

برای یافتن تابع پتانسیل، کره را با بار تصویری  $Q'$ ، به طریقی که در بالا مشخص گردید، جایگزین نموده و آنگاه تصویر دومی که بار آن برابر  $Q'' = 4\pi\epsilon_0 aV$  باشد در مرکز کره قرار می‌دهیم تا پتانسیل سطح کره تا حد  $V$  افزایش یابد.

به طوری که در مثالهای مزبور مشاهده کردیم تصاویر بارهای مثبت، بارهای منفی بوده و در خارج ناحیه‌ای که محاسبه میدان در آن مورد نظر است قرار می‌گیرند. روش تصویر را می‌توان برای انواع دیگر توزیع بار، از قبیل توزیعهای خطی، سطحی و حجمی نیز به کار برد. به عنوان مثال تصویر یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع  $P_L$  در یک صفحه هادی، خط بار دیگری است با چگالی  $-P_L$  به طوری که خط بار و تصویرش موازی با یکدیگر، به فاصله مساوی از صفحه هادی و در طرفین آن باشند. روش تصویر را همچنین می‌توان در حل مسائلی مانند بار نقطه‌ای در مقابل یک نیم فضای اشغال شده از ماده عایق و بار نقطه‌ای در مقابل کره‌ای از جنس عایق به کار بست. بررسی مثالها و موارد دیگر مبتنی بر روش تصویر به مسائل خودآزمایی و مسائل پایان فصل موکول می‌گردد.

#### ۴-۸ خلاصه فصل

- معادلات پواسون و لاپلاس را استخراج نموده و قضیه یگانگی پاسخ را اثبات کردیم.
- حل معادله لاپلاس را در حالات یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی و در دستگانه‌های مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی مورد مطالعه قرار دادیم. در حالات دو بعدی و سه بعدی، حل معادله بر اساس روش تفکیک متغیرها استوار می‌باشد.
- حل معادله لاپلاس را به روش عددی به اختصار بررسی نمودیم.
- حل معادله پواسون را به اختصار و در حالت یک بعدی مطالعه نمودیم.
- روش تصویر را برای مطالعه میدانهای الکتریکی ناشی از بارهای الکتریکی در حضور اجسام هادی ارائه نمودیم.

#### ۴-۹ مسائل خودآزمایی

تأکید این مسائل بر محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی به روشهای مبتنی بر معادلات لاپلاس و پواسون و روش تصویر می‌باشد. ابتدا به ذکر نکاتی چند در مورد استفاده از روش معادله لاپلاس می‌پردازیم. در ابتدا دو نکته را باید مورد توجه قرار داد: یکی آنکه چه دستگاه مختصاتی مناسب حل مسئله مورد نظر است، دیگر آنکه آیا مسئله یک بعدی، دو بعدی، یا سه بعدی می‌باشد. پس از ارزیابی درست این دو نکته، قدمهای بعدی برای حل مسئله تا حدود زیادی به گونه‌ای سیستماتیک برداشته می‌شوند. تشخیص دستگاه مختصات مناسب با توجه به شرایط مرزی داده شده به سادگی انجام می‌گیرد. هرگاه این شرایط به صورت مقادیر یا توابع معینی برای پتانسیل روی سطوحی به معادلات  $x = x_0$ ،  $y = y_0$  یا  $z = z_0$  (و) یا روی بخشی از این سطوح بیان شوند  $(x, y, z)$  مقادیر ثابتی هستند، بدون تردید دستگاه مختصات مستطیلی را باید برای حل معادله لاپلاس برگزید. در صورتی که

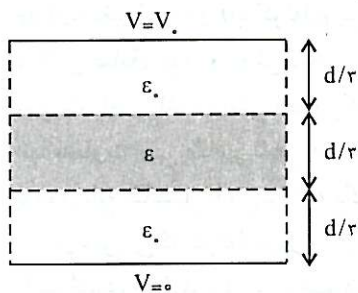
شرایط مرزی روی سطوحی به معادلات  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\tau_c = \tau_c$  یا  $z = z_0$  یا روی بخشی از آنها بیان شده باشند، دستگاه مختصات استوانه‌ای مناسب‌ترین انتخاب خواهد بود  $(\varphi_0, \tau_c, z_0)$  و مقادیر ثابتی هستند). سرانجام، اگر شرایط مرزی روی سطوحی به معادلات  $\theta = \theta_0$ ,  $\tau_s = \tau_s$  یا  $\varphi = \varphi_0$  یا روی بخشی از این سطوح داده شده باشند، حل مسئله را باید در دستگاه مختصات کروی دنبال کرد.

