

میدان مغناطیسی ساکن در خلأ

همان‌طور که در آغاز فصل دوم بیان گردید، منشأ کلیه پدیده‌های الکترومغناطیس بارهای الکتریکی هستند. مطالعات ما تا کنون به بارهای الکتریکی ساکن محدود بوده و این نتیجه کلی را دربرداشته است که بارهای ساکن فقط تولید میدان الکتریکی می‌کنند. میدان الکتریکی در واقع یک میدان نیرو است به طوری که اگر بار نقطه‌ای q در آن قرار گیرد، نیرویی برابر حاصل ضرب شدت میدان در اندازه بار و در راستای میدان به آن وارد می‌شود. حرکت بارهای الکتریکی منجر به بروز پدیده دیگری به نام میدان مغناطیسی می‌شود. میدان مغناطیسی همچون میدان الکتریکی یک میدان نیرو است، به طوری که اگر بار الکتریکی متحرکی در آن قرار گیرد نیرویی به غیر از نیروی کولمب (که عامل آن میدان الکتریکی است) متناسب با سرعت بار و در راستای عمود بر میدان بر آن اعمال می‌شود. مطالب این فصل به بررسی میدانهای مغناطیسی ساکن در خلأ که از حرکت بارهای الکتریکی با سرعت یکنواخت ناشی می‌شوند، اختصاص دارد. در واقع، ما از بارهای الکتریکی ساکن شروع کردیم و ملاحظه نمودیم که آنها مولد میدانهای الکتریکی ساکن هستند. در این فصل نشان خواهیم داد که حرکت یکنواخت بارهای الکتریکی پدیده دومی را که همان میدان مغناطیسی ساکن است باعث می‌گردد. میدانهای متغیر با زمان و پدیده تشعشع را که از حرکت شتاب‌دار بارهای الکتریکی ناشی می‌شوند، پس از دست یافتن به معادلات ماکسول، در فصل آخر مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

حرکت بارهای الکتریکی تولید جریان الکتریکی می‌کند. بنابراین، می‌توان گفت که جریانهای الکتریکی منشأ میدانهای مغناطیسی هستند. جریانهای الکتریکی ممکن است از نوع همرفتی که از حرکت بارهای آزاد در خلأ پدید می‌آیند، از نوع هدایتی که از حرکت الکترونها در هادیها یا الکترونها و حفره‌ها در نیمه‌هادیها به وجود می‌آیند یا از انواع دیگری از قبیل جریان پلازماسیون باشند. با این وجود مطالعات ما در این فصل به نوع جریانها بستگی نداشته و بنابراین تفکیک آنها از یکدیگر ضروری نخواهد بود و نتایج به دست آمده را می‌توان برای هر یک از انواع جریانها به کار برد.

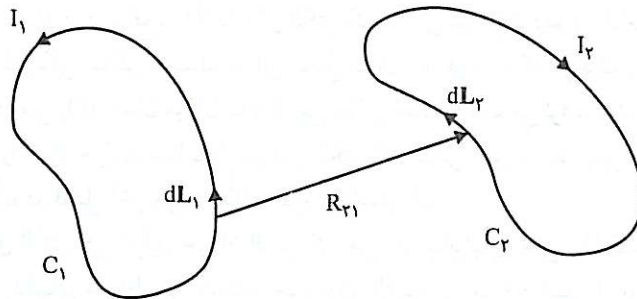
۱-۵ نیروی مغناطیسی بین دو مدار جریان

به یاد می‌آوریم که بررسی میدانهای الکتریکی ساکن با تشریح قانون تجربی کولمب آغاز گردید و نتیجه این قانون که به صورت رابطه ۱-۲ برای بیان نیروی بین دو بار الکتریکی نقطه‌ای خلاصه شد در حقیقت اساس تمامی مطالعات ما در ارتباط با میدانهای الکتریکی ساکن بود. در اینجا نیز مبحث میدانهای مغناطیسی ساکن را با مطالعه یک قانون تجربی موسوم به قانون نیروی آمپر، که مشابه قانون کولمب می‌باشد، شروع می‌کنیم. این قانون برای بیان نیروهای مغناطیسی که دو مدار حامل جریان بر یکدیگر وارد می‌آورند به کار می‌رود. بر اساس مطالعات تجربی آمپر اگر دو مدار بسته C_1 و C_2 ، مطابق شکل ۱-۵، حامل جریانهای I_1 و I_2 باشند، نیرویی که جریان I_1 بر مدار C_2 اعمال می‌کند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_{21} = \oint_{C_1} \oint_{C_2} k \frac{I_2 dL_2 \times (I_1 dL_1 \times \hat{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2} \quad (۱-۵)$$

که dL_1 و dL_2 به ترتیب بردارهای عنصر طول در مدارهای C_1 و C_2 بوده، R_{21} فاصله بین دو عنصر طول، $\hat{a}_{R_{21}}$ بردار واحد در جهت dL_1 به dL_2 و k یک ضریب ثابت است. این ضریب ثابت در سیستم آحاد M.K.S. و برای خلأ برابر $\mu_0 / 4\pi$ است که μ_0 را قابلیت نفوذ (مغناطیسی) یا قابلیت تراوایی خلأ نامند و مقدار آن برابر $4\pi \times 10^{-7}$ هنری بر متر می‌باشد. عبارت زیر انتگرال دوگانه در رابطه ۱-۵ در واقع نیرویی است که عنصر جریان $I_1 dL_1$ بر عنصر جریان $I_2 dL_2$ وارد می‌سازد، یعنی:

$$dF_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 dL_2 \times (I_1 dL_1 \times \hat{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2} \quad (۲-۵-الف)$$



شکل ۱-۵: دو مدار حامل جریانهای I_1 و I_2 برای بیان قانون نیروی آمپر

بررسی رابطه ۵-۲-الف نشان می‌دهد که:

(الف) اندازه نیرو متناسب با حاصل ضرب جریانها است.

(ب) اندازه نیرو با عکس مجذور فاصله بین دو عنصر جریان متناسب است.

(ج) برای تعیین جهت نیرو باید ابتدا ضرب خارجی $dL_1 \times \hat{a}_{R_{21}}$ را انجام داد و سپس بردار نتیجه را در dL_2 ضرب خارجی کرد. بنابراین وجود پرانتز در سمت راست رابطه ۵-۲-الف بسیار مهم است، زیرا قانون شرکت‌پذیری برای ضرب خارجی صادق نیست.

اگر عنصر جریان را برای میدان مغناطیسی، نظیر بار نقطه‌ای برای میدان الکتریکی بدانیم، تشابه رابطه ۵-۲-الف و خواص آن با رابطه ۲-۱ روشن می‌شود. با تعویض $I_1 dL_1$ با $I_2 dL_2$ و $\hat{a}_{R_{21}}$ با $\hat{a}_{R_{12}}$ نیروی اعمال شده بر $I_1 dL_1$ توسط $I_2 dL_2$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dL_1 \times (I_2 dL_2 \times \hat{a}_{R_{12}})}{R_{12}^2} \quad (5-2-b)$$

در رابطه ۵-۲-ب تساوی $R_{12} = R_{21}$ نیز مورد استفاده قرار گرفته است. باید توجه نمود که dF_{12} الزاماً مساوی با $-dF_{21}$ نیست. این امر ممکن است موجب نگرانی گردیده و این طور تصور شود که قانون سوم نیوتن، که برابری نیروهای عمل و عکس‌العمل را بیان می‌کند، نقض می‌شود. اما با توجه به اینکه عناصر جریان به طور مجزا وجود خارجی ندارند، مساوی نبودن dF_{12} با $-dF_{21}$ به هیچ نحو ناقض قانون سوم نیوتن نبوده و آنچه که باید از این قانون تبعیت کند و می‌کند برابری اندازه‌های نیروهای اعمال شده به مدارهای کامل C_1 و C_2 است. اثبات تساوی $F_{12} = -F_{21}$ به مسئله ۸ این فصل موكول می‌گردد.

تمرین: با ذکر یک مثال نشان دهید که dF_{12} الزاماً مساوی با $-dF_{21}$ نیست.

۵-۲ قانون بیو-سوار

همان‌گونه که در مقدمه این فصل بیان گردید، بارهای الکتریکی متحرک یا جریانهای الکتریکی تولید میدانهای مغناطیسی می‌کنند و ویژگی میدان مغناطیسی به عنوان یک میدان نیرو در این است که وقتی بارهای متحرک در آن قرار گیرند بر آنها نیرو اعمال می‌شود. از طرف دیگر قانون نیروی آمپر نشان داد که دو مدار حامل جریان بر یکدیگر نیرو وارد می‌آورند. نیرویی که یک جریان بر جریان دیگر وارد می‌سازد در حقیقت نیرویی است که میدان مغناطیسی ناشی از جریان اول بر جریان دوم، یعنی بارهای متحرک در مدار دوم، وارد می‌کند. برای تعیین میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 رابطه ۵-۱ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$F_{21} = \oint_{C_2} I_2 dL_2 \times \oint_{C_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dL_1 \times \hat{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2} \\ = \oint_{C_2} I_2 dL_2 \times B_1 \quad (5-3)$$

که B_1 عبارت است از:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 dL_1 \times \hat{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2} \quad (4-5)$$

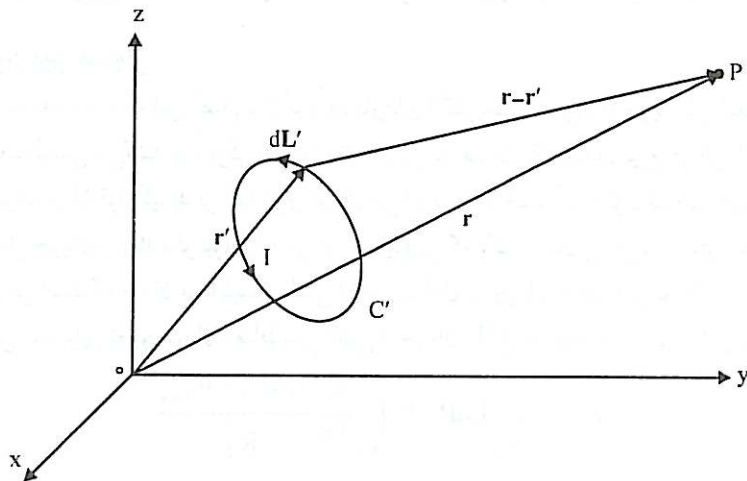
B_1 را می‌توان میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_1 در محل عنصر طول dL_1 دانست. با حذف اندیسها از رابطه ۴-۵، میدان مغناطیسی حاصل از جریان I در نقطه دلخواه P با توجه به شکل ۲-۵ به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I dL' \times \hat{a}_R}{R^2} \quad (5-5)$$

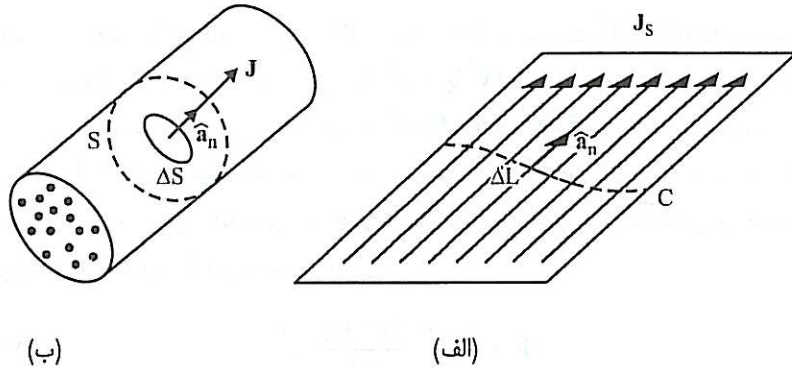
رابطه ۵-۵ به قانون بیو-ساوار موسوم است. اگر مطابق شکل ۲-۵، بردارهای مکان \mathbf{r} و \mathbf{r}' را به ترتیب برای بیان موقعیت نقاط میدان و نقاط منبع به کار ببریم، رابطه ۵-۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I dL' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6-5)$$

روابط ۵-۵ و ۶-۵ میدان مغناطیسی ناشی از جریانهای راکه مثلاً در رشته‌های نازک سیمی باشند، که ما از آنها به عنوان جریانهای الکتریکی با توزیع خطی یاد می‌کنیم، به دست می‌دهد. جریانهای الکتریکی ممکن است روی یک سطح یا در یک حجم به گونه‌ای که در شکل ۳-۵ نشان داده شده است نیز توزیع گردند. چگالیهای توزیع جریان در این حالات کمیت‌های برداری هستند. چگالی توزیع جریان سطحی با \mathbf{J}_s نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۲-۵: جریان I در مدار C' و نحوه محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن در نقطه P



شکل ۵-۳: جریانه‌های سطحی و حجمی (الف) جریان سطحی (ب) جریان حجمی

$$\mathbf{J}_S = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta L} \hat{\mathbf{a}}_n \quad (7-5)$$

که ΔI جریان گذرنده از عنصر طول ΔL است به طوری که ΔL بر جهت جریان عمود باشد و $\hat{\mathbf{a}}_n$ بردار واحدی در جهت جریان، عمود بر ΔL و مماس بر سطح حاوی جریان است. واحد اندازه‌گیری چگالی توزیع جریان سطحی «آمپر بر متر» است. شکل انتگرالی رابطه ۷-۵، که مقدار کل جریان گذرنده از منحنی C را به دست می‌دهد، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I = \int_S \mathbf{J}_S \cdot d\mathbf{L} \quad (8-5)$$

که $d\mathbf{L}$ عنصر بردار طول در امتداد منحنی C است.

