

### ۹-۵ مسائل خودآزمایی

اکثر این مسائل به محاسبه میدان مغناطیسی ساکن  $B$  و پتانسیل مغناطیسی برداری  $A$  ناشی از توزیعیهای مختلف جریان الکتریکی اختصاصی یافته‌اند. محاسبه میدان  $B$  را می‌توان با استفاده از یکی از روشهای زیر انجام داد:

الف) استفاده از قانون بیو-سوارکه با روابط ۵-۶، ۵-۱۱ و ۵-۱۲ به ترتیب برای توزیعیهای جریان خطی، سطحی و حجمی بیان شده است.

ب) استفاده از قانون مداری آمپر، رابطه ۵-۳۲.

ج) محاسبه پتانسیل مغناطیسی برداری  $A$  با استفاده از روابط ۵-۵۸ تا ۵-۶۰ و سپس به دست آوردن کرل آن، رابطه ۵-۵۷.

ساده‌ترین روش محاسبه میدان مغناطیسی استفاده از قانون مداری آمپر می‌باشد. اما، این روش محدود به توزیعیهای جریانی است که از درجه تقارن بالایی برخوردار بوده یا قابل تجزیه به این گونه توزیعیها باشند. توزیعیهای جریانی که محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آنها با استفاده از قانون مداری آمپر به سادگی میسر است عبارتند از:

۱) در دستگاه مختصات مستطیلی اگر چگالی توزیع جریان الکتریکی تابعی از فقط یک مختصه، مثلاً  $y$ ، باشد میدان مغناطیسی ناشی از مؤلفه  $\hat{a}_z$  چنین جریانی فقط دارای مؤلفه  $\hat{a}_x$  بوده، که به نوبه خود تابعی از  $y$  می‌باشد، به عبارت دیگر  $B = B_x(y)\hat{a}_x$ . مسیر بسته مورد نیاز برای قانون مداری آمپر را به صورت یک مستطیل در صفحه  $xy$  به طول  $l$  موازی محور  $y$  و عرض واحد موازی محور  $x$  در نظر می‌گیریم، که  $l = 2y$  از  $-y$  تا  $+y$  برای توزیعیهایی که تابع زوجی از  $y$  بوده، و  $l = y_1 - y_2$  از  $y_2$  تا  $y_1$  برای توزیعیهایی که تابع فردی از  $y$  باشند. در این حالت  $y_1 > y_2$  است، که  $y = y_2$  مرز فوقانی توزیع جریان را مشخص می‌کند، به طوری که برای  $|y| > y_1$  چگالی توزیع جریان صفر است. آن گاه می‌توان نشان داد که:

$$B(y) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I y}{2 |y|} \hat{a}_x & \text{برای توزیعیهای زوج} \\ \mu_0 I \hat{a}_x & \text{برای توزیعیهای فرد} \end{cases}$$

که  $I$  جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته آمپری است. توزیعیهای جریان که دارای ویژگیهای مذکور در دستگاه مختصات مستطیلی باشند فقط می‌توانند از انواع سطحی و حجمی باشند، زیرا جریان خطی تقارن مورد نیاز را در این دستگاه مختصات نشان نمی‌دهد. چنانچه توزیع جریان نه تابعی زوج و نه تابعی فرد از یک مختصه مستطیلی باشد، همان‌طور که در فصل ۲ توضیح داده شد، می‌توان آن را به صورت مجموعی از توابع زوج و فرد نوشت و از اصل جمع آثار استفاده نمود.

میدان مغناطیسی یک صفحه بینهایت جریان که چگالی توزیع آن با بردار ثابت  $J_s$  بیان شده باشد را می‌توان به سادگی با استفاده از قانون مداری آمپر محاسبه نمود. اگر صفحه جریان بر  $y=0$  منطبق باشد و چگالی توزیع جریان فقط مؤلفه  $\hat{a}_z$  داشته باشد میدان حاصل شده از رابطه ۵-۲۴ به دست

می‌آید در صورتی که صفحه توزیع جریان دارای آرایش فضایی دلخواهی باشد و بردار چگالی توزیع جریان روی این صفحه در امتداد دلخواهی باشد، میدان مغناطیسی ناشی از آن در نقطه دلخواه  $M$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{r} \mathbf{J}_S \times \hat{\mathbf{a}}_n$$

که  $\hat{\mathbf{a}}_n$  بردار واحدی در امتداد عمود بر صفحه جریان از نقطه  $M$  و در جهت دور شدن از صفحه جریان می‌باشد. میدان مغناطیسی ناشی از چندین صفحه جریان با چگالیهای توزیع یکنواخت را با به کار بردن رابطه بالا و اصل جمع آثار به دست می‌آوریم.

(۲) در دستگاه مختصات استوانه‌ای اگر چگالی توزیع جریان الکتریکی تابعی از فقط مختصه شعاعی  $r$  باشد، میدان مغناطیسی ناشی از مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_z$  چنین جریانی فقط دارای مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_\varphi$  بوده، که به نوبه خود فقط تابعی از  $r$  می‌باشد، یعنی  $\mathbf{B} = B_\varphi(r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$ . مسیر بسته آمپری را به صورت دایره‌ای به شعاع  $r$  واقع روی صفحه‌ای عمود بر محور  $z$  و مرکزی منطبق بر این محور در نظر می‌گیریم. آن‌گاه می‌توان نشان داد که:

$$\mathbf{B}(r) = B_\varphi(r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

که  $I$  جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته آمپری به شرح بالا می‌باشد. همچنین، اگر چگالی توزیع جریان فقط تابعی از  $r$  باشد میدان مغناطیسی ناشی از مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_\varphi$  چنین جریانی فقط دارای مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_z$  که به نوبه خود فقط تابعی از  $r$  می‌باشد، یعنی  $\mathbf{B} = B_z(r) \hat{\mathbf{a}}_z$ . در این حالت مسیر بسته آمپری را به صورت مستطیلی در صفحه‌ای که شامل محور  $z$  باشد در نظر می‌گیریم. طول این مسیر مستطیلی برابر واحد و موازی محور  $z$  و عرض آن برابر  $W = r_1 - r_2$  از  $r_2$  تا  $r_1$  در امتداد شعاعی است. در این حالت  $r_1 > r_2$  بوده به طوری که چگالی توزیع جریان برای  $r > r_2$  صفر است. با توجه به این که میدان مغناطیسی ناشی از این توزیع جریان سیملوله‌ای برای  $r > r_2$  صفر می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B}(r) = B_z(r) \hat{\mathbf{a}}_z = \mu_0 I \hat{\mathbf{a}}_z$$

که  $I$  جریان خالص در برگرفته شده توسط مسیر بسته آمپری مستطیلی شکل بوده و در حالت کلی تابعی از  $r$  می‌باشد. توزیعی که محاسبه میدان ناشی از آنها با استفاده از قانون مداری آمپر در دستگاه مختصات استوانه‌ای میسر است عبارتند از: خط بینهایت جریان، یک یا چندین سطح استوانه‌ای بینهایت طویل هم‌محور، که روی هر یک جریانی با چگالی توزیع ثابت برقرار باشد؛ و استوانه یا لایه‌های استوانه‌ای بینهایت طویل، که جریان الکتریکی با چگالی حجمی  $\mathbf{J} = J_\varphi(r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi + J_z(r) \hat{\mathbf{a}}_z$  در آنها توزیع شده باشد توزیع مرکبی شامل جریانهای خطی، سطحی و حجمی به شرطی که این توزیعها هم‌محور باشند را نیز می‌توان با استفاده از قانون مداری آمپر به سادگی بررسی نمود. ویژگی مشترک همه توزیعهای استوانه‌ای مذکور در این است که حداکثر فقط تابعی از مختصه شعاعی  $r$  می‌باشند، از این رو، این توزیعها در امتداد محور  $z$  از هر دو سو تا بینهایت ادامه دارند.

