

## میدان مغناطیسی ساکن در اجسام و انرژی مغناطیسی

در فصل قبل میدان مغناطیسی ناشی از انواع توزیعهای جریان را در فضای آزاد مطالعه نمودیم. اکنون، در ادامه بحث خود پیرامون میدان مغناطیسی ساکن، به بررسی تأثیرات ماده و میدان مغناطیسی بر یکدیگر می‌پردازیم. وقتی که یک جسم در معرض میدان مغناطیسی واقع می‌شود، ذرات باردار در اتمهای جسم از خود عکس‌العمل نشان می‌دهند که به شکل پدید آمدن میدان جدیدی بروز می‌کند. ویژگیهای این میدان جدید به خواص مغناطیسی جسم بستگی دارد. در اینجا نیز به همان صورتی که در مورد ماده و میدان الکتریکی عمل کردیم، خواص مغناطیسی ماده را به طور کیفی در مقیاس میکروسکوپی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم، ولی تأثیر ماده بر میدان، یعنی تغییراتی که حضور یک جسم در میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد و نتایجی که دارای اهمیت کاربردی و مهندسی هستند، را در مقیاس ماکروسکوپی مطالعه می‌کنیم.

### ۱-۶ خواص مغناطیسی اجسام و دسته‌بندی آنها

برای تشریح خواص مغناطیسی اجسام از مدل ساده شده اتم استفاده می‌کنیم. بر اساس چنین مدلی، در هر اتم الکترونها در مدارهای دایره‌ای شکلی به دور هسته گردش می‌کنند و در عین حال هر الکترون حول محوری به دور خود نیز می‌چرخد. این حرکات الکترونها که شبیه حرکات انتقالی و وضعی کره زمین هستند را به ترتیب حرکت مداری و حرکت چرخشی می‌نامیم. علاوه بر الکترونها، هسته نیز به نوبه خود دارای حرکت چرخشی می‌باشد. از آنجا که حرکت ذرات باردار ایجاد جریان الکتریکی می‌کند، حرکات مداری و چرخشی ذرات اتم را می‌توان به منزله حلقه‌های جریان و به تعبیر دیگر به عنوان دو قطب‌های مغناطیسی با گشتاورهایی در مقیاس اتمی دانست. گشتاور مداری یک الکترون مقادیر متفاوتی را بسته به نوع اتم و شعاع مدار الکترون دارا است، ولی محاسبات مکانیک کوانتومی نشان می‌دهد که گشتاور چرخشی هر الکترون فقط ممکن است یکی از دو مقدار  $10^{-24} \times 9/3 \approx$  را بر حسب

واحد آمپر مترمربع به خود اختصاص دهد. بدین ترتیب هر اتم را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از دو قطبی‌های مغناطیسی در نظر گرفت که گشتاور کل آن ممکن است مقداری برابر صفر یا غیر صفر داشته باشد. اما، هسته اتم به دلیل جرم سنگینش دارای سرعت چرخشی به مراتب کوچک‌تر از سرعت چرخش یک الکترون است، به طوری که جریان ناشی از چرخش هسته بسیار کوچک‌تر از جریان حاصل از چرخش یک الکترون بوده و در نتیجه از گشتاور مغناطیسی هسته در مقابل گشتاور چرخشی الکترون می‌توان صرف نظر کرد. پس به طور خلاصه، حاصل جمع گشتاورهای مداری و چرخشی الکترونها یک اتم، گشتاور مغناطیسی خالص آن اتم را تشکیل می‌دهد و چگونگی ترکیب گشتاورهای اتمهای یک جسم خاصیت مغناطیسی آن را تعیین می‌کند. بنابراین، ماهیت و خواص مغناطیسی اجسام را می‌توان فقط در حرکات مداری و چرخشی الکترونها جستجو کرد.

به طور کلی سه پدیده مغناطیسی اصلی به نامهای دیامغناطیس<sup>۱</sup>، پارامغناطیس<sup>۲</sup> و فرومغناطیس<sup>۳</sup> شناخته شده‌اند که پدیده اول به حرکت مداری الکترونها نسبت داده می‌شود و دو پدیده دیگر ناشی از حرکت چرخشی الکترونها می‌دانند. علاوه بر پدیده‌های مزبور دو پدیده دیگر به نامهای ضد فرومغناطیس<sup>۴</sup> و فری مغناطیس<sup>۵</sup> نیز وجود دارند که شکل‌های تغییر یافته پدیده فرومغناطیس محسوب می‌شوند. وقتی که جسمی تحت یک میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرد یکی از پدیده‌های مذکور به طور عمده در جسم رخ می‌دهد. بر حسب اینکه تأثیر کدام پدیده جنبه غالب داشته باشد، جسم را از نظر خاصیت مغناطیسی به اسم آن پدیده نامگذاری می‌کنند. در اینجا به اختصار به شرح هر یک از این پدیده‌ها می‌پردازیم.

### دیامغناطیس

در بسیاری از اجسام گشتاور مغناطیسی کل هر اتم در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی برابر صفر است. برای آنکه ببینیم اعمال یک میدان مغناطیسی چه تأثیری بر این گونه اجسام می‌گذارد، تغییراتی را که در حرکت مداری الکترون به وجود می‌آید مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور الکترونی را در نظر می‌گیریم که قبل از اعمال میدان خارجی در مداری به شعاع  $a$  و با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  حول هسته اتم خود گردش کند. گردش الکترون به دور هسته را می‌توان معادل جریان  $I = e\omega / 2\pi$  و در خلاف جهت حرکت الکترون دانست. بنابراین، گشتاور مغناطیسی ناشی از گردش این الکترون به دور هسته برابر  $m_0 = \frac{e\omega}{2\pi} \pi a^2$  خواهد بود. نیرویی که حرکت دورانی الکترون به دور هسته را تأمین می‌کند همان نیروی جاذبه کولمب بین بار منفی الکترون و بار مثبت هسته است. حال فرض کنید که یک میدان مغناطیسی خارجی با چگالی شار  $B_0$  بر الکترون اعمال شود. برای سادگی میدان را عمود بر صفحه مدار الکترون در نظر می‌گیریم. میدان  $B_0$  بر الکترون متحرک نیرو وارد می‌آورد، به طوری که پس از اعمال میدان، الکترون باید تحت تأثیر دو نیرو، یکی نیروی کولمب و دیگری نیروی مغناطیسی ناشی از  $B_0$ ،

1 - Diamagnetism

2 - Paramagnetism

3 - Ferromagnetism

4 - Antiferromagnetism

5 - Ferrimagnetism

به حرکت خود ادامه دهد. بدیهی است که تغییر نیروی کل اعمال شده بر الکترون باید تغییر شعاع مدار یا تغییر سرعت زاویه‌ای آن را به دنبال داشته باشد. ولی ضرورت‌های مکانیک کوانتومی ایجاب می‌کند که شعاع مدار الکترون ثابت بماند.  $\hbar$  لذا اعمال میدان  $B$  منجر به تغییر سرعت زاویه‌ای الکترون از  $\omega$  به  $\omega$  و در نتیجه تغییر گشتاور مغناطیسی  $m$  به  $m$  می‌شود. می‌توان نشان داد که تغییر گشتاور برابر

$$\Delta m = m - m_0 = -e^2 a^2 B_0 / 4m_e$$

است، که  $m_e$  جرم الکترون است (مطالعه جزئیات بیشتر به مسئله ۱ خودآزمایی موکول می‌گردد). ملاحظه می‌کنیم که این تغییر گشتاور به جهت گردش الکترون بستگی ندارد. به عبارت دیگر، اگر دو الکترون در دو جهت مخالف یکدیگر در یک مدار گردش کنند، تغییر گشتاور برای هر دو در یک جهت خواهد بود. بنابراین می‌توان چنین نتیجه گرفت که یک اتم حتی وقتی که گشتاور مغناطیسی کل آن صفر است پس از اعمال میدان دارای گشتاور خالص غیرصفر می‌شود و به بیان دیگر میدان گشتاوری را در اتم القا می‌کند. القای گشتاور مغناطیسی در یک جسم در حقیقت به منزله مغناطیس شدن جسم است، زیرا جسم خود به صورت منبع میدان مغناطیسی عمل می‌کند. گشتاور القا شده در اتمها منشأ میدان مغناطیسی ثانویه‌ای می‌شود که در خلاف جهت میدان خارجی (چون  $\Delta m$  و  $B_0$  در خلاف جهت یکدیگرند) ولی بسیار ضعیف‌تر از آن می‌باشد. این پدیده، که مغناطیس شدن یک جسم در خلاف جهت میدان اعمال شده است و نظیر قطبی شدن اجسام عایق تحت تأثیر میدان الکتریکی است، را دیامغناطیس و اجسامی که گشتاور مغناطیسی خالص هر یک از اتمهایشان در غیاب یک میدان خارجی برابر صفر است و در نتیجه این پدیده در آنها روی می‌دهد را اجسام دیامغناطیسی نامند. میدان مغناطیسی در اجسام دیامغناطیسی معمولاً به میزان بسیار ناچیزی از میدان اعمال شده کوچک‌تر است. پدیده دیامغناطیس مستقل از دما بوده و بدیهی است که در کلیه اجسام، وقتی که در معرض میدان مغناطیسی واقع شوند، رخ می‌دهد. ولی باید توجه داشت که همه اجسام دیامغناطیسی نیستند، زیرا پدیده‌های دیگر ممکن است خاصیت دیامغناطیسی جسم را تحت الشعاع قرار داده و به آن خواص دیگری ببخشند. مس، روی، سیلیسیم، نقره و جیوه نمونه‌هایی از اجسام دیامغناطیسی هستند.

### پارامغناطیس

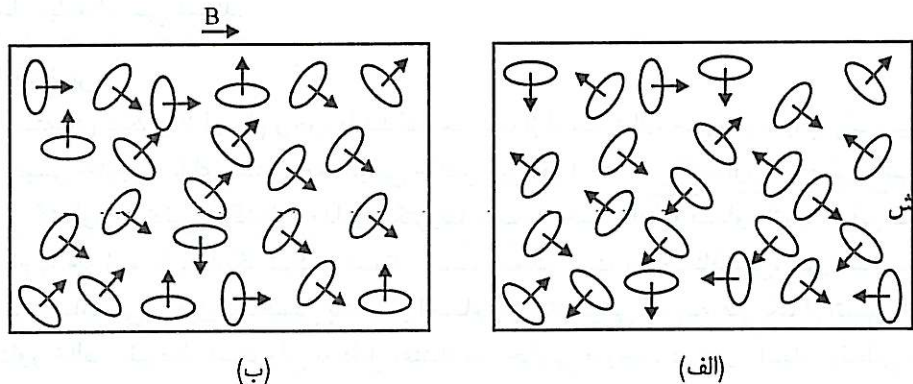
دسته‌های دیگری از اجسام وجود دارند که هر یک از اتمهایشان، حتی در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی، دارای گشتاور مغناطیسی خالص غیرصفر است. این گشتاور غیرصفر ناشی از فزونی گشتاور چرخشی بر گشتاور مداری الکترونها است. بر حسب اینکه گشتاور اتمها در این قبیل اجسام به چه نحو با یکدیگر ترکیب شوند، جسم ممکن است پارامغناطیسی، فرومغناطیسی، ضدفرومغناطیسی یا فری مغناطیسی باشد. در اجسام پارامغناطیسی گرچه هر یک از اتمها دارای گشتاور خالص غیرصفر است ولی به دلیل اغتشاشات حرارتی موجود در درون آنها، دو قطبی‌های

مکانیک کوانتومی پیش‌بینی می‌کند که الکترونها می‌توانند فقط در مدارهای معینی باشند، یعنی شعاع مدار الکترون کوانتیده بوده و نمی‌تواند به طور پیوسته تغییر کند. در این مبحث، به دلیل کوچک بودن نیروی مغناطیسی، شعاع مدار الکترون ثابت باقی می‌ماند.

مغناطیسی آنها فاقد هر گونه آرایش منظم بوده و در کلیه جهات به طور تصادفی توزیع می‌شوند، به طوری که جسم در مجموع از نظر مغناطیسی خنثی است. اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی، همان گونه که در شکل ۱-۶ نشان داده شده است، دوقطبی‌های اتمی را تحت گشتاور قرار داده و آنها را به طور نسبی با خود هم‌جهت می‌سازد. البته، اغتشاشات حرارتی همواره سعی در برهم زدن آرایش دوقطبی‌ها داشته و از این رو هم‌جهتی دوقطبی‌ها با میدان به طور کامل صورت نمی‌پذیرد. در واقع هرچه میدان قوی‌تر باشد، دوقطبی‌ها بهتر و بیشتر با میدان هم‌جهت می‌شوند. آرایش دوقطبی‌های مغناطیسی اتمی در اجسام پارامغناطیسی به گونه‌ای است که میدان کل حاصل از آنها هم‌جهت با میدان خارجی ولی بسیار ضعیف‌تر از آن است. بنابراین میدان مغناطیسی در اجسام پارامغناطیسی به میزان ناچیزی بزرگ‌تر از میدان خارجی است. پدیده مغناطیس شدن یک جسم را به طور ضعیف و در جهت میدان اعمال شده پارامغناطیس نامند. نظر به اینکه اغتشاشات حرارتی در برهم زدن آرایش دوقطبی‌های اتمی دخالت دارند، پارامغناطیس تابع دمای جسم بوده و هرچه دما افزایش یابد این پدیده به میزان ضعیف‌تری بروز می‌کند. نمونه‌هایی از اجسام پارامغناطیسی آلومینیم، کرم، منگنز، قلع و پلاتین می‌باشند.

### فرومغناطیس

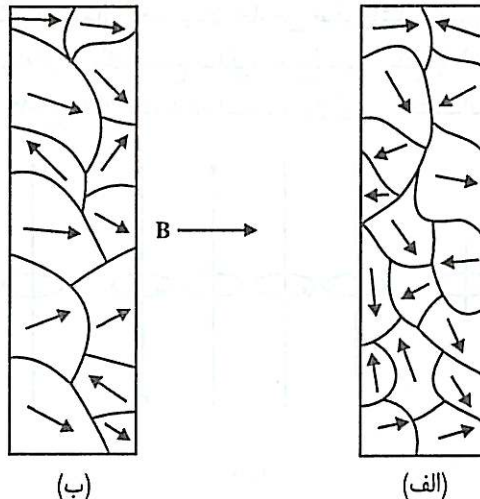
برخی اجسام مانند آهن، نیکل، کبالت و آلیاژهای آنها تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی به میزان بسیار زیادی در جهت میدان اعمال شده مغناطیس می‌شوند، به طوری که میدان مغناطیسی در درون این گونه اجسام به مراتب بزرگ‌تر از میدان اعمال شده به آنها است (تا چندین هزار و حتی چندین صد هزار برابر بزرگ‌تر). ماهیت چنین رفتاری در اجسام مزبور به تشکیل خود به خودی حوزه‌های مغناطیسی در نواحی کوچک ماکروسکوپی با ابعادی در حدود میکرون تا میلیمتر و حتی سانتیمتر نسبت داده می‌شود که در ادامه به شرح آن خواهیم پرداخت. پدیده مغناطیس شدن خود به خودی را فرومغناطیس و اجسامی که این پدیده در آنها روی می‌دهد را اجسام فرومغناطیسی نامند. پدیده



شکل ۱-۶: اجسام پارامغناطیسی (الف) توزیع تصادفی دوقطبی‌های مغناطیسی اتمی در غیاب میدان خارجی

(ب) هم‌جهتی نسبی دوقطبی‌های مغناطیسی با میدان خارجی پس از اعمال میدان مغناطیسی B

فرومغناطیس فقط وقتی که دمای جسم پایین تر از یک دمای بحرانی موسوم به دمای کوری باشد روی می دهد. <sup>۱</sup> در دمای بالاتر از دمای کوری خاصیت فرومغناطیس از بین رفته و جسم به صورت پارامغناطیسی رفتار می کند. توجیه رفتار اجسام فرومغناطیسی به کمک نظریه دانشمندی به نام وایس<sup>۱</sup>، که در سال ۱۹۰۶ ارائه گردید، امکان پذیر است. بر اساس این نظریه، در اجسام فرومغناطیسی یک میدان بسیار قوی ناشی از تراکنش دو قطبی های اتمی مجاور، کلیه آنها را در نواحی کوچکی موسوم به حوزه در یک امتداد قرار می دهد. مطالعه این میدان فقط به کمک نظریه مکانیک کوانتومی میسر است که خارج از بحث ما است. حوزه ها در حقیقت مغناطیس های دائمی بسیار کوچکی هستند که در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی در همه جهات به طور تصادفی توزیع می شوند. توزیع تصادفی حوزه ها، که در شکل ۶-۲ الف نشان داده شده است، ناشی از این اصل است که همه سیستمها در طبیعت مایل به باقی ماندن در وضعیت حداقل انرژی هستند. بنابراین، یک قطعه جسم فرومغناطیسی از نظر مغناطیسی خنثی است (البته بدون در نظر گرفتن پدیده پسماند که در همین فصل شرح آن خواهد آمد). با اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی، حوزه هایی که از ابتدا هم جهتی بیشتری با میدان خارجی دارند، در ازای کوچک تر شدن بقیه حوزه ها، گسترش می یابند. در صورتی که میدان خارجی به اندازه کافی قوی باشد برخی حوزه ها از طریق چرخیدن با میدان هم جهت می شوند. شکل ۶-۲ ب هم جهتی نسبی حوزه ها با میدان خارجی را نشان می دهد. ایجاد حوزه های نسبتاً وسیع و هم جهت (به طور نسبی) با میدان خارجی به معنای به وجود آمدن یک میدان مغناطیسی بسیار قوی تر از میدان خارجی در درون جسم است. اگر میدان خارجی ضعیف باشد، پس از برداشتن آن، حوزه ها و در نتیجه خود جسم به



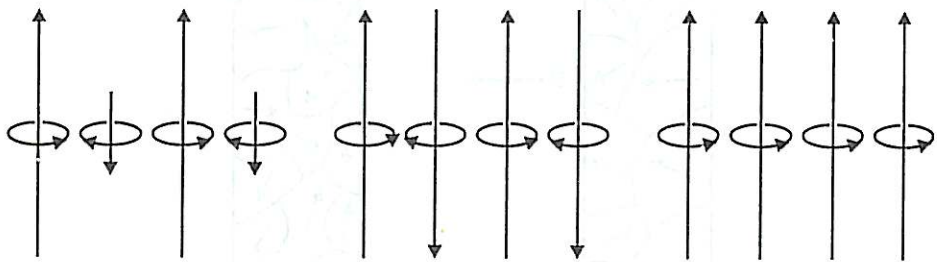
شکل ۶-۲: اجسام فرومغناطیسی (الف) توزیع تصادفی حوزه ها در غیاب میدان خارجی (ب) گسترش و چرخش حوزه ها پس از اعمال میدان خارجی و هم جهتی نسبی آنها با میدان

<sup>۱</sup> دمای کوری (Curie Temperature) برای آهن  $K 1043$ ، برای نیکل  $K 631$  و برای کبالت  $K 1394$  می باشد.

وضعیتی نزدیک به وضعیت قبل از اعمال میدان برمی‌گردند. ولی اگر میدان خارجی به اندازه کافی قوی باشد گسترش حوزه‌ها به حدی می‌رسد که دیگر بازگشت به حالت اولیه غیرممکن می‌شود و پس از برداشتن میدان خارجی، جسم مقداری از مغناطیس القا شده در خود را حفظ می‌کند. بنابراین، اگر یک جسم فرومغناطیسی تحت یک میدان مغناطیسی قوی قرار داده شود، پس از حذف میدان جسم به صورت مغناطیس دائم (آهن‌ریا) عمل می‌کند. این پدیده را که وضعیت کنونی جسمی از نظر مغناطیس بودن، به وضعیت مغناطیسی گذشته‌اش بستگی داشته باشد، پسماند (هیستریزیس<sup>۱</sup>) نامند. (هیستریزیس یک کلمه یونانی به معنای تأخیر است. در اجسام فرومغناطیسی بازگشت حوزه‌ها به حالت اولیه توأم با تأخیر است.) مبحث پسماند به طور مشروح‌تری در قسمت ۶-۷ مطالعه خواهد شد. بر خلاف اجسام دیامغناطیسی و پارامغناطیسی که میدان مغناطیسی ثانویه در آنها به طور خطی با میدان اعمال شده تغییر می‌کند، میدان مغناطیسی در اجسام فرومغناطیسی تابعی غیرخطی از میدان اعمال شده است.

#### ضد فرومغناطیس و فری مغناطیس

این دو پدیده شکل‌های تغییر یافته فرومغناطیس در اجسامی هستند که دارای دو دسته اتم با پیوندهای قوی بین اتمی می‌باشند. اگر گشتاور چرخشی مربوط به این دو دسته اتم، مطابق شکل ۳-۶-الف، موازی و هم‌جهت با یکدیگر قرار بگیرند جسم فرومغناطیسی است. دلیل فرومغناطیسی بودن برخی آلیاژهای منگنز که خود عنصری غیر فرومغناطیسی است، به وجود آمدن گشتاورهای چرخشی هم‌جهت، مطابق شکل ۳-۶-الف، در آنها است. اما اگر، همان‌گونه که شکل ۳-۶-ب نشان می‌دهد، گشتاورهای اتمی موازی و مختلف‌الجهت و دارای اندازه‌های مساوی باشند به طوری که گشتاور کل جسم حتی پس از اعمال یک میدان خارجی صفر باشد، جسم ضد فرومغناطیسی نامیده می‌شود. اکسید منگنز نمونه‌ای از یک جسم ضد فرومغناطیسی است. بالاخره، اگر گشتاورهای اتمی، همان‌طور که در شکل ۳-۶-ج نشان داده شده است، موازی و مختلف‌الجهت ولی با اندازه‌های



(ج)

(ب)

(الف)

شکل ۳-۶: آرایش گشتاورهای اتمی در (الف) اجسام فرومغناطیسی (ب) اجسام ضد فرومغناطیسی (ج) اجسام فری مغناطیسی

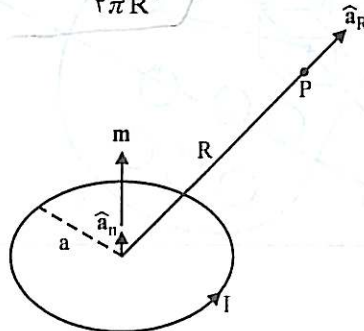
نامساوی باشند، گفته می‌شود که جسم از نوع فری مغناطیسی است. گروهی از اجسام فری مغناطیسی موسوم به فریتها هستند که از ترکیب  $Fe_3O_4$  با اکسید فلزاتی از قبیل آهن، منگنز، کبالت و نیکل به وجود می‌آیند. فریتها دارای کاربردهای صنعتی فراوانی هستند، زیرا هدایت الکتریکی آنها کم است و اتلاف دمای به مراتب کمتری از اجسام فرومغناطیسی دارند، در حالی که خواص مغناطیسی آنها با اجسام فرومغناطیسی قابل مقایسه است. اکسید آهن با فرمول  $Fe_3O_4$  نمونه‌ای از فریت و یک جسم فری مغناطیسی است.