چگالی توزیع جریان حجمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \hat{\mathbf{a}}_n \quad (9-5)$$

که ΔI جریان گذرنده از عنصر سطح ΔS است در حالی که ΔS بر جهت جریان عمود باشد و $\hat{\mathbf{a}}_n$ بردار واحد عمود بر ΔS و در جهت جریان است. واحد اندازه‌گیری \mathbf{J} «آمپر بر متر مربع» می‌باشد. شکل انتگرالی رابطه ۹-۵، که مقدار کل جریان گذرنده از سطح S را به دست می‌دهد، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (10-5)$$

میدان مغناطیسی ناشی از جریانه‌های سطحی و حجمی را می‌توان با تعمیم رابطه ۵-۵ به دست آورد. در این رابطه کمیت دیفرانسیلی $\mu_0 I d\mathbf{L}' \times \hat{\mathbf{a}}_R / 4\pi R^2$ را می‌توان به منزله میدان مغناطیسی ناشی از جریان I در عنصر طول $d\mathbf{L}'$ تلقی نمود. توجه کنید که $d\mathbf{L}'$ در اینجا همواره هم جهت با جریان I است. جریانه‌های با توزیع سطحی و حجمی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از جریانه‌های خطی در نظر گرفت و میدان حاصل از تمامی جریان را با استفاده از اصل جمع آثار به دست آورد. به عنوان مثال، برای

عنصر حجمی به سطح مقطع dS' و طول dL' ، کمیت $I dL'$ به صورت $(J dS')$ بیان می شود که با فرض هم جهت بودن dL' و جریان، به شکل $J dS' dL'$ یا $J dV'$ نوشته می شود. بنابراین، عنصر میدان مغناطیسی ناشی از عنصر حجمی جریان برابر با $dB = \mu_0 J dV' \times \hat{a}_R / 4\pi R^2$ است و مقدار کل میدان با انتگرال گرفتن از آن در حجم توزیع جریان به دست می آید (اصل جمع آثار). استدلال مشابهی را می توان برای جریان سطحی ارائه نمود. به طور خلاصه، برای جریانهای سطحی و حجمی میدان مغناطیسی به ترتیب از روابط زیر به دست می آید:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{J_S \times \hat{a}_R}{R^2} dS' \quad (11-5)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J \times \hat{a}_R}{R^2} dV' \quad (12-5)$$

تأکید می شود که بر حسب بردارهای مکان r و r' ، $\hat{a}_R / R^2 = (r-r') / |r-r'|^3$ ، تابعی از r و J_S ، J ، dS' و dV' توابعی از r' می باشند.

میدان مغناطیسی را همواره با علامت B نشان می دهیم. میدان B با نامهای چگالی شار مغناطیسی و القای مغناطیسی نیز شناخته می شود. واحد B در سیستم آحاد M.K.S. «تسلا» نام دارد. یک تسلا مساوی یک «وبر^۲ بر متر مربع» و 10^4 برابر واحد کوچک تری به نام گوس می باشد. وبر که خود واحد شار مغناطیسی است برابر «نیوتن متر ثانیه بر کولمب» یا «ولت ثانیه» می باشد.

۳-۵ نیروی اعمال شده بر بار الکتریکی متحرک در میدان مغناطیسی

فرض کنید که عنصر جریان $I dL$ در میدان مغناطیسی B واقع باشد. نیرویی که میدان B بر عنصر جریان وارد می کند، با استفاده از رابطه ۳-۵ عبارت است از:

$$dF = I dL \times B \quad (13-5)$$

اگر جریان I از حرکت بارهای الکتریکی با چگالی حجمی ρ و سرعت v پدید آمده باشد، کمیت $I dL$ را بر حسب ρ و v ، با استفاده از رابطه $J = \rho v$ که قبلاً در رابطه ۳-۱۰ به دست آورده ایم، می توان به ترتیب زیر نوشت:

$$I dL = J dS dL = \rho v dS dL = (\rho dS dL)v = dQ v$$

که $dQ = \rho dS dL$ بار موجود در عنصر حجم $dS dL$ است. پس نیروی اعمال شده بر بار نقطه ای q وقتی که با سرعت v در میدان مغناطیسی B حرکت کند عبارت است از:

$$F = qv \times B \quad (14-5)$$

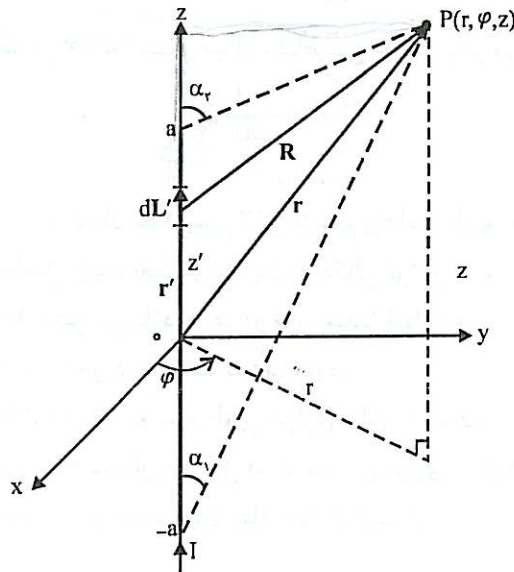
این نیرو که به دفعات از آن یاد کرده‌ایم با نیروی $F=qE$ ، که بر بار q واقع در میدان الکتریکی E وارد می‌شود، بسیار متفاوت است. بررسی رابطه ۵-۱۴ نشان می‌دهد که این نیرو در جهت عمود بر میدان مغناطیسی عمل می‌کند و اندازه آن متناسب با سرعت بار الکتریکی است، در حالی که نیروی الکتریکی هم جهت با میدان الکتریکی و مستقل از سرعت بار می‌باشد. بر خلاف نیروی الکتریکی که قادر به انجام کار است، نیروی مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد، زیرا این نیرو همواره بر جهت حرکت بار عمود است. بنابراین میدان مغناطیسی انرژی جنبشی بارهای الکتریکی متحرک را تغییر نمی‌دهد و فقط می‌تواند جهت حرکت آنها را عوض کند. اگر بار q با سرعت v در محیطی حرکت کند که در آن میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی B هر دو موجود باشند، نیروی کل وارد بر آن برابر است با:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5-15)$$

رابطه ۵-۱۵ به نام رابطه نیروی لورنتز شناخته می‌شود.

مثال ۵-۱ یک سیم نازک حامل جریان ثابت I ، مطابق شکل ۵-۴، در امتداد محور z قرار می‌گیرد. میدان مغناطیسی حاصل از قطعه‌ای از سیم که در فاصله $z = -a$ تا $z = a$ واقع است را به دست آورده و سپس میدان ناشی از یک سیم مستقیم به طول بینهایت را نتیجه‌گیری کنید.
حل:

از رابطه ۵-۶ برای محاسبه میدان استفاده می‌کنیم و برای این منظور ابتدا بردارهای مکان \mathbf{r} و \mathbf{r}' و بردار $d\mathbf{L}'$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای که مناسب این مثال است بیان می‌کنیم. با توجه به شکل ۴-۵ می‌توان نوشت:



شکل ۵-۴: یک قطعه سیم نازک حامل جریان ثابت در امتداد محور z و محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{a}}_r + z \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\mathbf{r}' = z' \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$d\mathbf{L}' = dz' \hat{\mathbf{a}}_z$$

آنگاه:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = [r^2 + (z - z')^2]^{2/2}$$

$$d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = dz' \hat{\mathbf{a}}_z \times [r \hat{\mathbf{a}}_r + (z - z') \hat{\mathbf{a}}_z] = r dz' \hat{\mathbf{a}}_\phi$$

سرانجام:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{(r \hat{\mathbf{a}}_\phi) dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{a}}_\phi}{4\pi r} \frac{z - z'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \Big|_{-a}^a$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\frac{z+a}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} \right] \hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (5-16-f)$$

و بر حسب α_1 و α_2 برابر است با:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (5-16-b)$$

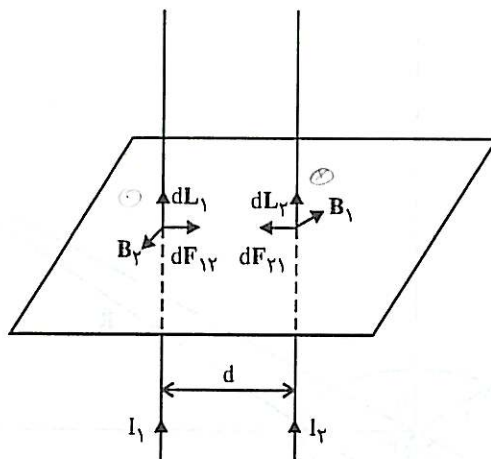
برای یک سیم بینهایت طویل $a \rightarrow \infty$ است و میدان مغناطیسی حاصل برابر می شود با:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (5-17)$$

مثال ۱-۵ نشان می دهد که میدان مغناطیسی ناشی از سیم بینهایت طویل مستقیم و حامل جریان I مشابه میدان الکتریکی حاصل از یک خط بار بینهایت با چگالی توزیع یکنواخت است. مقایسه روابط ۲۴-۲ و ۱۷-۵ این نکته را روشن می سازد. در هر دو مورد میدان فقط به فاصله خط بار یا سیم جریان از نقطه ای که محاسبه میدان در آن مورد نظر است بستگی دارد.

با داشتن رابطه ۱۷-۵ نیرویی که دو سیم طویل موازی حامل جریانهای I_1 و I_2 بر یکدیگر وارد می کنند را می توان به سادگی به دست آورد. شکل ۵-۵ سیمهای موازی، بردارهای میدان و عناصر نیرو را نشان می دهد. نیروی وارد آمده بر عنصر طول dL_2 عبارت است از:

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 dL_2 \times \mathbf{B}_1$$

شکل ۵-۵: دو سیم طویل موازی حامل جریانهای I_1 و I_2

چون زاویه بین dL_2 و B_1 برابر 90° درجه است داریم:

$$dF_{21} = I_2 dL_2 B_1 = I_2 dL_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

پس مقدار نیرو بر واحد طول برابر است با:

$$\frac{dF_{21}}{dL_2} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \quad (5-18-الف)$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که:

$$\frac{dF_{12}}{dL_1} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \quad (5-18-ب)$$

اگر دو جریان در یک جهت باشند نیروها جاذبه و اگر در جهت‌های مخالف باشند نیروها دافعه هستند.

مثال ۵-۲: یک حلقه دایره‌ای شکل به شعاع a و حامل جریان I ، مطابق شکل ۵-۶، طوری در صفحه xy قرار می‌گیرد که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد. چنین مداری به دوقطبی مغناطیسی موسوم است. می‌خواهیم میدان مغناطیسی ناشی از این دوقطبی را در فواصل دور از مرکز حلقه ($r \gg a$) به دست آوریم.

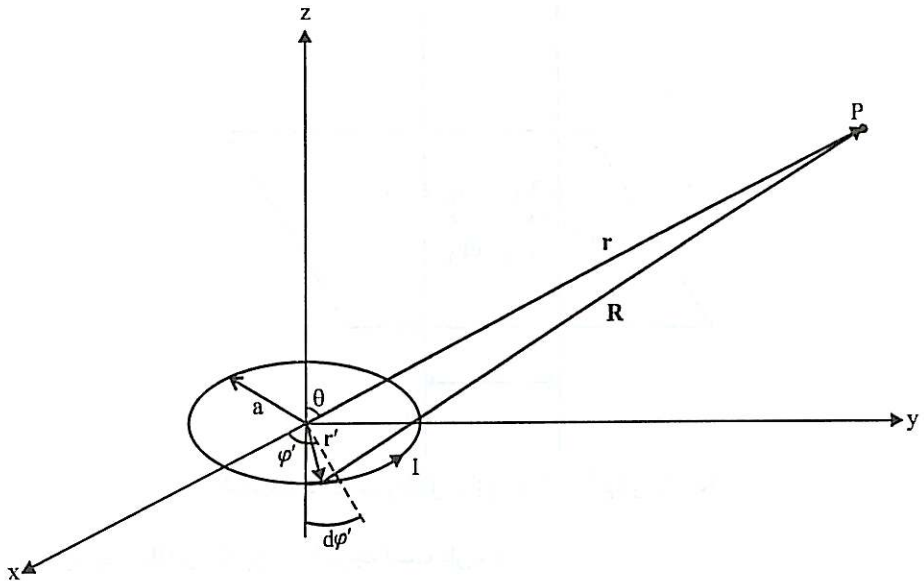
حل:

برای محاسبه میدان مغناطیسی از رابطه ۵-۶ استفاده کرده و ابتدا کمیت‌های dL' ، r ، r' ، $dL' \times (r-r')$

و $|r-r'|^3$ را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$dL' = a d\varphi' \hat{a}_\varphi = a d\varphi' (-\sin \varphi' \hat{a}_x + \cos \varphi' \hat{a}_y)$$

$$r' = a \cos \varphi' \hat{a}_x + a \sin \varphi' \hat{a}_y$$



شکل ۵-۶: دوقطبی مغناطیسی و محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن در فواصل دور

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + r \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_y + r \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = a + d\varphi' [r \cos \theta \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + r \cos \theta \sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y$$

$$(a - r \sin \theta (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi')) \hat{\mathbf{a}}_z]$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = [r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi')]^{2/2}$$