یک خط بینهایت جریان ساده‌ترین مورد برای کاربرد قانون مداری آمپر در دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌باشد. در صورتی که خط جریان برابر  $I$  و در امتداد مثبت محور  $z$  باشد میدان حاصل، از

رابطه ۵-۱۷ به دست می‌آید. اگر خط جریان در امتداد دلخواهی در فضا قرار گرفته باشد، میدان مغناطیسی ناشی از آن در نقطه M از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{\mathbf{a}}_n$$

که d فاصله نقطه M از خط جریان و  $\hat{\mathbf{a}}_n$  بردار واحدی است که در امتداد عمود بر صفحه متشکل از نقطه M و خط جریان بوده و از قاعده انگشتان دست راست پیروی می‌نماید. براساس این قاعده، اگر انگشت شست در امتداد جریان قرار گیرد، چهار انگشت دیگر (به گونه به هم چسبیده) جهت  $\hat{\mathbf{a}}_n$ ، یعنی جهت میدان B را نشان خواهند داد.

۳) در دستگاه مختصات کروی، اگر چگالی توزیع جریان فقط دارای مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_r$  بوده و این مؤلفه فقط تابعی از r باشد، میدان مغناطیسی حاصل از این توزیع جریان فقط مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_\phi$  خواهد داشت. مسیر بسته آمپری را به صورت دایره‌ای به شعاع  $r_c$  (مختصه شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای) واقع روی صفحه‌ای عمود بر محور z و مرکزی منطبق بر این محور در نظر می‌گیریم. توزیعهای جریانی که دارای ویژگیهای مزبور باشند محدود به سطوح مخروطی یا لایه‌های مخروطی می‌باشند. به عنوان مثال می‌توان دو سطح مخروطی به معادلات  $\theta = \theta_1$  و  $\theta = \theta_2$  در نظر گرفت که جریان کل I روی سطح  $\theta = \theta_1$  در امتداد شعاعی به سوی مبدا مختصات و روی سطح  $\theta = \theta_2$  نیز در امتداد شعاعی ولی در جهت دور شدن از مبدا مختصات برقرار باشد. میدان مغناطیسی ناشی از چنین توزیع جریانی عبارت است از (با فرض  $\theta_2 > \theta_1$ ):

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} \hat{\mathbf{a}}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin \theta} \hat{\mathbf{a}}_\phi & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \mathbf{0} & \theta < \theta_1, \theta > \theta_2 \end{cases}$$

در صورتی که یکی از مقادیر ثابت  $\theta_1$  یا  $\theta_2$  برابر صفر یا  $180^\circ$  درجه باشد، سطح مخروطی مورد نظر به یک نیم خط منطبق بر محور z ( $z > 0$  برای مقادیر صفر،  $z < 0$  برای  $180^\circ$  درجه) تبدیل می‌شود. میدان مغناطیسی ناشی از دو گونه توزیع جریان دیگر، که همیشه در قالب دستگاه مختصات به خصوصی نمی‌گنجد، شایسته یادآوری است. یکی سیملوله بینهایت طویل ولی با سطح مقطع دلخواه (مانند مثلثی، مربعی، چند ضلعی منظم یا نامنظم و به طور کلی منحنی بسته‌ای که با رابطه  $f(x,y) = C$  در صفحه xy بیان شود) که چگالی سطحی توزیع جریان روی آن فاقد مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_z$  بوده و دارای اندازه ثابتی می‌باشد، یعنی  $|\mathbf{J}_S| = J_S$ . میدان مغناطیسی ناشی از چنین توزیع جریانی در بیرون سیملوله صفرودر درون آن از رابطه  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_S \cdot \hat{\mathbf{a}}_z$  به دست می‌آید. دیگری جریانی که روی سطحی دلخواه با تقارن استوانه‌ای (سطحی که از دوران منحنی  $y = f(z)$  واقع روی صفحه yz حول محور z پدید آید) به گونه‌ای توزیع شده باشد که چگالی آن فاقد مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_\phi$  بوده و تابعی از مختصه  $\phi$  نیز نباشد. میدان مغناطیسی ناشی از چنین توزیع جریانی، از رابطه  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_\phi \mu_0 I / 2\pi r_c$  به دست می‌آید که I جریان در برگرفته شده توسط یک

مسیر دایره‌ای به شعاع  $r_c$ ، واقع روی صفحه‌ای عمود بر محور  $z$  که شامل نقطه‌ای که میدان در آن مورد نظر است و مرکزش منطبق بر محور  $z$  است، می‌باشد. نمونه‌های این نوع توزیع جریان، شامل چنبره (با سطح مقطع دلخواه) و توزیع جریان در مسئله ۱۶ می‌باشد.

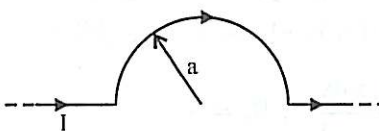
یکی از ویژگیهای قانون مداری آمپر، صرف‌نظر از این که در چه دستگاه مختصاتی به کار رود، این است که میدان مغناطیسی را در کلیه نقاط فضا به دست می‌دهد. در صورتی که توزیع جریان فاقد تقارن‌ها یا خصوصیات لازم دیگر که در بالا اجمالاً مورد مطالعه قرار گرفتند باشد، محاسبه میدان مغناطیسی باید با استفاده از قانون بیو-ساوار و یا به دست آوردن پتانسیل مغناطیسی برداری و سپس تعیین کرل آن انجام گیرد. موارد متعددی را می‌توان برشمرد که محاسبه میدان مغناطیسی با استفاده از قانون مداری آمپر میسر نیست. به عنوان مثال، هر نوع توزیع خطی به جز خط بینهایت جریان مانند حلقه‌های جریان به اشکال دایره‌ای، مربعی، یا یک مسیر بسته دلخواه، توزیع جریان روی سطحی استوانه‌ای به طول محدود، و توزیع جریان روی یک نیم‌صفحه حتی با چگالی یکنواخت را نمی‌توان با استفاده از قانون مداری آمپر به روش تحلیلی مورد بررسی قرار داد.

محاسبه پتانسیل مغناطیسی برداری فقط با استفاده از روابط ۵-۵۸ تا ۵-۶۰ میسر است. اما پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای را در بخشی از فضا که فاقد جریان الکتریکی است می‌توان پس از تعیین میدان  $B$  از

$$\text{رابطه } B \cdot dL = -\frac{1}{\mu_0} \int V_m \cdot dl \text{ یا با حل معادله لاپلاس برای } V_m \text{ به دست آورد.}$$

۱. یک قطعه سیم نازک مستقیم به طول  $l$  و جرم  $m$  به طور افقی در امتداد شرق به غرب و در یک میدان مغناطیسی یکنواخت  $B_0$  که به سمت شمال است قرار می‌گیرد. چه جریانی باید از سیم عبور کند تا نیروی جاذبه وارد آمده بر سیم از طرف زمین به طور کامل خنثی شود. مقدار این جریان را وقتی که قطعه سیم دارای طول ۱ متر و جرم ۳۰ گرم بوده و در میدان مغناطیسی زمین، که برابر  $0.3 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$  فرض می‌شود، قرار بگیرد محاسبه کنید.

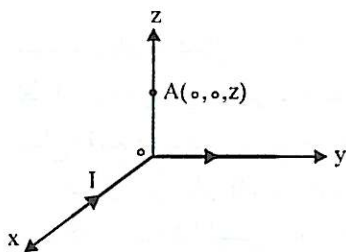
۲. نشان دهید که نیروی کل وارد آمده بر یک مدار بسته حامل جریان  $I$  وقتی که در میدان مغناطیسی یکنواخت  $B_0$  قرار گیرد همواره برابر صفر است.