به طور خلاصه، در این قسمت بیان شد که هرگاه جسمی در معرض میدان مغناطیسی واقع شود، در صورتی که از نوع دیامغناطیسی باشد دو قطبی‌های مغناطیسی اتمی در خلاف جهت میدان در آن پدید می‌آیند و چنانچه از انواع دیگر باشد دو قطبی‌های موجود در آن به سمت هم جهت شدن با میدان میل داده می‌شوند. و بنابراین همواره این نتیجه حاصل می‌شود که، به جز در اجسام ضد فرومغناطیسی، اعمال میدان به پدید آمدن یک گشتاور مغناطیسی با مقدار متوسط غیر صفر در جسم می‌انجامد. پیدایش گشتاور مغناطیسی در جسم را تحت تأثیر یک میدان خارجی مغناطیس شدن یا قطبی شدن مغناطیسی جسم می‌نامیم. مغناطیس شدن یک جسم در میدان مغناطیسی نظیر قطبی شدن یک عایق در میدان الکتریکی است.

## ۶-۲ میدان مغناطیسی در حضور اجسام

اکنون که با چگونگی مغناطیس شدن اجسام مختلف تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی آشنا شده‌ایم به بررسی کمی مسئله در مقیاس ماکروسکوپی می‌پردازیم. یک جسم مغناطیس شده را می‌توان به منزله مجموعه‌ای از دو قطبی‌های مغناطیسی در خلأ تلقی کرد. در فصل قبل مسئله یک دو قطبی مغناطیسی، به صورت یک حلقه دایره‌ای شکل به شعاع  $a$  و حامل جریان  $I$  مطابق شکل ۶-۴، را مطالعه نمودیم. برای دو قطبی گشتاور مغناطیسی  $m = I\pi a^2 \hat{a}_n$  که بردار واحد عمود بر صفحه حلقه است، را تعریف کرده و نشان دادیم که پتانسیل مغناطیسی برداری حاصل از دو قطبی در فواصل دور از آن از رابطه ۵-۶۹، که به صورت زیر است، به دست می‌آید.

$$A = \frac{\mu \cdot m \times \hat{a}_R}{4\pi R^3} \quad R \gg a \quad (1-6)$$

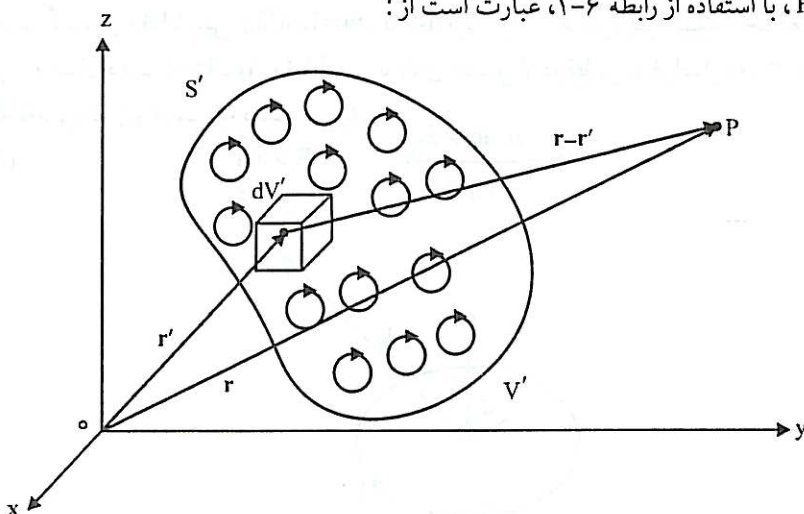


شکل ۶-۴: دو قطبی مغناطیسی با گشتاور  $m$

برای بیان میزان مغناطیس شدگی اجسام مختلف کمیتی برداری، موسوم به بردار مغناطیس شدگی یا بردار پلاریزاسیون مغناطیسی، که با حرف  $M$  نمایش داده می‌شود را تعریف می‌کنیم. این بردار نظیر بردار  $P$  در مورد قطبی شدن اجسام در میدان الکتریکی می‌باشد. بردار  $M$  به صورت میزان گشتاور دوقطبی مغناطیسی در واحد حجم یا چگالی گشتاور دوقطبی مغناطیسی تعریف می‌شود و در حالت کلی تابعی از مختصات نقاط جسم است. برای تعیین  $M$  در نقطه‌ای از جسم، عنصر حجم  $\Delta V$  را حول آن نقطه در نظر گرفته و حاصل جمع گشتاورهای اتمها یا مولکولهای موجود در آن را به دست آورده و نتیجه را بر  $\Delta V$  تقسیم می‌کنیم. بنابراین اگر  $N$  تعداد اتمها یا مولکولها در واحد حجم و  $m_i$  گشتاور اتم یا مولکول  $i$  ام در حجم  $\Delta V$  باشد، می‌توان نوشت:

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N \Delta V} m_i = Nm \quad (2-6)$$

که  $m$  گشتاور متوسط به ازای یک اتم یا مولکول است. بردار  $M$  منشأ میدان مغناطیسی ثانویه‌ای در درون و اطراف جسم می‌شود که در خلاف جهت میدان اعمال شده برای اجسام دیامغناطیسی و هم‌جهت با آن برای سایر اجسام می‌باشد. میدان کل در هر نقطه از فضا از حاصل جمع میدانهای اولیه و ثانویه به دست می‌آید. برای مطالعه میدان ثانویه، جسمی با حجم  $V'$  و محدود به سطح بسته  $S'$ ، مطابق شکل ۶-۵، در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که چگالی گشتاور دوقطبی مغناطیسی موجود در آن با تابع معلوم  $M(r')$  مشخص گردیده باشد. گشتاور مغناطیسی  $M$  در جسم ممکن است در اثر قرار گرفتن آن در یک میدان مغناطیسی خارجی و یا ناشی از فرومغناطیسی بودن خود جسم در وضعیت مغناطیس دائمی باشد. عنصر حجم  $dV'$  را در نقطه دلخواهی در درون جسم در نظر می‌گیریم. این عنصر حجم را می‌توان به منزله یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور  $M dV'$  دانست که پتانسیل برداری ناشی از آن در نقطه  $P(r)$ ، با استفاده از رابطه ۶-۱، عبارت است از:



شکل ۶-۵: محاسبه پتانسیل برداری ناشی از گشتاور مغناطیسی القا شده در یک جسم



$$dA = \frac{\mu \cdot M dV' \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{\mu \cdot}{4\pi} \left( M \times \frac{\hat{a}_R}{R^2} \right) dV' = \frac{\mu \cdot}{4\pi} M \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dV' \quad (3-6)$$

در استخراج رابطه ۳-۶ از تساوی  $\hat{a}_R/R^2 = \nabla' (1/R)$ ، که در آن علامت پریم به معنای مشتق گرفتن نسبت به  $\mathbf{r}'$  است، استفاده شده است. با به کار بردن اتحاد برداری  $\nabla \times (U\mathbf{A}_1) = \nabla U \times \mathbf{A}_1 + U \nabla \times \mathbf{A}_1$  در آن  $U$  و  $\mathbf{A}_1$  به ترتیب توابع نرده‌ای و برداری دلخواه هستند، می‌توان نشان داد که:

$$M \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \times M - \nabla' \times \left( \frac{M}{R} \right) \quad (4-6)$$

با استفاده از رابطه ۴-۶ در رابطه ۳-۶ می‌توان نوشت:

$$dA = \frac{\mu \cdot}{4\pi} \left[ \frac{\nabla' \times M}{R} - \nabla' \times \left( \frac{M}{R} \right) \right] dV' \quad (5-6)$$

سرانجام، پتانسیل برداری ناشی از تمامی گشتاور مغناطیسی جسم را با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ۵-۶ در حجم  $V'$  به دست می‌آوریم:

$$A = \frac{\mu \cdot}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times M}{R} dV' - \frac{\mu \cdot}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left( \frac{M}{R} \right) dV' \quad (6-6)$$

اکنون با استفاده از اتحاد برداری  $\int_V (\nabla \times \mathbf{A}_1) dV = -\oint_S \mathbf{A}_1 \times dS$ ، که اثبات آن در پاورقی ارائه شده است،<sup>۱۱</sup> انتگرال دوم در عبارت سمت راست رابطه ۶-۶ را به یک انتگرال سطح تبدیل کرده و رابطه مذکور را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{\mu \cdot}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times M}{R} dV' + \frac{\mu \cdot}{4\pi} \oint_S \frac{M \times \hat{a}_n}{R} dS' \quad (7-6)$$

قبلاً نشان دادیم که پتانسیل برداری ناشی از توزیع جریان سطحی  $\mathbf{J}_S$  و توزیع جریان حجمی  $\mathbf{J}$  به ترتیب از روابط انتگرالی ۵-۵ و ۵-۶ به دست می‌آیند. مقایسه انتگرالهای رابطه ۷-۶ با انتگرالهای روابط ۵-۵ و ۵-۶ روشن می‌سازد که پتانسیل برداری حاصل از پلاریزاسیون مغناطیسی  $M$  را می‌توان به

$\oint_S \mathbf{A}_1 \times dS$  برای اثبات اتحاد  $\int_V (\nabla \times \mathbf{A}_1) dV = -\oint_S \mathbf{A}_1 \times dS$  که در آن  $\mathbf{A}_1$  یک بردار دلخواه و  $V$  یک حجم دلخواه محدود به سطح بسته  $S$  می‌باشد، ابتدا حاصل ضرب داخلی جمله سمت چپ در  $\hat{a}_x$  را به دست آورده و سپس از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{a}_x \cdot \int_V (\nabla \times \mathbf{A}_1) dV &= \int_V \hat{a}_x \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 dV = - \int_V \nabla \cdot (\hat{a}_x \times \mathbf{A}_1) dV \\ &= - \oint_S \hat{a}_x \times \mathbf{A}_1 \cdot dS = - \oint_S \hat{a}_x \cdot (\mathbf{A}_1 \times dS) = - \hat{a}_x \cdot \oint_S \mathbf{A}_1 \times dS \end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$\hat{a}_y \cdot \int_V (\nabla \times \mathbf{A}_1) dV = - \hat{a}_y \cdot \oint_S \mathbf{A}_1 \times dS$$

$$\hat{a}_z \cdot \int_V (\nabla \times \mathbf{A}_1) dV = - \hat{a}_z \cdot \oint_S \mathbf{A}_1 \times dS$$

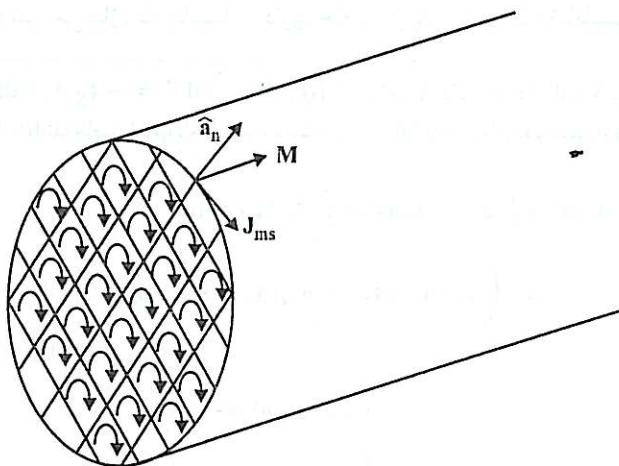
به دلیل تساوی مؤلفه‌های همنام در رابطه برداری  $\int_V (\nabla \times \mathbf{A}_1) dV = - \oint_S \mathbf{A}_1 \times dS$ ، درستی این رابطه محقق است.

دو نوع توزیع جریان منسوب نمود: یکی توزیع جریان حجمی  $\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M}$  در حجم  $V'$  و دیگری توزیع جریان سطحی  $\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{a}}_n$  روی سطح  $S'$ ، اگر چه این جریانهای مغناطیسی، که به جریانهای آمپری نیز موسومند، همانند جریانهای ناشی از حرکت بارهای آزاد (که ممکن است آنها را جریانهای آزاد بنامیم) نیستند، ولی همانند جریانهای آزاد تولید میدان مغناطیسی می کنند. این جریانهها را می توان، در تشابه با بارهای الکتریکی مقید که ضمن قطبی شدن اجسام عایق تحت تأثیر میدان الکتریکی به وجود می آیند، جریانههای مقید نامید.

بدین ترتیب، برای محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از یک جسم مغناطیس شده با چگالی  $\mathbf{M}$  می توان جسم را با جریانههای مغناطیسی معادل  $\mathbf{J}_m$  و  $\mathbf{J}_{ms}$  در خلأ جایگزین نمود و سپس یکی از روشهای محاسبه میدان مغناطیسی، که در فصل گذشته مطالعه گردیدند، را به کار برد. به عنوان مثال اگر بخواهیم از روش مبتنی بر قانون بیو-ساوار استفاده کنیم، با استفاده از روابط ۵-۱۱ و ۵-۱۲ می توان نوشت:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m \times \hat{\mathbf{a}}_R}{R^2} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{J}_{ms} \times \hat{\mathbf{a}}_R}{R^2} dS' \quad (۸-۶)$$

برای روشن ساختن ماهیت فیزیکی جریانههای آمپری، یک میله استوانه‌ای شکل به طول  $L$ ، مطابق شکل ۶-۶، را در نظر گرفته و فرض می کنیم که به طور یکنواخت با چگالی  $\mathbf{M}$  مغناطیس شده باشد. تصور کنید که این میله به نواحی بسیار کوچکی با ابعاد اتمی، که در شکل به گونه اغراق آمیزی نشان داده شده‌اند، تقسیم گردد و در هر ناحیه یک اتم قرار بگیرد. در هر یک از این نواحی میکروسکوپی یک جریان حلقه‌ای متعلق به اتم موجود در آن و به اندازه  $\mathbf{J}_{ms}$  برقرار است. همه جریانههای حلقه‌ای به دلیل یکنواختی مغناطیس بودن میله با یکدیگر برابرند. با مراجعه به شکل ۶-۶ می توان مشاهده نمود که جریان هر ناحیه کوچک در درون جسم با جریانههای نواحی مجاور به طور کامل خنثی می شود، ولی جریانههای آن عده از نواحی که به سطح استوانه منتهی می شوند در بخشی از محیطهای خود خنثی نشده



شکل ۶-۶: یک میله استوانه‌ای شکل مغناطیس شده و ماهیت فیزیکی جریانههای مغناطیسی آن

باقی می ماند و در مجموع تشکیل یک جریان سطحی را می دهند که مقدار آن همان  $J_{ms}$  است. حال گشتاور مغناطیسی کل میله از یک طرف برابر  $MSL$  و از طرف دیگر برابر حاصل جمع گشتاورهای تقسیمات ایجاد شده در میله یعنی برابر  $J_{ms}SL$  است، که  $S$  مساحت سطح مقطع میله می باشد. با مساوی قرار دادن این دو مقدار، نتیجه  $J_{ms}=M$  به دست می آید. اما باید توجه داشت که  $J_{ms}$  در جهت  $\hat{a}_p$  بوده در حالی که  $M$  در جهت  $\hat{a}_z$  است و چون  $\hat{a}_p = \hat{a}_z \times \hat{a}_r$  و  $\hat{a}_r$  در واقع همان  $\hat{a}_n$  است، نتیجه به دست آمده را می توان به شکل کلی  $J_{ms} = M \times \hat{a}_n$  نوشت. در صورتی که چگالی مغناطیس شدگی جسم یکنواخت نباشد، جریانهای نواحی میکروسکوپی در درون جسم یکدیگر را کاملاً خنثی نمی کنند و در نتیجه یک جریان مغناطیسی حجمی در درون جسم ظاهر می گردد. بدین ترتیب، منشأ جریانهای سطحی و حجمی مغناطیسی را باید جریانهایی دانست که در مقیاس اتمی در جسم وجود دارند. چون  $J_m = \nabla' \times M$  است، دیورژانس  $J_m$  همواره برابر صفر است، از این رو جریان مغناطیسی حجمی نمی تواند منجر به انباشته شدن بار الکتریکی شود. به علاوه جریانهای مغناطیسی تولید گرما نمی کنند، زیرا آنها همراه با جابه جا شدن الکترونها، به شکلی که در جریانهای هدایتی رخ می دهد، نیستند.

پس به طور خلاصه پس از حذف علامت پریم از  $\nabla'$  داریم:

$$\begin{aligned} J_{ms} &= M \times \hat{a}_n & (۹-۶) \\ J_m &= \nabla \times M & (۱۰-۶) \end{aligned}$$

اکنون به خاطر می آوریم که محاسباتی که به نتایج به دست آمده در روابط ۶-۷ تا ۶-۱۰ انجامیده است را با رابطه ۶-۱۱ آغاز نمودیم. اما این رابطه همراه با محدودیتی مبنی بر اینکه نقطه میدان باید در فاصله دوری از دو قطبی مغناطیسی باشد بود، پس اعتبار نتایج به دست آمده وابسته به رعایت شدن محدودیت مذکور است. روشن است که برای نقاط بیرون جسم این محدودیت همواره رعایت می شود و بنابراین نتایج مزبور را می توان بدون هیچ گونه ابهامی در محاسبه میدان مغناطیسی به کار برد. ولی ممکن است سؤال شود که آیا این نتایج برای نقاط درون جسم نیز معتبرند؟ جواب خوشبختانه آری است، زیرا در رابطه ۶-۳ وقتی که عنصر حجم  $dV'$  در حد به سمت صفر میل می کند، شعاع دو قطبی معادل مربوط به عنصر حجم نیز به سمت صفر میل کرده و درستی این رابطه هم چنان به قوت خود باقی است. پس به طور خلاصه از جریانهای سطحی و حجمی آمپری، که در روابط ۶-۹ و ۶-۱۰ داده شده اند، می توان برای محاسبه میدان مغناطیسی ثانویه هم در نقاط بیرون و هم در نقاط درون جسم استفاده نمود.

همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، جریانهای مقید مغناطیسی همانند جریانهای آزاد الکتریکی تولید میدان مغناطیسی می کنند. بنابراین شکل نقطه ای قانون مداری آمپر در نقطه دلخواهی در درون جسم (که فقط  $J_m$  وجود دارد) به شرح زیر نوشته می شود:

$$\nabla \times B = \mu_0 (J + J_m) \quad (۱۱-۶)$$

که  $J$  چگالی جریان آزاد، در صورت وجود، است. با جایگزین نمودن  $J_m$  با  $\nabla \times M$  در رابطه ۶-۱۱، داریم:

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \nabla \times M$$

$\vec{H} = \nabla \times \vec{M}$  به جریان مغناطیسی ربط دارد.  
 $\int H \cdot dL = I$  به جریان الکتریکی ربط دارد.  
 ۲-۶ میدان مغناطیسی در حضور اجسام

یا:  $\nabla \times B = \mu_0 (J_{ext} + J_M)$  به جریان الکتریکی و مغناطیسی ربط دارد.

$$\nabla \times \left( \frac{B}{\mu_0} - M \right) = J \quad (12-6)$$

در اینجا اقدام به تعریف برداری می‌کنیم که به عنوان شدت میدان مغناطیسی شناخته شده و با علامت  $H$  نمایش داده می‌شود:

رابطه

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad *$$

(۱۳-۶)

آنگاه:

$$[H] = \frac{A}{m} = \frac{A}{m} \cdot \frac{1}{m} = \frac{A}{m^2}$$

$$\nabla \times H = J \quad (14-6)$$

(۱۴-۶)

اهمیت  $H$  در آن است که کرل آن مستقل از جریانهای مغناطیسی بوده و همان‌طور که رابطه ۶-۱۴ نشان می‌دهد فقط به چگالی جریان آزاد بستگی دارد. رابطه ۶-۱۴ در حقیقت بیان کلی تری برای شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر است. شکل انتگرالی این قانون بر حسب  $H$  عبارت است از:

$$\oint_C H \cdot dL = I \quad (15-6)$$

که  $I$  کل جریان آزاد در برگرفته شده توسط مسیر بسته  $C$  است. واحد شدت میدان مغناطیسی آمپر بر متر است.

در اجسام خطی و همسانگرد  $M$  بردار  $M$  را می‌توان بر حسب  $H$  یا  $B$  توسط یک رابطه خطی بیان داشت:

$$M = \chi_m H = \frac{\chi_m}{(1 + \chi_m)} B$$

(۱۶-۶)

که  $\chi_m$  ضریب حساسیت مغناطیسی<sup>۱</sup> جسم نامیده می‌شود. این ضریب در اجسام دیامغناطیسی و پارامغناطیسی که خطی هستند مقدار ثابتی دارد. رابطه ۶-۱۶ را می‌توان برای اجسام غیرخطی نظیر اجسام فرومغناطیسی نیز به کار برد، ولی همواره باید به خاطر داشت که ضریب  $\chi_m$  در این دسته اجسام مقدار ثابتی نداشته، بلکه تابعی از  $B$  می‌باشد. با حذف  $M$  از روابط ۶-۱۳ و ۶-۱۶، داریم:

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 \mu_r H = \mu H \quad *$$

(۱۷-۶)

در رابطه ۶-۱۷،  $\mu_r = 1 + \chi_m$  را قابلیت نفوذ نسبی یا تراوایی نسبی و  $\mu = \mu_0 \mu_r$  را قابلیت نفوذ یا تراوایی جسم می‌نامند.  $\mu_r$  در اجسام دیامغناطیسی اندکی از واحد کوچک‌تر و در اجسام پارامغناطیسی اندکی از واحد بزرگ‌تر است. ولی در اجسام فرومغناطیسی،  $\mu_r$  تابعی از میدان  $B$  بوده و مقداری به مراتب بزرگ‌تر از واحد دارد. به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$\mu = \begin{cases} < \mu_0 \\ \approx \mu_0 \\ >> \mu_0 \end{cases}$	$\mu_r \leq 1$ , $\chi_m \leq 0$ : برای اجسام دیامغناطیسی
	$\mu_r \geq 1$ , $\chi_m \geq 0$ : برای اجسام پارامغناطیسی
	$\mu_r >> 1$ , $\chi_m >> 0$ : برای اجسام فرومغناطیسی

برای یک جسم از نظر مغناطیسی خطی است اگر اندازه بردار  $M$  ایجاد شده در آن در هر نقطه متناسب با اندازه میدان کل در آن نقطه باشد و یک جسم از نظر مغناطیسی همسانگرد است وقتی که بردار  $M$  در هر نقطه آن موازی بردار میدان کل در آن نقطه باشد.