اکنون $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}$ را بر اساس شرط $\frac{a}{r} \ll 1$ بسط می‌دهیم:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2} = \frac{1}{r^2} [1 - 2(a/r) \sin \theta (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi') + (a/r)^2]^{-2/2}$$

$$= \frac{1}{r^2} [1 + 2(a/r) \sin \theta (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi') + \dots]$$

با به کار بردن نتایج مزبور در رابطه ۵-۶ و انتگرال گرفتن از $\varphi' = 0$ تا $\varphi' = 2\pi$ ، داریم:

$$\mathbf{B} = \frac{a\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \cos^2 \varphi' d\varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \right.$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \sin^2 \varphi' d\varphi' \hat{\mathbf{a}}_y +$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right) [1 - 3 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi' - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi'] d\varphi' \hat{\mathbf{a}}_z +$$

$$\left. \int_0^{2\pi} R \cdot d\varphi' \right\}$$

$$\frac{r}{a} \gg 1$$

(۱۹-۵)

R_5 در رابطه ۱۹-۵ مجموع جملاتی است که شامل $\cos \varphi' \sin \varphi'$ و $\cos 2\varphi'$ بوده و انتگرال آنها از $\varphi' = 0$ تا $\varphi' = 2\pi$ برابر صفر است. پس از محاسبه انتگرالهای سمت راست رابطه ۱۹-۵، میدان B برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3} [\gamma \sin \theta (\cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z) + 2 \hat{a}_z] \quad (20-5)$$

اما چون $\hat{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z$ و $\hat{a}_z = \cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta$ است، میدان دوقطبی مغناطیسی سرانجام به صورت زیر خلاصه می شود:

$$B = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi r^3} (\gamma \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) \quad (21-5)$$

رابطه ۲۱-۵ را می توان پاسخ میدان مغناطیسی ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی در فواصل بسیار دور در مقایسه با شعاع a یا پاسخ در هر نقطه دلخواه P دانست، مشروط بر آنکه شعاع حلقه به سمت صفر میل داده شده و همزمان کمیت $I \pi a^2$ ثابت نگه داشته شود. کمیت $m = I \pi a^2$ که برابر حاصل ضرب جریان دوقطبی در مساحت حلقه آن است، را گشتاور دوقطبی مغناطیسی می نامند. برای گشتاور مغناطیسی می توان جهتی عمود بر سطح حلقه و به سمت پیشروی یک پیچ راستگرد، وقتی که در جهت جریان چرخانیده شود، در نظر گرفت. با جایگزین نمودن m با $I \pi a^2$ در رابطه ۲۱-۵، میدان یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور m و در جهت مثبت محور Z به صورت زیر نوشته می شود:

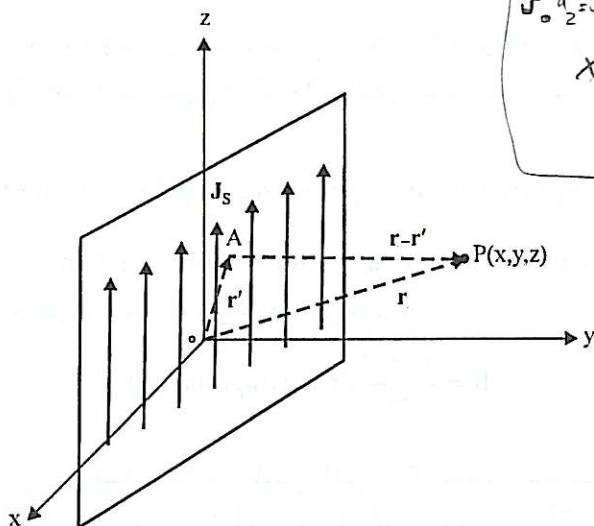
$$B = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (\gamma \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta) \quad (22-5)$$

میدان مغناطیسی در رابطه ۲۲-۵ مشابه میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور p و در جهت \hat{a}_z است که در رابطه ۲-۱۵ داده شده است. رابطه ۲۲-۵، همچنین نشان می دهد که میدان یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاوری در جهت مثبت محور Z ، مستقل از φ و بنابراین دارای تقارن استوانه ای نسبت به این محور است. به علاوه میدان B فاقد مؤلفه \hat{a}_φ است. این دو ویژگی میدان مغناطیسی دوقطبی را می توانستیم قبل از حل کامل مثال ۲-۵ از روی شکل هندسی آن نیز نتیجه گیری نماییم (چگونه؟) و با انتخاب $\varphi = \pi/2$ (یا مقدار مناسب دیگری) برای نقطه P از سادگی بیشتری در انجام محاسبات برخوردار شویم.

مثال ۳-۵ یک صفحه بینهایت جریان با چگالی توزیع $\mathbf{J}_S = J_S \hat{a}_z$ مفروض است. صفحه جریان را مطابق شکل ۷-۵ منطبق بر صفحه xz در نظر می گیریم. میدان مغناطیسی ناشی از این صفحه جریان را در تمام نقاط فضا محاسبه نمایید.
حل:

عنصر جریانی در نقطه $A(x', z')$ واقع در صفحه جریان در نظر می گیریم. میدان حاصل از این عنصر جریان در نقطه $P(x, y, z)$ عبارت است از:

$$dB = \frac{\mu_0 J_S \hat{a}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dx' dz' \quad (23-5)$$



$$\vec{J}_0 = \hat{a}_z J_s$$
 میان دو صفحه

$$B \leq 2 \left(\frac{\mu_0 J_s}{2} \right) (-\hat{a}_n)$$

شکل ۳-۵: یک صفحه بینهایت حاوی جریان سطحی با توزیع یکنواخت

با نوشتن \vec{r} و \vec{r}' در دستگاه مختصات مستطیلی، $\hat{a}_z \times (\vec{r} - \vec{r}')$ و $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-2}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{a}_z \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{a}_z \times [(x-x')\hat{a}_x + y\hat{a}_y + (z-z')\hat{a}_z] = -y\hat{a}_x + (x-x')\hat{a}_y$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-2} = [(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{-1}$$

با جایگزین نمودن نتایج مزبور در رابطه ۳-۵ و انتگرال گرفتن روی سطح حاوی جریان، داریم:

$$\begin{aligned}
 \vec{B} = \frac{\mu_0 J_s}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-y\hat{a}_x}{[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dz' \right. \\
 \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x')\hat{a}_y}{[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dz' \right\}
 \end{aligned}$$

در عبارت اخیر اگر انتگرال‌گیری را در جمله دوم ابتدا بر حسب x' انجام دهیم، به سادگی می‌توان دریافت که مقدار این جمله، به دلیل اینکه عبارت زیر انتگرال تابع فردی از $x-x'$ می‌باشد، برابر صفر است. انتگرال اول را با استفاده از جداول انتگرال به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-y\hat{a}_x}{[(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dz' = \int_{-\infty}^{+\infty} (-y\hat{a}_x) dz' (u)$$

که در آن:

$$u = \frac{-(x-x')}{[y^2 + (z-z')^2][(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2]^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{y^2 + (z-z')^2}$$

آنگاه:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-y \hat{a}_x}{y^2 + (z-z')^2} dz' = \hat{a}_x \frac{\pi y}{|y|} \tan^{-1} \left(\frac{z-z'}{|y|} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{\pi y}{|y|} \hat{a}_x$$

و سرانجام پاسخ به صورت زیر خلاصه می شود:

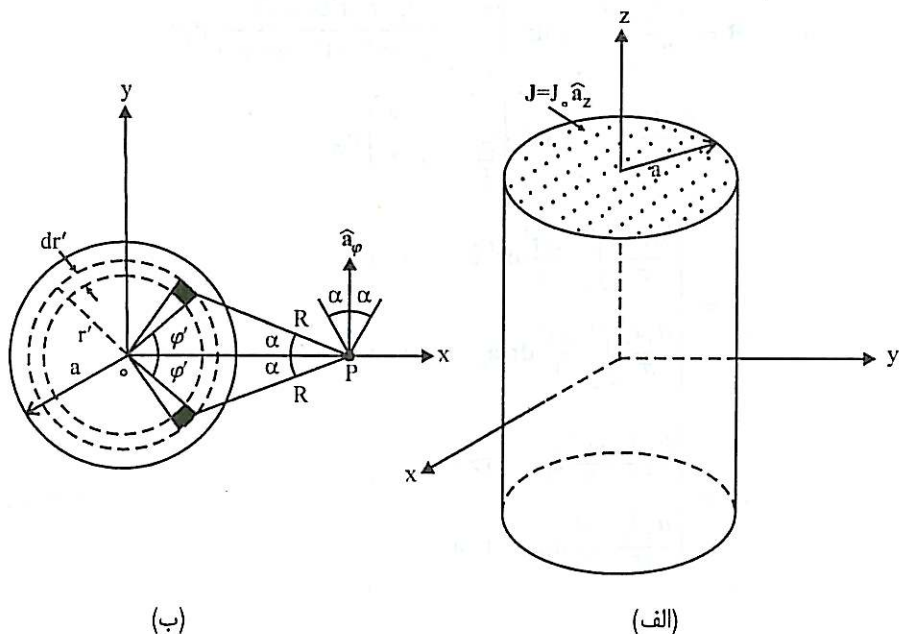
$$\mathbf{B} = \begin{cases} (-\mu_0 J_S / 2) \hat{a}_x & y > 0 \\ (\mu_0 J_S / 2) \hat{a}_x & y < 0 \end{cases} \quad (24-5)$$

ملاحظه می شود که میدان مغناطیسی یک صفحه بینهایت جریان با چگالی ثابت، همواره یکنواخت ولی در دو جهت مخالف در طرفین صفحه می باشد.

مثال ۴-۵: جریان الکتریکی به طور یکنواخت در استوانه ای به طول بینهایت و در امتداد محور آن می گذرد. چگالی توزیع جریان برابر J آمپر بر متر مربع و شعاع استوانه برابر a بوده و محور استوانه، مطابق شکل ۵-۸ الف، منطبق بر محور Z فرض می شود. میدان مغناطیسی را در کلیه نقاط فضا تعیین نمایید.

حل:

استوانه جریان الکتریکی را می توان به منزله مجموعه ای از جریانهای رشته ای دانست که همه به موازات محور Z باشند. بنابراین میدان مغناطیسی این استوانه جریان، تابعی از Z نخواهد بود، هم چنان که میدان یک سیم طویل جریان به موازات محور Z ، که در رابطه ۵-۱۷ داده شده است، تابعی از Z



شکل ۵-۸: استوانه ای به طول بینهایت حاوی جریان با چگالی ثابت و نحوه محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن (الف) آرایش هندسی استوانه نسبت به دستگاه مختصات (ب) دو عنصر متقارن جریان و نحوه محاسبه میدان

نیست. پس برای Z می توان هر مقدار مشخصی در نظر گرفت. از طرف دیگر، به علت وجود تقارن استوانه‌ای حول محور Z ، میدان باید مستقل از φ باشد و از این رو برای φ نیز می توان هر مقدار دلخواهی در نظر گرفت. در این مسئله برای سادگی $Z=0$ و $\varphi=0$ انتخاب می شوند. توجه کنید که این کار به هیچ صورت عمومیت مسئله را از بین نمی برد. با تقسیم استوانه به مجموعه‌ای از رشته‌های جریان، در حقیقت این مسئله سه بُعدی را به یک مسئله دو بُعدی کاهش می دهیم. برای هر رشته جریان که از عنصر سطح واقع در (r', φ') بگذرد رشته جریان قرینه‌ای وجود دارد که از عنصر سطح واقع در $(r', 2\pi - \varphi')$ می گذرد. این عناصر سطح را می توان، همان گونه که در شکل ۵-۸-ب نشان داده شده‌اند، در صفحه xy در نظر گرفت. میدان مغناطیسی حاصل از هر دو رشته قرینه، در نقطه $P(r, 0, 0)$ برداری است که فقط مؤلفه \hat{a}_φ دارد. این میدان با استفاده از رابطه ۵-۱۷ و با توجه به شکل ۵-۸-ب عبارت است از:

$$dB = \frac{\mu \cdot J \cdot r' d\varphi' \hat{a}_\varphi}{2\pi R} (r \cos \alpha) \quad (25-5)$$

که در آن:

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi')^{1/2}$$

$$\cos \alpha = (r - r' \cos \varphi')/R$$

با جایگزین نمودن R و $\cos \alpha$ با استفاده از دو رابطه اخیر و سپس انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ۵-۲۵ روی سطح مقطع استوانه، داریم:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu \cdot J}{\pi} \int_{r'=0}^a r' dr' \int_{\varphi'=0}^{\pi} \frac{\hat{a}_\varphi (r - r' \cos \varphi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi')} d\varphi' \\ &= \frac{\mu \cdot J}{\pi} \int_{r'=0}^a r' dr' \begin{cases} \cdot & r < r' \\ \frac{\pi}{r} & r > r' \end{cases} \hat{a}_\varphi \\ &= \begin{cases} \frac{\mu \cdot J}{\pi} \int_0^a \frac{\pi r'}{r} dr' \hat{a}_\varphi & r > a \\ \frac{\mu \cdot J}{\pi} \int_0^r \frac{\pi r'}{r} dr' \hat{a}_\varphi & r < a \end{cases} \end{aligned}$$

$$B = \begin{cases} \frac{\mu \cdot J \cdot \pi a^2}{\pi r} \hat{a}_\varphi & r > a \\ \frac{\mu \cdot J \cdot \pi r^2}{\pi r} \hat{a}_\varphi & r < a \end{cases} \quad (26-5)$$

پس برای انتگرال گرفتن نسبت به φ' از $\int_0^\pi \frac{\cos n\alpha}{1 - 2t \cos \alpha + t^2} d\alpha = \frac{\pi t^n}{1-t^2}$ که $t < 1$ و $n=0, 1, 2, \dots$ استفاده می شود.