برای تشخیص اینکه مسئله مورد نظر یک، دو، یا سه بُعدی است، باید دید آیا شرایط مرزی و خواص الکتریکی محیطی که در آن پتانسیل باید محاسبه شود، یعنی قابلیت گذردهی  $(\epsilon)$  و رسانایی  $(\sigma)$  در امتداد یک، دو، یا سه مختصه تغییر می‌کنند. اگر کلیه تغییرات در امتداد یک مختصه باشد مسئله یک بُعدی خواهد بود. به عنوان مثال اگر شرایط مرزی و قابلیت گذردهی فقط در امتداد  $x$ ,  $\tau_c$  یا  $\theta$  تغییر کنند، آنگاه پتانسیل فقط تابعی از یک مختصه (یک بُعدی) بوده و پاسخ آن به ترتیب در دستگاه مختصات مستطیلی، استوانه‌ای، یا کروی بیان می‌شود. در اینجا یادآوری این نکته ضروری است که چنانچه تغییرات  $\epsilon$  و  $\sigma$  به گونه‌ای پیوسته در همان امتدادی باشند که شرایط مرزی تغییر می‌کنند، معادله لاپلاس صادق نبوده و روش دیگری را باید برای حل مسئله برگزید. ولی در صورتی که تغییرات  $\epsilon$  و  $\sigma$  به صورت پله‌ای باشند، یعنی فضایی که پتانسیل در آن مطلوب است را چندین جسم که ضرایب  $\epsilon$  و  $\sigma$  برای آنها متفاوت ولی مقادیر ثابتی هستند اشغال می‌کنند، آنگاه معادله لاپلاس در هر جسم به تنهایی صادق بوده و تابع پتانسیل را می‌توان به یک شکل ولی با ضرایب مجهول جداگانه در هر جسم در نظر گرفت.

در صورتی که شرایط مرزی برای پتانسیل در امتداد دو یا هر سه مختصه بیان شوند، مسئله مسلماً دو یا سه بُعدی خواهد بود. مورد مهم دیگر وقتی است که شرایط مرزی برای پتانسیل در امتداد یک مختصه و خواص الکتریکی جسم در امتداد یک یا هر دو مختصه دیگر تغییر می‌کند. به عنوان مثال می‌توان کابل هم‌محوری را در نظر گرفت که هادیهای درونی و بیرونی آن دارای پتانسیلهای  $V_1$  و صفر بوده و فضای بین هادیها را عایقی ناهمگن با قابلیت گذردهی  $\epsilon = \epsilon(z)$  اشغال می‌نماید. در این مثال شرایط مرزی برای پتانسیل در امتداد شعاعی  $(\tau_c)$  تغییر می‌کنند در حالی که قابلیت گذردهی عایق در امتداد طولی  $(z)$  تغییر می‌کند. در نگاه اول، تابع پتانسیل در درون کابل دو بُعدی به نظر می‌رسد، زیرا در امتداد دو مختصه تغییرات به چشم می‌خورند. اما، پس از حل این مسئله (مثلاً با استفاده از قانون گوس برحسب  $\mathbb{E}$ ) سرانجام مشاهده خواهد شد که پتانسیل فقط تابعی از مختصه شعاعی  $\tau_c$  است. به عبارت دیگر، مسئله را می‌توان در حقیقت یک بُعدی تلقی کرد. به طور خلاصه، اگر شرایط مرزی برحسب یک مختصه  $(u_1)$  به صورت  $V = V_0$  روی سطوح  $u_1 = u_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ) بیان شوند و خواص الکتریکی محیطی که در آن پتانسیل مطلوب است تابعی از دو مختصه دیگر  $(u_2$  و  $u_3)$  باشند، تابع پتانسیل را می‌توان از حل معادله لاپلاس یک بُعدی به دست آورد  $(V_0, u_{0i}$  و مقادیر ثابتی هستند). به همین ترتیب اگر شرایط مرزی برای پتانسیل برحسب دو مختصه  $u_1$  و  $u_2$  بیان شوند و خواص الکتریکی محیط تابعی از مختصه سوم  $u_3$  باشد، تابع پتانسیل را می‌توان از حل معادله لاپلاس دو بُعدی به دست آورد.

مسائلی که با استفاده از روش مبتنی بر معادله پواسون بررسی می‌کنیم معمولاً یک بُعدی بوده و با دو بار انتگرال‌گیری پیاپی به سادگی حل می‌شوند، در مورد روش تصویر فقط به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که ویژگیهای تصویر یک بار نقطه‌ای در یک صفحه بینهایت هادی یا در یک کره هادی زمین شده

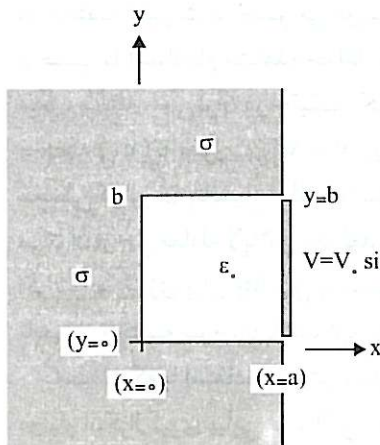
را می‌توان به توزیعهای پیوسته خطی، سطحی و حجمی بار الکتریکی تعمیم داد، چرا که این گونه توزیعها را می‌توان مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای تلقی کرد. به عنوان مثال تصویر یک توزیع بار با چگالی یکنواخت  $\rho$  در درون کره‌ای به شعاع  $a$  و واقع در بالای یک صفحه هادی بینهایت که به فاصله  $d$  از مرکز کره بار است، عبارت از کره باری با چگالی  $-\rho$ ، شعاع  $a$  و به فاصله مرکزی  $d$  در پایین صفحه هادی می‌باشد. همچنین، تصویر یک بار الکتریکی که با چگالی یکنواخت  $\rho_S$  روی سطح کره‌ای به شعاع  $a$  توزیع شده باشد در یک سطح هادی کروی به شعاع  $b$  و هم‌مرکز با کره بار عبارت از باری خواهد بود که با چگالی یکنواخت  $\rho'_S = -\frac{a}{b}\rho_S$  روی سطح کره‌ای به شعاع  $\frac{b}{a}$  و هم‌مرکز با کره هادی توزیع شود. در اینجا فرض می‌شود که کره هادی زمین شده و دارای پتانسیل صفر است و رابطه بالا برای چگالی تصویر با توجه به اینکه  $dS' = -\frac{b}{a}\rho_S \cdot dS$  و  $\rho'_S = \frac{a^2}{b^2}\rho_S$  می‌باشد نتیجه شده است.