1 - Magnetic Susceptibility

$\int H \cdot dL = I$  به جریان الکتریکی ربط دارد.  
 $B = \mu_0 (H + M)$  به جریان الکتریکی و مغناطیسی ربط دارد.  
 $M = \chi_m H$  به چگالی جریان مغناطیسی ربط دارد.  
 $B = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 \mu_r H = \mu H$  به چگالی میدان مغناطیسی ربط دارد.

مثال ۶-۱ یک ماده مغناطیسی با ضریب حساسیت ثابت  $\chi_m$  ناحیه‌ای از فضا که بین دو صفحه موازی  $z=0$  و  $z=d$  قرار دارد، مطابق شکل ۶-۷، را پر می‌کند. میدان مغناطیسی یکنواخت  $B_a = B_0 \hat{a}_x$  به ماده مغناطیسی اعمال می‌گردد. چگالی شار مغناطیسی  $B$  و شدت میدان مغناطیسی  $H$  را در درون و بیرون جسم و همچنین چگالیهای جریانهای آمپری پدید آمده در درون و روی سطوح آن را محاسبه کنید. حل:

به دلیل یکنواخت بودن میدان اعمال شده  $B_a$  و نیز ثابت بودن ضریب حساسیت مغناطیسی  $\chi_m$ ، جسم به طور یکنواخت مغناطیس می‌شود. پس می‌توان نوشت:

حسب از  $M = \chi_m H$

$$M = M_0 \hat{a}_x \quad (18-6)$$

با میدان حاصل از جریان اعمالی  $M = \chi_m H$

جریانهای آمپری ناشی از گشتاور مغناطیسی حاصل، با استفاده از روابط ۶-۹ و ۶-۱۰ عبارتند از:

$B = B_0 + B_a$

$$J_{ms} = M \times \hat{a}_n = \begin{cases} M_0 \hat{a}_x \times \hat{a}_z = -M_0 \hat{a}_y & z = d \\ M_0 \hat{a}_x \times (-\hat{a}_z) = M_0 \hat{a}_y & z = 0 \end{cases} \quad (19-6)$$

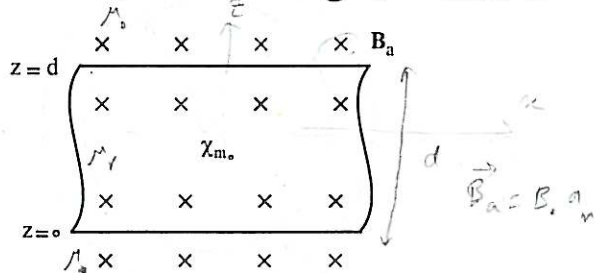
و:

$$J_m = \nabla \times M = 0 \quad (20-6)$$

بدین ترتیب ماده مغناطیسی را می‌توان با دو صفحه بینهایت جریان با چگالیهای داده شده در رابطه ۶-۱۹ جایگزین نمود. میدانی که این دو صفحه موازی جریان ایجاد می‌کنند همان میدان ثانویه است. قبلاً میدان مغناطیسی ناشی از یک صفحه بینهایت جریان را مطالعه نموده‌ایم و نتیجه در رابطه ۵-۲۴ سخلاصه شده است. با استفاده از این رابطه می‌توان به سادگی نشان داد که میدان حاصل از دو صفحه جریان مذکور برابر است با:

$$B_s = \begin{cases} \mu_0 M_0 \hat{a}_x & 0 < z < d \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases} \quad (21-6)$$

میدان مغناطیسی کل برابر حاصل جمع میدانهای اولیه و ثانویه است، یعنی:



شکل ۶-۷: ماده مغناطیسی در فضای محصور بین صفحات  $z=0$  و  $z=d$  و میدان مغناطیسی یکنواخت اعمال شده بر آن

$$B = B_a + B_s = \begin{cases} B_s \hat{a}_x + \mu_s M_s \hat{a}_x & 0 < z < d \\ B_s \hat{a}_x & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (22-6)$$

اما از طرف دیگر با استفاده از رابطه ۶-۱۶ می توان نوشت :

$$M = M_s \hat{a}_x = \frac{\chi_{m_s} B}{1 + \chi_{m_s} \mu_s} = \frac{\chi_{m_s} B_s + \mu_s M_s}{1 + \chi_{m_s} \mu_s} \hat{a}_x \quad (23-6)$$

پس از حل این معادله برای  $M_s$  داریم :

$$M_s = \frac{\chi_{m_s} B_s}{\mu_s} \quad (24-6)$$

اکنون با استفاده از رابطه ۶-۲۴ در رابطه ۶-۲۳، میدانهای  $B$  و  $H$  را می توان محاسبه و به شرح زیر خلاصه نمود :

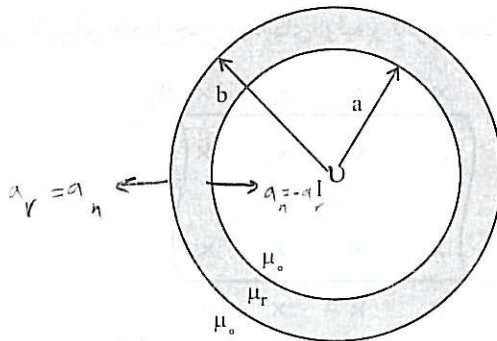
$$B = \begin{cases} B_s (1 + \chi_{m_s}) \hat{a}_x & 0 < z < d \\ B_s \hat{a}_x & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (25-6)$$

و :

$$H = \begin{cases} \frac{B}{\mu_s \mu_r} = \frac{B_s (1 + \chi_{m_s})}{\mu_s (1 + \chi_{m_s})} \hat{a}_x = \frac{B_s}{\mu_s} \hat{a}_x & 0 < z < d \\ \frac{B}{\mu_s} = \frac{B_s}{\mu_s} \hat{a}_x & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (26-6)$$

■

مثال ۶-۲ ناحیه  $a < r < b$  در مختصات استوانه‌ای با یک ماده مغناطیسی که قابلیت نفوذ نسبی آن  $\mu_r$  می باشد اشغال شده است. یک رشته سیم حامل جریان  $I$ ، مطابق شکل ۶-۸، در امتداد محور  $Z$  قرار داده می شود. میدانهای  $B$  و  $H$  را در تمام نقاط فضا و چگالیهای جریانهای مغناطیسی را در درون و روی سطوح ماده مغناطیسی محاسبه کنید.



شکل ۶-۸: جریان  $I$  در امتداد محور یک لایه استوانه‌ای شکل از ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ نسبی  $\mu_r$

حل:

به دلیل وجود تقارن استوانه‌ای نسبت به محور  $z$  و بینهایت بودن طول لایه استوانه‌ای شکل، میدان مغناطیسی مستقل از  $\varphi$  و  $z$  بوده و فقط دارای مؤلفه  $\hat{a}_\varphi$  می‌باشد، یعنی  $\mathbf{H} = H_\varphi \hat{a}_\varphi$  است. حال با استفاده از شکل انتگرالی قانون آمپر بر حسب  $\mathbf{H}$  می‌توان نوشت:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

که  $C$  محیط دایره‌ای به شعاع دلخواه  $r$  است که مرکز آن بر سیم جریان منطبق می‌باشد. به دلیل ثابت بودن  $\mathbf{H}$  روی مسیر  $C$  و اینکه جریان دربرگرفته شده توسط  $C$  مستقل از شعاع  $r$  و همیشه برابر  $I$  است، داریم:

یا:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\varphi (\gamma\pi r) = I$$

$$\mathbf{H} = H_\varphi \hat{a}_\varphi = \frac{I}{\gamma\pi r} \hat{a}_\varphi \quad 0 < r < \infty \quad (27-6)$$

اکنون بردار  $\mathbf{B}$  را می‌توان به سادگی از رابطه  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$  در هر ناحیه محاسبه کرد:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \mu_r I}{\gamma\pi r} \hat{a}_\varphi & a < r < b \\ \frac{\mu_0 I}{\gamma\pi r} \hat{a}_\varphi & 0 < r < a, r > b \end{cases} \quad (28-6)$$

با در دست داشتن  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{H}$ ، چگالی گشتاور دو قطبی مغناطیسی  $\mathbf{M}$  در ناحیه  $a < r < b$  برابر است با:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \left( \frac{\mu_0 \mu_r I}{\gamma\pi r \mu_0} - \frac{I}{\gamma\pi r} \right) \hat{a}_\varphi = \frac{(\mu_r - 1)I}{\gamma\pi r} \hat{a}_\varphi \quad (29-6)$$

با داشتن  $\mathbf{M}$ ، چگالیهای جریانهای مغناطیسی قابل محاسبه می‌باشند. برای جریان سطحی داریم:

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{a}}_n = \begin{cases} \frac{(\mu_r - 1)I}{\gamma\pi a} \hat{a}_\varphi \times (-\hat{\mathbf{a}}_r) = \frac{(\mu_r - 1)I}{\gamma\pi a} \hat{\mathbf{a}}_z & r = a \\ \frac{(\mu_r - 1)I}{\gamma\pi b} \hat{a}_\varphi \times (\hat{\mathbf{a}}_r) = -\frac{(\mu_r - 1)I}{\gamma\pi b} \hat{\mathbf{a}}_z & r = b \end{cases} \quad (30-6 \text{ الف})$$

و بالاخره چگالی جریان مغناطیسی حجمی برابر است با:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = -\frac{\partial M_\varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\varphi) \hat{\mathbf{a}}_z = 0 \quad (30-6 \text{ ب})$$

■

در مثال ۶-۲، در صورتی که  $a \rightarrow 0$  و  $b \rightarrow \infty$ ، تمام فضا را ماده مغناطیسی پر می‌کند و جریان مغناطیسی سطحی روی  $r = a$  به یک جریان خطی به مقدار  $\mathbf{I}_m = (\mu_r - 1)I$  تبدیل می‌شود، به طوری که اگر بخواهیم قانون مدار آمپر را بر حسب میدان  $\mathbf{B}$  بنویسیم باید مجموع جریانهای  $I$  و  $\mathbf{I}_m$ ، یعنی  $\mathbf{I}_m + I = \mu_r I$ ، را در رابطه ۵-۳۲ به کار ببریم.

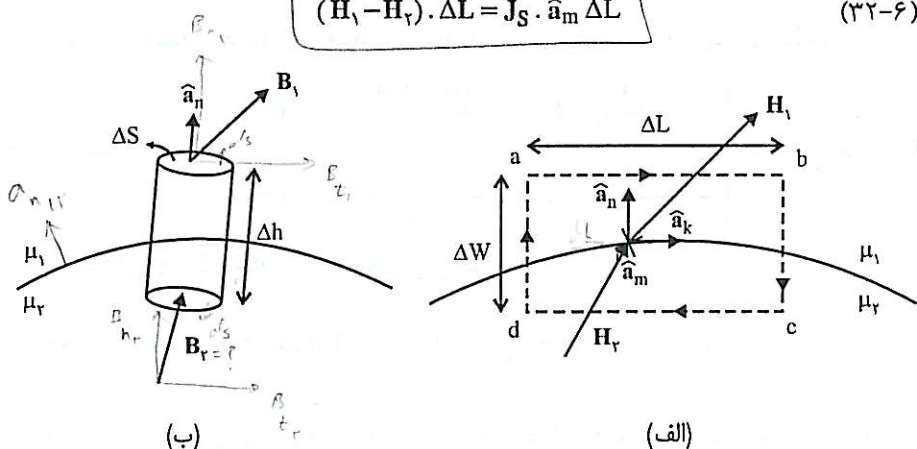
## ۳-۶ شرایط مرزی

برای بررسی رفتار میدان مغناطیسی در مرز مشترک دو ناحیه با قابلیت‌های نفوذ متفاوت از روشی مشابه آنچه که در مورد میدان الکتریکی در قسمتهای ۳-۳ و ۳-۶ به کار رفت استفاده می‌کنیم. برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های مماسی میدانهای مغناطیسی در مرز مشترک دو ناحیه با قابلیت‌های نفوذ  $\mu_1$  و  $\mu_2$ ، مسیر بسته مستطیلی شکل  $abcd$  را با ابعاد  $\Delta L$  و  $\Delta W$ ، مطابق شکل ۹-۶-الف در نظر گرفته، شکل انتگرالی قانون آمپر را به کار می‌بریم:

$$\oint_{abcd} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_{\text{سطح } abcd} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (۳۱-۶)$$

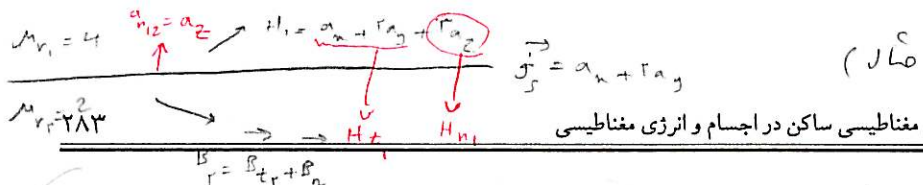
اکنون حد هر یک از دو طرف رابطه ۳۱-۶ را، وقتی که  $\Delta W$  به سمت صفر میل کند، به دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا انتگرال سمت چپ رابطه ۳۱-۶ را به چهار انتگرال روی اضلاع مستطیل  $abcd$  تجزیه می‌کنیم. واضح است که مقدار این انتگرال روی اضلاع  $bc$  و  $da$ ، وقتی که  $\Delta W \rightarrow 0$ ، بسیار کوچک شده و در حد به سمت صفر میل می‌کند و در نتیجه سمت چپ رابطه ۳۱-۶ به  $(H_1 - H_2) \cdot \Delta L$  ساده می‌شود که  $\Delta L$  برداری در جهت  $a$  به  $b$  است. حال ببینیم که حد سمت راست رابطه مذکور، وقتی که  $\Delta W \rightarrow 0$ ، چیست؟ تردیدی نیست که وقتی  $\Delta W \rightarrow 0$ ، سطح مستطیل  $abcd$  نیز به سمت صفر میل کرده و چنانچه در اطراف مرز مشترک دو ناحیه فقط یک جریان حجمی وجود داشته باشد، مقدار انتگرال سمت راست رابطه ۳۱-۶ و به عبارت دیگر جریان دربرگرفته شده توسط مسیر  $abcd$ ، صفر خواهد شد. اما در صورتی که جریانی سطحی با چگالی  $\mathbf{J}_s$  در مرز مشترک دو ناحیه موجود باشد، این انتگرال مقداری غیر صفر و برابر با  $(\mathbf{J}_s \cdot \hat{\mathbf{a}}_m) \Delta L$  خواهد داشت که  $\hat{\mathbf{a}}_m$  بردار واحد عمود بر سطح مستطیل  $abcd$  است. بدین ترتیب، رابطه ۳۱-۶ به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$(H_1 - H_2) \cdot \Delta L = \mathbf{J}_s \cdot \hat{\mathbf{a}}_m \Delta L \quad (۳۲-۶)$$



شکل ۹-۶: میدان مغناطیسی در مرز دو ناحیه (الف) برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های مماسی میدانها (ب) برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های عمودی میدانها





فصل ۶: میدان مغناطیسی ساکن در اجسام و انرژی مغناطیسی

در اینجا برای سادگی محاسبات بعدی، بردار واحد  $\hat{a}_k$  را موازی با  $\Delta L$  و بردار واحد  $\hat{a}_n$  را عمود بر سطح مشترک دو ناحیه، در نقطه‌ای از مرز که میدان مغناطیسی در آن مورد بررسی است و در جهت ناحیه ۲ به ناحیه ۱ تعریف می‌کنیم. شکل ۶-۹-الف این دو بردار را نشان می‌دهد. اکنون با توجه به اینکه  $\Delta L = \Delta L \hat{a}_k$  و  $\hat{a}_k = \hat{a}_m \times \hat{a}_n$  است، رابطه ۶-۳۲ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\vec{H}_1 = \underbrace{(a_x + 2a_y)}_{H_{r1}} + \underbrace{(1a_z)}_{H_{r2}} \quad (\hat{a}_m \times \hat{a}_n) \cdot (H_1 - H_2) \Delta L = J_s \cdot \hat{a}_m \Delta L \quad (33-6)$$

پس از حذف  $\Delta L$  از طرفین رابطه ۶-۳۳ و تغییر ترتیب ضربهای داخلی و خارجی در عبارت سمت چپ بر اساس اتحاد  $(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A$ ، داریم:

$$\vec{B}_{n1} = \mu H_{n1} = \mu J_s (\hat{a}_z) \quad [\hat{a}_n \times (H_1 - H_2)] \cdot \hat{a}_m = J_s \cdot \hat{a}_m \quad (34-6)$$

رابطه ۶-۳۴ یکی از شرایط مرزی مورد نظر می‌باشد. باید توجه داشت که این رابطه به صورت برداری است. در صورتی که  $J_s$  در امتداد عمود بر مؤلفه‌های مماسی  $H_1$  و  $H_2$  باشد، شرط مرزی ۶-۳۴ شکل

$$\vec{H}_1 - \vec{H}_2 = J_s \hat{a}_z \quad \vec{B}_{r1} = \mu H_{r1} = \mu (-3a_x - a_y) \quad (35-6)$$

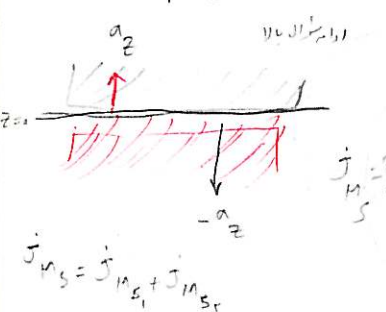
که  $H_1$  و  $H_2$  به ترتیب مؤلفه‌های مماسی  $H_1$  و  $H_2$  می‌باشند. روابط ۶-۳۴ و ۶-۳۵ بیان می‌دارند که در هر نقطه در مرز مشترک دو ناحیه، مؤلفه مماسی شدت میدان مغناطیسی به اندازه چگالی جریان سطحی در آن نقطه ناپیوسته است. یادآوری می‌شود که  $J_s$  چگالی جریان آزاد است و در صورتی که مقدار آن صفر باشد، مؤلفه مماسی شدت میدان مغناطیسی در مرز دو ناحیه همواره پیوسته است. برای تعیین رابطه بین مؤلفه‌های عمودی میدانها در مرز دو ناحیه، یک سطح استوانه‌ای شکل به ارتفاع  $\Delta h$  و مساحت قاعده  $\Delta S$ ، مطابق شکل ۶-۹-ب، در نظر گرفته و رابطه ۵-۸۱ را به کار می‌بریم:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad S = \text{سطح کل استوانه} \quad \text{حد انتگرال مزبور، وقتی که } \Delta h \rightarrow 0, \text{ عبارت است از:}$$

$$B_2 \cdot \Delta S - B_1 \cdot \Delta S = 0 \quad \hat{a}_n \cdot (B_2 - B_1) \Delta S = 0$$

$$\hat{a}_n \cdot (B_2 - B_1) = 0 \quad (36-6)$$

رابطه ۶-۳۶ یکی دیگر از شرایط مرزی برای میدان مغناطیسی است که شکل نرده‌ای آن به صورت زیر نوشته می‌شود:



سؤال: اگر  $A \cdot B = C \cdot B$  باشد، لزوماً  $A = C$  نخواهد بود. چرا شرط مرزی مندرج در رابطه ۶-۳۴ که از رابطه قبلی‌اش نتیجه‌گیری شده است همواره صحیح است؟

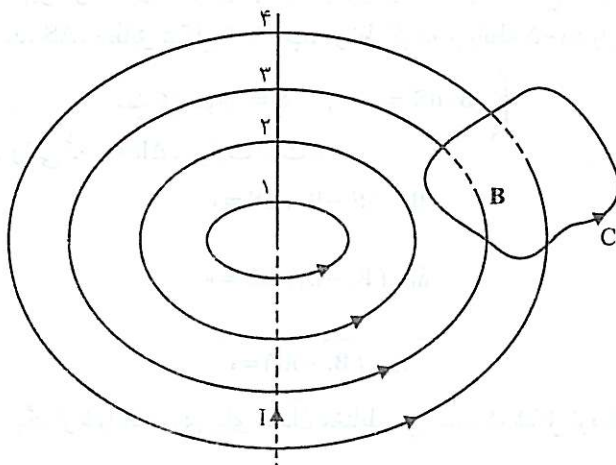
$$\star \boxed{B_{n_2} - B_{n_1} = 0} \star \quad (۳۷-۶)$$

که  $B_{n_1}$  و  $B_{n_2}$  به ترتیب مؤلفه‌های عمودی میدانهای مغناطیسی  $B_1$  و  $B_2$  می‌باشند. رابطه ۳۷-۶ بیان می‌کند که در هر نقطه در مرز مشترک دو ناحیه، مؤلفه عمودی چگالی شار مغناطیسی همواره پیوسته است.