با توجه به اینکه πr^2 مساحت سطح مقطع یک سیم استوانه‌ای به شعاع r است و اینکه برای $r > a$ چگالی جریان صفر است، می‌توان نتایج به دست آمده در رابطه ۵-۲۶ را ترکیب نموده و به صورت زیر خلاصه کرد:

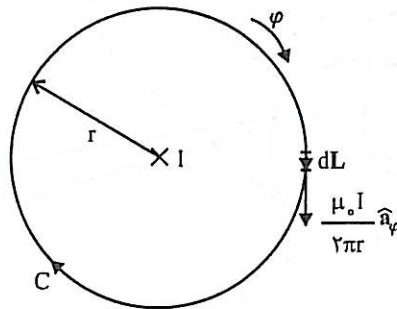
$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 (\text{جریان محصور در مسیر دایره‌ای شکل به شعاع } r)}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (27-5)$$

بنابراین میدان مغناطیسی یک استوانه جریان به طول بینهایت در نقطه‌ای به فاصله r از محور آن مساوی میدان مغناطیسی یک سیم نازک به طول بینهایت است که جریان آن برابر جریان محصور در دایره به شعاع r باشد.

۴-۵ قانون مداری آمپر

در مثالهای فوق با نحوه محاسبه میدان مغناطیسی ساکن با استفاده از قانون بیو-ساوار آشنا شدیم. اکنون قانون دیگری موسوم به قانون مداری آمپر یا به اختصار «قانون آمپر» را مورد بررسی قرار می‌دهیم که کاربردی نظیر کاربرد قانون گوس در مبحث میدان الکتریکی ساکن دارد. این قانون، به طوری که بعداً خواهیم دید، برای محاسبه میدان مغناطیسی برخی توزیعهای جریان متقارن بسیار مفیدتر از قانون بیو-ساوار می‌باشد. برای استخراج قانون مداری آمپر، از میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم جریان به طول بینهایت شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم که این سیم، حامل جریان I و منطبق بر محور Z باشد. مسیر دایره‌ای شکل C ، مطابق شکل ۵-۹، را طوری در نظر می‌گیریم که در صفحه عمود بر محور Z واقع باشد و سیم جریان از مرکز آن بگذرد. جهت انتخاب شده روی مسیر C به گونه‌ای است که اگر پیچ راستگردی در آن جهت چرخانیده شود، پیشروی پیچ در جهت جریان I باشد. میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم جریان بینهایت طویل را قبلاً طی مثال ۵-۱ مورد بررسی قرار دادیم و نتیجه گرفتیم که این میدان در نقطه‌ای به مختصات (r, φ, z) برابر $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2\pi r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$ است. برای عنصر طول $dL = dL \hat{\mathbf{a}}_\varphi$ ، کمیت $\mathbf{B} \cdot dL$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{B} \cdot dL = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot dL \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dL$$



شکل ۵-۹: یک سیم جریان به طول بینهایت و مسیر دایره‌ای شکل C برای مطالعه قانون مداری آمپر

⚡ اگر جریان وارد صفحه کاغذ شود با علامت « \times » و چنانچه از صفحه خارج شود با علامت « \cdot » نشان داده می‌شود.

اکنون انتگرال خط $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ ، که در واقع سیرکولاسیون بردار \mathbf{B} حول مسیر C است، را به دست می‌آوریم:

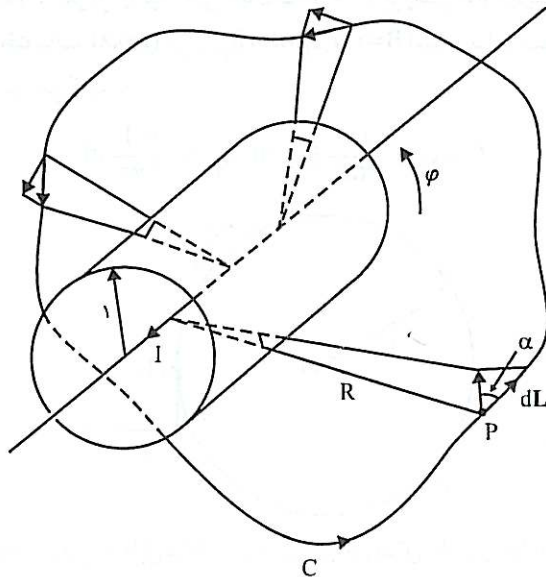
$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} &= \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dL = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_C dL = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (C) \quad (\text{محیط دایره } C) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I \end{aligned} \quad (28-5)$$

رابطه ۲۸-۵ بیان می‌کند که انتگرال \mathbf{B} روی یک مسیر دایره‌ای شکل با شعاع دلخواه r ، که در صفحه عمود بر سیم بینهایت طویل حامل جریان I قرار گرفته و در عین حال مرکز آن بر سیم منطبق باشد، همواره مساوی با $\mu_0 I$ است. باید توجه شود که مقدار این انتگرال مستقل از شعاع مسیر دایره‌ای شکل (یعنی r) می‌باشد.

اکنون به جای دایره، مسیر بسته دلخواه C را که سیم حامل جریان را در برگیرد، مطابق شکل ۱۰-۵، در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که انتگرال خط بردار \mathbf{B} حول چنین مسیر دلخواهی نیز برابر $\mu_0 I$ است. این نتیجه حتی برای حالتی که مسیر بسته دلخواه به صورت یک منحنی فضایی غیرمسطح باشد نیز صادق است. به منظور تحقیق صحت این نتیجه عنصر طول dL را در نقطه P در نظر گرفته و $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot d\mathbf{L} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dL \cos \alpha}{R} \quad (29-5)$$

که R فاصله نقطه P از سیم حامل جریان، $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ بردار واحد در نقطه P و مماس بر دایره به شعاع R و با مرکزی منطبق بر سیم و α زاویه بین $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ و $d\mathbf{L}$ است. انتگرال \mathbf{B} روی تمامی مسیر دلخواه C عبارت است از:



شکل ۱۰-۵: یک سیم جریان به طول بینهایت و مسیر بسته دلخواه C برای مطالعه قانون مداری آمپر

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \oint_C \frac{\mu \cdot I}{2\pi R} dL \cos \alpha = \frac{\mu \cdot I}{2\pi} \oint_C \frac{dL \cos \alpha}{R} \quad (30-5)$$

در رابطه ۳۰-۵، $dL' = dL \cos \alpha$ تصویر dL روی دایره‌ای است که شعاع آن برابر R بوده، مرکزش بر سیم جریان منطبق باشد و از نقطه P بگذرد. اما $dL'' = dL' / R$ به نوبه خود تصویر dL' روی دایره‌ای است که شعاع آن برابر واحد بوده، مرکزش بر سیم جریان منطبق باشد و در صفحه عمود بر سیم قرار بگیرد، در نتیجه $dL \cos \alpha / R$ را می‌توان تصویر عنصر طول dL روی دایره با شعاع واحد دانست. آنگاه مقدار انتگرال $(dL \cos \alpha / R)$ \oint_C ، که برابر حاصل جمع تصاویر کلیه عناصر طول تشکیل دهنده مسیر بسته C روی دایره به شعاع واحد است، مساوی محیط دایره به شعاع واحد (یعنی 2π) بوده و سرانجام رابطه ۳۰-۵ به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi} (2\pi) = \mu \cdot I \quad (31-5)$$

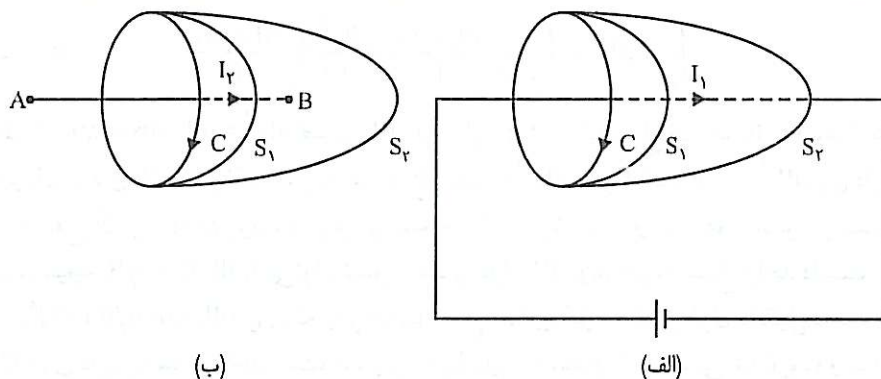
البته روشن است که چنانچه C یک منحنی فضایی غیرمسطح باشد، تصاویر عناصر مختلف طول، همان‌طور که در شکل ۵-۱۰ نیز دیده می‌شود روی دایره‌های مختلفی به شعاع واحد قرار می‌گیرند که مراکز همه آنها منطبق بر سیم جریان بوده و هر یک در صفحه‌ای عمود بر سیم واقع می‌باشد. اما همه این تصاویر را می‌توان بدون هیچ‌گونه تغییری به روی محیط یکی از دایره‌ها، مثلاً دایره‌ای که در صفحه $z=0$ قرار می‌گیرد، انتقال داد و کماکان نتیجه گرفت که مقدار انتگرال $(dL \cos \alpha / R)$ \oint_C برابر 2π بوده و سیرکولاسیون \mathbf{B} حول مسیر غیرمسطح C هم‌چنان برابر $\mu \cdot I$ است. در صورتی که مسیر بسته C جریان I را در برنگیرد مقدار انتگرال $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ مساوی صفر می‌شود، زیرا در محاسبه $(dL \cos \alpha / R)$ \oint_C از یک نقطه روی دایره به شعاع واحد شروع می‌کنیم و پس از پیمودن قوسی به یک نقطه انتهایی می‌رسیم و سپس در جهت عکس روی همان قوس به نقطه ابتدایی برمی‌گردیم و طی این آمد و شد مقدار صفر را برای انتگرال مزبور به دست می‌آوریم.

اگرچه نتیجه به دست آمده در رابطه ۳۱-۵ برای یک سیم جریان بینهایت طویل بوده است، می‌توان ثابت کرد که برای یک حلقه جریان با شکل دلخواه نیز صادق است. بالاخره، اگر به جای یک سیم طویل جریان چند سیم طویل یا چند حلقه جریان داشته باشیم و همچنین اگر جریانها دارای توزیعهای پیوسته‌ای از انواع سطحی و حجمی باشند می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار نشان داد که نتیجه به دست آمده در رابطه ۳۱-۵ هم‌چنان برقرار خواهد بود، مشروط بر آنکه I کل جریانی باشد که مسیر بسته C آن را در برمی‌گیرد. پس به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu \cdot (C) \quad (32-5)$$

(کل جریان دربرگرفته شده توسط مسیر بسته C)

رابطه ۳۲-۵ بیان قانون مداری آمپر است. در اینجا لازم است که جریان در بر گرفته شده توسط یک مسیر بسته به طور دقیق‌تری تعریف شود. برای این منظور ابتدا جریان I_1 و مسیر بسته C را مطابق شکل ۵-۱۱ الف در نظر می‌گیریم. واضح است که جریان I_1 هر سطح کاسه‌ای شکل که به منحنی C محدود



شکل ۴-۵: تشریح جریان در برگرفته شده توسط مسیر بسته C (الف) مسیر بسته C جریان I_1 را در برمی گیرد، (ب) مسیر بسته C جریان I_1 را به گونه واحدی در برنمی گیرد.

شود (یعنی لبه آن منحنی C باشد)، مانند سطوح S_1 و S_2 را یک بار قطع می کند و هیچ سطحی از این قبیل وجود ندارد که جریان I_1 نتواند از آن بگذرد. در اینجا گفته می شود که جریان در برگرفته شده توسط منحنی C را می توان به گونه واحدی تعریف نمود. حال جریان دومی مانند I_2 را در شکل ۴-۵-۱۱-ب در نظر می گیریم که از یک منبع بار الکتریکی در نقطه A سرچشمه گرفته و پس از طی مسافتی در نقطه B پایان یابد. همان طور که ملاحظه می کنیم این جریان از سطح S_1 عبور می کند ولی سطح S_2 را قطع نمی کند. در اینجا گفته می شود که جریان در برگرفته شده توسط C را نمی توان به گونه واحدی تعریف کرد. در حقیقت قانون آمپر برای جریان I_1 صادق نبوده و اگر $B_2 \cdot dL$ را محاسبه کنیم مقداری غیر از $\mu_0 I_1$ به دست خواهد آمد. نتیجه این بحث را می توان چنین خلاصه نمود که «جریان در برگرفته شده توسط یک مسیر بسته C وقتی به گونه واحدی قابل تعریف شدن است که جریان خالص عبور نموده از همه سطوح محدود به منحنی بسته C، یکسان باشد».

