه $(0, 2a, 0)$ می‌گذرد، بچرخد. در این حالت محور دوران بر یک ضلع حلقه منطبق است.

۵. یک سیم طویل را به صورت $y = |x|$ شکل داده و در معرض میدان مغناطیسی ثابت $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{a}}_z$ قرار می‌دهیم. میله‌ای فلزی که مقاومت آن به ازای واحد طول برابر R است با سرعت ثابت $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{a}}_y$ روی سیم مزبور به حرکت درآورده می‌شود، به گونه‌ای که همواره با سیم اتصال داشته و موازی محور x باشد. در لحظه $t=0$ میله روی محور x قرار دارد. همچنین از مقاومت سیم در مقایسه با مقاومت میله صرف‌نظر می‌شود مطلوب است محاسبه:
 الف) جریان پدید آمده در میله، ب) انرژی تلف شده در میله پس از یک ثانیه از شروع حرکت.



شکل ۷-۱۶

شکل ۷-۱۶ را محاسبه کنید.

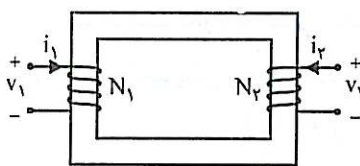


شکل ۷-۱۷

۷. یک خط انتقال هوایی، متشکل از دو سیم موازی به فاصله d از یکدیگر، حامل جریان $i_1(t) = I_1 \cos \omega t$ می باشد. در زیر این خط انتقال یک حلقه مستطیلی شکل با مقاومت R و اضلاع a و b موازی با صفحه سیمها قرار داده می شود، به طوری که حلقه و خط انتقال دارای صفحه منصف مشترکی بوده و فاصله صفحه سیمها از صفحه حلقه برابر با h باشد؛ شکل ۷-۱۷ خط انتقال و حلقه مستطیلی را نشان می دهد. جریان القا شده در حلقه را به دست

آورید. نتیجه را برای حالتی که حلقه روی صفحه سیمهای خط انتقال قرار گیرد خلاصه نمایید. از تقریب میدانهای شبه ساکن برای محاسبه میدان مغناطیسی خطوط جریان استفاده کنید.

۸. مسئله ۷ را برای وقتی که مرکز حلقه به فاصله c از صفحه منصف خط انتقال باشد تکرار کنید.



شکل ۷-۱۸

مقاومت سیم پیچها و تلفات هسته صرف نظر می شود. همچنین فرض می شود که میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانهای مزبور کاملاً در هسته محصور بوده و توزیعی یکنواخت در سطح مقطع آن دارند.

شکل ۷-۱۸ این ترانسفورماتور را نشان می دهد. تحقیق کنید که:

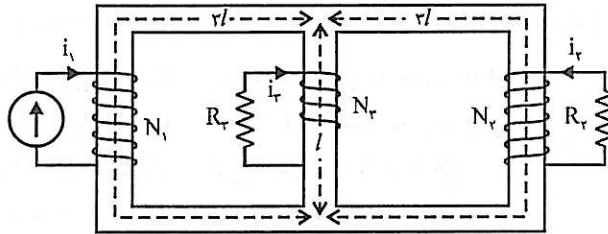
$$\text{الف) } v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \text{ و } v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \text{ که در آن}$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu S N_1 N_2}{l}, \quad L_{22} = \frac{\mu S N_2^2}{l}, \quad L_{11} = \frac{\mu S N_1^2}{l}$$

۶. میله‌ای هادی به طول l حول محور z و عمود بر آن همانند یک آونگ در دامنه زاویه‌ای $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ نوسان می‌کند. که φ ، همان‌طور که در شکل ۷-۱۶ نشان داده شده است، زاویه میله از محور x می‌باشد. انتهای میله روی یک ریل هادی که به شکل یک قوس دایره است می‌لغزد. سرعت زاویه‌ای میله نوسانی و به صورت $\omega = A \sin \omega_0 t$ فرض می‌شود که A یک ضریب ثابت می‌باشد. در لحظه $t=0$ میله در $\varphi = -\varphi_0$ قرار دارد. با استفاده از روابط

ب) رابطه $\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$ بین ولتاژهای اولیه و ثانویه برقرار است. تحت چه شرط ایده‌آلی رابطه $\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_1}{N_2}$ که معمولاً به عنوان یکی از روابط مهم ترانسفورماتور مورد استفاده قرار می‌گیرد، نیز برقرار خواهد بود؟ برای اینکه به ماهیت این رابطه پی برده شود، جریان $i_2(t)$ را برای وقتی که $N_1 = 100$ ، $N_2 = 200$ ، $\mu_r = 10^4$ ، $S = 5 \text{ cm}^2$ ، $l = 10 \text{ cm}$ ، $i_1(t) = 2 \cos(100\pi t) \text{ A}$ و مقاومت $R_s = 10 \Omega$ به ثانویه وصل شود محاسبه کنید.