### ۴-۶ ضرایب خودالقایی و القای متقابل

قبل از پرداختن به تعاریف و محاسبات مربوط به ضرایب خودالقایی و القای متقابل (اندوکتانس و اندوکتانس متقابل)، گفتاری پیرامون شار مغناطیسی گذرنده از یک مدار جریان و مفهوم پیوند شار مغناطیسی با مدار ضروری به نظر می‌رسد. همان‌طور که در قسمت ۵-۷ شرح داده شد، خطوط میدان مغناطیسی همیشه به صورت منحنی‌های بسته می‌باشند. بنابراین اگر مدار جریانی در معرض یک میدان مغناطیسی قرار گیرد، دسته‌ای از خطوط میدان از مدار می‌گذرند، بدین معنا که هر یک از این خطوط و مدار بسته جریان همانند دو حلقه زنجیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند. در اینجا اصطلاحاً گفته می‌شود که این دسته خطوط میدان با مدار جریان پیوند دارند. اما دسته دیگری از خطوط میدان از مدار جریان عبور نکرده و به صورت حلقه‌هایی جدا از مدار بسته می‌باشند و به عبارت دیگر با مدار پیوند ندارند. شکل ۶-۱۰ تصویر روشن‌تری از مفهوم پیوند خطوط میدان با یک مدار را نشان می‌دهد. در این شکل خطوط میدان متعلق به یک سیم طویل جریان می‌باشند. به طوری که ملاحظه می‌شود، خطوط میدان ۳ و ۴ با مدار C دارای پیوند بوده در حالی که خطوط ۱ و ۲ پیوندی با آن ندارند. میزان پیوند میدان مغناطیسی B با مدار جریان C را ممکن است با مقدار شار گذرنده از آن بیان داشت. با توجه به اینکه B چگالی شار مغناطیسی محسوب می‌شود، مقدار شار گذرنده از مدار C عبارت است از:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (۳۸-۶)$$

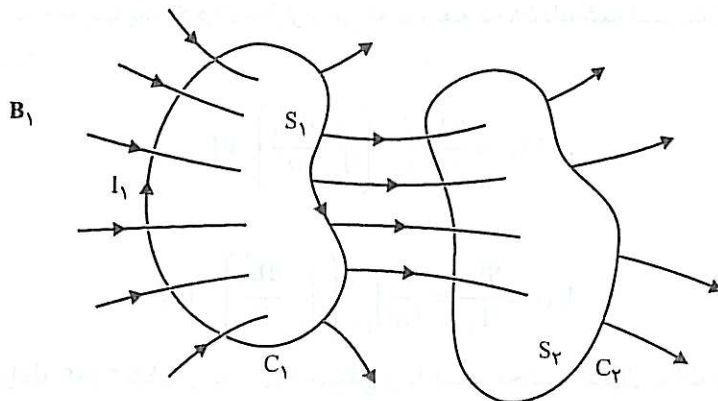


شکل ۶-۱۰: نمایش پیوند خطوط میدان مغناطیسی B با مدار C

که  $S$  سطح دلخواهی است که به مدار بسته  $C$  محدود گردد. بدیهی است که هر جریانی با تمامی میدان مغناطیسی ناشی از خودش پیوند دارد. محاسبه شار گذرنده از مداری که همانند مدار  $C$  در شکل ۶-۱۰ دارای یک حلقه باشد را همواره می توان بدون ابهام انجام داد. اما در بسیاری از موارد عملی تعداد حلقه های یک مدار بیش از یک است و بنابراین در تعیین شار گذرنده از چنین مدارهایی باید دقت کافی داشت. در واقع آنچه در این گونه مدارها در خور توجه است سطحی است که خطوط میدان از آن می گذرند. برای روشن شدن مطلب مداری به شکل یک سیم پیچ با  $N$  حلقه یکسان را در نظر گرفته و فرض می کنیم که خطوط میدان  $B$  به یک میزان از تمام حلقه ها بگذرند. با گذشتن خطوط میدان از یک حلقه تنها شار  $\phi = \int_S B \cdot dS$  ایجاد می شود، اما چون همان خطوط میدان از  $N-1$  حلقه دیگر نیز می گذرند در هر یک از آنها شاری به اندازه  $\phi$  ایجاد می شود. بنابراین، مقدار کل شار گذرنده از سیم پیچ برابر  $\Psi = N\phi$  است. به عبارت دیگر می توان بیان داشت که خطوط میدان از سطحی معادل  $N$  برابر سطح یک حلقه، که در حقیقت همان سطح سیم پیچ است، می گذرند و شاری به اندازه  $N$  برابر شار یک حلقه را به وجود می آورند. در حالت کلی که حلقه های سیم پیچ ممکن است یکسان نباشند و یا خطوط میدان به یک میزان از آنها نگذرند، شار حلقه ها با یکدیگر مساوی نیستند و شار کل را باید از مجموع شارهای حلقه ها به دست آورد، یعنی  $\Psi = \sum_{i=1}^N \phi_i$  که شار گذرنده از

حلقه  $i$ ام است. پس به طور خلاصه در مداری با  $N$  حلقه، شار  $\phi$  عموماً با  $N$  حلقه پیوند دارد و  $N$  بار جریان مدار را در بر می گیرد. کمیت  $\Psi$ ، که معرف میزان پیوند یک میدان مغناطیسی با یک مدار جریان است، را پیوند شار<sup>۱</sup> می نامند و با واحد و بر- دور اندازه گیری می کنند.

اکنون پس از توضیحات فوق به اصل مطلب که مطالعه ضرایب خودالقایی و القای متقابل است برمی گردیم. برای این منظور دو مدار تک حلقه ای  $C_1$  و  $C_2$  را مطابق شکل ۶-۱۱ در نظر گرفته و فرض می کنیم که مدار  $C_1$  حامل جریان  $I_1$  باشد. یادآوری می شود که تک حلقه ای در نظر گرفتن مدارهای  $C_1$



شکل ۶-۱۱: پیوند میدان مغناطیسی  $B_1$  حاصل از جریان  $I_1$  با مدارهای  $C_1$  و  $C_2$

$$L_{11} = \frac{1}{I_1} \int_{S_1} B \cdot dS$$

در صورت همبستگی یا نهمی با سیم

$$L_{11} = \frac{1}{I_1} \int_{S_1} B \cdot dS$$

و  $C_2$  فقط برای سادگی کار بوده و لطمه‌ای به عمومیت مسئله وارد نمی‌سازد. جریان  $I_1$  تولید میدان مغناطیسی  $B_1$  را می‌نماید که کاملاً با مدار  $C_1$  و بخشی از آن با مدار  $C_2$  پیوند پیدا می‌کند. اگر شار کل گذرنده از مدار  $C_1$  و ناشی از جریان  $I_1$  را با  $\Psi_{11}$  و شار کل گذرنده از مدار  $C_2$  و ناشی از جریان مدار  $C_1$  را با  $\Psi_{21}$  نشان دهیم، ضرایب خودالقایی و القای متقابل به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{\text{شار کل گذرنده از مدار } C_1 \text{ و ناشی از جریان } I_1}{\text{جریان مدار } C_1} \quad (39-6)$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\text{شار کل گذرنده از مدار } C_2 \text{ و ناشی از جریان } I_1}{\text{جریان مدار } C_1} = L_{21} \quad (40-6)$$

که  $L_{11}$  ضریب خودالقایی مدار  $C_1$  و  $M_{21}$  ضریب القای متقابل بین دو مدار  $C_1$  و  $C_2$  می‌باشد. ضرایب خودالقایی و القای متقابل همانند ظرفیت و مقاومت فقط به شکل و ابعاد هندسی مدارها و پارامترهای محیط (در اینجا قابلیت نفوذ) بستگی داشته و مستقل از جریانهای مدارها هستند. واحد اندازه‌گیری این ضرایب هانری نام دارد. یک هانری مساوی یک وبر بر یک آمپر است. قبلاً در رابطه ۳-۹۶ نشان داده‌ایم که انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک خازن متناسب با ظرفیت آن است و به طوری که بعد خواهیم دید انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک خودالقا (سلف) نیز متناسب با ضریب  $L$  می‌باشد. بنابراین اگر  $C$  ظرفیت الکتریکی تلقی شود  $L$  مفهوم ظرفیت مغناطیسی را دربر خواهد داشت. برای کسب شناخت بیشتر نسبت به این دو کمیت جدید به محاسبه آنها می‌پردازیم.

دما سرن:  $[L] = \frac{W \cdot s}{A} = \text{Henry}$

$$\Psi_{11} = \int_{S_1} B_1 \cdot dS = \int_{S_1} (\nabla \times A_1) \cdot dS = \oint_{C_1} A_1 \cdot dL_1 \quad (41-6)$$

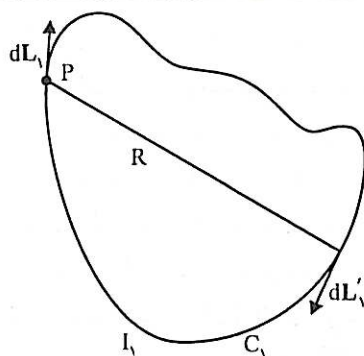
در رابطه ۶-۴۱ تبدیل انتگرال سطح به انتگرال خط با استفاده از قضیه استوکس صورت گرفته است. پتانسیل برداری  $A_1$  به نوبه خود با یک انتگرال خط از نوعی که در رابطه ۵-۵۸ داده شده است بیان می‌گردد. پس می‌توان نوشت:

$$\Psi_{11} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \left( \oint_{C_1} \frac{dL'_1}{R} \right) \cdot dL_1$$

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \left( \oint_{C_1} \frac{dL'_1}{R} \right) \cdot dL_1 \quad (42-6)$$

آنگاه:

همان‌طور که رابطه ۶-۴۲ نشان می‌دهد،  $L_{11}$  مستقل از  $I_1$  است. محاسبه انتگرال دوگانه در رابطه مزبور بدین صورت انجام می‌پذیرد که ابتدا نقطه دلخواه  $P$  را روی مدار  $C_1$ ، که دوباره در شکل ۶-۱۲ نشان داده شده است، در نظر گرفته و انتگرال  $dL'_1/R$ ، که در آن  $R$  فاصله عنصر طول  $dL'_1$  از نقطه  $P$  است، را محاسبه می‌کنیم. سپس مقدار انتگرال مزبور را در  $dL_1$  که در محل نقطه  $P$  است ضرب داخلی نموده و آنگاه از کمیت نرده‌ای حاصل، روی مسیر  $C_1$  انتگرال می‌گیریم تا نتیجه نهایی به دست آید. در



شکل ۶-۱۲: مدار تک حلقه‌ای  $C_1$  حامل جریان  $I_1$  و نحوه محاسبه انتگرال دوگانه در رابطه ۶-۴۲

اینجا ذکر یک نکته مهم ضروری است. اگر سطح مقطع سیم مدار جریان بینهایت کوچک باشد، در محاسبه انتگرال  $\oint_{C_2} \frac{dL_1}{R}$  وقتی که  $dL_1$  در محل نقطه  $P$  قرار می‌گیرد،  $R$  صفر شده و مقدار این انتگرال و در نتیجه ضریب خودالقایی بینهایت می‌شود. البته در عمل چون جریان مدار از سطح مقطع غیرصفر و محدودی می‌گذرد، ضریب خودالقایی مدار همواره مقدار محدودی دارد.

برای محاسبه ضریب القای متقابل بین مدارهای  $C_1$  و  $C_2$ ، در شکل ۶-۱۱، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Psi_{21} &= \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{L}_2 \\ &= \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{L}_1 \cdot d\mathbf{L}_2}{R_{21}} \end{aligned}$$

آنگاه:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{L}_1 \cdot d\mathbf{L}_2}{R_{21}} \quad (۶-۴۳)$$

که  $R_{21}$  فاصله عنصر طول  $dL_2$  روی مدار  $C_2$  از عنصر طول  $dL_1$  روی مدار  $C_1$  می‌باشد. به طوری که ملاحظه می‌شود انتگرال دوگانه در رابطه ۶-۴۳ نسبت به اندیسهای ۱ و ۲ متقارن است، بنابراین با تعویض این اندیسها می‌توان نتیجه گرفت که:

$$M_{21} = M_{12} \quad (۶-۴۴)$$

می‌دانیم که یک انتگرال خط، بر حسب جهتی که برای مسیر انتگرال‌گیری در نظر گرفته می‌شود، ممکن است مقداری مثبت یا منفی داشته باشد. بنابراین، در رابطه ۶-۴۲ که انتگرال‌گیری دوبار روی یک مسیر انجام می‌گیرد همواره مقدار مثبتی برای ضریب خودالقایی یک مدار به دست می‌آید. اما، در رابطه ۶-۴۳، بر حسب اینکه جهت‌های مدارهای  $C_1$  و  $C_2$  چه وضعیتی نسبت به یکدیگر داشته باشند، ضریب القای متقابل بین دو مدار ممکن است مقداری مثبت یا منفی داشته باشد. یادآوری می‌شود که

جهت یک مدار همان جهت جریان گذرنده از آن است. گرچه انتگرالهای دوگانه در روابط ۴۲-۶ و ۴۳-۶ برای توصیف ویژگیهای ضرایب خودالقایی و القای متقابل بسیار مفید هستند، ولی محاسبه این ضرایب به کمک آنها چندان آسان نخواهد بود. خوشبختانه در بسیاری از مسائل عملی نیازی هم به محاسبه این انتگرالها نیست و اغلب روابط ساده ۳۹-۶ و ۴۰-۶ کفایت می‌کنند.

به طور خلاصه، برای محاسبه ضریب خودالقایی یک مدار، جریان  $I$  (با توزیع خطی، سطحی یا حجمی بر حسب موقعیت مسئله) را در مسیر بسته مدار در نظر گرفته و میدان مغناطیسی حاصل از آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مقدار کل شار گذرنده از سطح مسیر جریان ( $\Psi$ ) را از رابطه  $\int_S \mathbf{NB} \cdot d\mathbf{S}$  به دست می‌آوریم. باید توجه شود که  $N$  ممکن است همیشه عدد صحیحی نباشد. آنگاه، ضریب خودالقایی مدار از رابطه  $L = \Psi/I$  به دست می‌آید. (مرحله آخر را می‌توان به گونه دیگری نیز انجام داد که ممکن است سادگی بیشتری در محاسبه ضریب خودالقایی فراهم آورد. پس از محاسبه میدان مغناطیسی، انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم را با استفاده از رابطه  $W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \int_V H^2 dV$  به دست می‌آوریم. آنگاه،  $L = 2W_m/I^2$  خواهد بود. بحث کامل این روش در قسمت ۶-۶ خواهد آمد.)

برای محاسبه ضریب القای متقابل بین دو مدار، به یکی از مدارها جریان  $I_1$  را منسوب می‌کنیم و میدان مغناطیسی حاصل از آن مدار را محاسبه می‌نماییم. معمولاً، مداری را برای این منظور در نظر می‌گیریم که محاسبه میدان آن از سادگی بیشتری برخوردار باشد. سپس شار کل گذرنده از مدار دیگر ( $\Psi_{21}$ ) را به دست می‌آوریم. سرانجام نسبت  $\Psi_{21}/I_1$  ضریب القای متقابل بین دو مدار را تعیین می‌کند. مثال ۳-۶ ضریب خودالقایی یک سیملوله طویل را به ازای واحد طول تعیین کنید. شعاع سیملوله برابر  $a$  و تعداد دورهای سیم‌پیچ آن در واحد طول برابر  $n$  فرض می‌شود.

حل:

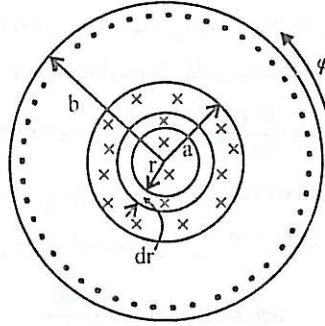
میدان مغناطیسی یک سیملوله طویل را قبلاً در مثال ۵-۶ محاسبه نمودیم. نتیجه که در رابطه ۵-۴۱ خلاصه شده است، نشان می‌دهد که میدان در درون سیملوله، یکنواخت و برابر  $B = \mu_0 n I$  و در خارج آن صفر است. بنابراین شار کل گذرنده از واحد طول سیملوله عبارت است از:

$$\Psi = n\phi = nB \pi a^2 = \mu_0 \pi a^2 n^2 I$$

آنگاه:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \pi a^2 n^2 \quad (۴۵-۶)$$

مثال ۴-۶ جریان  $I$  با چگالی حجمی یکنواخت  $\mathbf{J} = I \cdot \mathbf{\hat{z}}$  از یک هادی استوانه‌ای شکل به طول بینهایت و به شعاع  $a$  گذشته و با یک توزیع سطحی یکنواخت از طریق یک سطح استوانه‌ای هادی به شعاع  $b > a$  که هم‌محور با هادی درونی است برمی‌گردد. این مجموعه که سطح مقطع آن در شکل ۶-۱۳ نشان داده شده است تشکیل یک کابل هم‌محور را می‌دهد. ضریب خودالقایی این کابل هم‌محور را به ازای واحد طول محاسبه نمایید.



شکل ۶-۱۳: سطح مقطع یک کابل هم‌محور و نحوه محاسبه ضریب خودالقایی آن

حل:

با توجه به تقارن استوانه‌ای مسئله و جهت جریان  $I$ ، می‌توان نتیجه گرفت که میدان مغناطیسی فقط مؤلفه‌ای در جهت  $\hat{a}_\phi$  دارد که مستقل از  $\phi$  و  $z$  است. پس با به کار بردن قانون مداری آمپر روی یک مسیر دایره‌ای شکل به شعاع  $r < a$ ، میدان در هادی درونی به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$B_{\phi_1}(2\pi r) = \mu \pi r^2 J_0$$

یا:

$$B_1 = B_{\phi_1} \hat{a}_\phi = \frac{1}{4} \mu J_0 r \hat{a}_\phi \quad 0 < r < a$$

که  $\mu$  قابلیت نفوذ هادی درونی است. برای محاسبه شار کل گذرنده از واحد طول هادی درونی که با جریان  $I$  پیوند داشته باشد، ابتدا مستطیلی به طول واحد در جهت  $z$  و به عرض  $dr$  در جهت  $r$  و به فاصله  $r$  از محور کابل در نظر می‌گیریم. شار گذرنده از این سطح مستطیلی شکل عبارت است از:

$$d\phi_1 = B_1 \cdot dS_1 = \frac{1}{4} \mu J_0 r (1 \times dr) = \frac{1}{4} \mu J_0 r dr$$

اما شار  $d\phi_1$  فقط کسری از جریان  $I$  را دربرمی‌گیرد. اگر این کسر را  $N$  بنامیم، می‌توان گفت که شار  $d\phi_1$ ،  $N$  بار جریان  $I$  را دربرگرفته است و به عبارت دیگر  $d\phi_1$  به میزان  $d\Psi_1 = N d\phi_1$  با تمامی جریان  $I$  پیوند دارد. اما مقدار  $N$  عبارت است از:

$$N = \frac{\text{جریان دربرگرفته شده توسط دایره به شعاع } r}{I} = \frac{\pi r^2 J_0}{\pi a^2 J_0} = \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

برای به دست آوردن مقدار کل شاری که از هادی درونی گذشته و با جریان  $I$  پیوند داشته باشد از  $d\Psi_1$  انتگرال می‌گیریم:

$$\Psi_1 = \int N \mu d\phi_1 = \int_0^a \frac{1}{4} \mu J_0 r \left(\frac{r}{a}\right)^2 dr = \frac{1}{8} \mu J_0 a^2 \quad (۶-۴۶)$$

حال، شار گذرنده از ناحیه  $a < r < b$  را به دست می آوریم. برای این منظور ابتدا میدان مغناطیسی را با استفاده از قانون مداری آمپر در این ناحیه محاسبه می کنیم. به سادگی می توان نشان داد که:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \quad a < r < b$$

شار گذرنده از عنصر سطح  $dS_r = r dr$  به ازای همه مقادیر  $a < r < b$  تمامی جریان  $I$  را دربرمی گیرد و به عبارت دیگر در این حالت  $N$  برابر واحد است. پس می توان نوشت:

$$d\phi_r = B_r \cdot dS_r = \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r}$$

و:

$$\Psi_r = \int N d\phi_r = \int_a^b \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

و سرانجام ضریب خودالقایی به ازای واحد طول عبارت است از:

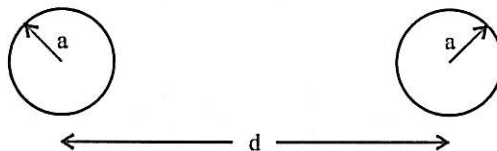
$$L = \frac{\Psi_r + \Psi_r}{I} = \frac{\mu}{\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (۴۷-۶)$$

ملاحظه می شود که  $L$  از دو جزء تشکیل می شود. جزء  $\mu/\pi$  را ضریب خودالقایی درونی هادی درونی می نامند. جالب توجه است که ضریب خودالقایی درونی یک هادی مستقل از شعاع آن بوده و همیشه برابر مقدار ثابت  $\mu/\pi$  است. اگر هادی درونی کابل نیز به صورت یک سطح استوانه‌ای (توخالی) به شعاع  $a$  باشد، ضریب خودالقایی کابل در واحد طول فقط شامل جزء دوم، یعنی برابر با  $(\mu_0/2\pi) \ln(b/a)$  خواهد بود.

مثال ۵-۶ یک نوع خط انتقال که کاربرد فراوانی در سیستمهای مخابراتی دارد از دو سیم موازی طویل تشکیل می شود. شکل ۶-۱۴ سطح مقطع این خط انتقال، که در آن شعاع هر یک از سیمهای هادی برابر  $a$  و فاصله هادیه‌ها از یکدیگر برابر  $d$  است ( $d > a$ )، را نشان می دهد. ضریب خودالقایی این خط انتقال را به ازای واحد طول تعیین کنید. قابلیت‌های نفوذ محیط و هادیه‌ها را برابر  $\mu$  فرض کنید.