شکل ۴-۱۷

۱. یک سوم از فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی، با ماده عایقی که قابلیت گذردهی آن برابر  $\epsilon$  می‌باشد اشغال گردیده است. شکل ۴-۱۷ صفحات هادی و عایق بین آنها را نشان می‌دهد. پتانسیل صفحات هادی تحتانی و فوقانی به ترتیب برابر صفر و  $V_0$  می‌باشد. مطلوب است محاسبه:
- (الف) پتانسیل در کلیه نقاط بین دو صفحه هادی،  
 (ب) چگالی توزیع بار سطحی روی صفحه هادی تحتانی،  
 (ج) چگالی توزیع بار سطحی مقید روی سطح فوقانی عایق،  
 (د) ظرفیت به ازای واحد سطح صفحات هادی.

۲. در مسئله ۱، جسم عایق با یک جسم هادی کامل جایگزین می‌گردد. مطلوب است محاسبه:
- (الف) پتانسیل جسم هادی، (ب) ظرفیت به ازای واحد سطح صفحات هادی.



شکل ۴-۱۸

۳. شکافی مستطیلی شکل به پهنای  $b$  و عمق  $a$ ، مطابق شکل ۴-۱۸، در یک قطعه فلزی با پتانسیل صفر تعبیه می‌گردد. پتانسیلی که توزیع آن در محدوده  $0 < y < b$ ، به صورت  $V = V_0 \sin(\pi y/b)$  باشد، در دهانه شکاف، در  $x=a$  ایجاد می‌شود. با فرض آنکه قطعه فلزی هادی کامل بوده و شکاف مزبور در امتداد  $z$  تا بینهایت ادامه داشته باشد، مطلوب است محاسبه:
- (الف) تابع توزیع پتانسیل و میدان الکتریکی در درون شکاف،  
 (ب) چگالی توزیع بارهای سطحی موجود در این سیستم.



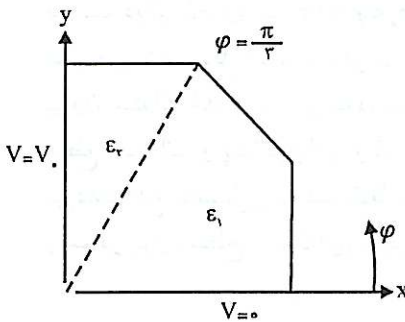
۴. مسئله ۳ را برای حالتی که پتانسیل در دهانه شکاف به صورت  $V = V_0 \sin^2(\pi y/b)$  باشد تکرار نمایید.

۵. فضای بین دو سطح استوانه‌ای هم‌محور به شعاعهای  $a$  و  $b$  ( $b > a$ )، به طول بینهایت و از جنس هادی کامل را دو ماده عایق با قابلیت‌های گذردهی  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  به شرح زیر پر می‌کنند: ناحیه  $a < r < c$  شامل عایق  $\epsilon_1$  و ناحیه  $c < r < b$  شامل عایق  $\epsilon_2$  است. پتانسیل استوانه‌های درونی و بیرونی به ترتیب برابر  $V_0$  و صفر فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه:

(الف) تابع پتانسیل در تمام نقاط بین سطوح استوانه‌ای،

(ب) ظرفیت سیستم به ازای واحد طول.

۶. فضای بین دو سطح استوانه‌ای مسئله ۵ با همان عایقها ولی به گونه دیگری به شرح زیر پر می‌شود: ناحیه  $0 < \varphi < \pi$  شامل عایق  $\epsilon_1$  و ناحیه  $\pi < \varphi < 2\pi$  شامل عایق  $\epsilon_2$  می‌باشد. استوانه‌های هادی همان پتانسیلهای مسئله ۵ را دارا هستند. پتانسیل در تمام نقاط بین سطوح استوانه‌ای و ظرفیت سیستم به ازای واحد طول را محاسبه نمایید.



شکل ۴-۱۹

۷. دو نیم‌صفحه هادی  $\varphi = 0$  و  $\varphi = \pi/2$ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به ترتیب دارای پتانسیلهای صفر و  $V_0$  می‌باشند. ناحیه  $0 < \varphi < \pi/3$  را عایق کاملی با قابلیت گذردهی  $\epsilon_1$  و ناحیه  $\pi/3 < \varphi < \pi/2$  را عایق دیگری با قابلیت گذردهی  $\epsilon_2$  فراگرفته است. شکل ۴-۱۹ صفحات هادی و نواحی عایق را نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبه:

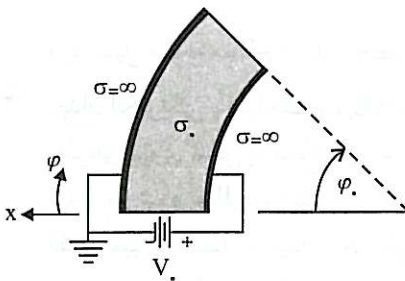
(الف) تابع تغییرات پتانسیل در فضای بین دو نیم‌صفحه هادی ( $0 < \varphi < \pi/2$ ).