۱۰. در مدار مغناطیسی شکل ۷-۱۹، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ را برای وقتی که $i_1(t) = \sin(1000t) \text{ A}$ ، $N_1 = N_2 = 200$ ، $N_3 = 100$ ، $\mu_r = 10^4$ ، $S = 20 \text{ cm}^2$ ، $l = 10 \text{ cm}$ ، $R_2 = R_3 = 2 \Omega$ محاسبه کنید. از تقریبهای معقول در محاسبات استفاده کنید.



شکل ۷-۱۹

۱۱) میدان الکتریکی در محیطی با قابلیت نفوذ $\mu = \mu_0$ و رسانایی $\sigma = 0$ برابر است با:

$$\mathbf{E} = 2 \cos(10^8 t - \frac{2}{3}z) \hat{\mathbf{a}}_x + 3 \sin(10^8 t - \frac{2}{3}z) \hat{\mathbf{a}}_y$$

مطلوب است محاسبه:

الف) میدان مغناطیسی وابسته به میدان الکتریکی مزبور،

ب) قابلیت گذردهی نسبی محیط، ϵ_r .

۱۲) میدان الکتریکی زیر در خلأ، که فاقد بار الکتریکی آزاد می‌باشد، وجود دارد.

$$\mathbf{E} = (5\hat{\mathbf{a}}_x - 2\hat{\mathbf{a}}_y + c_z \hat{\mathbf{a}}_z) \cos(\omega t - 2x - 3y + \sqrt{3}z)$$

که c_z مقدار ثابتی است. مطلوب است محاسبه:

الف) مقدار ثابت c_z ، ب) میدان مغناطیسی وابسته به میدان الکتریکی مزبور،

ج) فرکانس زاویه‌ای ω .

۱۳. ناحیه $x > 0$ هادی کامل و ناحیه $x < 0$ خلأ می‌باشد. میدان مغناطیسی در ناحیه خلأ عبارت است از:

$$\mathbf{H} = H_0 \cos(ax) \cos(3 \times 10^9 t - 6y) \hat{\mathbf{a}}_z$$

که H_0 و a مقادیر ثابتی هستند. مطلوب است محاسبه:

الف) چگالی جریان الکتریکی سطحی روی صفحه $x = 0$ ،

ب) میدان الکتریکی وابسته به میدان مغناطیسی مزبور، ج) مقدار ثابت a .

۱۴. ناحیه $z < 0$ خلأ و ناحیه $z > 0$ عایق کاملی با قابلیت گذردهی $\epsilon = 5\epsilon_0$ می باشد. میدانهای الکتریکی در این دو ناحیه عبارتند از:

$$\mathbf{E}_1 = [\cos(\omega t - x - z) + R \cos(\omega t - x + z)] \hat{\mathbf{a}}_y, \quad z < 0$$

$$\mathbf{E}_2 = T \cos(\omega t - x - \xi z) \hat{\mathbf{a}}_y, \quad z > 0$$

که R ، T و ξ مقادیر ثابتی می باشند. مطلوب است محاسبه:

الف) فرکانس زاویه ای ω ، ب) ضریب ثابت ξ ، ج) ضرایب R و T .

۱۵. یک محفظه مکعب مستطیلی شکل، که کلیه دیواره های آن هادی کامل فرض می شوند، محدود به سطوح $x=0$ ، $x=a$ ، $y=0$ ، $y=b$ و $z=0$ و $z=c$ می باشد. فضای درون محفظه خلأ است. میدان الکتریکی در درون محفظه عبارت است از:

$$\mathbf{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right) \sin(\omega t) \hat{\mathbf{a}}_y$$

مطلوب است محاسبه:

الف) میدان مغناطیسی وابسته به این میدان الکتریکی، ب) فرکانس زاویه ای ω ،

ج) چگالی توزیع بار الکتریکی روی سطوح $z=c$ و $y=0$ ،

د) چگالی توزیع جریان روی سطوح $x=0$ و $y=b$.

۱۶. میدان مغناطیسی در درون یک کابل هم محور، که شعاعهای درونی و بیرونی آن به ترتیب برابر با a و b می باشند برابر با $\mathbf{H} = \frac{H_0}{r} \cos(\omega t - \gamma z) \hat{\mathbf{a}}_\phi$ است. فضای درونی کابل را ماده عایقی با قابلیت

گذردهی $\epsilon = 9\epsilon_0$ و قابلیت نفوذ $\mu = \mu_0$ فرا گرفته است. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان الکتریکی وابسته به میدان مغناطیسی مزبور، ب) فرکانس زاویه ای ω ،

ج) چگالی جریان الکتریکی روی سطوح $r=a$ و $r=b$.

۱۷. میدان الکتریکی $\mathbf{E} = E_0 e^{-(\alpha x + \beta y)} \cos(10^8 t - \gamma z/3) \hat{\mathbf{a}}_y$ در خلأ مفروض است. با استفاده از معادلات کرل و دیورژانس ماکسول ضرایب ثابت α و β را محاسبه کنید. چگالیهای منابع، ρ و \mathbf{J} ، در تمام نقاط صفر هستند.