حل:

برای تعیین ضریب خودالقایی خط انتقال در واحد طول، باید شار کلی که از یک سطح مستطیلی شکل به طول واحد و به عرض فاصله دو هادی می گذرد و با جریان  $I$  پیوند دارد را محاسبه کنیم. ابتدا هادی سمت چپ را در نظر می گیریم. شاری که از جریان این هادی ناشی می شود و با  $I$  پیوند دارد شامل سه مؤلفه به شرح ذیل می باشد:



شکل ۶-۱۴: سطح مقطع خط انتقالی متشکل از دو سیم هادی موازی



- شار ایجاد شده در درون خود هادی که در مثال قبل مقدار آن را برابر  $\Psi_1 = \mu_0 I / 8\pi$  محاسبه نمودیم. شاری که از ناحیه  $a < r < d-a$  می‌گذرد و مقدار آن برابر است با:

$$\Psi_2 = \phi_2 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{d-a} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) (2\pi r dr) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right)$$

- شاری که از ناحیه  $d-a < r < d+a$  می‌گذرد و فقط با کسری از  $I$  پیوند دارد، زیرا خطوط میدان مغناطیسی بخشی از جریان برگشت را دربرمی‌گیرند. از این مؤلفه به واسطه  $d > a$  و کمتر بودن پیوند آن با  $I$  در مقایسه با دو مؤلفه دیگر، صرف‌نظر می‌کنیم.

بدیهی است که برای  $r > d+a$ ، شار متعلق به هادی سمت چپ هیچ‌گونه پیوندی با  $I$  ندارد. پس به طور خلاصه، شار کل ناشی از جریان هادی سمت چپ که از سطح مستطیلی شکل به طول واحد می‌گذرد عبارت است از:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a} \right) \quad (48-6)$$

حال باید شار کل ناشی از جریان هادی سمت راست را که از سطح مستطیلی شکل مذکور می‌گذرد نیز به دست آورد. پس از قدری تعمق می‌توان دریافت که این شار مساوی شار محاسبه شده برای هادی سمت چپ است، به طوری که شار ناشی از هر دو هادی دو برابر مقدار داده شده در رابطه ۴۸-۶ می‌باشد. یعنی:

$$\Psi_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a} \right)$$

آنگاه:

$$L = \frac{\Psi_{\text{tot}}}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a} \right)$$

اما چون  $d \gg a$  است،  $d-a \approx d$  بوده و نتیجه به صورت زیر خلاصه می‌شود:

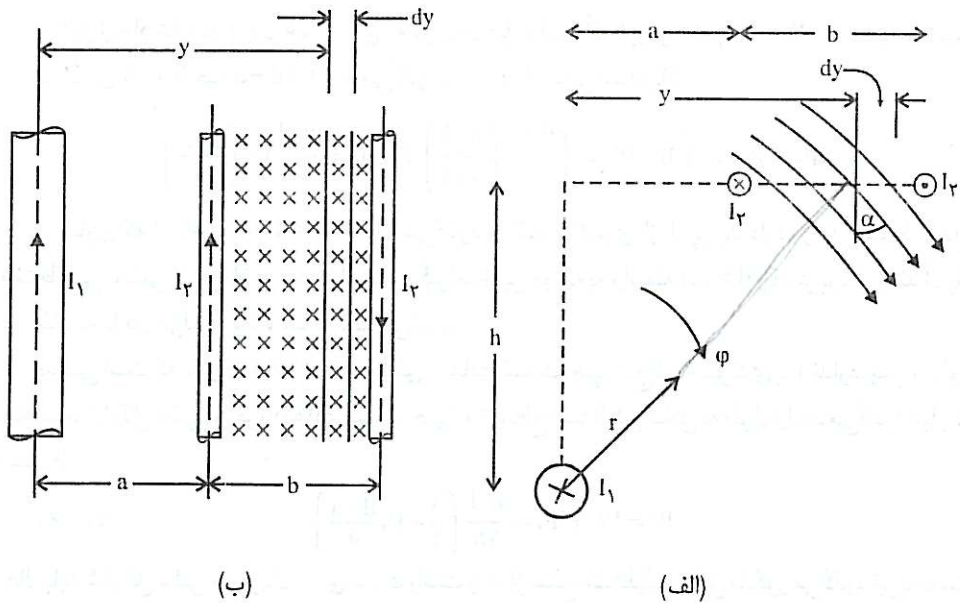
$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right) \quad (49-6)$$

ملاحظه می‌کنیم که در رابطه ۴۹-۶ اگر  $a \rightarrow 0$ ، ضریب خودالقایی به سمت بینهایت میل خواهد کرد و این همان چیزی است که وقوع آن را قبلاً ضمن بررسی انتگرال دوگانه رابطه ۴۲-۶ پیش‌بینی کرده بودیم.

■ مثال ۶-۶ یک رشته سیم مستقیم بینهایت طویل و حامل جریان  $I_1$  در پایین، سمت چپ و موازی با یک خط تلفن دو سیمی که جریان  $I_2$  از آن می‌گذرد قرار می‌گیرد. شکل ۱۵-۶ سطح مقطع و تصویر از بالای این مجموعه را نشان می‌دهد. ضریب القای متقابل بین رشته سیم تنها و خط تلفن را به ازای واحد طول محاسبه نمایید. قطر سیمهای تلفن ناچیز فرض می‌شوند.

حل:

با انتخاب یک دستگاه مختصات که محور  $z$  آن بر سیم حامل جریان  $I_1$  منطبق باشد و به کار بردن قانون مداری آمپر روی یک مسیر دایره‌ای شکل حول این سیم، میدان مغناطیسی ناشی از جریان  $I_1$  عبارت می‌شود از:



شکل ۶-۱۵: یک خط تلفن دوسیمی و یک رشته سیم موازی با آن و نحوه محاسبه ضریب القای متقابل بین آنها (الف) سطح مقطع (ب) تصویر از بالا

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

شار مغناطیسی  $d\Psi_{r1}$  ناشی از جریان  $I_1$  ناشی شود و از یک سطح مستطیلی شکل واقع بین دو سیم تلفن، به طول واحد و به عرض  $dy$ ، بگذرد عبارت است از:

$$d\Psi_{r1} = B \cdot dS = B dy \cos \alpha$$

که  $\alpha$  زاویه بین خطوط میدان و بردار واحد عمود بر سطح مستطیلی شکل  $dS$  است. با مراجعه به شکل ۶-۱۵-الف می توان نشان داد که:

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}}$$

پس:

$$d\Psi_{r1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{y dy}{y^2 + h^2}$$

و:

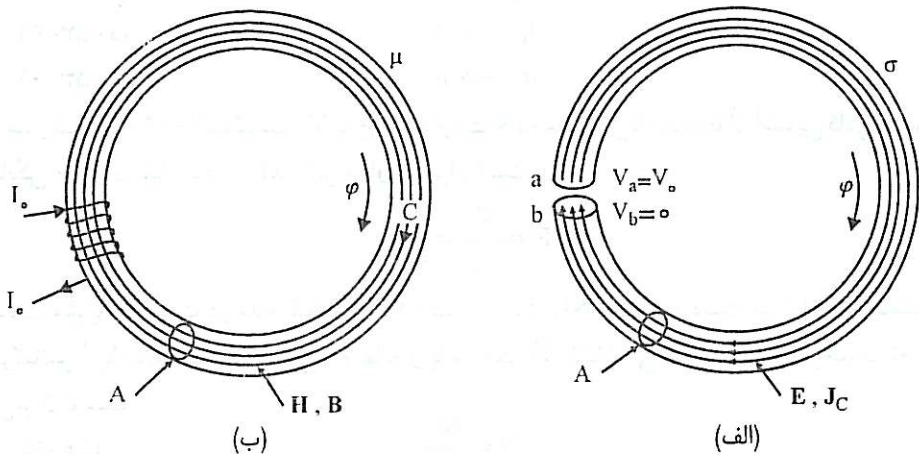
$$\Psi_{r1} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{y dy}{y^2 + h^2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln \frac{h^2 + (a+b)^2}{h^2 + a^2}$$

و سرانجام ضریب القای متقابل مورد نظر برابر است با:

$$M_{r1} = \frac{\Psi_{r1}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{h^2 + (a+b)^2}{h^2 + a^2} \quad (50-6)$$

## ۵-۶ مدارهای مغناطیسی

یکی از مسائل عملی که دارای اهمیت زیادی است، محاسبه شار مغناطیسی ایجاد شده توسط یک یا چند سیم پیچ جریان به دور هسته‌ای آهنی، به شکل یک مدار بسته، می‌باشد. با چنین مسئله‌ای در ترانسفورماتورها، ماشینهای الکتریکی، کلیدهای برقی و بسیاری از ادوات الکتریکی دیگر که بر اساس میدان الکترومغناطیس کار می‌کنند برخورد می‌کنیم. این گونه سیستمها را به دلیل تشابهی که با مدارهای الکتریکی (مقاومتی) دارند مدارهای مغناطیسی نامیده و با روش‌هایی کاملاً مشابه روشهای حل مدارهای الکتریکی مورد بررسی قرار می‌دهند. برای پی بردن به خصوصیات مدارهای مغناطیسی و تعیین وجوه تشابه آنها با مدارهای الکتریکی، ابتدا دو مدار ساده شکل ۶-۱۶ را در نظر می‌گیریم. مدار شکل ۶-۱۶-الف از یک حلقه هادی با رسانایی یکنواخت  $\sigma$ ، محیط متوسط  $l$  و سطح مقطع  $A$  تشکیل شده است. اختلاف پتانسیل  $V$  از طریق شکاف بسیار کوچک  $ab$  به حلقه هادی اعمال می‌گردد. این اختلاف پتانسیل، میدان الکتریکی  $E$  را در درون هادی به وجود می‌آورد که از آن جریان هدایتی  $J_C = \sigma E$  ناشی می‌شود. مدار شکل ۶-۱۶-ب نیز از یک حلقه با ابعادی برابر ابعاد حلقه شکل ۶-۱۶-الف و از جنس یک ماده مغناطیسی با قابلیت نفوذ یکنواخت  $\mu$  تشکیل می‌شود. به دور این حلقه، سیم پیچی با  $N$  دور تعبیه شده و از آن جریان  $I_0$  عبور داده می‌شود. سیم پیچ جریان، میدان مغناطیسی  $H$  را پدید می‌آورد که از آن چگالی شار  $B = \mu H$  حاصل می‌شود. در مدار الکتریکی شکل ۶-۱۶-الف جریان هدایتی نمی‌تواند به فضای اطراف هادی نشت کند و کاملاً در درون هادی محصور است، ولی در مدار مغناطیسی شکل ۶-۱۶-ب شار مغناطیسی می‌تواند به فضای اطراف هسته نفوذ کند. با این وجود، وقتی که  $\mu > \mu_0$  باشد، یعنی قابلیت نفوذ هسته بسیار بزرگ‌تر از قابلیت نفوذ فضای اطراف که معمولاً هوا است باشد، شار نشتی در فضای اطراف بسیار ناچیز است. ثرءاً مرزی برای مؤلفه مماسی چگالی شار مغناطیسی، که به صورت  $B_T / \mu_T$  هست  $B_{T, \text{هوا}} = B_T$  نوشته می‌شود، این نکته را بخوبی



شکل ۶-۱۶: تشابه بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی (الف) مدار الکتریکی (ب) مدار مغناطیسی

آشکار می‌سازد. بنابراین برای همه موارد عملی که هسته از جنس ماده فرومغناطیسی بوده و شرط  $\mu > \mu_0$  برقرار است، می‌توان فرض کرد که شار مغناطیسی کاملاً در هسته متمرکز است.

اکنون روابط حاکم بر دو مدار شکل ۶-۱۶ را به طور خلاصه مطرح می‌کنیم. برای مدار الکتریکی شکل ۶-۱۶-الف می‌توان نوشت:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\text{الف-۵۱-۶})$$

$$V_s = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{ب-۵۱-۶})$$

$$\mathbf{J}_C = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{ج-۵۱-۶})$$

$$I_C = \int_A \mathbf{J}_C \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{د-۵۱-۶})$$

برای مدار مغناطیسی شکل ۶-۱۶-ب، با توجه به اینکه چگالی جریان هدایتی در درون هسته صفر است، داریم:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (\text{الف-۵۲-۶})$$

$$NI_s = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{ب-۵۲-۶})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{ج-۵۲-۶})$$

$$\phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{د-۵۲-۶})$$

مقایسه روابط ۶-۵۱ و ۶-۵۲ و جوه تشابه زیر را بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی آشکار می‌سازد:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H} & (\text{الف-۵۳-۶}) \\ V_s \leftrightarrow NI_s & (\text{ب-۵۳-۶}) \\ \mathbf{J}_C \leftrightarrow \mathbf{B} & (\text{ج-۵۳-۶}) \\ I_C \leftrightarrow \phi & (\text{د-۵۳-۶}) \\ \sigma \leftrightarrow \mu & (\text{ه-۵۳-۶}) \end{array} \right.$$

در مدار شکل ۶-۱۶-الف نسبت  $V_s$  به  $I_C$  را مقاومت حلقه هادی می‌نامند که با آن آشنایی کافی داریم. به سادگی می‌توان نشان داد که مقدار این مقاومت برابر است با:

$$R = \frac{V_s}{I_C} = \frac{l}{\sigma A}$$

کمیت مشابه مقاومت در مدار شکل ۶-۱۶-ب از نسبت  $NI_s$  به  $\phi$  به دست می‌آید. این کمیت را رلوکتانس<sup>۱</sup> یا مقاومت مغناطیسی نام نهاده و با علامت  $\mathcal{R}$  نشان می‌دهند. بنابراین، برحسب تعریف

می‌توان نوشت:

$$\mathcal{R} = \frac{NI_s}{\phi} \quad (\text{۵۴-۶})$$

با فرض آنکه میدان مغناطیسی در سطح مقطع هسته یکنواخت باشد (میدان مغناطیسی در درون یک سیم پیچ با تعداد دورهای کافی تقریباً یکنواخت است)، رلوکتانس مدار شکل ۶-۱۶-ب به شرح زیر محاسبه می شود:

$$NI = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi l$$

$$\phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_\phi A = \mu H_\phi A$$

آنگاه:

$$\mathcal{R} = \frac{NI}{\phi} = \frac{l}{\mu A} \quad (۵۵-۶)$$

به طوری که از رابطه ۵۵-۶ مشهود است، رلوکتانس نیز همانند مقاومت فقط تابعی از ابعاد هندسی حلقه و البته قابلیت نفوذ آن می باشد. بالاخره مشابه رابطه  $\mathbf{E} = -\nabla V$  که در آن پتانسیل الکتریکی است، می توان رابطه  $\mathbf{H} = -\nabla V_m$  را تعریف کرد، که در آن پتانسیل نرده ای مغناطیسی نامیده می شود و در فصل پنجم نیز به آن اشاره ای شد. یادآوری می شود تعریف مذکور برای پتانسیل مغناطیسی  $V_m$  فقط وقتی معتبر است که  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  باشد و البته در مدارهای مغناطیسی به دلیل صفر بودن چگالی جریان هدایتی، کرل شدت میدان مغناطیسی همواره صفر است. در این ارتباط اختلاف پتانسیل مغناطیسی بین دو سطح هم پتانسیل عبارت است از:

$$V_{m,ab} = - \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (۵۶-۶)$$

اکنون ببینیم که یک مدار مغناطیسی را، که در حالت کلی ممکن است دارای شاخه های متعددی با ابعاد مختلف و سیم پیچهای جریان گوناگونی باشد، چگونه می توان تجزیه و تحلیل نمود. برای این منظور، ابتدا روش حل مدارهای الکتریکی را یادآوری می کنیم. مطالعه مدارهای الکتریکی بر اساس حل همزمان معادلات KCL و KVL<sup>۱</sup> و روابط ولتاژ-جریان اجزای مدار استوار است. یک معادله KCL در واقع بیان رابطه  $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$  روی سطح بسته ای حول یک گره جریان است و معمولاً به صورت  $\sum_i I_i = 0$  نوشته می شود. از آنجا که  $\mathbf{B}$  مشابه  $\mathbf{J}$  و  $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  است، مشابه قانون KCL می توان قانون KFL<sup>۲</sup> را داشت. این قانون بیان می دارد که مجموع جبری شارهایی که به یک گره در مدار مغناطیسی وارد می شوند برابر صفر است:

$$\sum_i \phi_i = 0 \quad (۵۷-۶)$$

1 - Kirchhoff Current Law

2 - Kirchhoff Voltage Law

3 - Kirchhoff Flux Law

همچنین یک رابطه KVL در حقیقت بیان رابطه  $V_s - \int E \cdot dL = 0$  در یک مسیر بسته است که  $V_s$  به منزله نیروی محرکه الکتریکی خالص موجود در مسیر بسته و  $\int E \cdot dL$  مجموع افت پتانسیلها روی اجزای مختلف واقع در مسیر می باشد. این قانون اغلب به صورت  $V_s - \sum_i V_i = 0$  نوشته می شود. از آنجاکه  $H$  مشابه  $E$ ،  $N I_s$  مشابه  $V_s$ ،  $V_m$  مشابه  $V$  و  $\oint_C H \cdot dL = 0$  مشابه قانون KVL می توان قانون  $(KVL)_m$  را برای مدارهای مغناطیسی داشت و آن را به صورت زیر نوشت:

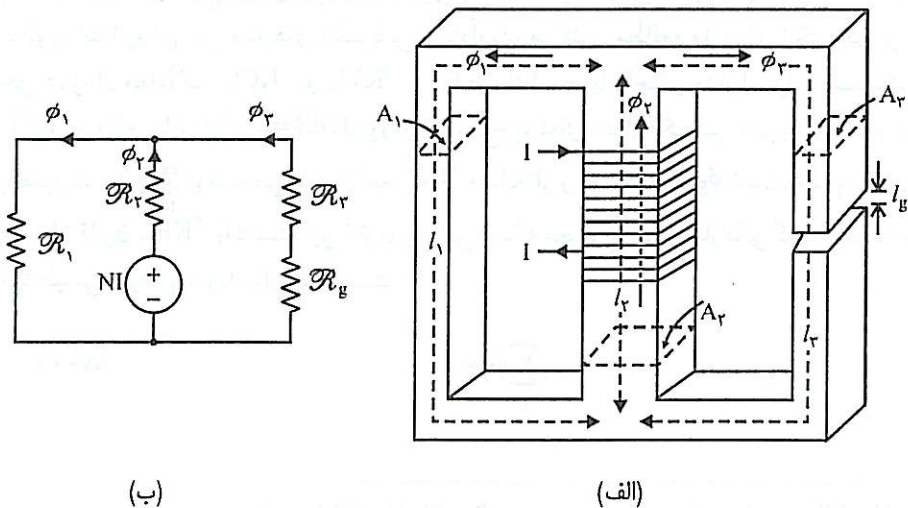
$$\sum_j (N I_s)_j = \sum_i V_{mi} = \sum_i H_i l_i \quad (58-6)$$

در رابطه ۵۸-۶،  $\sum_j (N I_s)_j$  مجموع جبری نیروهای محرکه مغناطیسی در مسیر بسته بوده و میدان مغناطیسی در هر شاخه یکنواخت فرض شده است. بالاخره مشابه رابطه  $V=RI$  برای یک مقاومت، رابطه زیر را برای یک رلوکتانس داریم:

$$V_m = \mathcal{R} \phi \quad (59-6)$$

حل یک مدار مغناطیسی با حل هم زمان روابط ۵۷-۶، ۵۸-۶ و ۵۹-۶ انجام می پذیرد. برای نشان دادن شیوه کار به بررسی چند مثال می پردازیم.

مثال ۷-۶ شکل ۱۷-۶ الف ساختمان یک مدار مغناطیسی را نشان می دهد که از سه شاخه با یک شکاف هوا در شاخه سمت راست تشکیل شده است. سیم پیچ تعبیه شده به دور شاخه میانی نیروی محرکه ای به میزان ۱۰۰۰ آمپر دور تأمین می کند. مدار الکتریکی معادل راسم نموده و چگالی شار مغناطیسی رادر شکاف هوا به دست آورید. قابلیت نفوذ نسبی هسته  $\mu_r = 1000$  و ابعاد آن عبارت از  $A_1 = A_3 = 8 \text{ cm}^2$ ،  $A_2 = 10 \text{ cm}^2$ ،  $l_1 = l_3 = 20 \text{ cm}$ ،  $l_2 = 10 \text{ cm}$  و  $l_g = 0.1 \text{ cm}$  است.



شکل ۱۷-۶: یک مدار مغناطیسی برای مثال ۷-۶ (الف) مدار مغناطیسی (ب) مدار الکتریکی معادل



$$L_{22} \approx \frac{\psi_{22}}{I_2} = \frac{N_2 \phi_2}{I_2}$$

۲۹۷ فصل ۶: میدان مغناطیسی ساکن در اجسام و انرژی مغناطیسی

حل: مدار الکتریکی معادل مدار مغناطیسی مورد مطالعه در این مثال در شکل ۶-۱۷-ب نشان داده شده است. برای حل این مدار ابتدا رلوکتانسهای شاخه‌های مدار را محاسبه می‌کنیم.

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_r = \frac{l_1}{\mu A_1} = \frac{20 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7} \times 1000)(8 \times 10^{-4})} = 19,89 \times 10^4 \text{ آبر دور بر وبر } 10^4$$

$$\mathcal{R}_r = \frac{l_r}{\mu A_r} = \frac{10 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7} \times 1000)(10 \times 10^{-4})} = 7,96 \times 10^4 \text{ آبر دور بر وبر } 10^4$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_0 A_g} = \frac{0,1 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(10,7 \times 10^{-4})} = 74,37 \times 10^4 \text{ آبر دور بر وبر } 10^4$$

حال با استفاده از روابط ۶-۵۷ تا ۶-۵۹، روابط KFL و  $(KVL)_m$  را به شرح زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \phi_r - \phi_1 - \phi_r = 0 \\ 1000 - \mathcal{R}_r \phi_r - (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g) \phi_r = 0 \\ \mathcal{R}_1 \phi_1 - (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g) \phi_r = 0 \end{cases}$$

پس از حل سه معادله فوق برای  $\phi_r$  داریم:

$$\phi_r = 1000 / \mathcal{R}_r \left[ 1 + (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g) \left( \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_r} \right) \right]$$

$$\phi_r = 1000 / (7,96 \times 10^4) \left[ 1 + (19,89 + 74,37) \left( \frac{1}{19,89} + \frac{1}{7,96} \right) \right] = 714,6 \times 10^{-6} \text{ وبر } 10^{-6}$$

$$B_g = \phi_r / A_g = 714,6 \times 10^{-6} / 10,7 \times 10^{-4} = 0,668 \text{ وبر بر مترمربع}$$

مثال ۶-۸ اگر در مدار مغناطیسی شکل ۶-۱۷-الف شکاف هوا در شاخه میانی تعبیه شود، آمپر دور لازم برای آنکه همان چگالی شار مغناطیسی، یعنی ۰,۶۶۸ وبر بر مترمربع، در شکاف ایجاد شود را به دست آورید.