شکل ۵-۱۷

۳. یک رشته سیم مستقیم به طول بینهایت و حامل جریان  $I$  در قسمتی از مسیر، شکل یک نیم‌دایره به شعاع  $a$ ، مطابق شکل ۵-۱۷، را به خود می‌گیرد. میدان مغناطیسی  $B$  را در مرکز نیم‌دایره محاسبه کنید.

۴. یک دوقطبی مغناطیسی مستطیلی شکل را به اضلاع  $a$  و  $b$  در نظر می‌گیریم. فرض می‌شود که دوقطبی در صفحه  $xy$  واقع و مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد. نشان دهید که میدان مغناطیسی  $B$  در فواصل بسیار دور از دوقطبی از رابطه ۵-۲۲ به دست می‌آید که در آن گشتاور دوقطبی برابر  $m = Iab$  می‌باشد.



شکل ۱۸-۵

۵. جریان  $I$  در امتداد محورهای  $x$  و  $y$ ، مطابق شکل ۱۸-۵، جریان دارد. میدان مغناطیسی  $B$  را در نقطه‌ای روی محور  $z$  محاسبه کنید.

۶. دو حلقه جریان دایره‌ای شکل در نظر می‌گیریم به طوری که مراکز هر دو منطبق بر محور  $z$  باشد، موازی و متقارن نسبت به صفحه  $xy$  قرار گیرند، فاصله آنها از یکدیگر  $2d$  و شعاع هر یک برابر  $a$  باشد و حامل جریان  $I$  ولی در دو جهت مخالف باشند. چنین سیستمی را چهارقطبی مغناطیسی نامند. مطلوب است محاسبه میدان مغناطیسی  $B$  در فواصل دور از چهارقطبی در نقطه‌ای واقع بر:

(الف) محور  $z$ ،

(ب) صفحه  $xy$ .

۷. حلقه‌ای از سیم به شکل یک  $\pi$  ضلعی منظم در صفحه  $xy$  قرار گرفته و حامل جریان  $I$  در جهت کلی  $\varphi$  است. مرکز دایره محیطی این  $\pi$  ضلعی منطبق بر مبدأ مختصات و شعاع آن برابر  $a$  فرض می‌شود. میدان مغناطیسی  $B$  حاصل از این  $\pi$  ضلعی جریان را در نقطه  $(0, 0, z)$  محاسبه کنید. با میل دادن  $\pi$  به سمت بینهایت، میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار جریان دایره‌ای شکل به شعاع  $a$  را در نقطه  $(0, 0, z)$  به دست آورید.

۸. یک رشته سیم نازک به طور پیوسته به شکل حلزون در صفحه  $xy$  پیچیده می‌شود. این سیم پیچ حلزونی از مرکز مختصات شروع و در نقطه‌ای به شعاع  $a$  خاتمه می‌یابد. اگر تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول و در امتداد شعاعی برابر  $n$  و جریان گذرنده از آن برابر  $I$  و در جهت  $\varphi$  باشد، میدان مغناطیسی  $B$  را در نقطه  $(0, 0, z)$  محاسبه نمایید.

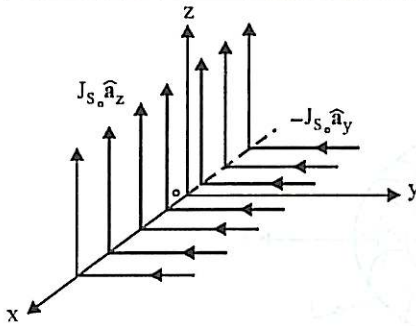
۹. یک جریان سطحی در جهت  $z$  و از بخشی از صفحه  $y=0$  که بین  $x=a$  و  $x=-a$  است، می‌گذرد. فرض می‌شود که چگالی جریان سطحی  $J_S$  تابع دلخواهی از  $x$  باشد. نشان دهید که مؤلفه‌های میدان مغناطیسی  $B$  در نقطه  $(0, y, 0)$  از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$B_x = -\frac{\mu_0 y}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_S dx}{x^2 + y^2}, \quad B_y = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{J_S x dx}{x^2 + y^2}, \quad B_z = 0$$

مؤلفه‌های میدان را برای توزیعهای جریان زیر محاسبه کنید:

$$J_S = J_{S_0} \hat{a}_z \quad (\text{الف})$$

$$J_S = J_{S_0} (1 - |x|/a) \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$



شکل ۵-۱۹

۱۰) یک جریان سطحی با چگالی توزیع یکنواخت  $J_s$  روی دو نیم صفحه  $(y=0, z>0)$  و  $(z=0, y>0)$  مطابق شکل ۵-۱۹، توزیع شده است. میدان مغناطیسی  $B$  حاصل از این توزیع جریان را در تمام نقاط فضا تعیین کنید.

۱۱. جریان  $I$  از یک سیم هادی مستقیم که هم محور با  $z$  در نظر گرفته می شود می گذرد. جریان  $I$  به طور یکنواخت در سطح مقطع سیم، که مستطیلی شکل و به ابعاد  $a$  و  $b$  می باشد، توزیع می گردد. میدان مغناطیسی  $B$  را در مبدأ مختصات محاسبه نمایید. سیم هادی بینهایت طویل فرض می شود.
۱۲. مسئله ۱۱ را برای حالتی که سیم هادی فضای  $a \leq r \leq b$  و  $0 \leq \phi \leq \pi$  را در دستگاه مختصات استوانه‌ای اشغال نماید تکرار کنید.

۱۳) با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی  $B$  ناشی از توزیعهای جریان زیر، که در دستگاه مختصات مستطیلی بیان شده‌اند، را به دست آورید:

$$J = \begin{cases} y \hat{a}_z & |y| < a \\ 0 & |y| > a \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad J_s = \begin{cases} J_s \hat{a}_z & y = a \\ -J_s \hat{a}_z & y = -a \end{cases} \quad (\text{الف})$$

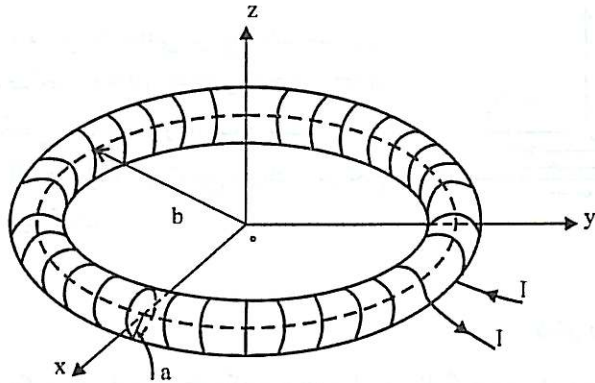
$$J = \begin{cases} (a - |y|) \hat{a}_z & |y| < a \\ 0 & |y| > a \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۱۴) مسئله ۱۳ را برای توزیعهای جریان زیر، که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده‌اند، تکرار نمایید:

$$J = \begin{cases} \frac{I}{\pi a^2} \hat{a}_z & 0 < r < a \\ \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \hat{a}_z & b < r < c \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad J_s = \begin{cases} J_s \hat{a}_z & r = a \\ -J_s \frac{a}{b} \hat{a}_z & r = b \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$J = \begin{cases} J_s (r/a)^n \hat{a}_z & n \geq 1, 0 < r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۱۵) یک چنبره با سطح مقطع دایره‌ای شکل از دوران دایره‌ای واقع در صفحه  $xy$ ، با شعاع  $a$  و به مرکز  $(b, 0, 0)$  حول محور  $z$  به وجود می آید ( $a < b$ ). یک رشته سیم نازک حامل جریان  $I$  به طور پیوسته و یکنواخت به دور چنبره پیچیده می شود. تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول و در امتداد محیط متوسط چنبره برابر  $n$  فرض می شود. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی  $B$  را در درون و بیرون چنبره به دست آورید. شکل ۵-۲۰ ابعاد چنبره و سیم پیچ آن را نشان می دهد.