با در اختیار داشتن B و مسیر بسته C همیشه می توان جریان در برگرفته شده توسط C را با محاسبه $\oint_C B \cdot dL$ به روش تحلیلی یا عددی و سپس تقسیم آن بر μ_0 به دست آورد. مسئله عکس که عبارت از تعیین میدان B به ازای توزیع جریان معلومی می باشد نیز در برخی موارد که توزیع جریان از درجه تقارن بالایی برخوردار است امکان پذیر می باشد. اگر مسیر بسته C طوری انتخاب شود که میدان مغناطیسی B روی بخشی یا تمامی آن دارای اندازه ثابت و در جهت مماس بر مسیر و روی بقیه مسیر دارای اندازه صفر یا در جهت عمود بر مسیر باشد، آنگاه می توان میدان B را با استفاده از قانون مداری آمپر محاسبه کرد. در واقع، وقتی که مسیر C دارای خصوصیات مذکور باشد انتگرال $\oint_C B \cdot dL$ را می توان به صورت زیر تجزیه نمود:

$$\oint_C B \cdot dL = \int_{C_1} B_t \cdot dL + \int_{C_2} B_n \cdot dL, \quad C = C_1 + C_2 \quad (۳۳-۵)$$

در رابطه ۳۳-۵، B_t مماس بر قسمت C_1 از مسیر و B_n عمود بر قسمت باقیمانده مسیر، که همان C_2 است، می باشد. واضح است که انتگرال دوم در سمت راست رابطه ۳۳-۵ برابر صفر است و چون اندازه

B_t روی قسمت C_1 از مسیر طبق فرض ثابت است، B_t را می توان به خارج از علامت انتگرال انتقال داد. پس:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_{C_1} B_t \cdot d\mathbf{L} = \int_{C_1} B_t dL = B_t \int_{C_1} dL = B_t C_1 = \mu_0 I$$

آنگاه:

$$B_t = \frac{\mu_0 I}{C_1}$$

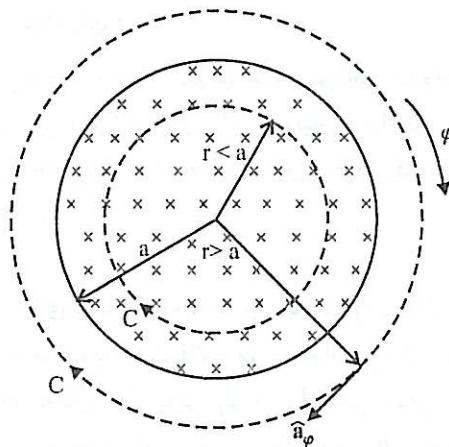
(۳۴-۵)

روشن است که استفاده از قانون آمپر برای محاسبه میدان مغناطیسی، بستگی به کسب اطلاعات اولیه ای درباره جهت و اندازه میدان دارد، زیرا همان گونه که ذکر گردید بردار \mathbf{B} باید مماس یا عمود بر مسیر انتگرال گیری باشد و اندازه B در جاهایی که مماس بر مسیر است باید ثابت باشد. این اطلاعات اولیه را به کمک قانون بیو-ساوار و با در نظر گرفتن تقارن توزیع جریان به دست می آوریم.

مثال ۵-۵: جریان الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی J آمپر بر متر مربع در امتداد محور یک استوانه بینهایت طویل به شعاع a می گذرد. میدان مغناطیسی را در نقاط داخل و خارج استوانه محاسبه نمایید. محور استوانه را منطبق بر محور Z فرض کنید.

حل:

این مثال را قبلاً به کمک قانون بیو-ساوار در مثال ۴-۵ بررسی نمودیم. در آنجا طی یک بحث کیفی نتیجه گیری کردیم که میدان مغناطیسی ناشی از این توزیع جریان تنها مؤلفه φ دارد و از تقارن استوانه ای نیز برخوردار است، یعنی مستقل از φ و Z بوده و فقط تابعی از r می باشد. پس میدان را می توان به صورت $\mathbf{B} = B_\varphi(r) \hat{\mathbf{a}}_\varphi$ نوشت. با در نظر گرفتن این ویژگیها برای میدان، یک مسیر بسته دایره ای شکل به شعاع r ، مطابق شکل ۵-۱۲، طوری انتخاب می کنیم که در صفحه عمود بر محور استوانه واقع باشد و مرکز دایره روی محور قرار بگیرد. با به کار بردن قانون مداری آمپر می توان نوشت:



شکل ۵-۱۲: یک استوانه بینهایت طویل جریان با چگالی توزیع یکنواخت و محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از آن

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \oint_C B_\varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi \cdot d\mathbf{L} \hat{\mathbf{a}}_\varphi = B_\varphi \oint_C dL = B_\varphi (2\pi r)$$

$$= B_\varphi (2\pi r)$$

$$= \mu_0 I, \quad I = \text{کل جریان در برگرفته شده توسط دایره به شعاع } r \quad (35-5)$$

برای محاسبه جریان I می توان نوشت:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J_z \hat{\mathbf{a}}_z \cdot d\mathbf{S} \hat{\mathbf{a}}_z = J_z \int_S dS$$

$$= \begin{cases} J_z (\text{مساحت دایره به شعاع } r) & r < a \\ J_z (\text{مساحت دایره به شعاع } a) & r > a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} J_z \pi r^2 & r < a \\ J_z \pi a^2 & r > a \end{cases} \quad (36-5)$$

با به کار بردن رابطه ۳۶-۵ در رابطه ۳۵-۵، B_φ به شرح زیر محاسبه می شود:

$$B_\varphi = \begin{cases} \mu_0 J_z \pi r^2 / (2\pi r) & r < a \\ \mu_0 J_z \pi a^2 / (2\pi r) & r > a \end{cases} \quad (37-5)$$

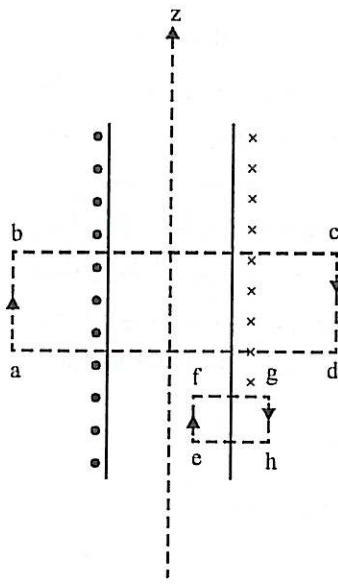
■

همان گونه که انتظار می رود نتایج به دست آمده در رابطه ۳۷-۵ با نتایج رابطه ۲۶-۵ که با استفاده از قانون بیو-ساوار به دست آمدند یکسان هستند، ولی ملاحظه نمودیم که حل مسئله بر اساس قانون مداری آمپر به مراتب ساده تر انجام پذیرفت.

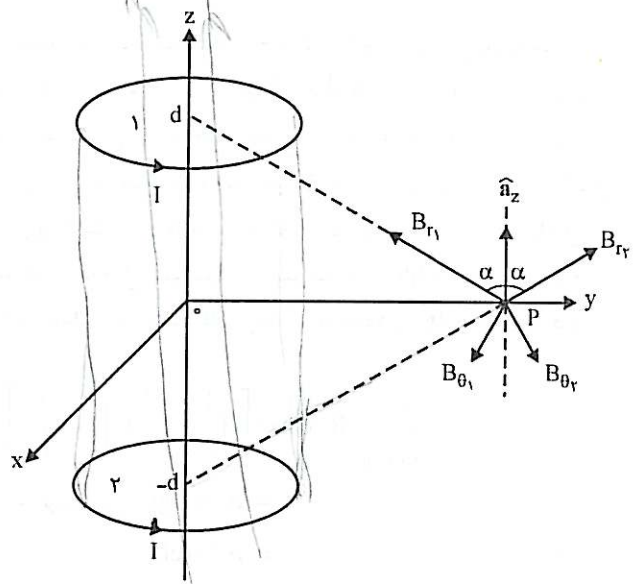
مثال ۵-۶ یک سیملوله طویل به طور یکنواخت و پیوسته سیم پیچی شده است. شعاع سیملوله برابر a ، جریان گذرنده از سیم پیچ آن برابر I و تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول برابر n است. میدان مغناطیسی را در نقاط داخل و خارج سیملوله به دست آورید. فرض کنید که محور سیملوله منطبق بر محور Z باشد.

حل:

به دلیل وجود تقارن استوانه ای نسبت به محور Z و بینهایت بودن طول سیملوله، میدان مغناطیسی مستقل از φ و Z می باشد. به علاوه به کمک قانون بیو-ساوار می توان نشان داد که میدان فقط مؤلفه محوری B_z را دارا است و مؤلفه های دیگر یعنی B_r و B_φ برابر صفر هستند. برای اثبات اینکه $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{a}}_z$ است، دو حلقه از سیم پیچ را که نسبت به صفحه xy متقارن هستند، مطابق شکل ۵-۱۳ الف، در نظر می گیریم. قبلاً ضمن مطالعه مسئله دوقطبی مغناطیسی ملاحظه نمودیم که میدان یک حلقه جریان فقط دارای مؤلفه های B_r و B_θ (در دستگاه مختصات کروی) است. بنابراین اگر



(ب)



(الف)

شکل ۵-۱۳: محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم‌لوله طویل (الف) دو حلقه جریان متقارن و میدان حاصل از آنها (ب) سطح مقطع سیم‌لوله در امتداد محور Z و مسیرهای بسته abcd و efghe برای محاسبه میدان در خارج و داخل سیم‌لوله

میدانهای دو حلقه جریان متقارن نسبت به صفحه $z=0$ را در نقطه $P(r, \pi/2, 0)$ که روی محور y واقع است جمع کنیم، به وضوح می‌توان دید که حاصل جمع مؤلفه‌های هم‌نام در جهت \hat{a}_z قرار می‌گیرد. در نتیجه کل میدان سیم‌لوله در نقطه P ، که به منزله یک نقطه دلخواه است (چرا؟)، در جهت \hat{a}_z خواهد بود. حال به محاسبه میدان مغناطیسی پرداخته و ابتدا میدان را در نقاط خارج سیم‌لوله به دست می‌آوریم. برای این منظور مسیر مستطیلی شکل $abcd$ را مطابق شکل ۵-۱۳-ب در نظر می‌گیریم. واضح است که جریان خالص در برگرفته شده توسط این مسیر برابر صفر است. همچنین میدان \mathbf{B} ، با توجه به ویژگی‌هایی که برای آن برشمردیم، بر اضلاع da و bc عمود و در امتداد اضلاع ab و cd ثابت است. پس با به کار بردن قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$$

$$= \mu_0 \cdot (\text{جریان خالص در برگرفته شده توسط مسیر } abcd) \quad (۳۸-۵)$$

با توجه به اینکه انتگرالهای دوم و چهارم در عبارت سمت راست رابطه اخیر برابر صفر می‌باشند و با فرض آنکه اندازه میدان در امتدادهای ab و cd به ترتیب برابر B_{z1} و B_{z2} باشد، داریم:

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = B_{z1}(ab) - B_{z2}(cd) = 0 \quad (۳۹-۵)$$

چون اضلاع ab و cd الزاماً از سیملوله به یک فاصله نیستند، از رابطه ۵-۳۹ چنین برمی آید که میدان در خارج سیملوله باید صفر بوده یا در همه جا ثابت باشد. اما از آنجا که خطوط میدان مغناطیسی همیشه روی خود بسته می شوند و از این رو شار مغناطیسی \oint در داخل و خارج سیملوله یکسان است، میدان در خارج سیملوله باید صفر باشد. چرا که در غیر این صورت وجود میدان یکنواخت غیر صفر تا فواصل بینهایت از سیملوله به معنای وجود شار بینهایت در خارج سیملوله است که با شار محدود داخل آن مساوی نخواهد بود. برای محاسبه میدان در داخل سیملوله مسیر بسته $efghe$ را مطابق شکل ۵-۱۳-ب در نظر گرفته و با توجه به اینکه میدان در امتداد ef ثابت، بر امتدادهای fg و he عمود و در امتداد gh صفر است، داریم:

$$\begin{aligned}\oint_{efghe} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} &= \left[\int_c^f + \int_f^g + \int_g^h + \int_h^c \right] \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} \\ &= \mu_0 \cdot (\text{efghe مسیر}) \\ &= \mu_0 \cdot \text{In}(ef) \quad (40-5)\end{aligned}$$

چون انتگرالهای دوم تا چهارم در عبارت سمت راست رابطه اخیر صفر هستند، می توان نوشت:

$$\oint_{efghe} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_c^f \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = B_z(ef) = \mu_0 \cdot \text{In}(ef)$$

در نتیجه:

$$B_z = \mu_0 n I$$

پس به طور خلاصه میدان سیملوله عبارت است از:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0 & r > a \\ \mu_0 n I \hat{a}_z & r < a \end{cases} \quad (41-5)$$

■

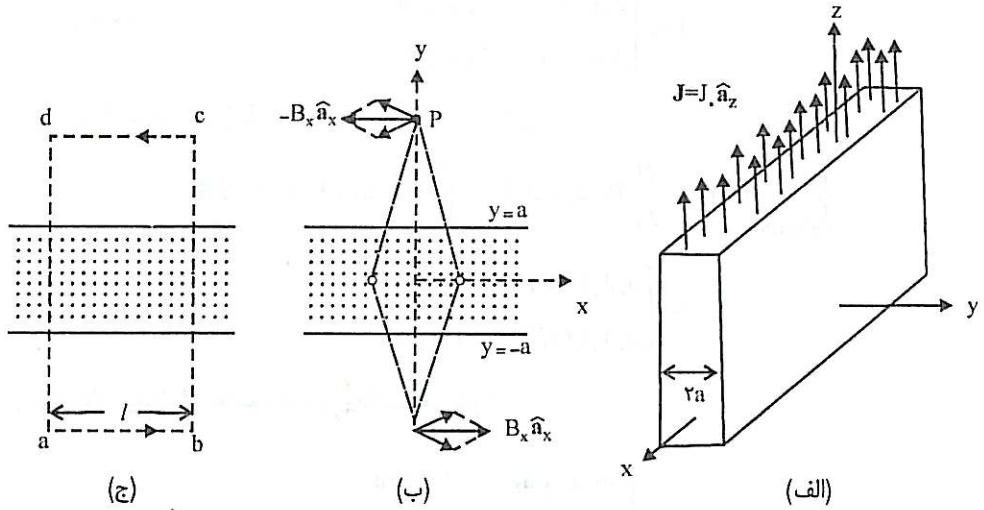
نتیجه به دست آمده در رابطه ۵-۴۱ در حقیقت برای یک سیملوله طویل با سطح مقطع دلخواه، یعنی سیملوله‌ای که تقاطع آن با صفحه‌ای عمود بر محور z به جای دایره یک منحنی بسته دلخواه باشد، نیز صادق است. به عبارت دیگر میدان مغناطیسی در بیرون سیملوله صفر و در درون آن از رابطه $\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{a}_z$ به دست می آید. بررسی درستی این نتیجه به عهده دانشجویان گذاشته می شود.