حل:

مدار الکتریکی معادل در این مثال به صورت شکل ۶-۱۸ خواهد بود. در این مدار رلوکتانسهای موازی  $\mathcal{R}_1$  و  $\mathcal{R}_r$  را می‌توان با رلوکتانس معادل  $\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 \parallel \mathcal{R}_r = \mathcal{R}_1 / 2$  جایگزین نمود و رابطه  $(KVL)_m$  را در مدار معادل حاصل نوشت:

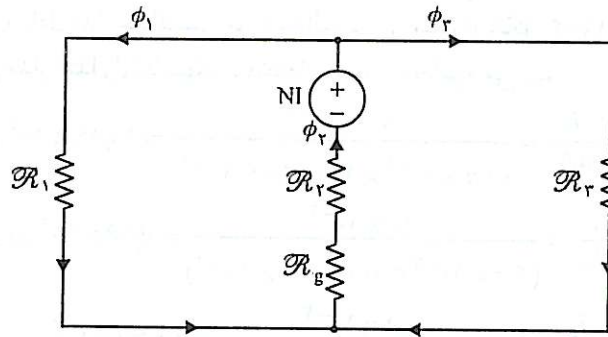
$$NI = \phi_r (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_{eq})$$

اما:

$$\phi_r = B_g A_g = 0,668 \times 10,7 \times 10^{-4} = 714,6 \times 10^{-6} \text{ وبر } 10^{-6}$$

آنگاه:

$$NI = (714,6 \times 10^{-6})(7,96 + 74,37 + 9,945)(10^4) = 659,4 \text{ آمپر دور}$$



شکل ۶-۱۸: مدار الکتریکی معادل مدار مغناطیسی شکل ۶-۱۷-الف با شکاف هوای منتقل شده به شاخه میانی

### ۶-۶ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

در مبحث انرژی میدان الکتریکی که در قسمت ۳-۱۲ مطالعه گردید، ملاحظه نمودیم که برای تشکیل سیستمی از بارهای نقطه‌ای، یعنی جمع‌آوری بارها از اطراف بینهایت دور، مقدار معینی کار باید توسط یک عامل خارجی انجام شود. این کار را به صورت انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی ناشی از مجموعه بارهای نقطه‌ای تعبیر نمودیم و سپس نتایج به دست آمده را به توزیعهای پیوسته بار الکتریکی تعمیم دادیم. همان‌طور که تشکیل سیستمی از بارهای نقطه‌ای و به طور کلی تشکیل یک توزیع پیوسته بار مستلزم انجام کار است، برای تشکیل سیستمی مرکب از حلقه‌های جریان نیز باید کار انجام شود. در این مورد نیز کار انجام شده را می‌توان به منزله انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی تعبیر کرد. به بیان دیگر اگر تعدادی حلقه جریان داشته باشیم و بخواهیم جریان هر یک را از صفر تا مقدار معینی افزایش دهیم، برای رسیدن به این منظور باید مقداری انرژی صرف کرد. این انرژی در حقیقت همان انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی حاصل از این سیستم حلقه‌های جریان می‌باشد.

محاسبه انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را ممکن است به روشهای مختلفی انجام داد. در اینجا ما ابتدا انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی یک مدار بسته حامل جریان  $I$  را به دست می‌آوریم، سپس نتیجه را به  $n$  حلقه جریان و سرانجام به یک توزیع پیوسته جریان تعمیم می‌دهیم. فرض کنید مدار بسته  $C$  را داشته باشیم. قبل از آنکه مولد جریانی به این مدار وصل شود، جریان مدار و شار گذرنده از آن هر دو صفر هستند. پس از وصل مولد به مدار، جریان مدار رو به افزایش می‌نهد و شار گذرنده از مدار نیز افزایش می‌یابد تا اینکه پس از گذشت زمان  $t$ ، جریان و شار به مقدار نهایی خود، که به ترتیب برابر  $I$  و  $\Psi$  فرض می‌شوند، می‌رسند. باید دقت شود که در فاصله زمانی  $t$ ، پس از وصل مولد به مدار، جریان و شار توابعی از زمان می‌باشند و به ناچار باید برخی پدیده‌های ناشی از تغییرات میدانها (یا کمیت‌های وابسته به آنها) نسبت به زمان را در نظر داشت. آنچه که در این مبحث مورد نیاز است قانون فاراده می‌باشد. این قانون، که در فصل بعد به طور مشروح مطالعه خواهد شد، بیان می‌کند که اگر شار گذرنده از



یک مدار در فاصله زمانی بینهایت کوچک  $dt$  به اندازه  $d\psi$  تغییر نماید، نیروی محرکه‌ای (ولتاژی) به میزان  $V_i = -\frac{d\psi}{dt}$  در مدار القا می‌شود. این نیروی محرکه با نیروی محرکه مولد جریان که آن را  $V$  می‌نامیم خنثی می‌شود. به عبارت دیگر، چون مجموع افت ولتاژها در یک مدار بسته صفر است،  $V_i + V = 0$  بوده و آنگاه می‌توان نوشت:

$$V = -V_i = + \frac{d\psi}{dt} \quad (۶۰-۶)$$

اگر جریان لحظه‌ای مدار را در فاصله زمانی  $t$ ،  $i$  بنامیم، توان دریافت شده از مولد جریان برابر  $V_i$  و انرژی دریافت شده از آن در فاصله زمانی  $dt$  برابر است با:

$$dW = V_i dt = i d\psi \quad (۶۱-۶)$$

بنابراین، مقدار کل انرژی دریافت شده از مولد برای آنکه جریان  $i$  از صفر به  $I$ ، یا به طور متناظر شار  $\psi$  از صفر به  $\Psi$ ، افزایش یابد برابر است با:

$$W = \int_0^I i d\psi = \int_0^{\Psi} i d\psi \quad (۶۲-۶)$$

اما از طرف دیگر، شار گذرنده از یک مدار و جریان آن در هر لحظه از طریق رابطه  $\psi = Li$ ، که  $L$  ضریب خودالقایی مدار است، به یکدیگر مربوطند. پس با جایگزین نمودن  $d\psi$  با  $L di$  در رابطه ۶۲-۶ داریم:

$$W = \int_0^I iL di = L \int_0^I d\left(\frac{1}{2}i^2\right) = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Psi \quad (۶۳-۶)$$

در رابطه ۶۳-۶،  $W$  مقدار کل انرژی است که ضمن ایجاد شدن جریان  $I$  از مولد، که در واقع یک عامل خارجی محسوب می‌شود، اخذ می‌گردد و در میدان مغناطیسی حاصل از جریان  $I$  ذخیره می‌شود. پس از گذشت زمان  $t$ ، شار و جریان به مقادیر نهایی خود رسیده و از آن به بعد ثابت باقی می‌مانند، صدور انرژی از مولد جریان به میدان نیز پایان می‌یابد.

حال سیستمی را در نظر می‌گیریم که مرکب از  $n$  حلقه جریان باشد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم را ممکن است با محاسبه انرژی لازم برای برقرار نمودن تک تک جریانها در مدارهایشان، یعنی انرژی مورد نیاز برای افزایش جریان هر مدار از صفر تا مقدار نهایی اش، به دست آورد. با دنبال نمودن همان روشی که در مورد یک حلقه جریان به کار رفت و به نتیجه مندرج در رابطه ۶۲-۶ انجامید، می‌توان برای  $n$  حلقه جریان نتیجه زیر را به دست آورد:

$$W = \sum_{j=1}^n \int_0^{I_j} i_j d\psi_j \quad (۶۴-۶)$$

که  $I_j$  جریان نهایی حلقه  $j$ ام است. برای محاسبه  $W$ ، ابتدا  $\psi_j$ ، که شار کل گذرنده از حلقه  $j$ ام است، را بر حسب جریانهای حلقه‌ها و ضرایب خودالقایی و القای متقابل به شرح زیر می‌نویسیم:

$$\psi_j = L_{jj} i_j + \sum_{k=1, k \neq j}^n M_{jk} i_k \quad (۶۵-۶)$$

در رابطه ۶-۶۵،  $L_{jj}$  ضریب خودالقایی حلقه  $j$ ام و  $M_{jk}$  ضریب القای متقابل بین حلقه‌های  $j$ ام و  $k$ ام می‌باشد. با دیفرانسیل گرفتن از طرفین رابطه ۶-۶۵، داریم:

$$d\psi_j = L_{jj} di_j + \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} di_k$$

علامت  $\sum'$  در رابطه اخیر معرف حاصل جمعی است که در آن جمله مربوط به  $j=k$  وجود نداشته باشد. با توجه به رابطه ۶-۶۱، مقدار کار جزئی  $dW_j$  عبارت است از:

$$dW_j = i_j d\psi_j = i_j \left( L_{jj} di_j + \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} di_k \right)$$

آنگاه:

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{j=1}^n dW_j = \sum_{j=1}^n i_j \left( L_{jj} di_j + \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} di_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n L_{jj} d \left( \frac{1}{2} i_j^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} d(i_j i_k) \end{aligned} \quad (6-66)$$

ضریب  $1/2$  در جلوی جمع دوگانه به دلیل دوبرابر ظاهر شدن  $M_{jk}=M_{kj}$  در حاصل جمع است. اکنون با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ۶-۶۶، مقدار کل انرژی ذخیره شده در سیستم مرکب از  $n$  حلقه جریان به دست می‌آید. این انرژی را با  $W_m$  نشان می‌دهیم که اندیس  $m$  برای منسوب نمودن انرژی به میدان مغناطیسی است.

$$\begin{aligned} W_m = W &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_{jj} I_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} I_j I_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n I_j \left( L_{jj} I_j + \sum_{k=1}^{n'} M_{jk} I_k \right) \end{aligned}$$

یا:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n I_j \Psi_j \quad (6-67)$$

که  $\Psi_j$  شار کل گذرنده از حلقه  $j$ ام در وضعیت نهایی است. دقت کنید که رابطه ۶-۶۷ در حقیقت تعمیم رابطه ۶-۶۳ به  $n$  حلقه جریان می‌باشد.

نتیجه به دست آمده در رابطه ۶-۶۷ را نیز می‌توان برای یک جریان که به طور پیوسته با چگالی  $J$  در حجم  $V$  توزیع شده باشد تعمیم داد. از آنجاکه  $J$  یک کمیت سیملوله‌ای فرض می‌شود حجم  $V$  به شکل یک لوله مسدود خواهد بود. برای محاسبه انرژی در این حالت، ابتدا توزیع جریان را به تعدادی حلقه جریان که اندازه

هر یک برابر  $\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$  باشد تقسیم نموده و آنگاه با استفاده از رابطه ۶-۶۷ عبارت انرژی را برای این تعداد حلقه جریان نوشته و حد آن را وقتی که  $\Delta \mathbf{S}$  به سمت صفر میل کند به دست می آوریم:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \lim_{\Delta \mathbf{S} \rightarrow 0} \sum_j [\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}]_j \Psi_j = \frac{1}{\mu_0} \int_S \Psi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (6-68)$$

که  $S$  سطح مقطع توزیع جریان، که همان سطح مقطع حجم لوله ای شکل  $V$  است، می باشد. توجه کنید که در انتگرال رابطه ۶-۶۸،  $\Psi$  شار گذرنده از سطحی مانند  $S'$  است که به مسیر بسته جریان  $\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$ ، که آن را  $C$  می نامیم، محدود شود. به منظور ساده نمودن این انتگرال،  $\Psi$  را بر حسب میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  و سپس پتانسیل برداری  $\mathbf{A}$  می نویسیم:

$$\Psi = \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}' = \int_{S'} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}' = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} \quad (6-69)$$

حال با جایگزین نمودن  $\Psi$  از این رابطه در رابطه ۶-۶۸، داریم:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_S \oint_C (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}) (\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{1}{\mu_0} \int_S \oint_C (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) (d\mathbf{L} \cdot d\mathbf{S})$$

جابه جا نمودن  $d\mathbf{L}$  و  $\mathbf{J}$  به این دلیل صحیح است که این دو بردار هم جهت هستند، زیرا هر دو در امتداد منحنی  $C$  می باشند. اکنون، چون  $d\mathbf{L} \cdot d\mathbf{S} = dV$  است، خواهیم داشت:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, dV \quad (6-70)$$

به همین ترتیب، می توان نشان داد که برای یک توزیع سطحی جریان با چگالی  $\mathbf{J}_S$  روی سطح  $S$ ، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی عبارت است از:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_S \mathbf{J}_S \cdot \mathbf{A} \, dS \quad (6-71)$$

برای آنکه انرژی را بر حسب میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  به دست آوریم، در رابطه ۶-۷۰،  $\mathbf{J}$  را با  $\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}$  جایگزین می کنیم:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_V \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \, dV \quad (6-72)$$

چون در نقاطی از فضا که جریان الکتریکی وجود ندارد  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  می باشد، تغییر حجم انتگرال گیری در رابطه ۶-۷۲ از  $V$  به تمامی فضا مقدار انتگرال را تغییر نخواهد داد. پس می توان نوشت:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \, dV \quad (6-73)$$

اکنون از اتحاد برداری  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$  استفاده نموده و در رابطه ۶-۷۳،  $\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$  را با  $\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  جایگزین می کنیم:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} [B \cdot \nabla \times A - \nabla \cdot (A \times B)] dV$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} B \cdot B dV - \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} \nabla \cdot (A \times B) dV \quad (۷۴-۶)$$

در رابطه ۷۴-۶، از رابطه  $B = \nabla \times A$  در استخراج انتگرال اول استفاده نموده ایم. با به کار بردن قضیه دیورژانس، انتگرال دوم را به یک انتگرال سطح تبدیل می‌کنیم:

$$\int_{\text{تمام فضا}} \nabla \cdot (A \times B) dV = \oint_{\text{سطح تمام فضا}} (A \times B) \cdot dS \quad (۷۵-۶)$$

که منظور از سطح تمام فضا سطح کره‌ای به شعاع بینهایت است. با این وجود، روی چنین سطحی هر توزیع جریان سیملوله‌ای یا حجم محدود به صورت یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور محدود  $m$  به نظر می‌رسد. بنابراین، وقتی که  $r$  به سمت بینهایت میل کند،  $B$  و  $A$  به سمت حدود زیر میل می‌کنند:

$$B \rightarrow \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (\gamma \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta)$$

$$A \rightarrow \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin \theta \hat{a}_\phi$$

که  $m$  در امتداد محور  $Z$  فرض شده است. بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که  $|A \times B|$  از مرتبه  $r^{-5}$  می‌باشد، در حالی که  $dS$  از مرتبه  $r^2$  است. در نتیجه انتگرال سمت راست رابطه ۷۵-۶ برابر صفر است. این نتیجه حتی برای یک توزیع جریان بینهایت نیز صادق خواهد بود به شرط آنکه میدان مغناطیسی  $B$  حداقل با نرخ  $r^{-2}$  و پتانسیل برداری  $A$  حداقل با نرخ  $r^{-1}$  کاهش یابد. پس به طور خلاصه، رابطه ۷۴-۶ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{تمام فضا}} B \cdot B dV = \int_{\text{تمام فضا}} \left( \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV \quad (۷۶-۶)$$

رابطه ۷۶-۶ به وضوح نشان می‌دهد که تصور ذخیره شدن انرژی در میدان مغناطیسی کاملاً درست است و تردیدی نیست که کمیت  $\frac{1}{2\mu_0} B^2$  چگالی انرژی مغناطیسی می‌باشد. چنانچه قابلیت نفوذ محیط  $\mu$  باشد در روابط ۷۲-۶ تا ۷۶-۶ باید  $\mu_0$  را با  $\mu$  جایگزین نمود.

پس به طور خلاصه، انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را می‌توان از رابطه ۶۷-۶ برای جریانهای خطی، از رابطه ۶۷-۶ برای جریانهای سطحی، از رابطه ۷۰-۶ برای جریانهای حجمی و بالاخره از رابطه ۷۶-۶ برای هر نوع توزیع جریان اعم از خطی، سطحی و حجمی به دست آورد. اگرچه هر یک از روابط مزبور ممکن است در مورد معینی از سادگی خاصی برخوردار باشد، ولی معمولاً از رابطه ۷۶-۶ برای محاسبه انرژی مغناطیسی استفاده می‌شود. انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی را همچنین می‌توان بر حسب ضریب خودالقایی و جریان بیان داشت. رابطه ۶۳-۶ در واقع چنین شکلی از بیان انرژی را به صورت  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$  برای یک مدار تک حلقه‌ای حامل جریان  $I$  نشان می‌دهد. برای یک مدار چند حلقه‌ای نیز به سادگی می‌توان رابطه مشابهی استخراج نمود. آنچه که در این شکل از بیان انرژی جلب توجه می‌کند متناسب

بودن انرژی با مربع جریان است. رابطه ۶-۷۶ نیز این ویژگی را به دلیل وجود جمله  $B^2$  در بردارد. از این رو، می توان این شکل بیان انرژی را به توزیعهای پیوسته نیز تعمیم داد و رابطه زیر را برای انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی حاصل از یک توزیع جریان با مقدار کل  $I$  آمپر نوشت:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} LI^2 \quad (۷۷-۶)$$

که  $L$  ضریب خودالقایی مدار حامل جریان  $I$  می باشد. اکنون با استفاده از روابط ۶-۷۶ و ۷۷-۶ می توان تعریف جدیدی برای ضریب خودالقایی به شرح زیر پیشنهاد نمود:

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int_{\text{تمام فضا}} B^2 dV \quad (۷۸-۶)$$

این رابطه به ویژه برای محاسبه ضریب خودالقایی در مواردی که جریان به صورت حجمی توزیع شده باشد بسیار مناسب است.

مثال ۹-۶ مطلوب است محاسبه انرژی ذخیره شده در واحد طول یک سیملوله طویل با استفاده از (الف) رابطه ۶-۶۷، (ب) رابطه ۶-۷۶.

جریان سیملوله برابر  $I$ ، شعاع آن برابر  $a$  و تعداد دورهای سیم پیچ آن در واحد طول برابر  $n$  فرض می شود. حل:

یک سیملوله در واقع یک سیستم چندحلقه ای جریان محسوب می شود که در آن جریانهای همه حلقه ها یکسان می باشند. پس در رابطه ۶-۶۷،  $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_n = I$  بوده و می توان نوشت:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \sum_{j=1}^n I_j \Psi_j = \frac{1}{\mu_0} I \sum_{j=1}^n \Psi_j = \frac{1}{\mu_0} I \Psi_{\text{tot}}$$

اما از طرف دیگر، طبق تعریف اولیه ضریب خودالقایی که در رابطه ۶-۳۹ داده شده است،  $\Psi_{\text{tot}} = LI$  و آنگاه:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} LI^2$$

که  $L$  ضریب خودالقایی سیملوله در واحد طول می باشد. با جایگزین نمودن  $L$  از رابطه ۶-۴۵ داریم:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} \mu_0 \pi a^2 n^2 I^2 \quad (۷۹-۶)$$

برای محاسبه انرژی با استفاده از رابطه ۶-۷۶، ابتدا میدان مغناطیسی سیملوله را که در رابطه ۵-۴۱ به

دست آورده ایم، می نویسیم:

$$B = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{a}_z & 0 < r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

آنگاه انتگرال حجم در رابطه ۶-۷۶ را به شرح زیر محاسبه می کنیم:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V'} B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_1} (\mu_0 n I)^2 dV + 0$$

که  $V'$  حجم استوانه‌ای به ارتفاع واحد و شعاع بینهایت است. ولی چون میدان مغناطیسی برای  $r > a$  صفر است، انتگرال را باید فقط در حجم  $V'$  که استوانه‌ای به ارتفاع واحد و شعاع  $a$  است محاسبه نمود، پس می‌توان نوشت:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{z=0}^z \int_{r=0}^{r=a} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} (\mu_0 n I)^2 r dr d\varphi dz$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 \left[ \int_0^z dz \right] \left[ \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \left[ \int_0^a r dr \right] = \frac{1}{2} \mu_0 \pi a^2 n^2 I^2 z$$

مثال ۶-۱۰ انرژی مغناطیسی ذخیره شده را در واحد طول کابل هم‌محور شکل ۶-۱۳ به دست آورده و سپس ضریب خودالقایی کابل را به ازای واحد طول تعیین کنید.

حل:

برای محاسبه انرژی به کمک رابطه ۶-۷۶، به میدان مغناطیسی  $B$  نیاز است که به سادگی با استفاده از قانون مداری آمپر به دست می‌آید، ولی چون این میدان در مثال ۶-۴ محاسبه شده است از محاسبه دوباره آن در اینجا خودداری کرده و فقط به ذکر نتیجه اکتفا می‌کنیم:

$$B = B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{a}_\varphi & r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\varphi & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

آنگاه:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{z=0}^z \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\infty} B^2(r) r dr d\varphi dz$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \left[ \int_0^z dz \right] \left[ \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \left[ \int_0^a \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 r^3 dr + \int_a^b \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 r dr \right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} [1] [2\pi] \left[ \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 \frac{a^4}{4} + \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right) \quad (۶-۸۰)$$

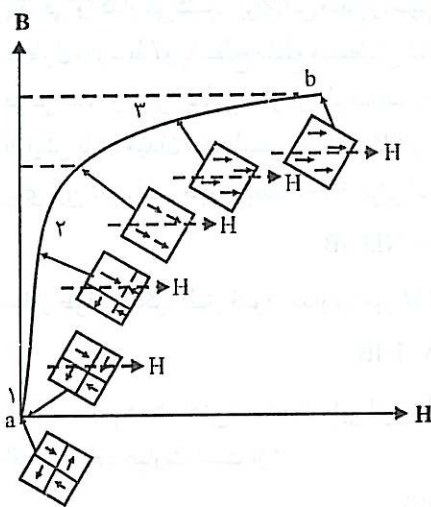
با مساوی قرار دادن  $W_m$  با  $\frac{1}{2} LI^2$ ، ضریب خودالقایی کابل هم‌محور در واحد طول به دست می‌آید:

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

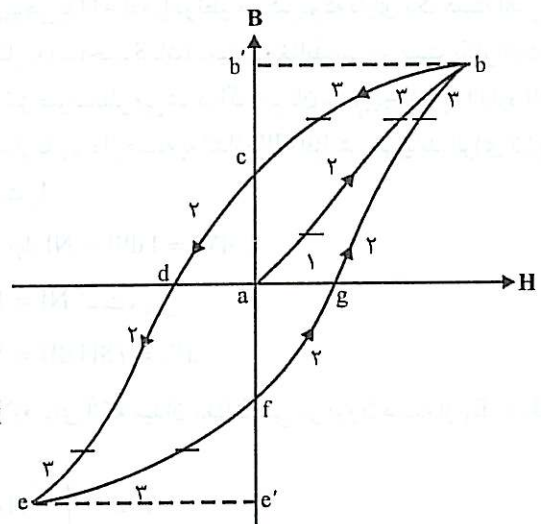
همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این نتیجه با آنچه که در رابطه ۶-۴۷ به دست آمد یکسان است.