شکل ۵-۲۰

۱۶. جریان  $I$  از یک رشته سیم در امتداد محور  $z$  از  $z=+\infty$  تا  $z=a$  گذشته و سپس از طریق یک سطح کروی به شعاع  $a$  و به مرکز مبدأ مختصات به نقطه  $z=-a$  رسیده و در امتداد یک رشته سیم از  $z=-a$  تا  $z=-\infty$  ادامه می‌یابد. چگالی جریان روی سطح کروی از رابطه  $\mathbf{J}_S = (I/\sqrt{\pi}a \sin \theta) \hat{\mathbf{a}}_\theta$  به دست می‌آید. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در درون و بیرون کره به شعاع  $a$  محاسبه نمایید.

۱۷. برای هر یک از میدانهای مغناطیسی داده شده در زیر چگالی توزیع جریان مولد میدان را به دست آورید:  
الف) در دستگاه مختصات مستطیلی: (ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 J_S r^2 \hat{\mathbf{a}}_\phi & 0 < r < a \\ \mu_0 J_S \frac{a^2}{r} \hat{\mathbf{a}}_\phi & a < r < b \\ \mathbf{0} & b < r < +\infty \end{cases} \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 J_S \hat{\mathbf{a}}_x & -\infty < y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_0 J_S \hat{\mathbf{a}}_x & 0 < y < a \\ -\mu_0 J_S \hat{\mathbf{a}}_x & a < y < +\infty \end{cases}$$

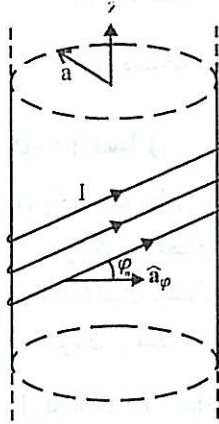
ج) در دستگاه مختصات کروی:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 J_S (\cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta) & 0 < r < a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_0 J_S \left(\frac{a}{r}\right)^2 (\sqrt{3} \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta) & a < r < +\infty \end{cases}$$

۱۸. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت  $\rho$  در یک فضای کروی به شعاع  $a$  توزیع شده است. این کره بار با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  حول محور  $z$  و در جهت  $\varphi$  می‌چرخد. پتانسیل مغناطیسی برداری حاصل از این بار کروی چرخنده را در فواصل دور از مرکز کره محاسبه نمایید. مرکز کره را منطبق بر مبدأ مختصات فرض کنید.

۱۹. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت  $\rho_S$  روی سطح یک دیسک به شعاع  $a$  توزیع شده است. این دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  حول محور خود می‌چرخد. نشان دهید که میدان مغناطیسی در مرکز دیسک از رابطه  $B = \mu_0 \rho_S \omega a/2$  به دست می‌آید.

۲۰. جریان  $I$  از یک رشته سیم در امتداد محور  $Z$  از  $z = -\infty$  تا  $z = 0$  گذشته و سپس روی یک سطح مخروطی با نیم زاویه  $\theta$  و محوری منطبق بر نیمه مثبت محور  $Z$  به طور متقارن و شعاعی توزیع می‌گردد. میدان مغناطیسی  $B$  ناشی از این توزیع جریان را در تمام نقاط فضا تعیین نمایید.



شکل ۵-۲۱

۲۱. شکل ۵-۲۱ یک سیملوله با سیم‌پیچ مایل را نشان می‌دهد. زاویه بین سیم‌پیچ و بردار واحد  $\hat{a}_\rho$  روی سطح سیملوله برابر  $\rho$  می‌باشد. جریان گذرنده از سیم‌پیچ سیملوله برابر  $I$ ، شعاع سیملوله برابر  $a$  و تعداد دورهای سیم‌پیچ در واحد طول سیملوله برابر  $n$  فرض می‌شود. میدان مغناطیسی  $B$  را در کلیه نقاط فضا محاسبه کنید.

۲۲. پتانسیل مغناطیسی برداری  $A$  را برای توزیعهای جریان در مسائل ۱۳-الف و ۱۴-الف به دست آورید. پس از یافتن  $A$  میدان مغناطیسی  $B$  را به دست آورید. درستی نتایج به دست آمده برای  $B$  را، با مقایسه آنها با نتایج به دست آمده براساس قانون مداری آمپر، تحقیق کنید.

۲۳. ضمن مطالعه معادله پواسون برای پتانسیل مغناطیسی برداری  $A$ ، اشاره نمودیم که در دستگاه مختصات مستطیلی مؤلفه‌های لاپلاسین یک بردار برابر لاپلاسین مؤلفه‌های آن بردار هستند. یعنی برای  $A = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$  داریم:

$$\nabla^2 A = (\nabla^2 A_x) \hat{a}_x + (\nabla^2 A_y) \hat{a}_y + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z$$

همچنین تأکید کردیم که این ویژگی برای لاپلاسین یک بردار در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی وجود ندارد. نشان دهید که:

$$\nabla^2 A \neq (\nabla^2 A_r) \hat{a}_r + (\nabla^2 A_\phi) \hat{a}_\phi + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z \quad \text{الف) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:}$$

$$\nabla^2 A \neq (\nabla^2 A_r) \hat{a}_r + (\nabla^2 A_\theta) \hat{a}_\theta + (\nabla^2 A_\phi) \hat{a}_\phi \quad \text{ب) در دستگاه مختصات کروی:}$$

۲۴. حلقه‌ای به شعاع  $a$  و حامل جریان  $I$  در صفحه  $xy$  واقع شده و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات می‌باشد. پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای  $V_m$  را در نقطه‌ای مثل  $P(0,0,z)$  روی محور  $Z$  به دست آورید.

۲۵. برای حلقه جریان مسئله ۲۴ نشان دهید که  $V_m = (I/4\pi)\Omega$  که  $\Omega$  زاویه‌ای فضایی محدود به حلقه جریان و دیده شده از نقطه  $P$  روی محور  $Z$  می‌باشد. (این نتیجه برای یک حلقه جریان با شکل دلخواه و برای هر نقطه دلخواه که در آن محاسبه  $V_m$  مورد نظر است صادق می‌باشد.)



۲۶) تحقیق کنید کدامیک از میدانهای برداری زیر به عنوان یک میدان مغناطیسی قابل قبول است:

$$B_1 = \frac{1}{z} (y \hat{a}_y - z \hat{a}_z)$$

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی:

$$B_2 = \frac{1}{r^2} \hat{a}_\rho$$

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$B_3 = \left[ 1 + \frac{r}{r^3} \right] \cos \theta \hat{a}_r - \left[ 1 - \frac{1}{r^3} \right] \sin \theta \hat{a}_\theta$$

ج) در دستگاه مختصات کروی:

مسائل ۱۰-۵

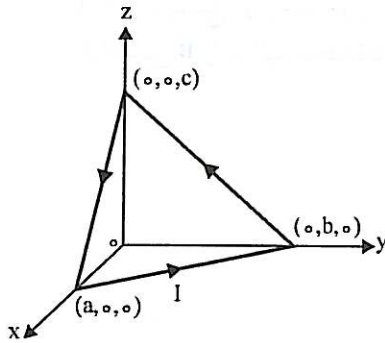
۱. یک حلقه مثلثی حامل جریان I، مطابق شکل ۲۲-۵ را در نظر بگیرید. فضای اطراف حلقه جریان خلاً فرض می‌شود. الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی B ناشی از این حلقه جریان در مبدأ مختصات از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi abc} [a(b+c) \hat{a}_x + b(c+a) \hat{a}_y + c(a+b) \hat{a}_z]$$

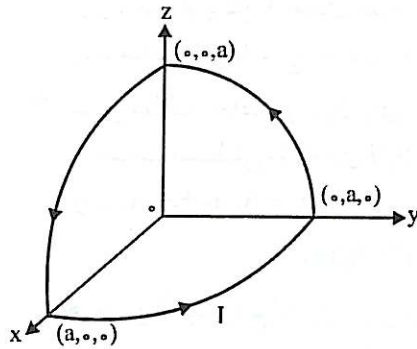
ب) با استفاده از نتیجه بند الف)، میدان B در مبدأ مختصات، که از توزیعهای جریان نشان داده شده در شکل ۲۴-۵ پدید می‌آید، را محاسبه کنید.