(ب) شدت میدان الکتریکی در فضای مذکور در بند (الف)،

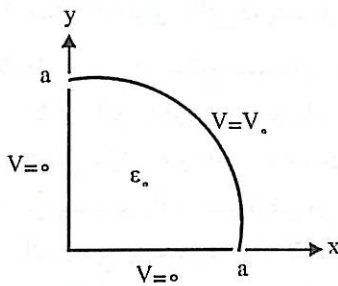
(ج) چگالی سطحی بارهای مقید ناشی از قطبی شدن عایقها در مرز  $\varphi = \pi/3$ ،

(د) تابع تغییرات پتانسیل در ناحیه  $\pi/2 < \varphi < 2\pi$ .

۸. صفحه‌ای نازک از جنس هادی با رسانایی  $\sigma$  مطابق شکل ۴-۲۰ بریده شده است. در دو طرف خمیده صفحه لایه‌هایی از جنس هادی کامل تعبیه شده و ولتاژ  $V_0$  به آنها اعمال می‌گردد. ضخامت صفحه را  $\Delta$  و شعاع لایه‌های هادی کامل درونی و بیرونی را به ترتیب برابر  $R_1$  و  $R_2$  فرض کنید. تغییرات پتانسیل در این صفحه و مقاومت آن را تعیین نمایید.

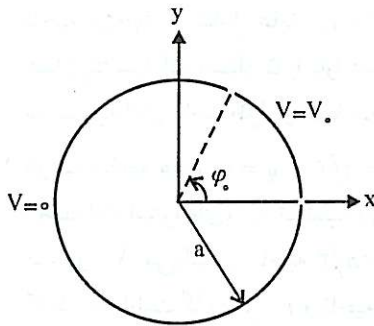


شکل ۴-۲۰



شکل ۲۱-۴

۹) یک محفظه استوانه‌ای شکل به سطح هادی  $\varphi = 0$  و  $\varphi = \pi/2$  با پتانسیل صفر و سطح  $r = a$  با پتانسیل  $V_0$  محدود می‌باشد. محفظه در امتداد محور  $z$  از دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و فضای درون آن خلأ است. شکل ۲۱-۴ سطح مقطع محفظه را نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبه:  
الف) تابع تغییرات پتانسیل در درون محفظه،  
ب) میدان الکتریکی در درون محفظه و چگالی بار سطحی روی سطح هادی  $r = a$ .



شکل ۲۲-۴

۱۰) یک سطح استوانه‌ای بینهایت طویل با سطح مقطع دایره‌ای شکل به دو قسمت تقسیم می‌شود. یک قسمت محدود به  $0 < \varphi < \varphi_0$  دارای پتانسیل  $V_0$  و قسمت دیگر محدود به  $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$  دارای پتانسیل صفر می‌باشد. شعاع استوانه برابر  $a$  و فضای درون و بیرون استوانه خلأ فرض می‌شود. شکل ۲۲-۴ سطح مقطع استوانه و پتانسیلهای دو قسمت آن را نشان می‌دهد. تابع پتانسیل را در کلیه نقاط فضا (هم در درون و هم در بیرون سطح استوانه‌ای) تعیین نمایید.

۱۱) یک استوانه عایق بینهایت طویل و به شعاع  $a$ ، مطابق شکل ۷۰-۴ الف، به طور عمودی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت  $E = E_0 \hat{a}_x$  قرار داده می‌شود. قابلیت گذردهی نسبی استوانه عایق برابر  $\epsilon_r$  فرض می‌شود. پتانسیل و میدان الکتریکی را در درون و بیرون استوانه عایق محاسبه نمایید.

۱۲) در یک محفظه نیم‌کروی پتانسیل سطح کروی برابر

$$V = V_0 \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad r = a$$

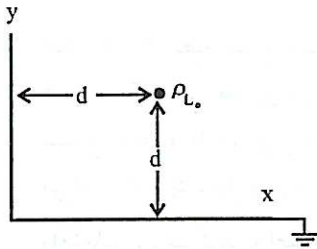
و پتانسیل صفحه مسطح (قاعده محفظه) برابر صفر می‌باشد. پتانسیل نقاط درون محفظه را تعیین نمایید.

۱۳) میدان الکتریکی یکنواخت  $E = E_0 \hat{a}_z$  در محیط عایقی با قابلیت گذردهی  $\epsilon$  مفروض است. حفره‌ای کروی شکل به شعاع  $a$  در عایق ایجاد می‌گردد. قابلیت گذردهی فضای درون حفره برابر  $\epsilon_0$  فرض می‌شود. مطلوب است:

الف) تعیین پتانسیل و میدان الکتریکی در درون و بیرون حفره،

ب) رسم خطوط میدان الکتریکی.

۱۴) کره‌ای از جنس هادی کامل و به شعاع  $a$  در معرض میدان الکتریکی یکنواخت  $E = E_0 \hat{a}_z$ ، مطابق شکل ۹-۴ الف، قرار داده می‌شود. میدان الکتریکی را در فضای اطراف کره هادی تعیین نمایید.