## ۶-۷ پسماند

در قسمت ۶-۲ ضمن مطالعه میدان مغناطیسی در اجسام گفته شد که قابلیت نفوذ مواد فرومغناطیسی تابعی از میدان بوده و مقدار ثابتی ندارد. در حقیقت، رابطه بین میدانهای  $B$  و  $H$  در این گونه اجسام غیرخطی و همراه با پسماند است. از این رو رابطه بین  $B$  و  $H$  معمولاً به روش ترسیمی بیان می‌شود. شکل ۶-۱۹ الف یک منحنی  $B-H$  نوعی را برای اجسام فرومغناطیسی نشان می‌دهد. این منحنی را منحنی پسماند نیز می‌نامند. برای شرح منحنی پسماند، با نمونه‌ای از یک جسم فرومغناطیسی مغناطیس نشده شروع می‌کنیم. در ابتدا  $B$  و  $H$  هر دو صفر هستند. این حالت متناظر با نقطه  $a$  روی منحنی است. با افزایش  $H$ ، مغناطیس شدن جسم آغاز گشته و رو به توسعه می‌نهد و در نتیجه میدان  $B$  در امتداد منحنی  $ab$  افزایش می‌یابد تا اینکه سرانجام به نقطه اشباع  $b$  برسد. یادآوری می‌شود که مغناطیس شدن اجسام فرومغناطیسی طی مراحل صورت می‌پذیرد که به ترتیب عبارتند از: ۱ - گسترش برگشت‌پذیر حوزه‌ها، ۲ - گسترش برگشت‌ناپذیر حوزه‌ها، ۳ - چرخش حوزه‌ها. شکل ۶-۱۹ ب گسترش و چرخش حوزه‌ها را در مراحل مختلف نشان می‌دهد. نواحی مختلف در امتداد منحنی  $ab$  و در سایر قسمت‌های منحنی پسماند در شکل ۶-۱۹ الف، که متناظر با وقوع یکی از مراحل مزبور است، به ترتیب با اعداد ۱، ۲ و ۳ مشخص شده‌اند. به عنوان مثال آن نواحی که با عدد ۳ مشخص شده‌اند مترادف با چرخش حوزه‌ها می‌باشند. در نقطه  $b$  که تمام حوزه‌ها به طور کامل با میدان اعمال شده هم‌جهت می‌شوند، افزایش بیشتر  $H$  تغییری در  $B$  نمی‌دهد و گفته می‌شود که جسم تا حد اشباع مغناطیس شده است. حال اگر  $H$  از مقداری که در نقطه  $b$  دارد به سمت صفر کاهش داده شود،  $B$  نیز کاهش می‌یابد ولی کاهش یافتن  $B$  منحنی  $ab$  را در جهت عکس نمی‌پیماید، بلکه منحنی دیگری



(ب)



(الف)

شکل ۶-۱۹: پدیده پسماند (الف) منحنی پسماند برای اجسام فرومغناطیسی (ب) نمایش گسترش و چرخش حوزه‌ها

مانند  $bc$  را دنبال می‌کند و این به مفهوم باقی ماندن مقداری از میدان مغناطیسی القا شده در جسم، حتی پس از برداشتن میدان خارجی، است. در حقیقت، همان‌طور که قسمت  $cd$  منحنی پسماند نشان می‌دهد یک شدت میدان مغناطیسی در جهت عکس باید به جسم اعمال گردد تا  $B$  به صفر کاهش یابد. مقدار  $B$  را در نقطه  $c$  پسماند جسم و مقدار  $H$  در نقطه  $d$  را نیروی بازگرداننده می‌نامند. افزایش بیشتر  $H$  در جهت جدید منجر به افزایش یافتن  $B$  در این جهت و سرانجام اشباع آن در نقطه  $e$  می‌گردد که قرینه نقطه  $b$  است. بالاخره اگر  $H$  را از مقداری که در نقطه  $e$  دارد به صفر کاهش داده سپس جهت آن را معکوس نموده و افزایش دهیم، تغییرات به وجود آمده در  $B$ ، منحنی  $efgb$  را دنبال می‌کند و بدین ترتیب حلقه پسماند کامل می‌شود. اکنون به خوبی آشکار است که اگر یک جسم فرو مغناطیسی در اختیار داشته باشیم، وضعیت مغناطیسی کنونی آن به تاریخچه گذشته‌اش بستگی دارد (بدین معنی که قبلاً تحت تأثیر چه میدانی و به چه نحو قرار داشته است). برای آنکه یک دور کامل منحنی پسماند طی گردد، مقداری انرژی باید صرف شود. این انرژی، در حقیقت صرف گسترش دیواره‌های حوزه‌ها و عبور دادن آنها از ناخالصی‌ها و ناهمگنی‌های جسم می‌شود و کاملاً به گرما تبدیل گشته و قابل بازیابی نیست. نکته جالب توجه در مورد منحنی پسماند متناسب بودن تلفات پسماند با مساحت این منحنی بسته است. اما قبل از آنکه به بررسی این مطلب پردازیم، انرژی مغناطیسی ذخیره شده در محیطهای غیرخطی را به طور مختصر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلیه روابطی را که در قسمت قبل برای محاسبه انرژی مغناطیسی به دست آوردیم فقط برای محیطهای خطی قابل استفاده هستند. در محیطهای غیرخطی چگالی انرژی را نمی‌توان از رابطه  $w_m = B^2 / 2\mu$  به دست آورد و باید در جستجوی رابطه جدیدی بود. در اینجا ما با ذکر یک مثال به استخراج رابطه چگالی انرژی مغناطیسی در محیطهای غیرخطی می‌پردازیم و مطالعه این مسئله را در حالت کلی به مرجع ذکر شده در پاورقی واگذار می‌کنیم.<sup>۱</sup> برای این منظور، سیم پیچی با  $N$  حلقه را در نظر می‌گیریم که دارای یک هسته آهنی به طول متوسط  $l$  و با سطح مقطع مستطیلی شکل به مساحت  $S$  باشد. میدان مغناطیسی در هسته یکنواخت فرض شده و از پراکندگی شار در اطراف هسته نیز صرف نظر می‌شود. اگر جریان سیم پیچ از  $I$  به اندازه  $dI$  افزایش یابد، میدان مغناطیسی به اندازه  $dB$  و شار گذرنده از هسته به اندازه  $d\Psi$  افزایش می‌یابد. انرژی لازم برای این تغییرات، طبق رابطه ۶-۶، برابر است با:

$$dW = I d\Psi = NI d\phi = NIS dB$$

اما از طرف دیگر، طبق قانون مداری آمپر  $NI = Hl$  است، پس:

$$dW = lSH dB = VH dB$$

که  $V$  حجم هسته آهنی است. بنابراین انرژی لازم برای آنکه میدان مغناطیسی در درون هسته از  $B_1$  به  $B_2$  افزایش یابد عبارت است از:

$$W = V \int_{B_1}^{B_2} H dB$$



آنگاه چگالی انرژی، یعنی انرژی ذخیره شده در واحد حجم، برابر است با :

$$w_m = \frac{W}{V} = \int_{B_1}^{B_2} H dB \quad (۸۱-۶)$$

رابطه ۸۱-۶ یک نتیجه کلی است و حتی وقتی که میدان در حجم  $V$  یکنواخت نباشد و طبعاً برای محیطهای خطی نیز صادق است.

اکنون با استفاده از رابطه ۸۱-۶ تلفات پسماند را مورد بررسی قرار می دهیم. با مراجعه به شکل ۶-۱۹ الف انرژی لازم برای افزایش دادن میدان  $B$  از صفر در نقطه  $a$  به مقدار حالت اشباع در نقطه  $b$ ، با توجه به رابطه ۸۱-۶، متناسب با سطح  $abb'$  است. این انرژی در حقیقت برابر حاصل ضرب سطح  $abb'$  در حجم جسم فرو مغناطیسی می باشد. با کاهش یافتن  $B$  در امتداد منحنی  $bc$  مقداری از انرژی جذب شده در مرحله قبل به منبع بازگردانده می شود. این مقدار متناسب با سطح  $bc'b'$  است. به همین ترتیب، در مراحل بعد که  $B$  در امتداد منحنی های  $cde$ ،  $ef$  و  $fgb$  تغییر می یابد تا حلقه پسماند کامل شود، مقادیری از انرژی که متناسب با سطوح  $cdee'$ ،  $efe'$  و  $fgbb'$  می باشند بین منبع و جسم فرو مغناطیسی رد و بدل می شوند. در واقع، انرژیهایی که متناسب با سطوح  $cdee'$  و  $fgbb'$  هستند از منبع گرفته می شوند و آن مقدار انرژی که متناسب با سطح  $efe'$  است به منبع بازگردانده می شود. اگر مقدار انرژی خالصی که منبع به جسم می دهد تا یک حلقه کامل پسماند طی شود را محاسبه کنیم، خواهیم دید که متناسب با سطح حلقه پسماند است (توجه کنید که منحنی  $ab$  جزء حلقه محسوب نمی شود). بدین ترتیب، درستی این ادعا که تلفات پسماند متناسب با مساحت حلقه پسماند است تأیید گردید.

### ۶-۸ محاسبه میدان مغناطیسی به کمک پتانسیل نردهای $V_m$

اگرچه پتانسیل مغناطیسی نردهای بر خلاف پتانسیل الکتریکی دارای مفهوم فیزیکی نیست، ولی از آن می توان به عنوان ابزار مؤثری برای حل پاره‌ای مسائل میدان مغناطیسی استفاده نمود. پتانسیل مغناطیسی نردهای، همان طور که در قسمت ۵-۶ ذکر گردید، به گونه‌ای تعریف می شود که شدت میدان مغناطیسی  $H$  مساوی منهای گرادین آن باشد، یعنی  $H = -\nabla V_m$ . ولی همواره باید به خاطر داشت که این تعریف فقط در نقاطی از فضا که چگالی جریان آزاد صفر است معتبر می باشد. آنچه که زمینه را برای استفاده از پتانسیل نردهای  $V_m$  فراهم می سازد، صادق بودن معادله لاپلاس برای این پتانسیل است که ما هم اکنون با روشهای گوناگون حل آن آشنایی کافی داریم. در حقیقت، استفاده از  $V_m$  و بهره برداری از تشابهات موجود بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در پاره‌ای موارد چنان موقعیت ویژه‌ای را فراهم می آورد که حتی نیازی به انجام محاسبات نخواهد بود. به طوری که اگر پاسخ یک مسئله مربوط به میدان الکتریکی ساکن در اختیار باشد، بی درنگ می توان پاسخ مسئله مشابه مربوط به میدان مغناطیسی ساکن را نوشت. برای روشن تر شدن مطلب یادآوری می کنیم که میدان الکتریکی ساکن در یک محیط بدون بار توسط معادلات  $\nabla^2 V = 0$ ،  $D = \epsilon E$  و  $E = -\nabla V$  و میدان مغناطیسی ساکن در یک محیط بدون جریان توسط معادلات  $\nabla^2 V_m = 0$ ،  $B = \mu H$  و  $H = -\nabla V_m$  بیان می شود. به علاوه شرایط مرزی برای هر دو میدان یکسان است، زیرا مؤلفه‌های

مماسی E و H و مؤلفه‌های عمودی D و B در مرز پیوسته هستند. بنابراین پاسخ یک مسئله مربوط به میدان مغناطیسی ساکن را می‌توان با تغییر V به  $V_m$ ، E به  $E$ ، H به  $D$ ، B به  $B$  و  $\epsilon$  به  $\mu$  از پاسخ مسئله مشابه مربوط به میدان الکتریکی ساکن به دست آورد. اکنون با ذکر چند مثال کاربرد پتانسیل نرده‌ای را در محاسبه میدان مغناطیسی نشان می‌دهیم.

مثال ۶-۱۱ کره‌ای به شعاع a و با قابلیت نفوذ  $\mu_r$ ،  $\mu = \mu_r$  در معرض میدان مغناطیسی یکنواخت  $B = B_0 \hat{a}_z = \mu_0 H_0 \hat{a}_z$  قرار می‌گیرد. میدان مغناطیسی را در درون و بیرون کره تعیین نمایید.  
حل:

چون در هیچ نقطه‌ای از فضا جریان الکتریکی آزاد وجود ندارد، معادله لاپلاس و رابطه  $H = -\nabla V_m$  برای پتانسیل نرده‌ای  $V_m$  صادق می‌باشند و حل مسئله به یافتن جواب معادله  $\nabla^2 V_m = 0$  تحت شرایط مرزی حاکم خلاصه می‌شود. اما چون شکل ریاضی این مسئله با مسئله مشابه برای میدان الکتریکی که در مثال ۴-۹ مطالعه گردید یکسان است، کافی است در روابط ۴-۹۳ و ۴-۹۴،  $V$  را به  $V_m$ ،  $E$  را به  $H$  و  $\epsilon$  را به  $\mu$  تغییر دهیم تا حل مسئله کنونی به دست آید. پس از انجام تغییرات مذکور، داریم:

$$\begin{cases} V_m^i(r, \theta) = -\frac{\mu_0 H_0}{\mu_r + 1} r \cos \theta & r \leq a \\ V_m^o(r, \theta) = -\left[1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^2}{r^2}\right] H_0 r \cos \theta & r \geq a \end{cases} \quad (۸۲-۶)$$

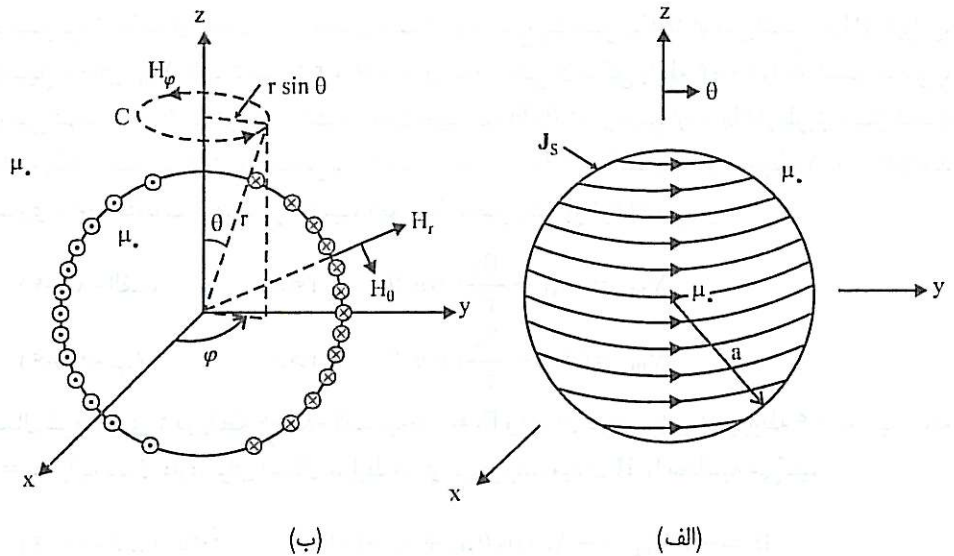
$$\begin{cases} H^i(r, \theta) = \frac{\mu_0 H_0}{\mu_r + 1} (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta) = \frac{\mu_0 H_0}{\mu_r + 1} \hat{a}_z & r < a \\ H^o(r, \theta) = H_0 \left[1 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^2}{r^2}\right] \cos \theta \hat{a}_r - H_0 \left[1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{a^2}{r^2}\right] \sin \theta \hat{a}_\theta & r > a \end{cases} \quad (۸۳-۶)$$

$$\begin{cases} B^i(r, \theta) = \mu_r \mu_0 H^i(r, \theta) & r < a \\ B^o(r, \theta) = \mu_0 H^o(r, \theta) & r > a \end{cases} \quad (۸۴-۶)$$

■

مثال ۶-۱۲ یک رشته سیم نازک حامل جریان I به صورت یک پوسته کروی به شعاع a مطابق شکل ۶-۲۰ الف سیم پیچی می‌شود. با فرض آنکه تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول در امتداد محور z یکنواخت باشد، توزیع جریان حاصل از این سیم پیچ را می‌توان با یک لایه کروی جریان با چگالی  $J_s = J_s \sin \theta \hat{a}_\phi$  تقریب زد. شدت میدان مغناطیسی را در درون و بیرون سیم پیچ محاسبه کنید.  
حل:

چون فقط روی سطح  $r = a$  جریان وجود دارد، رابطه  $H = -\nabla V_m$  در تمام نقاط درون و بیرون سیم پیچ کروی برقرار است و  $V_m$  در معادله لاپلاس صدق می‌کند، یعنی در  $r \neq a$ ،  $\nabla^2 V_m = 0$  است. بنابراین حل مسئله وابسته به یافتن جواب معادله لاپلاس برای  $V_m$  تحت شرایط مرزی حاکم است که به شرح زیر خلاصه می‌شوند:



شکل ۶-۲: سیم‌پیچ کروی و میدان ناشی از آن (الف) توزیع جریان معادل برای سیم‌پیچ کروی (ب) نمایش صفر بودن مؤلفه  $\hat{a}_\varphi$  میدان

$$\begin{aligned}
 ۱) \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \\ V_m \rightarrow \text{مقداری محدود} \end{array} \right. & \quad ۲) \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow 0 \\ V_m \rightarrow \text{مقداری محدود} \end{array} \right. \\
 ۳) \left\{ \begin{array}{l} r = a \\ H_{r_1} = H_{r_2} \end{array} \right. & \quad ۴) \left\{ \begin{array}{l} r = a \\ H_{\theta_2} - H_{\theta_1} = J_s = J_s \sin \theta \end{array} \right.
 \end{aligned} \quad (۸۵-۶)$$

شرایط مرزی ۱ و ۲ به این دلیل اعمال می‌شوند که یک توزیع جریان محدود در هیچ نقطه‌ای از فضا نمی‌تواند پتانسیل و شدت میدان نامحدود ایجاد کند. شرط ۳ پیوستگی مؤلفه‌های عمودی میدانها را بر اساس رابطه ۶-۳۷ و شرط ۴ میزان ناپیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدانها را بر اساس رابطه ۶-۳۵ بیان می‌نماید. توجه کنید که نواحی درون و بیرون سیم‌پیچ کروی را می‌توان به صورت دو ناحیه با مرزی در  $r=a$  و با قابلیت‌های نفوذ یکسان در نظر گرفت و شرایط مرزی ۶-۳۷ و ۶-۳۵ را به کار برد.

با استفاده از تقارن استوانه‌ای توزیع جریان نسبت به محور  $z$  و قانون مداری آمپر می‌توان نتیجه گرفت که مؤلفه  $\varphi$  میدان  $H$  باید برابر صفر باشد. در حقیقت اگر  $\oint_C H \cdot dL$  را روی یک مسیر دایره‌ای شکل دلخواه، مطابق شکل ۶-۲۰-ب، که مرکز آن منطبق بر محور  $z$  و صفحه آن عمود بر محور  $z$  است، محاسبه کنیم چون جریان خالص دربرگرفته شده توسط مسیر  $C$  صفر است، داریم:

$$\oint_C H \cdot dL = H_\varphi (\int_C r \sin \theta) = 0$$

و در تمام نقاط خواهیم داشت:

$$H_\varphi = 0$$

اما صفر بودن مؤلفه  $\varphi$  میدان  $H$  به معنای مستقل بودن تابع پتانسیل  $V_m$  از  $\varphi$  می‌باشد. (چرا؟) بنابراین، پتانسیل نرده‌ای  $V_m$  فقط تابعی از  $r$  و  $\theta$  بوده و جواب کلی آن شکل رابطه ۴-۸۰ را دارا است. سپس با بررسی شرط مرزی ۴ می‌توان دریافت که چون تغییرات  $H_\theta$ ،  $\sin \theta$  را دربردارد و  $H_\theta$  از طریق مشتق نسبت به  $\theta$  به  $V_m$  وابسته است، تابع پتانسیل باید تغییراتی به صورت  $\cos \theta$  داشته باشد و در رابطه ۴-۸۰،  $n$  را باید مساوی واحد انتخاب کرد. بدین ترتیب، تابع  $V_m$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V_{m_1} = (A_1 r + \frac{B_1}{r}) \cos \theta \quad r < a \quad (۶-۸۶-الف)$$

$$V_{m_2} = (A_2 r + \frac{B_2}{r}) \cos \theta \quad r > a \quad (۶-۸۶-ب)$$

اعمال شرط مرزی ۲ در رابطه ۶-۸۶-الف نتیجه  $B_1 = 0$  و اعمال شرط مرزی ۱ در رابطه ۶-۸۶-ب نتیجه  $A_2 = 0$  را به دنبال دارد. برای اعمال شرایط مرزی دیگر ابتدا میدان  $H$  را محاسبه می‌کنیم:

$$H_1 = -\nabla V_{m_1} = -A_1 \cos \theta \hat{a}_r + A_1 \sin \theta \hat{a}_\theta \quad r < a \quad (۶-۸۷-الف)$$

$$H_2 = -\nabla V_{m_2} = \frac{2B_2}{r^2} \cos \theta \hat{a}_r + \frac{B_2}{r^2} \sin \theta \hat{a}_\theta \quad r > a \quad (۶-۸۷-ب)$$

اعمال شرایط مرزی ۳ و ۴ در رابطه ۶-۸۷ به دستگاه دو معادله‌ای زیر می‌انجامد:

$$\begin{cases} \frac{2B_2}{a^2} = -A_1 \\ \frac{B_2}{a^2} - A_1 = J_S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{2}{3} J_S \\ B_2 = \frac{1}{3} a^2 J_S \end{cases} \quad (۶-۸۸)$$

با جایگزین نمودن مقادیر به دست آمده برای  $A_1$  و  $B_2$  در روابط ۶-۸۷ نتیجه نهایی زیر را به دست می‌آوریم:

$$H = \begin{cases} \frac{2}{3} J_S (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta) = \frac{2}{3} J_S \hat{a}_z & r < a \quad (۶-۸۹-الف) \\ \frac{1}{3} J_S \left( \frac{a^2}{r^2} \right) (\cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) & r > a \quad (۶-۸۹-ب) \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که میدان مغناطیسی در درون سیم بیچ کروی یکنواخت و در جهت  $z$  است، در حالی که در بیرون سیم بیچ همانند میدان یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور  $m = \frac{4}{3} \pi a^3 J_S$  می‌باشد.