۱۸. نواحی $z > 0$ و $z < 0$ از فضا را به ترتیب عایقهای کاملی با قابلیتهای گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 اشغال

نموده اند. ضرایب نفوذ هر دو عایق برابر با μ_0 می باشند. یک جریان: سطحی با چگالی توزیع

$$\mathbf{J}_s = J_s \sin \omega t \hat{\mathbf{a}}_y$$

در مرز دو ناحیه ($z=0$) قرار داده می شود.

الف) نشان دهید که میدان \mathbf{H} فقط مؤلفه x داشته و این مؤلفه فقط تابعی از z می باشد.

ب) با استفاده از معادلات ماکسول نشان دهید که در هر دو ناحیه $z > 0$ و $z < 0$ معادله حاکم بر \mathbf{H}

به صورت $\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$ می باشد. این معادله را برای \mathbf{H} با ویژگیهای مندرج در بند (الف)

حل نموده، سپس با اعمال شرایط مرزی برای میدانها در مرز $z=0$ ، پاسخ کامل برای \mathbf{E} و \mathbf{H} را در کلیه نقاط فضا به دست آورید.

۱۹. در مسئله ۱۸ فرض کنید که صفحه‌ای از جنس هادی کامل در $z = -d$ قرار داده می‌شود. میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} را در نواحی $z > 0$ و $-d < z < 0$ محاسبه کنید.

۲۰. نشان دهید که معادلات حاکم بر میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} در محیطی با قابلیت گذردهی ϵ و قابلیت نفوذ μ که در آن منابع، یعنی بار الکتریکی و جریان با چگالیهای حجمی ρ و \mathbf{J} ، وجود دارند، عبارتند از:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = j\omega \mu \mathbf{J} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

۲۱. الف) تحقیق کنید که توابع $\Psi_1 = f(t - \sqrt{\mu\epsilon}z)$ و $\Psi_2 = g(t + \sqrt{\mu\epsilon}z)$ پاسخ عمومی معادله

دیفرانسیل پاره‌ای $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$ می‌باشند. در اینجا f و g توابع دلخواهی هستند که مشتقات اول

و دوم آنها نسبت به t و z وجود دارند.

ب) فرض کنید که جریان سطحی \mathbf{J}_s در مسئله ۱۸ به جای اینکه تغییرات سینوسی نسبت به زمان داشته باشد، تغییراتی دلخواه دارد که با تابع $f(t)$ بیان می‌شود. به عبارت دیگر $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s f(t) \hat{\mathbf{a}}_y$. با استفاده از نتیجه بند الف) و با استناد به پاسخ مسئله ۱۸ میدان \mathbf{E} را در نواحی $z < 0$ و $z > 0$ برحسب $f(t)$ بیان کنید.

۲۲. در مسئله ۲۱ میدانهای الکترومغناطیس ناشی از یک جریان سطحی با توزیع یکنواخت و با تغییرات

زمانی دلخواه مورد بررسی قرار گرفت. روش به کار رفته در مسئله مزبور، در حالت کلی، به خصوص در ارتباط با آنتن‌ها، موجبرها و سایر ادوات الکترومغناطیسی، قابل استفاده نیست. در این موارد معمولاً پاسخ میدان را ابتدا برای تغییرات زمانی سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω به دست آورده، سپس از خطی بودن معادلات ماکسول (به فرض اینکه ϵ ، μ و σ تابعی از میدان نباشند) و از خواص انتگرال فوریه استفاده کرده و میدانها را برای حالتی که تغییرات زمانی منابع با تابع $f(t)$ بیان شود، ولی توزیع مکانی آنها عیناً برابر با حالت تغییرات زمانی سینوسی باشد، به دست می‌آورند.

الف) فرض کنید منبعی که فازور آن واحد باشد (به عبارت دیگر تغییرات زمانی منبع به صورت $\cos \omega t$ است) تولید میدان الکتریکی فازوری $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega)$ را بنماید. نشان دهید که میدان الکتریکی برای وقتی که تغییرات زمانی منبع با تابع دلخواه $f(t)$ بیان گردد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$

ب) با به کار بردن انتگرال بالا، بند (ب) مسئله ۲۱ را تکرار کنید.

۲۳. نشان دهید که برای میدانهای متغیر با زمان شرط مرزی برای مؤلفه عمودی \mathbf{B} را می‌توان ناشی از شرط

مرزی برای مؤلفه مماسی \mathbf{E} و شرط مرزی برای مؤلفه عمودی \mathbf{D} را می‌توان ناشی از شرایط مرزی برای مؤلفه مماسی \mathbf{H} و مؤلفه عمودی \mathbf{J} دانست. یک کاربرد مهم این ویژگی اعمال شرایط مرزی در فصل مشترک دو ناحیه عایق (مثلاً در موجبرهای نوری) است. در این موارد اعمال شرایط مرزی فقط برای مؤلفه‌های مماسی \mathbf{E} و \mathbf{H} کفایت می‌کند.