۲. جریان I در امتداد مسیر بسته‌ای متشکل از سه ربع دایره واقع در صفحات XY، YZ، و XZ، مطابق شکل ۲۳-۵ عبور می‌کند. میدان مغناطیسی B را در مبدأ مختصات با فرض اینکه فضای اطراف جریان I خلاً باشد، به دست آورید.

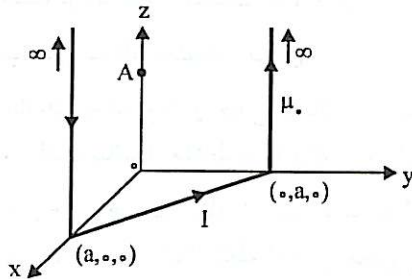
۳. برای جریانهای نشان داده شده در شکل ۲۴-۵ میدان مغناطیسی B را در یک نقطه روی محور Z محاسبه کنید.



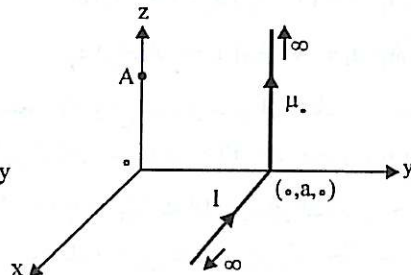
شکل ۲۲-۵



شکل ۲۳-۵



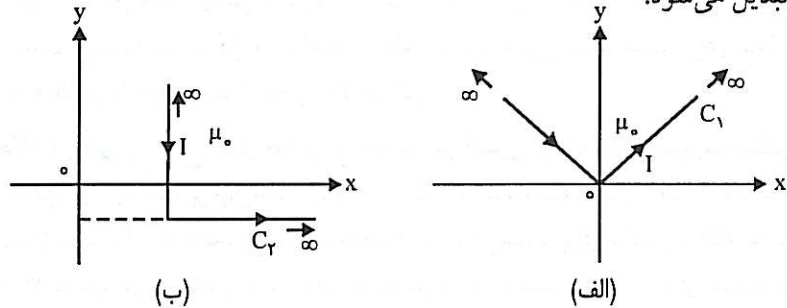
(ب)



(الف)

شکل ۲۴-۵

۴. با استفاده از نتیجه مثال ۵-۱، رابطه ۵-۱۶، میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$ ، ناشی از توزیعهای جریان نشان داده شده در شکل ۵-۲۵، را در یک نقطه دلخواه روی صفحه  $z=0$  محاسبه کنید. مسیرهای جریان  $C_1$  و  $C_2$  روی صفحه  $z=0$  قرار داشته و مسیر  $C_1$  با رابطه  $y = \alpha |x|$  بیان می شود که  $\alpha$  مقدار ثابتی است. نشان دهید که وقتی  $\alpha \rightarrow 0$ ، میدان حاصل از  $C_1$  به میدان یک خط بینهایت طویل جریان تبدیل می شود.



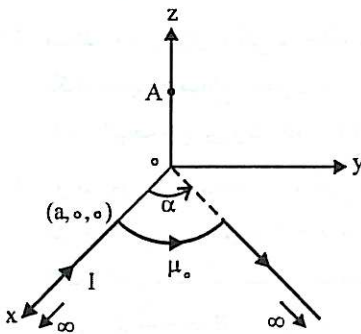
شکل ۵-۲۵

۵. جریان  $I$  در امتداد مسیری واقع روی صفحه  $z=0$  و متشکل از دو نیم خط و یک قوس دایره‌ای به شعاع  $a$  و زاویه  $\alpha$ ، مطابق شکل ۵-۲۶، عبور می کند.

(الف) میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ناشی از این جریان را در نقطه دلخواه  $A$  روی محور  $z$  به دست آورید.

(ب) نشان دهید که به ازای  $\alpha = \pi$  و  $a = 0$ ، نتیجه به دست آمده در بند (الف) به میدان یک جریان در امتداد مسیر خطی بینهایت طویل تبدیل می شود.

(ج) با استفاده از نتیجه بند (الف) و انتخاب  $\alpha = 2\pi$ ، میدان یک حلقه دایره‌ای جریان را روی محور آن محاسبه کنید.



شکل ۵-۲۶

۶. دو سیم بسیار طویل، حامل جریانهای  $I_1 = 2A$  و  $I_2 = 3A$ ، روی صفحه  $xy$  قرار دارند. سیم حامل جریان  $I_1$  در امتداد خط  $x-y=1$  واقع شده و سیم دیگر در امتداد خط  $x+y=2$  قرار دارد. جریان  $I_1$  در جهت افزایش  $x$  و جریان  $I_2$  در جهت کاهش  $x$  می باشد. فرض کنید که سیمها در محل تلاقی دو خط مذکور تماس فیزیکی ندارند و فضای اطراف آنها خلأ می باشد. مکان هندسی کلیه نقاطی از فضا را که در آنها میدان مغناطیسی کل برابر صفر است تعیین کنید.

۷. یک سیم بسیار طویل، که حامل جریان  $I$  می باشد، روی صفحه  $yz$  قرار داشته و با محور  $z$  زاویه  $\alpha$  می سازد ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ). جریان  $I$  در جهت افزایش  $y$  است. نشان دهید که میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ناشی از این جریان در یک نقطه دلخواه روی صفحه  $xy$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-y \cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_x + x \cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_y - x \sin \alpha \hat{\mathbf{a}}_z}{x^2 + y^2 \cos^2 \alpha}$$

۸. دو مدار بسته  $C_1$  و  $C_2$  به ترتیب حامل جریانهای  $I_1$  و  $I_2$  می‌باشند. ثابت کنید که نیروی کل وارد آمده بر مدار  $C_2$  توسط مدار  $C_1$  مساوی و در خلاف جهت نیروی کل وارد آمده بر مدار  $C_1$  توسط مدار  $C_2$  است.

۹. مدار  $C_1$  را به صورت حلقه‌ای مسطح ولی با شکل دلخواه و مدار  $C_2$  را به صورت خطی بینهایت در امتداد عمود بر سطح حلقه در نظر بگیرید. جریانهای  $I_1$  و  $I_2$  به ترتیب از مدارهای  $C_1$  و  $C_2$  عبور می‌کنند. نشان دهید که نیروی کل وارد آمده بر حلقه جریان همواره صفر است. برای سادگی،  $C_1$  را روی صفحه  $xy$  و  $C_2$  را در امتداد محور  $z$  فرض کنید.

۱۰. یک حلقه دایره‌ای به شعاع  $a$  و حامل جریان  $I_2$  در فضای آزاد در نظر بگیرید. مطلوب است محاسبه نیروی وارد آمده بر این حلقه جریان توسط یک سیم مستقیم بسیار طویل که حامل جریان  $I_1$  بوده، از مرکز حلقه گذشته، و با محور حلقه زاویه  $\alpha$  می‌سازد. برای سادگی، حلقه جریان را روی صفحه  $xy$  به گونه‌ای که محور آن بر محور  $z$  منطبق باشد، و سیم طویل را روی صفحه  $yz$  در نظر بگیرید. فضای اطراف جریانها را خلاصاً فرض کنید. راهنمایی: از نتیجه مسئله ۷ استفاده کنید.