شکل ۴-۲۳

۱۵) یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع یکنواخت  $\rho_L$  به فاصله  $d$  از یک صفحه هادی بینهایت زمین شده قرار دارد. الف) نشان دهید که تصویر خط بار در صفحه هادی، خط بار دیگری با چگالی توزیع  $-\rho_L$ ، موازی با خط بار اصلی و به فاصله  $d$  در طرف دیگر صفحه هادی است.

ب) سیستمی متشکل از دو نیم صفحه هادی زمین شده و

عمود بر هم و یک خط بار بینهایت با چگالی توزیع یکنواخت  $\rho_L$  و موازی با نیم صفحه‌ها، مطابق شکل ۴-۲۳، در نظر می‌گیریم. خط بار از نقطه  $(0, d, d)$  می‌گذرد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به مختصات  $(a, a, z)$  محاسبه نمایید ( $a > 0$  و  $d > 0$ ).

۱۶) بار نقطه‌ای  $Q$  به فاصله  $d$  از یک صفحه هادی بینهایت قرار دارد. چه مقدار انرژی باید صرف شود برای اینکه بار  $Q$  به نقطه‌ای به فاصله  $2d$  از صفحه هادی انتقال یابد؟ مسیر حرکت بار نقطه‌ای را در امتداد عمود بر صفحه فرض کنید.

۱۷) بار نقطه‌ای  $q$  به فاصله  $d$  از مرکز کره‌ای هادی به شعاع  $a$  قرار دارد ( $d > a$ ). کره هادی، باری به مقدار کل  $Q$  روی سطح خود دارد. مطلوب است:

الف) مکان و مقدار دو بار نقطه‌ای به طوری که بتوان آنها را با کره جایگزین کرد بدون آنکه تغییری در پتانسیل ناشی از این سیستم در فضای اطراف کره پدید آید؛  
ب) محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی در فضای اطراف کره،  
ج) تعیین پتانسیل کره.

۱۸) سیستمی متشکل از یک کره هادی به شعاع  $a$  و یک حلقه بار الکتریکی که هم‌مرکز با کره هادی است در نظر می‌گیریم. حلقه بار دارای چگالی توزیع یکنواخت  $\rho_L$  و شعاع  $b$  ( $a < b$ ) می‌باشد. برای سادگی، حلقه بار در صفحه  $xy$  و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات در نظر گرفته می‌شود. فضای اطراف حلقه بار و کره هادی را خلأ فرا گرفته است. ابتدا فرض می‌شود که کره هادی زمین شده باشد. مطلوب است:

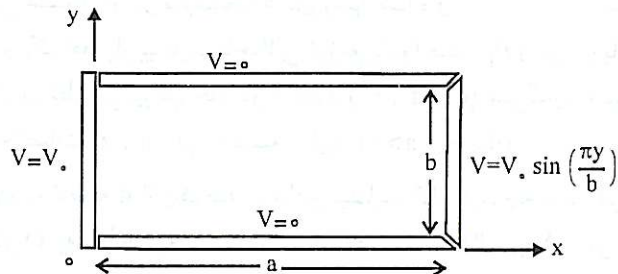
الف) تعیین تصویر حلقه بار در کره هادی (چگالی توزیع و موقعیت تصویر)،

ب) محاسبه پتانسیل در نقطه  $A(0, 0, z)$  روی محور  $z$ ،

ج) محاسبه پتانسیل کره هادی در صورتی که کره از ابتدا زمین نشده باشد.

۱۹) بار الکتریکی با چگالی یکنواخت  $\rho_S$  روی یک سطح کره‌ای به شعاع  $b$  توزیع شده است. هم‌مرکز با این توزیع بار یک کره هادی زمین شده به شعاع  $a$  قرار داده می‌شود. چه مقدار انرژی لازم است تا توزیع بار مزبور انبساط یابد و روی سطح کره‌ای به شعاع  $c$  قرار بگیرد؟ فضای اطراف کره هادی را خلأ تشکیل می‌دهد ( $a < b < c$ ).

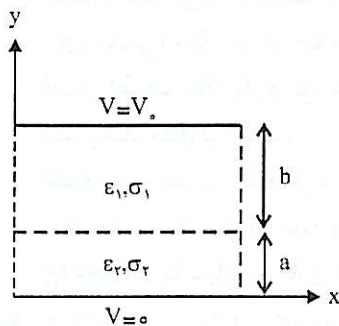
۲۰. شکل ۴-۲۴ سطح مقطع یک فضای مستطیلی شکل محدود به سه سطح هادی در  $x=0$ ،  $y=0$  و  $y=b$  و یک سطح مجازی در  $x=a$  را نشان می‌دهد. پتانسیل سطح هادی در  $x=0$  برابر  $V_0$ ، پتانسیل سطوح  $y=0$  و  $y=b$  برابر صفر و پتانسیل در امتداد سطح  $x=a$  به صورت  $V_0 \sin(\pi y/b)$  فرض می‌شود. تابع پتانسیل را در درون فضای مستطیلی شکل تعیین نمایید. راهنمایی: ثابت کنید که اصل جمع آثار را می‌توان برای شرایط مرزی در حل معادله لاپلاس به کار برد.