مثال ۵-۷ جریان الکتریکی در امتداد محور z و با چگالی یکنواخت J در ناحیه‌ای از فضا که بین دو صفحه $y = -a$ و $y = a$ محصور است می گذرد. میدان مغناطیسی ناشی از این توزیع جریان را در تمام نقاط فضا به دست آورید. شکل ۵-۱۴ الف توزیع جریان را نشان می دهد.

حل:

فرض کنید که بخواهیم میدان را در نقطه دلخواهی مانند P به دست آوریم. محورهای مختصات را طوری در نظر می گیریم که محور y از آن نقطه بگذرد. حال اگر این توزیع جریان را به منزله یک مجموعه

شار مغناطیسی برابر $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ است.



شکل ۵-۱۴: محاسبه میدان مغناطیسی در مثال ۵-۷ (الف) جریان الکتریکی با چگالی $\mathbf{J} = J \hat{a}_z$ در ناحیه $|y| < a$ از فضا (ب) دو عنصر متقارن جریان و میدان حاصل از آنها (ج) مسیر بسته $abcd$ برای محاسبه میدان به کمک قانون آمپر

جریانهای رشته‌ای تلقی کنیم که همه به موازات محور z باشند، میدانی که هر دو رشته متقارن واقع در (x', y') و $(-x', y')$ در نقطه P به وجود می‌آورند، همان‌طور که در شکل ۵-۱۴-ب نشان داده شده است، فقط دارای مؤلفه x می‌باشد. البته اگر $y_p > 0$ باشد، میدان در جهت $-\hat{a}_x$ و اگر $y_p < 0$ باشد، میدان در جهت \hat{a}_x خواهد بود. از طرف دیگر، چون توزیع جریان در امتدادهای x و z تا بینهایت ادامه دارد، میدان تابعی از x و z نخواهد بود. در نتیجه، میدان کل حاصل از جریان فقط مؤلفه B_x داشته و در هر صفحه عمود بر محور y اندازه‌های ثابت دارد. با در نظر گرفتن این ویژگیهای میدان، مسیر بسته $abcd$ مطابق شکل ۵-۱۴-ج، را برای محاسبه میدان با استفاده از قانون آمپر انتخاب می‌کنیم. در این مسیر که نسبت به محور x متقارن است، $ab = cd = l$ و به فاصله y از محور x فرض می‌شود. با به کار بردن قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} &= \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} \\ &= \mu_0 \text{ (جریان خالص در برگرفته شده توسط مسیر } abcd \text{)} \\ &= \mu_0 I \end{aligned} \quad (۴۲-۵)$$

در این رابطه انتگرالهای دوم و چهارم برابر صفر هستند، زیرا $\mathbf{B} = B_x \hat{a}_x$ بر اضلاع bc و da عمود است، به علاوه اندازه \mathbf{B} روی اضلاع ab و cd که از محور x به یک فاصله می‌باشند یکسان است. بالاخره جریان I برای حالتی که $|y| > a$ و $|y| < a$ باشد مقادیر متفاوتی دارد که می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه نمود:

$$I = \begin{cases} J_0 (\gamma a l) & |y| > a \\ J_0 (\gamma y l) & |y| < a \end{cases} \quad (۴۳-۵)$$

بنابراین، با استفاده از رابطه ۴۳-۵ در رابطه ۴۲-۵ داریم:

$$\begin{aligned} \oint_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} &= \int_a^b B_x \hat{\mathbf{a}}_x \cdot dx \hat{\mathbf{a}}_x + \int_c^d -B_x \hat{\mathbf{a}}_x \cdot dx \hat{\mathbf{a}}_x = \gamma l B_x \\ &= \begin{cases} \mu_0 J_0 (\gamma a l) & |y| > a \\ \mu_0 J_0 (\gamma y l) & |y| < a \end{cases} \end{aligned}$$

و سرانجام میدان \mathbf{B} به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\mu_0 J_0 y \hat{\mathbf{a}}_x & |y| < a \\ -\mu_0 J_0 a \hat{\mathbf{a}}_x & y > a \\ \mu_0 J_0 a \hat{\mathbf{a}}_x & y < -a \end{cases} \quad (۴۴-۵)$$

■

به طور خلاصه، مواردی که محاسبه میدان مغناطیسی با استفاده از قانون آمپر به سادگی میسر است به شرح زیر می باشند:

(الف) در دستگاه مختصات مستطیلی اگر چگالی توزیع جریان فقط تابعی از یک مختصه، مثلاً y ، باشد میدان مغناطیسی حاصل از مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_z$ چنین جریانی فقط دارای مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_x$ خواهد بود. مسیر بسته مورد نیاز برای قانون آمپر را می توان به صورت یک مربع مستطیل در صفحه xy ، که اضلاع آن با محورهای x و y موازی باشند، در نظر گرفت. اگر چگالی توزیع جریان تابع زوجی از y باشد مسیر بسته نسبت به محور x متقارن است. لیکن برای توزیع جریانی که تابع فردی از y باشد، استفاده از مسیر بسته ای که نسبت به محور x نامتقارن باشد ضروری است.

(ب) در دستگاه مختصات استوانه ای اگر چگالی توزیع جریان مستقل از ρ و z یا به عبارت دیگر فقط تابعی از r باشد، میدان مغناطیسی حاصل از مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_z$ چنین جریانی فقط دارای مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ خواهد بود. مسیر بسته را می توان به صورت دایره ای به شعاع r که مرکزش منطبق بر محور z و در صفحه ای عمود بر محور z باشد در نظر گرفت. همچنین، میدان مغناطیسی حاصل از مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ چنین جریانی فقط دارای مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_z$ خواهد بود. در این حالت مسیر بسته را می توان به صورت یک مربع مستطیل در صفحه yz (یا صفحه xz)، که اضلاعش موازی محورها باشند، در نظر گرفت.

(ج) در دستگاه مختصات کروی اگر چگالی توزیع جریان مستقل از θ و ϕ یا به عبارت دیگر فقط تابعی از r باشد، میدان مغناطیسی حاصل از مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_r$ چنین جریانی فقط دارای مؤلفه $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ خواهد بود و مسیر بسته را می توان به صورت دایره ای به شعاع r_c که مرکزش منطبق بر محور z و در صفحه ای عمود بر محور z باشد در نظر گرفت.

۵-۵ شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر

فرض می‌کنیم یک جریان الکتریکی با چگالی حجمی J در فضا توزیع شده باشد. مقدار جریانی را که مسیر بسته دلخواه C در برمی‌گیرد می‌توان با محاسبه $\oint_C J \cdot dS$ ، که S سطح محدود به منحنی بسته C است، به دست آورد. بر اساس قانون مداری آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint_C B \cdot dL = \mu_0 \int_S J \cdot dS \quad (۴۵-۵)$$

در رابطه ۴۵-۵ جهت انتخاب شده برای مسیر بسته C به گونه‌ای است که اگر پیچ راستگردی در آن جهت چرخانیده شود پیشروی آن در امتداد بردار dS باشد. این رابطه در واقع شکل انتگرالی قانون مداری آمپر است. حال اگر مسیر C را آن قدر کوچک کنیم تا به مسیر ΔC تبدیل شود، آنگاه S نیز به عنصر سطح ΔS تبدیل شده و رابطه ۴۵-۵ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\oint_{\Delta C} B \cdot dL = \mu_0 \int_{\Delta S} J \cdot dS \quad (۴۶-۵)$$

اما چون ΔS سطح بسیار کوچکی است، چگالی توزیع جریان در آن را می‌توان یکنواخت فرض کرد و انتگرال سمت راست رابطه ۴۶-۵ را به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\Delta S} J \cdot dS = J \cdot \hat{a}_n \Delta S \quad (۴۷-۵)$$

در رابطه ۴۷-۵، \hat{a}_n بردار واحدی عمود بر عنصر سطح ΔS و در جهت پیشروی یک پیچ راستگرد است وقتی که در جهت مسیر ΔC چرخانیده شود. با تقسیم طرفین رابطه ۴۶-۵ بر ΔS و میل دادن ΔS به سمت صفر داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} B \cdot dL}{\Delta S} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mu_0 \int_{\Delta S} J \cdot dS}{\Delta S} \\ &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mu_0 \cdot J \cdot \hat{a}_n \Delta S}{\Delta S} = \mu_0 \cdot J \cdot \hat{a}_n \end{aligned} \quad (۴۸-۵)$$

از مبحث آنالیز برداری به یاد می‌آوریم که کرل بردار B به صورت برداری تعریف می‌شود که اندازه آن برابر حداکثر کمیت سمت چپ رابطه ۴۸-۵ بوده و در جهت عمود بر ΔS ، آن ΔS که به ازای آن حداکثر کمیت مذکور به دست می‌آید، باشد. بررسی عبارت سمت راست رابطه ۴۸-۵ نشان می‌دهد که مقدار حداکثر وقتی حاصل می‌شود که \hat{a}_n در جهت J باشد و این مقدار حداکثر برابر $|J| \mu_0$ است. بنابراین:

$$|\nabla \times B| = \max \left(\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} B \cdot dL}{\Delta S} \right) = \mu_0 \cdot |J| \quad (۴۹-۵)$$

$$\text{جهت } \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (50-5)$$

در نتیجه :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (51-5)$$

رابطه ۵۱-۵ شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر است. این رابطه بیان می‌کند که در هر نقطه از فضا کرل چگالی شار مغناطیسی برابر حاصل ضرب μ_0 در چگالی توزیع جریان در آن نقطه است. رابطه مزبور همچنین به عنوان یکی از معادلات ماکسول برای میدان مغناطیسی ساکن شناخته می‌شود. وقتی که جریان الکتریکی به طور سطحی یا خطی توزیع شده باشد، از توابع دلتای دیراک برای بیان \mathbf{J} استفاده می‌شود. نحوه کار دقیقاً به همان ترتیب است که برای بیان چگالی بار الکتریکی با توزیعهای نقطه‌ای، خطی و سطحی در رابطه با شکل نقطه‌ای قانون گوس انجام می‌شد. به عنوان مثال برای یک صفحه جریان واقع در $x=x_0$ و با چگالی \mathbf{J}_S می‌توان نوشت :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_S \delta(x-x_0) \quad (52-5)$$

۶-۵ پتانسیل مغناطیسی برداری

تاکنون دو روش را برای محاسبه میدان مغناطیسی ساکن مطالعه نموده‌ایم. در این دو روش، که یکی بر اساس قانون بیو-ساوار و دیگری مبتنی بر قانون مداری آمپر است، میدان مغناطیسی مستقیماً از توزیع جریان به دست می‌آید. در این قسمت روش سوم را برای محاسبه میدان مغناطیسی ارائه می‌دهیم که در آن ابتدا یک کمیت برداری موسوم به پتانسیل مغناطیسی برداری برای توزیع جریان معلومی محاسبه می‌شود و سپس میدان مغناطیسی از آن به دست می‌آید. این روش در حقیقت مشابه روشی است که برای محاسبه میدان الکتریکی ساکن از طریق به دست آوردن پتانسیل الکتریکی و سپس تعیین گرادیان آن به کار می‌رفت. برای تشریح این روش، میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان خطی در امتداد مسیر C' را با استفاده از رابطه ۵-۵ به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I d\mathbf{L}'(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{a}}_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \quad (53-5)$$

با جایگزین نمودن $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^3} \hat{\mathbf{a}}_R$ در رابطه ۵۳-۵، داریم :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} d\mathbf{L}'(\mathbf{r}') \times \nabla \left[\frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \right] \quad (54-5)$$

با استفاده از اتحاد برداری $\mathbf{A} \times \nabla V = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times (\mathbf{V}\mathbf{A})$ ، رابطه ۵۴-۵ به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \left[\frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \nabla \times d\mathbf{L}'(\mathbf{r}') - \nabla \times \frac{d\mathbf{L}'(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \right] \quad (55-5)$$

در رابطه ۵-۵۵ انتگرال‌گیری نسبت به نقاط واقع بر مسیر جریان که تابعی از \mathbf{r}' هستند انجام می‌شود، در حالی که عملگر کرل، مشتق‌گیری نسبت به نقاط میدان را که تابعی از \mathbf{r} می‌باشند شامل می‌گردد. بنابراین $\nabla \times d\mathbf{L}'(\mathbf{r}') = 0$ بوده و با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری، رابطه ۵-۵۵ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \nabla \times \frac{d\mathbf{L}'(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I d\mathbf{L}'}{R} \right) \quad (56-5 \text{ الف})$$