۱۱. مسئله ۱۰ را برای وقتی که حلقه دایره‌ای با یک حلقه مستطیلی به اضلاع  $a$  و  $b$  جایگزین شود تکرار نمایید. اضلاع به طول  $a$  را موازی محور  $y$  در نظر گرفته و فضای اطراف جریانها را خلاصاً فرض کنید. نتیجه را برای وقتی که  $\alpha = \pi/2$  باشد خلاصه نمایید.

۱۲. دو صفحه بینهایت جریان، یکی واقع روی  $z=0$  و با چگالی سطحی  $J_{S_1} = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y$  آمپر بر متر و دیگری منطبق بر  $z=2$  و با چگالی سطحی  $J_{S_2} = 2\hat{a}_y$  آمپر بر متر، را در نظر بگیرید. الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ناشی از جریان سطحی  $J_S$  روی صفحه  $z=z_0$  از رابطه  $\mathbf{B} = \pm \frac{\mu_0}{4} J_S \times \hat{a}_z$  به دست می‌آید، که  $+$  و  $-$  به ترتیب برای نواحی  $z > z_0$  و  $z < z_0$  می‌باشد. ب) میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ناشی از دو جریان سطحی مذکور را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

۱۳. جریان  $I$  از یک رشته سیم نازک در امتداد محور  $z$  از  $z = \infty$  تا  $z = a$  گذشته، سپس روی یک سطح کروی هادی به شعاع  $a$  و محدود به  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  توزیع گردیده، و سرانجام در امتداد یک رشته سیم نازک دیگر در امتداد محور  $z$  از  $z = -a$  تا  $z = -\infty$  ادامه می‌یابد. چگالی جریان روی سطح کروی از رابطه  $J_S = (I/\varphi_0 a \sin \theta) \hat{a}_\theta$  به دست می‌آید. میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در مبدأ مختصات به دست آورید. اگر مسیر جریان در ناحیه  $-a < z < a$  یک سطح کروی کامل باشد  $(\varphi_0 = 2\pi)$ ، میدان  $\mathbf{B}$  چقدر است؟ فضای اطراف مسیر جریان خلاصاً می‌باشد.

۱۴. جریان  $I$  از یک رشته سیم نازک در امتداد محور  $z$  از  $z = \infty$  تا  $z = 0$  گذشته و سپس روی بخشی از یک سطح مخروطی به نیم زاویه  $\theta_0$  و محدود به  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  توزیع می‌گردد. چگالی جریان روی بخش مخروطی مسیر از رابطه  $J_S = (I/\varphi_0 \sin \theta_0 r) \hat{a}_r$  به دست می‌آید. مطلوب است محاسبه میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  در یک نقطه روی محور  $z$  ( $z < 0$ ). فضای اطراف مسیر جریان خلاصاً است.

۱۵. جریان با چگالی  $\mathbf{J}_S = J_S \hat{\mathbf{a}}_z$  روی بخشی از یک سطح استوانه‌ای، که با روابط  $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  و  $r=a$  بیان می‌شود، توزیع شده است. فضای اطراف جریان خلأ فرض می‌شود.  
 الف) مطلوب است محاسبه میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  در یک نقطه دلخواه روی صفحه  $y=0$ ،  
 ب) نتیجه بند الف) را برای نقاط روی محور استوانه ( $x=y=0$ ) خلاصه کنید،  
 ج) نتیجه بند الف) را برای یک استوانه کامل جریان ( $\alpha=\pi$ ) خلاصه نموده و با نتیجه‌ای که می‌توان به سادگی از قانون مداری آمپر به دست آورد مقایسه کنید.

۱۶. جریان الکتریکی با چگالی  $\mathbf{J} = J \hat{\mathbf{a}}_\varphi$  در یک لایه استوانه‌ای، که با روابط  $a \leq r \leq b$  و  $0 \leq z \leq c$  بیان می‌گردد، توزیع شده است. فضای حاوی توزیع جریان را خلأ فرض کنید. میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در یک نقطه روی محور  $z$  به دست آورید.

۱۷. یک مقاومت به شکل یک لایه استوانه‌ای فضای  $a \leq r \leq b$ ،  $0 \leq z \leq c$  و  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  را در برمی‌گیرد. نقاط اتصال این مقاومت به مدار خارج که حامل جریان  $I$  می‌باشد، روی سطوح  $r=a$  و  $r=b$  قرار دارند. از این رو چگالی توزیع جریان در این مقاومت را می‌توان به صورت  $\mathbf{J} = (I/\varphi_0 cr) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$  در نظر گرفت. میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در یک نقطه دلخواه روی محور  $z$  به دست آورید. قابلیت نفوذپذیری مغناطیسی مقاومت و فضای اطراف آن را  $\mu$  فرض کنید.

۱۸. جریان  $I$  از یک رشته سیم نازک در امتداد محور  $z$  از  $z=-\infty$  تا  $z=0$  گذشته و سپس در فضای ناحیه‌ای مخروطی، که با روابط زیر  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  و  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  بیان می‌گردد، توزیع می‌شود. چگالی توزیع جریان از رابطه

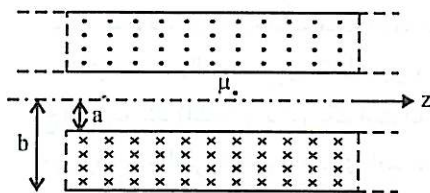
$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\varphi_0 r^2 \sin^2(\theta/2)} \hat{\mathbf{a}}_r$$

به دست می‌آید. میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در یک نقطه روی بخش مثبت محور  $z$ ، به دست آورید.  
 ۱۹. با استفاده از میدان یک صفحه بینهایت جریان با چگالی توزیع یکنواخت، مثال ۵-۳، و اصل جمع آثار، میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در یک نقطه دلخواه از فضا که از توزیعهای جریان زیر ناشی می‌شود به دست آورید.

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J_0 e^{-|y|/a} \hat{\mathbf{a}}_z & |y| > a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad \text{ب) } \mathbf{J} = \begin{cases} J_0 \cos\left(\frac{\pi}{2a} y\right) \hat{\mathbf{a}}_z & |y| < a \\ 0 & \text{جاهای دیگری} \end{cases}$$

۲۰. با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را که از توزیعهای جریان زیر ناشی می‌شود محاسبه کنید.

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J_0 \cosh(x/a) \hat{\mathbf{a}}_z & |x| < a \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad \text{ب) } \mathbf{J} = J_0 \frac{a^2}{x^2 + a^2} \hat{\mathbf{a}}_z \quad \text{الف)}$$



شکل ۲۷-۵

۲۱) شکل ۲۷-۵ سیملوله‌ای با چندین لایه سیم‌پیچ را نشان می‌دهد. فرض کنید که تعداد دورهای سیم‌پیچ در واحد طول در امتداد محور سیملوله برابر  $n$  و تعداد لایه‌های سیم‌پیچ در واحد طول در امتداد شعاعی برابر  $m$  باشد. اگر جریان  $I$  از سیملوله عبور نماید، چگالی حجمی توزیع جریان متناظر را می‌توان با رابطه  $\mathbf{J} = mnI \hat{\mathbf{a}}_\phi$ ،  $a \leq r \leq b$  بیان داشت. محور سیملوله را منطبق بر محور  $z$  در نظر گرفته و فرض کنید سیملوله بینهایت طویل باشد. میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در کلیه نقاط فضا به دست آورید.

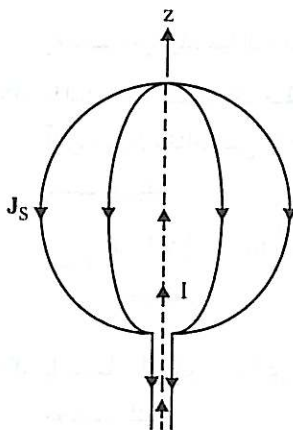
۲۲) با استفاده از قانون مدار آمبر، میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در کلیه نقاط فضا برای توزیعهای جریان زیر، که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده‌اند، به دست آورید.