شکل ۴-۲۴

۲۱. یک جعبه مکعب مستطیل، که کلیه وجوه آن از صفحات هادی تشکیل شده باشند، را در نظر بگیرید. پتانسیل سطح  $z=c$  برابر  $V_0$  و پتانسیل هر یک از وجوه دیگر برابر صفر است. تابع پتانسیل را در نقاط درون جعبه تعیین نمایید.

۲۲. یک بار الکتریکی با چگالی  $\rho = k/(r^{5/2})$  در خلأ توزیع شده است.  $k$  یک ضریب ثابت و  $r$  مختصه شعاعی در دستگاه مختصات کروی است. تابع پتانسیل ناشی از این توزیع بار را با استفاده از معادله پواسون تعیین نمایید. در تعیین پتانسیل فرض کنید  $V \rightarrow 0$  وقتی که  $r \rightarrow \infty$  و  $r^2 E_r \rightarrow 0$  وقتی که  $r \rightarrow 0$ .



شکل ۴-۲۵

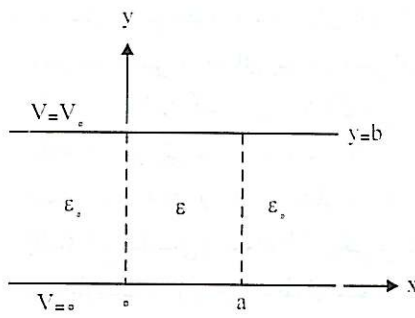
۲۳. فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی را دو ماده، یکی با قابلیت گذردهی  $\epsilon_1$  و رسانایی  $\sigma_1$  و دیگری با قابلیت گذردهی  $\epsilon_2$  و رسانایی  $\sigma_2$ ، مطابق شکل ۴-۲۵، پر کرده‌اند. پتانسیل صفحه هادی فوقانی برابر  $V_0$  و پتانسیل صفحه هادی تحتانی برابر صفر می‌باشد. مطلوب است محاسبه: الف) تابع تغییرات پتانسیل در کلیه نقاط بین دو صفحه هادی، ب) مقاومت سیستم به ازای واحد سطح صفحات هادی، ج) ظرفیت سیستم به ازای واحد سطح صفحات هادی.

۲۴. بار نقطه‌ای  $Q$  در درون یک سطح کروی هادی و به فاصله  $d$  از مرکز آن قرار دارد. شعاع کره برابر  $a$  و پتانسیل آن برابر صفر فرض می‌شود. مطلوب است: الف) تعیین تصویر بار نقطه‌ای در کره هادی (مقدار بار و موقعیت تصویر)، ب) محاسبه تغییرات پتانسیل در درون کره.



۲۵. دو کره هادی یکسان به شعاع  $a$  مفروضند که مراکز آنها به فاصله  $d$  از یکدیگر واقع است. پتانسیل یکی از کره‌ها  $V_0$  و پتانسیل دیگری برابر صفر فرض می‌شود. الف) دو توزیع بار نقطه‌ای تصویر بیابید که کره‌های هادی را جایگزین نمایند. (یعنی پتانسیل ناشی از این دو بار تصویر فقط در فضای اطراف کره‌ها مساوی پتانسیل ناشی از خود کره‌ها با اختلاف پتانسیل  $V_0$  باشد.) ب) ظرفیت بین دو کره هادی را به دست آورید.

## ۴-۱۰ مسائل



شکل ۴-۲۶

۱. بخشی از فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی را ماده عایقی با قابلیت گذردهی  $\epsilon$  مطابق شکل ۴-۲۶، فراگرفته است. پتانسیل صفحات هادی واقع در  $y=0$  و  $y=b$  به ترتیب برابر با صفر و  $V_0$  می‌باشد. مطلوب است محاسبه:

الف) پتانسیل در همه نقاط بین دو صفحه هادی،  
ب) چگالی سطحی بار الکتریکی آزاد روی صفحه هادی واقع در  $y=b$ ،

ج) چگالی سطحی بار الکتریکی مقید روی سطح عایق واقع در  $y=b$ ،

د) نشان دهید که چگالی توزیع مجموع بارهای الکتریکی آزاد و مقید در کلیه نقاط سطح  $y=b$  همواره مقدار ثابتی دارد.

۲. فضای بین دو صفحه هادی بینهایت و موازی واقع در  $y=0$  و  $y=b$  را ماده عایقی غیرهمگن با قابلیت گذردهی  $\epsilon = f(x, z)$  اشغال نموده است. پتانسیل صفحه هادی واقع در  $y=b$  برابر  $V_0$  و پتانسیل صفحه هادی دیگر برابر صفر می‌باشد.

الف) نشان دهید که اگر تابع پتانسیل در عایق تغییراتی نسبت به  $x$  و  $z$  نداشته باشد، معادله لاپلاس همواره در آن صادق است. یادآوری می‌شود که به طور کلی در یک عایق غیرهمگن که قابلیت گذردهی آن تابعی از  $x, y$  و  $z$  باشد، معادله لاپلاس ( $\nabla^2 V = 0$ ) صادق نیست.

ب) تابع پتانسیل و میدان الکتریکی  $E$  را در ناحیه  $0 < y < b$  به دست آورده و ملاحظه کنید که پاسخها مستقل از  $f(x, z)$  می‌باشند.