در صورتی که به جای جریان خطی، یک جریان سطحی با چگالی \mathbf{J}_S روی سطح S' یا یک جریان حجمی با چگالی \mathbf{J} در حجم V' داشته باشیم، نتایج مشابهی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\int_{S'} \frac{\mu_0 \mathbf{J}_S dS'}{4\pi R} \right) \quad (56-5 \text{ ب})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\int_{V'} \frac{\mu_0 \mathbf{J} dV'}{4\pi R} \right) \quad (56-5 \text{ ج})$$

در روابط ۵-۵۶ عباراتی داریم که محاسبه میدان مغناطیسی را از طریق تعیین کرل یک کمیت برداری ممکن می‌سازد. اگر این کمیت برداری را با \mathbf{A} نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (57-5)$$

که در آن، بردار \mathbf{A} برای جریانهای خطی، سطحی و حجمی به ترتیب عبارت است از:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{I d\mathbf{L}'}{R} \quad (58-5)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_S dS'}{R} \quad (59-5)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} dV'}{R} \quad (60-5)$$

مقایسه روابط ۵-۵۸ تا ۵-۶۰ با روابط ۲-۹۱ تا ۲-۹۳، که برای پتانسیل الکتریکی V ناشی از توزیعهای خطی، سطحی و حجمی بار می‌باشند، تشابه عبارات سمت راست آنها را به خوبی مشهود می‌سازد. با توجه به این تشابه و از آنجا که \mathbf{A} بر خلاف V یک کمیت برداری است، بردار \mathbf{A} پتانسیل مغناطیسی برداری نامیده می‌شود. کمیت \mathbf{A} بر خلاف V دارای مفهوم فیزیکی نیست و فقط نقش یک واسطه را برای محاسبه میدان مغناطیسی \mathbf{B} ایفا می‌کند. استفاده از \mathbf{A} برای محاسبه \mathbf{B} ، به خصوص وقتی که نتایج مربوط به مسئله مشابه، برای پتانسیل الکتریکی V در اختیار باشد، بسیار مطلوب است.

مثال ۵-۸ یک سیم به طول بینهایت حامل جریان I بوده و در امتداد محور Z قرار دارد. مطلوب است محاسبه پتانسیل برداری A و سپس میدان مغناطیسی B که از این سیم جریان پدید می‌آید.

حل:

فرض کنید بخواهیم پتانسیل برداری A را در نقطه دلخواه P به فاصله r از سیم جریان به دست آوریم. به دلیل وجود تقارن استوانه‌ای می‌توان نقطه P را مطابق شکل ۵-۱۵ روی محور y در نظر گرفت. آنگاه با استفاده از رابطه ۵-۵۸، داریم:

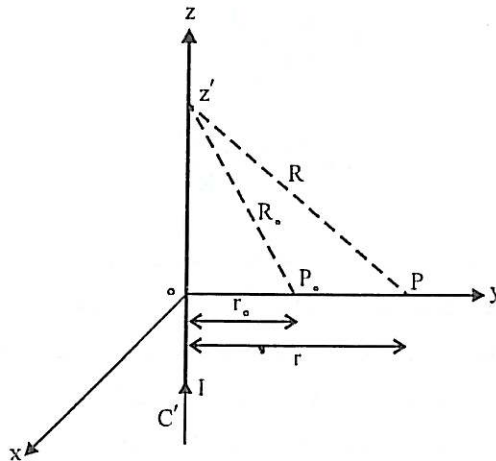
$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{dz'}{R} \hat{a}_z = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \right) \hat{a}_z \quad (۶۱-۵)$$

اما به سادگی می‌توان نشان داد که برای رابطه انتگرالی ۵-۶۱، وقتی که بین حدود $z' = -\infty$ تا $z' = +\infty$ محاسبه شود، مقدار بینهایت به دست می‌آید. این اشکال در مثال ۲-۸، مربوط به محاسبه پتانسیل الکتریکی یک خط بار به طول بینهایت، نیز بروز کرد و برای رفع آن پتانسیل نقطه‌ای به فاصله r_0 از خط بار را برابر صفر فرض نمودیم. در اینجا نیز می‌توان به همان ترتیب عمل کرد و پتانسیل نقطه P را به صورت زیر نوشت:

$$A = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} - \frac{dz'}{\sqrt{r_0^2 + z'^2}} \right) \hat{a}_z \quad (۶۲-۵)$$

انتگرال درون پرانتز در رابطه ۵-۶۲ را قبلاً ضمن محاسبه پتانسیل الکتریکی خط بار به دست آورده‌ایم که نتیجه در رابطه ۲-۱۰۲ خلاصه شده است. اکنون با استفاده از این نتیجه می‌توان نوشت:

$$A = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \hat{a}_z \quad (۶۳-۵)$$



شکل ۵-۱۵: یک سیم جریان به طول بینهایت و محاسبه پتانسیل برداری ناشی از آن

و سرانجام با محاسبه کرل \mathbf{A} میدان مغناطیسی \mathbf{B} را به دست می‌آوریم:

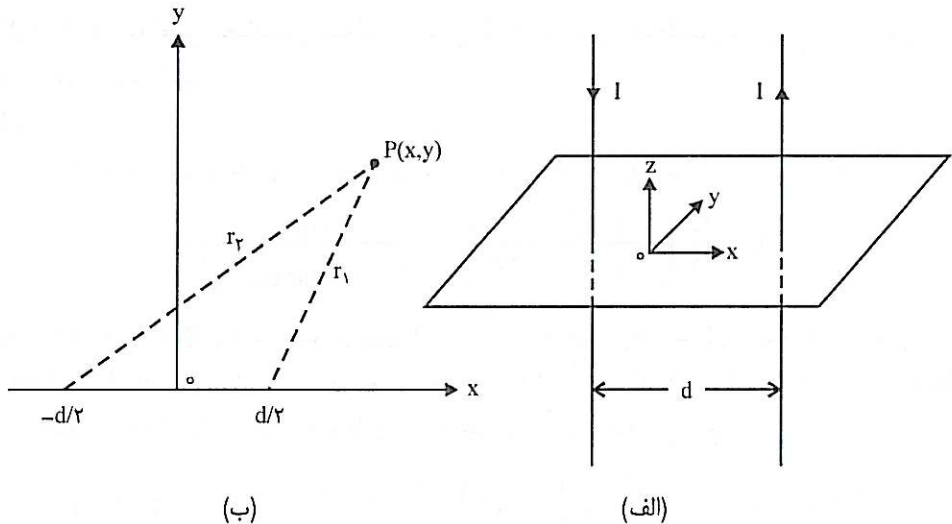
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_r & r\hat{\mathbf{a}}_\varphi & \hat{\mathbf{a}}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{a}}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \frac{\mu \cdot I}{2\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (۶۴-۵)$$

یک راه دیگر برای اجتناب از بینهایت شدن \mathbf{A} آن است که این بردار را ابتدا برای بخشی از جریان که در فاصله $-L < z' < L$ قرار دارد به دست آوریم، سپس $\nabla \times \mathbf{A}$ را محاسبه کنیم و سرانجام L را به سمت بینهایت میل دهیم تا میدان \mathbf{B} برای سیم جریان با طول بینهایت به دست آید.

■

با داشتن نتیجه به دست آمده در رابطه ۵-۶۳، پتانسیل برداری و میدان مغناطیسی ناشی از دو سیم موازی با جریانهای مساوی و مختلف‌الجهت و به فاصله d از یکدیگر را می‌توان به آسانی محاسبه نمود. چنین ترکیبی، که در شکل ۵-۱۶ الف نشان داده شده است، به «دوقطبی مغناطیسی دو بُعدی» (در مقایسه با یک حلقه دایره‌ای شکل جریان که یک دوقطبی مغناطیسی سه بُعدی است) موسوم است. با استفاده از رابطه ۵-۶۳ و با توجه به شکل ۵-۱۶ ب پتانسیل برداری در نقطه P ، که به فاصله r_1 از سیم حامل جریان I در جهت $\hat{\mathbf{a}}_z$ و به فاصله r_2 از سیم حامل جریان I در جهت $-\hat{\mathbf{a}}_z$ است، به شرح زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu \cdot I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \hat{\mathbf{a}}_z + \frac{\mu \cdot I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\mu \cdot I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \hat{\mathbf{a}}_z$$



شکل ۵-۱۶: دوقطبی مغناطیسی دو بُعدی (الف) متشکل از دو سیم موازی با جریانهای مساوی و مختلف‌الجهت (ب) برای محاسبه پتانسیل برداری آن

اما:

$$r_1 = \left[\left(x - \frac{d}{\gamma} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2}, \quad r_2 = \left[\left(x + \frac{d}{\gamma} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2}$$

در نتیجه:

$$A = \frac{\mu_0 I}{\gamma \pi} \ln \left[\frac{\left(x + \frac{d}{\gamma} \right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{d}{\gamma} \right)^2 + y^2} \right] \hat{a}_z = A_z \hat{a}_z$$

برای تعیین میدان مغناطیسی B می توان نوشت:

$$B = \nabla \times A = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{a}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{a}_y$$

$$B = -\frac{\mu_0 I d}{\gamma \pi} \left[\frac{\gamma x y}{r_1^2 r_2^2} \hat{a}_x - \left(\frac{\gamma x^2}{r_1^2 r_2^2} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2} \right) \hat{a}_y \right] \quad (65-5)$$

برای به دست آوردن میدان در فواصل دور از دو قطبی در مقایسه با d، می توان حد عبارت سمت راست رابطه ۶۵-۵ را وقتی که $d \rightarrow 0$ و Id، که گشتاور دو قطبی است، ثابت نگه داشته شود محاسبه نمود. برای این منظور در رابطه مذکور r_1 و r_2 را با r جایگزین نموده x ، y ، \hat{a}_x و \hat{a}_y را در مختصات استوانه‌ای می نویسیم و نتیجه زیر را به دست می آوریم:

$$B = \frac{\mu_0 Id}{\gamma \pi r^2} (-\sin \varphi \hat{a}_r + \cos \varphi \hat{a}_\varphi) \quad (66-5)$$

مثال ۹-۵ برای دو قطبی مغناطیسی سه بُعدی شکل ۶-۵، پتانسیل مغناطیسی برداری را در فواصل دور ($r \gg a$) محاسبه کنید.

حل:

با توجه به علامتهای به کار رفته در شکل ۶-۵ و با استفاده از رابطه ۵۸-۵ می توان نوشت:

$$A = \frac{\mu_0}{\gamma \pi} \oint_C \frac{IdL'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{\gamma \pi} \oint_C \frac{IdL'}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha)^{1/2}}$$

که $a = |\mathbf{r}'|$ و α زاویه بین بردارهای \mathbf{r} و \mathbf{r}' بوده و می توان نشان داد که $\cos \alpha$ برابر با $\sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$ می باشد. اکنون جمله $(r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha)^{-1/2}$ را بر اساس شرط $\frac{a}{r} < 1$ بسط داده و فقط دو جمله اول حاصل از بسط را در محاسبات بعدی به کار می بریم.

$$(r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \frac{2a}{r} \cos \alpha \right]^{-1/2} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \alpha \right)$$

آنگاه:

$$A = \frac{\mu_0 I}{\gamma \pi r} \left(\oint_C dL' + \oint_C \frac{a}{r} \cos \alpha dL' \right) \quad (67-5)$$

بدیهی است که $\oint_C \mathbf{dL}' = 0$ است. برای محاسبه انتگرال دوم در عبارت سمت راست رابطه ۵-۶۷ از روابط $dL' = a d\varphi' (-\sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y)$ و $\cos \alpha = \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \varphi') (-\sin \varphi' \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \varphi' \hat{\mathbf{a}}_y) d\varphi' \\ &= \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \pi (-\sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_y) = \frac{\mu_0 (I \pi a^2) \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (68-5) \end{aligned}$$

با استخراج کرل \mathbf{A} همان نتیجه به دست آمده در رابطه ۵-۲۱ را می‌توان دوباره بازیافت. چون از طرفی بر حسب تعریف $\mathbf{m} = I \pi a^2 \hat{\mathbf{a}}_z$ گشتاور دوقطبی و از طرف دیگر $\sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi = \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_r$ است، نتیجه به دست آمده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{a}}_r}{4\pi r^2} \quad (69-5)$$

از این نتیجه در مطالعه میدان مغناطیسی در اجسام، در فصل بعد، استفاده خواهیم کرد.