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J \cdot e^{-r/a} \hat{\mathbf{a}}_\phi & r < a \\ \mathbf{0} & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J \cdot e^{-r/a} \hat{\mathbf{a}}_z & r < a \\ \mathbf{0} & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

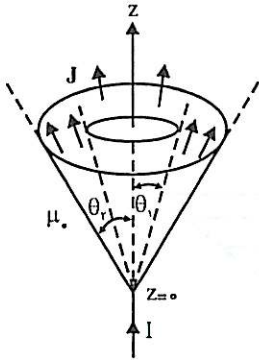
$$\mathbf{J} = \begin{cases} J \cdot (a/r)^n \hat{\mathbf{a}}_\phi & n > 1, r > a \\ \mathbf{0} & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۲۳) میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ناشی از جریانهای داده شده در مسئله ۱۹ را با استفاده از قانون مدار آمبر محاسبه نمایید.



شکل ۲۸-۵

۲۴) شکل ۲۸-۵ سیستمی متشکل از یک سطح کروی هادی به شعاع  $a$  و یک کابل هم‌محور را نشان می‌دهد. جریان  $I$  از طریق هادی درونی کابل هم‌محور طول قطر کره هادی را در جهت مثبت محور  $z$  پیموده، در نقطه  $z=2a$  روی سطح کره با چگالی  $\mathbf{J}_s = (I/2\pi a \sin\theta) \hat{\mathbf{a}}_\theta$  توزیع شده، و سپس از طریق هادی بیرونی کابل در جهت منفی محور  $z$  ادامه می‌یابد. فرض کنید قطر خارجی کابل هم‌محور بسیار کوچک‌تر از قطر کره هادی باشد. میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در درون کره هادی و در فضای بیرون کابل هم‌محور و کره هادی به دست آورید. قابلیت نفوذپذیری مغناطیسی همه جا  $\mu_0$  فرض می‌شود.

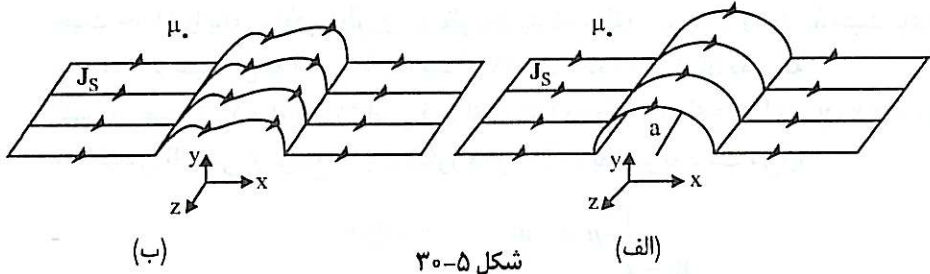


شکل ۵-۲۹

۲۵. جریان  $I$  از یک رشته سیم نازک در امتداد بخش منفی محور  $z$  گذشته و سپس در یک لایه مخروطی هادی، که فضای  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  را فرا گرفته است، مطابق شکل ۵-۲۹، توزیع می‌گردد. با فرض اینکه توزیع جریان در لایه مخروطی شعاعی باشد، چگالی آن را می‌توان با رابطه  $\mathbf{J} = [I / 2\pi r^2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)] \hat{\mathbf{a}}_r$  بیان داشت. میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

۲۶. جریان الکتریکی با چگالی یکنواخت روی دو نیم‌صفحه  $x < -a, y = 0$  و  $x > a, y = 0$  و یک سطح نیم‌استوانه به شعاع  $a$ ، که نیم‌صفحه‌ها را مطابق شکل ۵-۳۰ الف به یکدیگر وصل می‌کند، توزیع شده است. چگالی توزیع جریان روی نیم‌صفحه‌ها به صورت  $\mathbf{J}_S = J_S \hat{\mathbf{a}}_x$  و روی نیم‌استوانه با رابطه  $\mathbf{J}_S = -J_S \hat{\mathbf{a}}_\rho$  بیان می‌شود.

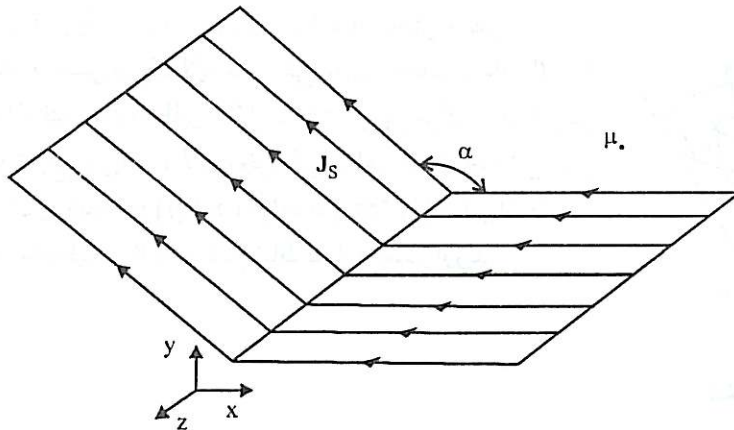
الف) با استفاده از اصل جمع آثار و نتایج معلوم برای میدانهای سیملوله بینهایت طویل و صفحه بینهایت جریان، میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ناشی از توزیع جریان مزبور را در کلیه نقاط فضا به دست آورید. ب) بند الف) را برای وقتی که بخش نیم‌استوانه‌ای جریان با مقطع نیم‌دایره با یک سطح نیم‌استوانه‌ای با مقطع دلخواه، نظیر شکل ۵-۳۰ ب، جایگزین شود تکرار کنید.



شکل ۵-۳۰

۲۷. جریان الکتریکی با چگالی یکنواخت  $J_S$  روی دو نیم‌صفحه که زاویه داخلی آنها  $\alpha$  است، مطابق شکل ۵-۳۱ توزیع شده است. برای سادگی این دو صفحه را با معادلات  $x > 0, y = 0$  و  $x > 0, y = \tan \alpha x$  در نظر بگیرید. چگالی توزیع جریان روی نیم‌صفحه‌های مزبور به ترتیب با روابط  $\mathbf{J}_S = J_S (\cos \alpha \hat{\mathbf{a}}_x + \sin \alpha \hat{\mathbf{a}}_y)$  و  $\mathbf{J}_S = -J_S \hat{\mathbf{a}}_x$  بیان می‌شود.

الف) با استفاده از ویژگیهای میدان مغناطیسی یک سیملوله بینهایت طویل با سطح مقطع دلخواه، نشان دهید که میدان  $\mathbf{B}$  ناشی از این توزیع جریان در نواحی  $0 < \varphi < \alpha$  و  $\alpha < \varphi < 2\pi$  به صورت  $\mathbf{B}_\varphi = B_\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi$  و  $\mathbf{B}_\varphi = -B_\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi$  بیان می‌شوند، که  $B_\varphi$  و  $B_\varphi$  مقادیر ثابتی هستند. سپس با استفاده از قانون مدار آمپر و نیز ویژگی عام میدان مغناطیسی که شار خالص گذرنده از یک سطح



شکل ۵-۳۱

بسته صفر است (سطح بسته را در اینجا  $z=0$  در نظر بگیرید)، مقادیر ثابت  $B_{\cdot y}$  و  $B_{\cdot x}$  و بدین ترتیب میدان را در کلیه نقاط فضا به دست آورید.  
 (ب) اگر بخشی از یکی از نیم صفحه‌ها، مثلاً نوار  $x_1 < x < x_2$  از نیم صفحه  $y=0$ ، با یک سطح استوانه‌ای با مقطع دلخواه ولی مستقل از  $z$  جایگزین شود، چه تغییری در نتایج بند (الف) روی می‌دهد؟