■

## ۶-۹ نیرو و گشتاور مغناطیسی

با مفهوم نیروی مغناطیسی در قسمتهای ۵-۱ و ۵-۳ آشنا شدیم. نیرویی که دو مدار حامل جریان بر یکدیگر اعمال می‌کنند از رابطه ۵-۱، که بیان قانون نیروی آمپر است، به دست می‌آید. این نیرو را به صورت نیرویی که میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان بر مدار جریان دیگر اعمال می‌کند تعبیر نمودیم. در حالت

کلی اگر مدار  $C$  حامل جریان  $I$  در میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  قرار بگیرد، نیروی اعمال شده بر آن، با توجه به رابطه ۳-۵، برابر است با:

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (۹۰-۶)$$

در صورتی که میدان  $\mathbf{B}$  یکنواخت باشد، انتگرال رابطه ۶-۹۰ را می توان به صورت  $(\oint_C d\mathbf{L}) \times \mathbf{B}$  نوشت و با توجه به اینکه  $\oint_C d\mathbf{L} = 0$  است، نتیجه می شود. اگرچه مقدار خالص نیروی اعمال شده بر یک مدار جریان توسط میدان مغناطیسی یکنواخت  $\mathbf{B}$  همواره صفر است، گشتاور مکانیکی اعمال شده بر مدار جریان صفر نخواهد بود. این گشتاور سعی بر چرخاندن مدار جریان دارد به گونه ای که میدان حاصل از مدار جریان (و به بیان دقیق تر گشتاور مغناطیسی مدار جریان) با میدان  $\mathbf{B}$  هم جهت شود. به منظور محاسبه این گشتاور از رابطه  $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  شروع می کنیم، که در آن  $\mathbf{F}$  عبارت از نیرو، در نقطه ای که با بردار مکان  $\mathbf{r}$  نسبت به مبدأ مختصات مشخص می گردد، بوده و  $\mathbf{T}$  گشتاور حاصل از این نیرو می باشد. ابتدا مثال ساده یک مدار دایره ای شکل به شعاع  $a$  و حامل جریان  $I$ ، که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات بوده و در صفحه  $xy$  واقع باشد، را در نظر می گیریم. فرض می شود که این مدار جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت  $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{a}}_y$  قرار بگیرد. نیروی اعمال شده بر عنصر طول  $d\mathbf{L}$  از مدار جریان، بر اساس رابطه ۶-۹۰، برابر است با  $d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$  و  $d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$  عبارت است از  $d\mathbf{T} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$ ، که  $d\mathbf{L} = a d\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi$  و  $\mathbf{r} = a \hat{\mathbf{a}}_r$  می باشد. برای سادگی محاسبات،  $\hat{\mathbf{a}}_\varphi$  و  $\hat{\mathbf{a}}_r$  را بر حسب بردارهای واحد در دستگاه مختصات مستطیلی بیان می کنیم. با استفاده از  $\hat{\mathbf{a}}_\varphi = -\sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_y$  و  $\hat{\mathbf{a}}_r = \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_y$ ، عنصر گشتاور  $d\mathbf{T}$  به صورت زیر خلاصه می شود:

$$d\mathbf{T} = a^2 (\cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_y) \times [I (-\sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_y) \times B_0 \hat{\mathbf{a}}_y] d\varphi$$

$$= a^2 I B_0 (\cos \varphi \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_y - \sin^2 \varphi \hat{\mathbf{a}}_x) d\varphi$$

آنگاه میزان کل گشتاور برای همه مدار جریان عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int d\mathbf{T} = a^2 I B_0 \left[ \hat{\mathbf{a}}_y \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi - \hat{\mathbf{a}}_x \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right] \\ &= -(I \pi a^2) B_0 \hat{\mathbf{a}}_x \end{aligned} \quad (۹۱-۶)$$

با توجه به اینکه مقدار  $I \pi a^2$  اندازه گشتاور مغناطیسی حلقه جریان،  $\mathbf{m} = I \pi a^2 \hat{\mathbf{a}}_z$  و  $\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_y = -\hat{\mathbf{a}}_x$  است؛ نتیجه ۶-۹۱ را می توان به صورت زیر بیان داشت:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (۹۲-۶)$$

نتیجه بیان شده در رابطه ۶-۹۲ گرچه برای یک حلقه جریان دایره ای شکل به دست آمد، در حالت کلی برای هر مدار بسته جریان با شکل دلخواه، که در میدان مغناطیسی یکنواخت  $\mathbf{B}$  قرار بگیرد، صادق است. اگر مسیر جریان یک منحنی بسته مسطح باشد (یعنی بتواند روی یک صفحه قرار بگیرد)، گشتاور



مغناطیسی  $\mathbf{m}$  از رابطه  $\mathbf{m} = IS\hat{\mathbf{a}}_n$  به دست می‌آید، که  $S$  مساحت مدار جریان و  $\hat{\mathbf{a}}_n$  بردار واحدی عمود بر صفحه مدار جریان و در جهت پیشروی پیچ راستگردی است که در جهت جریان  $I$  چرخانیده شود. در صورتی که مسیر جریان یک منحنی بسته فضایی غیرمسطح باشد، گشتاور مغناطیسی آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{L} \quad (۹۳-۶)$$

اثبات رابطه ۹۲-۶ برای حالت کلی که  $C$  یک منحنی بسته غیرمسطح است به مسئله ۳۶ در پایان فصل موکول می‌گردد. رابطه ۹۲-۶ اساس کار موتورهای DC را تشکیل می‌دهد.

### نیرو و گشتاور برحسب انرژی مغناطیسی ذخیره شده

محاسبه نیروی بین مدارهای جریان، وقتی که این مدارها شکلهای ساده یا تقارنهای به خصوصی نداشته باشند، با استفاده از قانون نیروی آمپر کار آسانی نیست. در اینجا روش دیگری مبتنی بر انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم ارائه می‌دهیم. شیوه بررسی در اینجا مشابه روشی است که برای مطالعه نیرو و گشتاور الکتریکی در قسمت ۳-۱۳ به کار بردیم. فرض کنید سیستمی مرکب از تعدادی توزیع جریان داشته باشیم که با دنیای خارج هیچ گونه ارتباطی نداشته باشد. تصور کنید یک جابه‌جایی مجازی در این سیستم به اندازه  $\Delta L$  زوی دهد. کار لازم برای این جابه‌جایی برابر است با  $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta L$  که همان نیروی مورد نظر است. چون سیستم با دنیای خارج ارتباط ندارد، انرژی مورد نیاز باید از خود سیستم تأمین شود و چنین چیزی فقط در ازای کاهش انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم امکان‌پذیر است. بنابراین:

$$\Delta W + \Delta W_m = 0 \quad (۹۴-۶)$$

که  $\Delta W_m$  تغییر به وجود آمده در انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم است اگر جابه‌جایی  $\Delta L$  به وقوع می‌پیوست. با جایگزین نمودن  $\Delta W$ ، داریم:

$$\Delta W_m = -\mathbf{F} \cdot \Delta L \quad (۹۵-۶)$$

پس از به کار بستن تعریف گرادیان یک تابع نرده‌ای، رابطه ۹۵-۶ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{F} = -\nabla W_m \Big|_{\phi = \text{ثابت}} \quad (۹۶-۶)$$

توجه کنید که «ثابت  $\phi$ » در رابطه ۹۶-۶ ناشی از این حقیقت است که چون سیستم با دنیای خارج ارتباط ندارد، میزان کل شار مغناطیسی سیستم (مترادف با میزان کل بار الکتریکی در سیستمهای الکتریکی) ثابت باقی می‌ماند.

اگر سیستم مورد مطالعه طوری طرح شده باشد که بتواند حول محوری، مثلاً محور  $z$ ، بچرخد، کار مورد نیاز برای جابه‌جایی زاویه‌ای  $\Delta\phi$  برابر است با  $\Delta W = T_z \Delta\phi$ ، آنگاه:

$$T_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \phi} \Big|_{\phi = \text{ثابت}} \quad (۹۷-۶)$$

شکل ۶-۲۱ مدار یک سیستم الکترومکانیکی را نشان می‌دهد که دارای کاربردهای صنعتی متعددی است. جراثقال برقی و کلیدها و رله‌های الکترومکانیکی طرزکاری نظیر سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۲۱ دارند. قسمت اصلی مدار این سیستم شامل یک هسته آهنی U شکل است که به دور آن سیم‌پیچی با  $N$  دور تعبیه شده است. جریان  $I$  در سیم پیچ شار مغناطیسی  $\phi$  را در مدار تولید می‌نماید. برای محاسبه نیرویی که به وزنه آهنی وارد می‌آید از رابطه ۶-۹۶ استفاده می‌کنیم. در این محاسبه باید  $\phi$  و بنابراین  $B = \phi/S$  را ثابت نگه داریم، که  $S$  سطح مقطع هسته آهنی می‌باشد. اگر وزنه به اندازه  $dx$  از هسته دورتر شود، تغییر به وجود آمده در انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم با فرض ثابت ماندن  $\phi$  برابر خواهد بود با:

$$dW_m = \left( \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV = \left( \frac{\phi^2}{2\mu_0 S^2} \right) dV \quad (۹۸-۶)$$

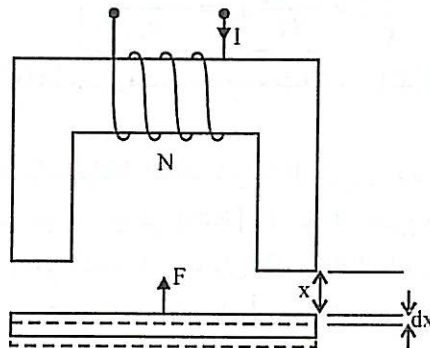
که  $dV = 2S dx$  تغییر حجم مدار مغناطیسی و  $B^2/2\mu_0$  چگالی انرژی مغناطیسی در حجم  $dV$  می‌باشد. یادآوری می‌شود که فضای تغییر حجم فقط شامل هوا با قابلیت نفوذ  $\mu_0$  می‌باشد. با جایگزین نمودن  $dV$  در رابطه ۶-۹۸، نتیجه  $dW_m/dx = B^2 S/\mu_0$  حاصل گشته و آنگاه:

$$F = -\nabla W_m = -\frac{dW_m}{dx} \hat{a}_x = -\frac{B^2 S}{\mu_0} \hat{a}_x \quad (۹۹-۶)$$

یک روش دیگر برای محاسبه نیرو و گشتاور مغناطیسی بر حسب انرژی ذخیره شده در سیستم بر این فرض استوار است که سیستم با دنیای خارج ارتباط دارد و انرژی مورد نیاز برای تغییر مکان  $\Delta L$  از منابع خارجی تأمین می‌شود. به عنوان مثال می‌توان تصور کرد که سیم‌پیچ جریان در سیستم شکل ۶-۲۱ به یک منبع جریان وصل می‌باشد و جریان سیم‌پیچ ( $I$ ) همواره ثابت است. در این حالت  $\Delta W = \Delta W_m$  است و با استفاده از  $\Delta W = F \cdot \Delta L$  و تعریف گرادیان، داریم:

$$F = \nabla W_m \quad | \quad I = \text{ثابت} \quad (۱۰۰-۶)$$

در صورتی که سیستم بتواند حول محوری، مثلاً محور  $Z$ ، بچرخد (نظیر آنچه که در مسئله خودآزمایی ۲۸ نشان داده شده است) مؤلفه  $Z$  برای گشتاور حاصل، از رابطه زیر به دست می‌آید:



شکل ۶-۲۱: مدار یک سیستم الکترومکانیکی

$$T_z = \left. \frac{\partial W_m}{\partial \phi} \right|_{I=\text{ثابت}} \quad (۱۰۱-۶)$$

باید توجه شود که روابط ۶-۹۶ و ۶-۱۰۰ و نیز روابط ۶-۹۷ و ۶-۱۰۱ پاسخهای یکسانی را برای یک سیستم نتیجه می‌دهند.

برای روشن شدن این نکته مدار شکل ۶-۲۱ را دوباره، با فرض ثابت باقی ماندن جریان  $I$ ، مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید قبل از جابه‌جایی  $dx$ ، شار گذرنده از مدار  $\phi$  و رلوکتانس آن  $\mathcal{R}$  باشد. بعد از جابه‌جایی، شار به  $\phi + d\phi$  و رلوکتانس به  $\mathcal{R} + d\mathcal{R}$  تغییر می‌یابد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیستم، با استفاده از رابطه ۶-۶۷، برابر است با:

$$W_m = \frac{1}{2} \Psi I = \frac{1}{2} NI\phi$$

با دیفرانسیل گرفتن از طرفین این رابطه و توجه به اینکه  $N$  و  $I$  ثابت فرض می‌شوند، داریم:

$$dW_m = \frac{1}{2} NI d\phi = \frac{1}{2} \mathcal{R} \phi d\phi \quad (۱۰۲-۶)$$

برای محاسبه  $d\phi$ ، رابطه  $(KVL)_m$  را در مدار قبل و بعد از جابه‌جایی  $dx$  می‌نویسیم:

$$NI = \mathcal{R}\phi = (\mathcal{R} + d\mathcal{R})(\phi + d\phi) \quad (۱۰۳-۶)$$

با صرف نظر از  $d\mathcal{R} d\phi$  در مقابل جملات دیفرانسیل مرتبه اول در رابطه ۶-۱۰۳، داریم:

$$d\phi = -\phi \frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} \quad (۱۰۴-۶)$$

با استفاده از رابطه ۶-۱۰۴ در رابطه ۶-۱۰۲ و توجه به اینکه  $d\mathcal{R} = 2dx/\mu_0 S$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$dW_m = -\frac{\phi^2 dx}{\mu_0 S} = -\frac{B^2 S}{\mu_0} dx$$

و سرانجام بر اساس رابطه ۶-۱۰۰، خواهیم داشت:

$$F = \frac{dW_m}{dx} \hat{a}_x = -\frac{B^2 S}{\mu_0} \hat{a}_x \quad (۱۰۵-۶)$$

ملاحظه می‌کنیم، همان‌طور که انتظار می‌رفت، نتیجه به دست آمده در رابطه ۶-۱۰۵ دقیقاً برابر نتیجه قبلی در رابطه ۶-۹۹ می‌باشد.

اگر از این سیستم به عنوان یک جراثقال استفاده شود، اندازه نیروی  $F$  باید حداقل مساوی نیروی جاذبه زمین بر وزنه باشد. به عبارت دیگر،  $|F| \geq mg$  که  $m$  جرم وزنه و  $g$  شتاب ثقل زمین (متر بر مجذور ثانیه  $g = 9.8$ ) می‌باشد. بنابراین، برای آنکه جراثقال قادر به بلند کردن وزنه باشد، چگالی شار مغناطیسی مورد نیاز در هسته باید شرط زیر را برآورده سازد:

$$B \geq \sqrt{\frac{\mu_0 mg}{S}} \quad (۱۰۶-۶)$$



## ۱۰-۶ خلاصه‌ای از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن

اکنون که با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن آشنایی لازم را کسب نموده‌ایم، جا دارد که خلاصه‌ای از قوانین بنیادی حاکم بر این دو میدان و روابط مهم استخراج شده از آنها را ارائه نماییم. در هر دو مورد میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، یک قانون تجربی زیربنای کلیه قوانین و روابط دیگر را تشکیل می‌دهد. مثلاً، در مورد میدان الکتریکی ساکن قانون کولمب اساس نظریه میدان است و سایر قوانین، فرمولها و روابط، ریشه در این قانون دارند. با این وجود، آنچه که به عنوان قوانین حاکم بر میدانها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند قوانین ماکسول می‌باشند که ما تا به حال آنها را برای میدانهای ساکن آموخته‌ایم. در نهایت این قوانین ماکسول هستند که به صورت جامع‌ترین روابط قادر به تشریح کلیه خصوصیات و رفتار میدانها می‌باشند و به درستی اساس مطالعه میدانهای الکترومغناطیس را تشکیل می‌دهند.

در جدول ۶-۱ خلاصه‌ای از قوانین و روابط مهم برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن درج شده است. این جدول همچنین مقایسه روشنگرانه‌ای از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن به عمل می‌آورد و اختلافات و تشابهات آنها را به خوبی آشکار می‌سازد.

جدول ۶-۱: خلاصه‌ای از قوانین بنیادی و روابط مهم برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن

میدان الکتریکی ساکن	میدان مغناطیسی ساکن	
$F_{r1} = \frac{Q_1 Q_2 R_{r1}}{4\pi\epsilon_0 R_{r1}^2}$	$F_{r1} = \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2 dL_1 \times (dL_2 \times R_{r1})}{4\pi R_{r1}^2}$	قوانین تجربی نیرو
$F = qE$	$F = qv \times B = IdL \times B$	تعاریف
$E = \frac{QR}{4\pi\epsilon_0 R^2}$	$dB = \frac{\mu_0 I dL' \times R}{4\pi R^2}$	میدان ناشی از توزیع نقطه‌ای
$E = \int_C \frac{\rho_L(r')(r-r') dL'}{4\pi\epsilon_0  r-r' ^2}$	$B = \int_C \frac{\mu_0 I dL' \times (r-r')}{4\pi  r-r' ^2}$	توزیع خطی
$E = \int_{S'} \frac{\rho_S(r')(r-r') dS'}{4\pi\epsilon_0  r-r' ^2}$	$B = \int_{S'} \frac{\mu_0 J_S(r') \times (r-r') dS'}{4\pi  r-r' ^2}$	توزیع سطحی
$E = \int_{V'} \frac{\rho_V(r')(r-r') dV'}{4\pi\epsilon_0  r-r' ^2}$	$B = \int_{V'} \frac{\mu_0 J(r') \times (r-r') dV'}{4\pi  r-r' ^2}$	توزیع حجمی
$\oint_S E \cdot dS = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$ (بار محصور در S) $\nabla \cdot E = \rho_V / \epsilon_0$	$\oint_C B \cdot dL = \mu_0 I$ (جریان محصور در C) $\nabla \times B = \mu_0 J$	قوانین گوس و آمپر شکل انتگرالی شکل نقطه‌ای
$\oint_C E \cdot dL = 0$ $\nabla \times E = 0$	$\oint_S B \cdot dS = 0$ $\nabla \cdot B = 0$	خواص میدان شکل انتگرالی شکل نقطه‌ای

$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ $V = \int_C \frac{\rho_L(r') dL'}{4\pi\epsilon_0  r-r' }$ $V = \int_{S'} \frac{\rho_S(r') dS'}{4\pi\epsilon_0  r-r' }$ $V = \int_{V'} \frac{\rho_V(r') dV'}{4\pi\epsilon_0  r-r' }$	$A = \frac{\mu_0 IdL'}{4\pi R}$ $A = \int_C \frac{\mu_0 IdL'}{4\pi  r-r' }$ $A = \int_{S'} \frac{\mu_0 J_S(r') dS'}{4\pi  r-r' }$ $A = \int_{V'} \frac{\mu_0 J(r') dV'}{4\pi  r-r' }$	<p>پتانسیل ناشی از توزیع نقطه‌ای</p> <p>توزیع خطی</p> <p>توزیع سطحی</p> <p>توزیع حجمی</p>
$E = -\nabla V$	$B = \nabla \times A$	روابط پتانسیل و میدان
$\nabla \cdot V = -\rho_V / \epsilon_0$	$\nabla \cdot A = -\mu_0 J$	معادله پواسون
$\nabla \cdot D = \rho_V$ $\nabla \times E = 0$	$\nabla \times H = J$ $\nabla \cdot B = 0$	قوانین ماکسول
$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + P$	$B = \mu H = \mu_0 (H + M)$	روابط بین میدانها
$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$	$\mu = \mu_0 \mu_r$	قابلیتهای گذردهی و نفوذ
$\hat{a}_n \cdot (D_1 - D_2) = \rho_S$ $\hat{a}_n \times (E_1 - E_2) = 0$	$\hat{a}_n \times (H_1 - H_2) = J_S$ $\hat{a}_n \cdot (B_1 - B_2) = 0$	شرایط مرزی
$\rho_{PS} = \hat{a}_n \cdot P$ $\rho_P = -\nabla \cdot P$	$J_{ms} = -\hat{a}_n \times M$ $J_m = \nabla \times M$	توزیعهای القایی
$C = \frac{Q}{V}$	$L = \frac{\Psi}{I}$	ظرفیت و ضریب خودالقایی
$R = \frac{V}{I}$	$\mathcal{R} = \frac{V_m}{\phi}$	مقاومت و رلوکتانس
$W_e = \frac{1}{2} \int_V E \cdot D dV$	$W_m = \frac{1}{2} \int_V H \cdot B dV$	انرژی ذخیره شده
$F = -\nabla W_e \Big _{\text{ثابت } Q}$ $F = \nabla W_e \Big _{\text{ثابت } V}$	$F = -\nabla W_m \Big _{\text{ثابت } \phi}$ $F = \nabla W_m \Big _{\text{ثابت } I}$	نیرو
$T_z = -\frac{\partial W_e}{\partial \phi} \Big _{\text{ثابت } Q}$ $T_z = \frac{\partial W_e}{\partial \phi} \Big _{\text{ثابت } V}$	$T_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \phi} \Big _{\text{ثابت } \phi}$ $T_z = \frac{\partial W_m}{\partial \phi} \Big _{\text{ثابت } I}$	گشتاور