در ادامه مطالعه پتانسیل مغناطیسی برداری، به استخراج معادلات پواسون و لاپلاس برای \mathbf{A} ، که در میدان الکتریکی ساکن برای V به دست آوردیم، می‌پردازیم. برای این منظور از طرفین رابطه ۵-۵۷ کرل می‌گیریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (70-5)$$

اما با به کار بردن شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر، که در رابطه ۵-۵۱ داده شده است، در رابطه ۵-۷۰ می‌توان نوشت:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \nabla^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \quad (71-5)$$

حال ثابت می‌کنیم که برای یک جریان حلقه‌ای، یعنی یک جریان خطی که از مسیر بسته C' بگذرد، دیورژانس بردار \mathbf{A} برابر صفر است. برای این منظور $\nabla \cdot \mathbf{A}$ را با استفاده از رابطه ۵-۵۸ به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \oint_{C'} \frac{\mu_0 I d\mathbf{L}'}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}'}{R} \right) \quad (72-5)$$

با استفاده از اتحاد برداری $\nabla \cdot (\mathbf{VA}) = \mathbf{A} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \mathbf{A}$ ، رابطه ۷۲-۵ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint_{C'} dL' \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + \oint_{C'} \frac{1}{R} \nabla \cdot d\mathbf{L}' \right] \quad (73-5)$$

انتگرال دوم در رابطه ۷۳-۵ همواره برابر صفر است، زیرا عملگر ∇ نسبت به مختصات نقاط میدان (مختصات بدون پریم) عمل می‌کند ولی $d\mathbf{L}'$ تابعی از مختصات نقاط منبع (مختصات پریم‌دار) است

و بنابراین $\nabla \cdot d\mathbf{L}'$ برابر صفر می‌باشد. برای محاسبه انتگرال اول در رابطه ۵-۷۳ از تساوی $\nabla(R^{-1}) = -\nabla'(R^{-1})$ ، که پریم به مفهوم مشتق گرفتن نسبت به مختصات پریم‌دار است، استفاده نموده و سپس قضیه استوکس، یعنی رابطه ۱-۱۲۷، را به کار می‌بریم:

$$\oint_{C'} d\mathbf{L}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - \oint_{C'} \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{L}' = - \int_{S'} \nabla' \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S}' \quad (۷۴-۵)$$

که S' یک سطح دلخواه محدود به منحنی بسته C' می‌باشد. اما چون کرل گرادیان یک تابع نرده‌ای همیشه صفر است، رابطه ۵-۷۴ برابر صفر بوده و بدین ترتیب نشان داده شده است که برای یک جریان حلقه‌ای $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ می‌باشد. این نتیجه برای جریانهای سطحی و حجمی نیز صادق است، زیرا اگر در مسیر این گونه جریانها تراکم بار الکتریکی وجود نداشته باشد می‌توان آنها را به صورت مجموعه‌هایی از جریانهای حلقه‌ای بیان نمود که برای هر یک $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ بوده و در نتیجه برای کل جریان سطحی یا حجمی نیز $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ است. با استفاده از این نتیجه در رابطه ۵-۷۱، داریم:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (۷۵-۵)$$

رابطه ۵-۷۵، که مشابه رابطه $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ برای پتانسیل الکتریکی است، به نام معادله پواسون برای پتانسیل برداری شناخته می‌شود. این معادله، پتانسیل مغناطیسی برداری را در هر نقطه از فضا به چگالی حجمی توزیع جریان در آن نقطه مربوط می‌سازد. رابطه ۵-۷۵ یک معادله دیفرانسیل برداری است و در حالت کلی معادل سه معادله نرده‌ای است. به عنوان مثال، در دستگاه مختصات مستطیلی رابطه ۵-۷۵ را می‌توان به سه معادله زیر تجزیه کرد:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z \end{aligned} \quad (۷۶-۵)$$

در صورتی که در ناحیه‌ای از فضا $\mathbf{J} = 0$ باشد، رابطه ۵-۷۵ به شکل $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$ ساده می‌شود که به معادله لاپلاس برای پتانسیل برداری موسوم است. این معادله نیز در دستگاه مختصات مستطیلی به سه معادله نرده‌ای تجزیه می‌شود که برای حل هر یک از آنها می‌توان روشهای حل معادله لاپلاس را برای پتانسیل الکتریکی، که در فصل چهارم ارائه گردید، به کار برد. معادلات پواسون و لاپلاس برای پتانسیل برداری \mathbf{A} در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی بسیار پیچیده هستند، زیرا برخلاف دستگاه مختصات مستطیلی مؤلفه‌های لاپلاسین بردار \mathbf{A} در این دو دستگاه مختصات مساوی لاپلاسین مؤلفه‌های آن نمی‌باشند.

اکنون ممکن است این سؤال به ذهن خطور کند که «آیا همان‌طور که برای میدان الکتریکی \mathbf{E} پتانسیل نرده‌ای V را به صورت $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ تعریف نمودیم، می‌توان برای میدان مغناطیسی \mathbf{B} نیز

پتانسیل نرده‌ای به صورت $V_m = -\frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ تعریف کرد و در نتیجه رابطه $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla V_m$ را که مشابه $\mathbf{E} = -\nabla V$ است داشت؟» جواب هم آری است و هم نه! در واقع اگر فرض کنیم پتانسیل V_m با ویژگیهای مذکور وجود داشته باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \nabla V_m = 0 \quad (77-5)$$

از طرف دیگر، بر اساس شکل نقطه‌ای قانون آمپر $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ است. بنابراین اگر در ناحیه‌ای از فضا $\mathbf{J} \neq 0$ باشد، نمی‌توان میدان مغناطیسی را متناسب با گرادیان یک تابع نرده‌ای فرض کرد، ولی در نقاطی که $\mathbf{J} = 0$ است رابطه $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla V_m$ امکان‌پذیر می‌باشد. البته ذکر این نکته ضروری است که چون میدان مغناطیسی یک میدان غیرپایستار است، $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ به مسیر انتگرال‌گیری بستگی داشته و نمی‌توان V_m را به گونه واحدی تعیین کرد. به عبارت دیگر V_m تابعی چند مقدری خواهد بود. با این وجود، استفاده از V_m در حل پاره‌ای از مسائل مفید واقع می‌شود، زیرا آنچه که دارای اهمیت است نه خود V_m بلکه گرادیان V_m است. چون دیورژانس میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، به طوری که در قسمت بعد خواهیم دید، همواره برابر صفر است، داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \cdot \nabla V_m = -\mu_0 \nabla^2 V_m = 0$$

یا:

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad (78-5)$$

رابطه ۷۸-۵ معادله لاپلاس برای پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای است. حل این معادله را می‌توان به شیوه‌هایی که برای حل معادله لاپلاس در مورد پتانسیل الکتریکی به کار بردیم انجام داد.

۷-۵ معادله دیورژانس ماکسول برای میدان مغناطیسی ساکن

در قسمت قبل دیدیم که میدان مغناطیسی \mathbf{B} را همیشه می‌توان به صورت کرل یک بردار، که آن را پتانسیل مغناطیسی برداری نامیدیم، بیان داشت. از طرف دیگر دیورژانس کرل یک بردار همواره برابر صفر است. بنابراین چون $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ است، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (79-5)$$

رابطه ۷۹-۵ به عنوان معادله دیورژانس ماکسول برای میدان مغناطیسی شناخته می‌شود. این معادله همراه با معادله کرل ماکسول برای میدان مغناطیسی، یعنی $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ، به طور کامل خصوصیات میدان مغناطیسی ساکن را بیان می‌کنند. معادله ۷۹-۵ تعیین می‌کند که آیا یک میدان برداری می‌تواند یک میدان مغناطیسی ساکن باشد یا نه، در صورتی که معادله کرل ماکسول میدان را به جریان مولد آن مربوط می‌سازد. اگر معادله ۷۹-۵ را با معادله دیورژانس ماکسول برای میدان الکتریکی، یعنی $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ ، مقایسه کنیم، روشن می‌شود که چیزی به نام بار مغناطیسی به طور مجزا وجود خارجی ندارد. با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ۷۹-۵ در حجم V ، داریم:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0 \quad (80-5)$$

اما بر اساس قضیه دیورژانس می توان نوشت :

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

که S سطح بسته ای است که حجم V به آن محدود می شود. چون رابطه ۵-۸۰ برای هر حجم دلخواه V صادق است، می توان نتیجه گرفت که برای هر سطح بسته S داریم :

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (۸۱-۵)$$

رابطه ۵-۸۱ در واقع شکل انتگرالی معادله دیورژانس ماکسول برای میدان مغناطیسی است. از آنجا که \mathbf{B} چگالی شار مغناطیسی است، $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ برابر مقدار کل شار مغناطیسی گذرنده از سطح بسته S است. بنابراین رابطه ۵-۸۱ بیان می کند که کل شار مغناطیسی گذرنده از یک سطح بسته همیشه صفر است، به عبارت دیگر هر مقدار شار که وارد سطح بسته S شود همان مقدار شار نیز از آن خارج می گردد. بر خلاف خطوط میدان الکتریکی که از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم می شوند، خطوط مغناطیسی همواره تشکیل منحنی های بسته می دهند. به علاوه چون :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 (\text{جریان دربرگرفته شده توسط مسیر } C)$$

منحنی های بسته باید حول جریان پدید آورنده میدان مغناطیسی تشکیل شوند. میدانهای برداری که وجه مشخصه آنها شار خالص صفر روی کلیه سطوح بسته ممکن باشد، میدانهای سیملوله ای نامیده می شوند. میدان مغناطیسی \mathbf{B} و چگالی جریان الکتریکی \mathbf{J} (ثابت نسبت به زمان) مثالهایی از میدانهای سیملوله ای هستند. طبیعت سیملوله ای \mathbf{J} از این حقیقت ناشی می شود که در صورت عدم تراکم بار الکتریکی، جریان باید از یک مسیر بسته بگذرد. این نتیجه را می توان از $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ نیز به دست آورد.

مثال ۵-۱۰ تحقیق نمایید که آیا میدانهای زیر می توانند به عنوان میدانهای مغناطیسی ساکن وجود داشته باشند :

الف) در دستگاه مختصات استوانه ای : $\mathbf{B}_1 = \frac{B_0}{r^2} (-\sin \varphi \hat{\mathbf{a}}_r + \cos \varphi \hat{\mathbf{a}}_\varphi)$

ب) در دستگاه مختصات کروی : $\mathbf{B}_2 = B_0 (\sin \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta)$

حل :

الف) $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{B_0}{r} \sin \varphi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{B_0}{r^2} \cos \varphi \right) = 0$

در نتیجه \mathbf{B}_1 می تواند به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن وجود داشته باشد.

ب) $\nabla \cdot \mathbf{B}_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \theta) \neq 0$

چون $\nabla \cdot \mathbf{B}_2 \neq 0$ است، \mathbf{B}_2 نمی تواند به عنوان یک میدان مغناطیسی ساکن وجود داشته باشد. ■

۵-۸ خلاصه فصل

در این فصل میدانهای مغناطیسی ساکن را به منزله پدیده‌ای که از بارهای الکتریکی متحرک و با سرعت حرکت یکنواخت ناشی می‌شود مورد بحث و بررسی قرار دادیم. کلیه مطالعات این فصل بر اساس قانون نیروی آمپر، که به عنوان یک قانون تجربی بیان گردید، استوار می‌باشد. به طور خلاصه:

- پس از بیان قانون نیروی آمپر برای دو مدار حامل جریان، میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، که چگالی شار مغناطیسی نامیده می‌شود، را تعریف کردیم. روابطی که میدان \mathbf{B} را بر حسب چگالیهای توزیع خطی، سطحی و حجمی جریان بیان می‌کند نتیجه‌گیری نمودیم. از این روابط عموماً تحت عنوان قانون بیو-ساوار نام برده می‌شود.

- نیروی وارد آمده بر یک بار نقطه‌ای متحرک در میدان مغناطیسی را مطالعه کردیم. این نیرو همواره بر مسیر حرکت و نیز بر میدان عمود می‌باشد. رابطه نیروی لورنتز، که میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان مغناطیسی \mathbf{B} وارد بر بار نقطه‌ای q که با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند را به هم پیوند می‌دهد، را استخراج کردیم ($\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$).

- قانون مداری آمپر را به منزله یک روش مهم برای مطالعه میدانهای مغناطیسی ساکن مورد بحث و بررسی قرار دادیم. بر اساس این قانون، نشان دادیم که برای هر مسیر بسته دلخواه C داریم:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 (I_{\text{جریان دربرگرفته شده توسط مسیر } C})$$

- شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$) را به دست آوردیم. این رابطه به عنوان یکی از معادلات ماکسول برای میدان مغناطیسی ساکن شناخته می‌شود.

- پتانسیل مغناطیسی برداری، \mathbf{A} ، را به گونه‌ای تعریف کردیم که $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ باشد. با استفاده از مفهوم پتانسیل مغناطیسی برداری روش جدیدی را برای محاسبه میدان مغناطیسی \mathbf{B} ارائه نمودیم. روابطی که پتانسیل مغناطیسی برداری را بر حسب چگالیهای توزیع جریان خطی، سطحی و حجمی بیان می‌کنند به دست آوردیم.

- پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای، V_m ، را به گونه‌ای مشروط (وقتی که $\mathbf{J} = 0$ باشد) تعریف کردیم. با استفاده از V_m ، میدان \mathbf{B} را می‌توان از رابطه $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla V_m$ به دست آورد.

- معادله پواسون را برای پتانسیل مغناطیسی برداری نتیجه‌گیری کردیم ($\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$). همچنین نشان دادیم که پتانسیل مغناطیسی نرده‌ای در معادله لاپلاس صدق می‌کند ($\nabla^2 V_m = 0$).

- نشان دادیم که برای میدان مغناطیسی \mathbf{B} همواره $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ بوده و بنابراین خطوط میدان مغناطیسی همیشه منحنی‌های بسته‌ای هستند. رابطه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ به عنوان یکی از معادلات ماکسول برای میدان مغناطیسی شناخته می‌شود.

- اشاره کردیم که روابط $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ برای بیان کامل میدان مغناطیسی اکتفا می‌کنند. رابطه دیورژانس ویژگی سیملوله‌ای بودن میدان را بیان می‌کند، در حالی که رابطه کرل میدان را به منبع آن یعنی \mathbf{J} مربوط می‌سازد.