راهنمایی: ناحیه عایق را به عناصری به ابعاد  $\Delta x \times \Delta z \times b$  تقسیم کنید و قابلیت گذردهی هر عنصر حجم را مقدار ثابتی فرض کنید. آنگاه پتانسیل را در یک عنصر حجم دلخواه به دست آورید و ملاحظه کنید که پاسخ مستقل از مکان عنصر حجم و قابلیت گذردهی عایق درون آن است.

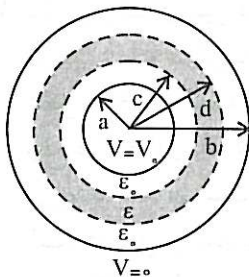
ج) چگالیهای توزیع سطحی بارهای آزاد و مقید را روی یکی از صفحات مرزی به دست آورده و نشان دهید که مجموع آنها مستقل از  $f(x, z)$  می‌باشد.



د) فرض کنید که قابلیت گذردهی عایق به کار رفته به صورت  $(1+x^2z^2)$ ،  $\epsilon = \epsilon_0$ ، در فضایی محدود به  $-1 < x < 1$ ،  $0 < y < b$ ،  $-1 < z < 1$  باشد (بقیه فضای بین صفحات هادی، یعنی  $|x| > 1$  و  $|z| > 1$  خلأ می باشد). انرژی ذخیره شده در عایق را محاسبه کنید.

۳) ناحیه‌ای از فضای آزاد محدود به  $0 < y < b$  را در نظر بگیرید. یک صفحه هادی با پتانسیل صفر در  $y=0$  قرار داده می شود و پتانسیل  $V = V_0 \cos(x/a)$ ، که در آن  $a$  و  $V_0$  مقادیر ثابتی هستند، در  $y=b$  ایجاد می گردد. تابع پتانسیل و میدان الکتریکی  $E$  را در ناحیه  $0 < y < b$  به دست آورید.

۴) مسئله ۳ را برای وقتی که پتانسیل در  $y=b$  برابر با  $V = V_0 e^{-|x/a|}$  باشد تکرار نمایید از رفتار میدان الکتریکی در  $x=0$  چه نتیجه گیری می کنید؟



شکل ۲۷-۴

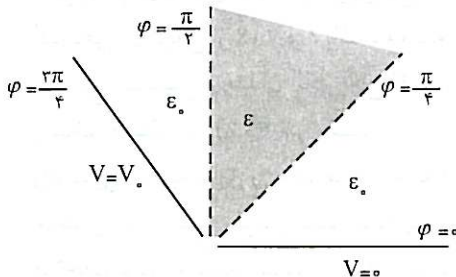
۵) دو استوانه هم محور به شعاعهای  $a$  و  $b$  از جنس هادی کامل را در نظر بگیرید. بخشی از فضای بین دو استوانه، محدود به ناحیه  $c < r < d$  را عایقی با قابلیت گذردهی  $\epsilon$  اشغال می نماید. پتانسیل استوانه درونی ( $r=a$ ) و بیرونی به ترتیب برابر  $V_0$  و صفر فرض می شود. شکل ۲۷-۴ استوانه‌های هادی و عایق را نشان می دهد. مطلوب است محاسبه: الف) تابع پتانسیل و میدان الکتریکی در کلیه نقاط بین دو استوانه هادی، ب) ظرفیت به ازای واحد طول استوانه‌ها.

۶) در مسئله ۵، جسم عایق با یک جسم هادی کامل جایگزین می شود. مطلوب است محاسبه: الف) پتانسیل جسم هادی، ب) ظرفیت به ازای واحد طول استوانه‌ها.

۷) فضای بین دو سطح استوانه‌ای هم محور از جنس هادی و شعاعهای  $a$  و  $b$  ( $a < b$ ) را یک ماده عایق غیرهمگن با قابلیت گذردهی  $\epsilon = f(\varphi, z)$  اشغال می کند. پتانسیل استوانه‌های درونی و بیرونی به ترتیب برابر با  $V_0$  و صفر است.

الف) با فرض اینکه تابع پتانسیل فقط تابعی از مختصه  $r$  باشد، نشان دهید که معادله لاپلاس در ناحیه عایق صادق است. سپس پتانسیل و میدان الکتریکی  $E$  را به دست آورید.

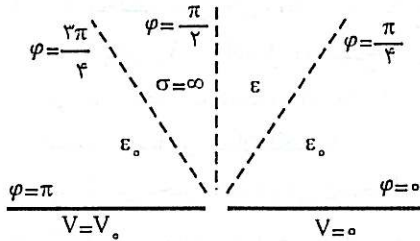
ب) ظرفیت خازن به ازای واحد طول استوانه‌ها را برای وقتی که  $\epsilon = \epsilon_0 [1 + \sin^2 \varphi \sin^2(\pi z)]$  باشد، محاسبه کنید.



شکل ۲۸-۴

۸) دو نیم صفحه هادی واقع در  $\varphi = 0$  و  $\varphi = 3\pi/4$ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به ترتیب دارای پتانسیل صفر و  $V_0$  می باشد. ناحیه  $\pi/4 < \varphi < \pi/2$  را عایقی با قابلیت گذردهی  $\epsilon$  فراگرفته است. شکل ۲۸-۴ صفحات هادی و عایق را نشان می دهد. مطلوب است محاسبه:

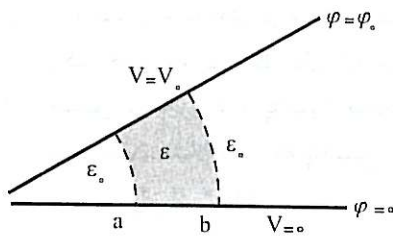
الف) تابع تغییرات پتانسیل در ناحیه  $0 < \varphi < 3\pi/4$ ، ب) میدان الکتریکی  $E$  در ناحیه عایق.