۲۸. جریان الکتریکی با چگالی یکنواخت  $\mathbf{J} = J_s \hat{\mathbf{a}}_t$  روی سطح  $y=f(x)$  توزیع شده است، که  $\hat{\mathbf{a}}_t$  بردار واحدی مماس بر سطح مذکور، فاقد مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_z$ ، و در جهت حرکت جریان سطحی می‌باشد. جهت جریان را برای سادگی، طوری در نظر بگیرید که مؤلفه  $\hat{\mathbf{a}}_x$  بردار واحد  $\hat{\mathbf{a}}_t$  مثبت باشد. با استفاده از توضیحاتی که در بند (الف) مسئله ۲۷ بیان شده است، نشان دهید که:  
 الف) در صورتی که  $y=f(x)$  تابعی فرد از  $x$  باشد؛ نظیر  $y=\sinh x$ ،  $y=x^3$ ،  $y=x$ ؛ میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ناشی از توزیع جریان مذکور همواره از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{1}{r} \mu_0 J_s \hat{\mathbf{a}}_z & y > f(x) \\ -\frac{1}{r} \mu_0 J_s \hat{\mathbf{a}}_z & y < f(x) \end{cases}$$

ب) در صورتی  $y=f(x)$  تابعی زوج از  $x$  باشد؛ نظیر  $y=\cosh x$ ،  $y=x^2$ ،  $y=|x|$ ؛ میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ناشی از توزیع جریان مذکور همواره از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{1+\xi} J_s \hat{\mathbf{a}}_z & y > f(x) \\ -\frac{\mu_0 \xi}{1+\xi} J_s \hat{\mathbf{a}}_z & y < f(x) \end{cases}$$

که  $\xi = S_1/S_2$  نسبت مساحت آن بخش از صفحه  $z=0$  که در آن  $y > f(x)$  به مساحت بخش دیگر صفحه  $z=0$  که در آن  $y < f(x)$  است، می‌باشد. مثلاً در مورد  $y = |x|$  این نسبت برابر با  $\frac{1}{3}$  و برای  $y = x^2$  این نسبت برابر صفر است (تحقیق کنید).

۳۹. دو استوانه متداخل به شعاعهای  $a$  و  $b$  که محورهایشان به موازات و به فاصله  $c$  ( $c < a - b$ ) از یکدیگر هستند را در نظر بگیرید. جریانی با چگالی یکنواخت  $J$  از فضای بین دو استوانه و در امتداد محورهایشان عبور داده می‌شود. با استفاده از قانون مداری آمپر میدان مغناطیسی  $B$  را در درون استوانه به شعاع  $b$  به دست آورید. استوانه‌ها را بینهایت طولی فرض کنید.

۳۰. مطلوب است محاسبه چگالی توزیع جریان الکتریکی که مولد میدان مغناطیسی زیر می‌باشد:

$$B = \begin{cases} \mu_0 \sin(\pi x/2) \hat{a}_y & -1 < x < 1 \\ -\mu_0 \hat{a}_y & 1 < x < 2 \\ 3\mu_0 \frac{x}{|x|} \hat{a}_y & x > 2, x < -1 \end{cases}$$

۳۱. مسئله ۳۰ را برای میدانهای مغناطیسی زیر تکرار نمایید.

الف) در دستگاه مختصات استوانه‌ای:      ب) در دستگاه مختصات کروی:

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0}{r \sin \theta} \hat{a}_\varphi & \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \theta < \frac{\pi}{3}, \theta > \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad B = \begin{cases} 3\mu_0 \hat{a}_z & r < 2 \\ 0 & 2 < r < 3 \\ \frac{2\mu_0}{r} \hat{a}_\varphi & r > 3 \end{cases}$$

۳۲. دو نیم‌کره به شعاع  $a$  و محدود به نواحی  $0 < \theta < \pi/2$  و  $\pi/2 < \theta < \pi$  را در نظر بگیرید. نیم‌کره فوقانی حاوی بار الکتریکی با چگالی توزیع  $\rho$  و نیم‌کره تحتانی دارای بار الکتریکی با چگالی توزیع  $-\rho$  می‌باشد. دو نیم‌کره هم‌زمان حول محور  $z$  با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  به چرخش درآورده می‌شوند. مطلوب است محاسبه:

الف) میدان مغناطیسی  $B$  در یک نقطه روی محور  $z$  و واقع در خارج نیم‌کره‌ها ( $|z| > a$ ),  
ب) پتانسیل مغناطیسی برداری  $A$  در فواصل دور از مرکز نیم‌کره‌ها.

۳۳. پتانسیل مغناطیسی برداری  $A$  را برای موارد زیر محاسبه کنید. سپس درستی پاسخ را با به دست آوردن  $B = \nabla \times A$  و مقایسه آن با نتایجی که از طریق قانون مداری آمپر (برای بندهای الف) و ((ب)) محاسبه می‌شوند تحقیق کنید.

الف) توزیع جریان در مسئله ۱۹-ب      ب) توزیع جریان در مسئله ۲۲-الف

ج) میدان مغناطیسی در مسئله ۳۱-ب.



۳۴. تحقیق کنید کدام یک از توابع برداری زیر به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن قابل قبول است.

الف) در دستگاه مختصات مستطیلی،  $\mathbf{B}_1 = yz\hat{a}_x - 2xyz\hat{a}_y + xz^2\hat{a}_z$

ب) در دستگاه مختصات استوانه‌ای،  $\mathbf{B}_2 = r\hat{a}_r + 3r\hat{a}_\phi - 2z\hat{a}_z$

ج) در دستگاه مختصات کروی،  $\mathbf{B}_3 = r \cos \theta \hat{a}_r + r \sin \theta \hat{a}_\theta$

۳۵. دو رشته سیم نازک بینهایت طویل که موازی محور  $z$  و حامل جریانهای  $I$  و  $-I$  هستند به ترتیب از

نقاط  $\left(\frac{d}{4}, 0, 0\right)$ ،  $\left(-\frac{d}{4}, 0, 0\right)$  می‌گذرند. پتانسیل مغناطیسی برداری  $\mathbf{A}$  و میدان مغناطیسی

$\mathbf{B}$  ناشی از این توزیع جریان طی مثال ۸-۵ مورد بررسی قرار گرفته است. نشان دهید که خطوط میدان مغناطیسی به صورت دایره‌هایی هستند که یکی از جریانها را در برگرفته و با معادلات زیر بیان می‌شوند:

$$(x-x_0)^2 + y^2 = x_0^2 - \frac{d^2}{4}, \quad z = z_0$$

که  $z_0$  و  $x_0$  مقادیر ثابتی هستند و  $|x_0| > \frac{d}{4}$  می‌باشد.

۳۶. هرگاه پتانسیل مغناطیسی برداری در دست باشد، برای محاسبه چگالی توزیع جریانی که مولد

چنین پتانسیلی باشد استفاده از دو رابطه ممکن است به ذهن خطور کند؛ یکی  $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$  و

دیگری  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  که  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  می‌باشد.

الف) استفاده از کدام یک از روابط بالا همواره پاسخ صحیح می‌دهد؟ تحت چه شرطی رابطه دیگر

پاسخ درست به دست خواهد داد؟

ب) برای بردارهای پتانسیل مغناطیسی زیر، چگالی توزیع جریان را محاسبه کنید.

(i) در دستگاه مختصات کروی  $\mathbf{A} = 2r\hat{a}_\phi$

(ii) در دستگاه مختصات کروی  $\mathbf{A} = 2\hat{a}_r + \hat{a}_\theta$

برای کدام یک از بردارها استفاده از هر دو رابطه، پاسخ درست به دست می‌دهد؟