شکل ۴-۲۹

۹. دو نیم صفحه هادی واقع در  $\varphi = 0$  و  $\varphi = \pi$ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به ترتیب دارای پتانسیل صفر و  $V_0$  می‌باشند. ناحیه  $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$  را عایقی با قابلیت گذردهی  $\epsilon$  و ناحیه  $\pi/2 < \varphi < 3\pi/4$  را جسمی از جنس هادی کامل، مطابق شکل ۴-۲۹، فراگرفته است. مطلوب است محاسبه:

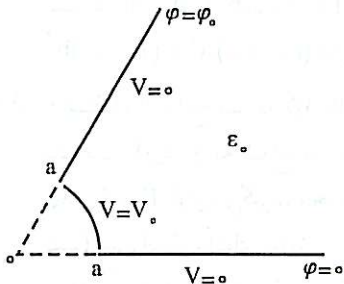
(الف) پتانسیل جسم هادی، (ب) شدت میدان الکتریکی در ناحیه عایق.



شکل ۴-۳۰

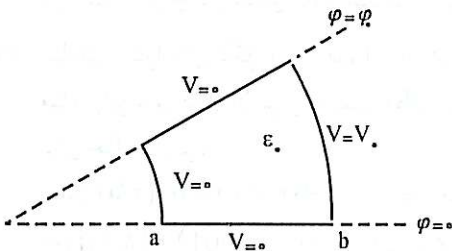
۱۰. دو نیم صفحه هادی واقع در  $\varphi = 0$  و  $\varphi = \varphi_0$  به ترتیب دارای پتانسیل صفر و  $V_0$  می‌باشند. بخشی از فضای بین دو نیم صفحه محدود به  $a < r < b$  را ماده عایقی با قابلیت گذردهی  $\epsilon$ ، مطابق شکل ۴-۳۰، فرا گرفته است. تابع تغییرات پتانسیل و انرژی ذخیره شده به ازای واحد طول ( $0 < z < 1$ ) را در جسم عایق به دست آورید.

۱۱. مسئله ۱۰ را برای وقتی که عایق به کار رفته غیرهمگن و دارای قابلیت گذردهی  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + r/b)$ ،  $a < r < b$  تکرار نمایید.



شکل ۴-۳۱

۱۲. شکل ۴-۳۱، سطح مقطع سیستمی متشکل از سه هادی را نشان می‌دهد. پتانسیل دو سطح هادی واقع در  $r > a$ ،  $\varphi = 0$ ؛  $r > a$ ،  $\varphi = \varphi_0$  برابر صفر بوده و پتانسیل سطح سوم واقع در  $r = a$ ،  $0 < \varphi < \varphi_0$  برابر  $V_0$  است. تابع تغییرات پتانسیل در ناحیه  $r > a$ ،  $0 < \varphi < \varphi_0$  به دست آورید.

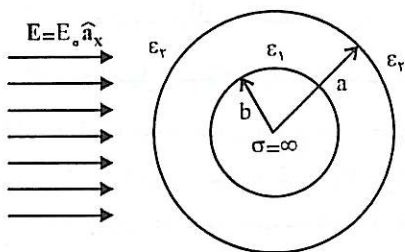


شکل ۴-۳۲

۱۳. شکل ۴-۳۲ سطح مقطع فضایی محدود به سطوح  $\varphi = 0$ ،  $\varphi = \varphi_0$ ،  $r = a$  و  $r = b$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای را نشان می‌دهد. همه سطوح مزبور از جنس هادی کامل فرض می‌شوند. پتانسیل سطح هادی واقع در  $r = b$  برابر  $V_0$  و پتانسیل سه سطح دیگر برابر صفر است. پتانسیل و میدان الکتریکی  $E$  را در فضای درونی هادیها محاسبه کنید.

۱۴. یک محفظه استوانه‌ای محدود به سطوح هادی  $r=a$ ،  $z=0$  و  $z=d$  مفروض است. پتانسیل سطح  $r=a$  برابر  $V_0$  و پتانسیل دو سطح هادی دیگر برابر صفر است. فضای درون محفظه خلأ فرض می‌شود. مطلوب است محاسبه:

الف) پتانسیل و میدان الکتریکی در درون محفظه؛  $0 < z < d$  و  $r < a$   
 ب) انرژی ذخیره شده در درون محفظه.



شکل ۳۳-۴

۱۵. یک استوانه هادی بینهایت طویل به شعاع  $b$ ، با یک لایه عایق به ضخامت  $a-b$  و قابلیت گذردهی  $\epsilon_1$  پوشیده شده است. این استوانه، مطابق شکل ۳۳-۴ به طور عمودی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت  $E = E_0 \hat{a}_x$  قرار دارد. محور استوانه، منطبق بر محور  $z$  و پتانسیل صفحه  $x=0$  برابر صفر است. نشان دهید که پتانسیل در فضای اطراف استوانه برابر است با:

$$V(r, \varphi) = \begin{cases} -\gamma E_0 \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \varphi & b \leq r \leq a \\ -E_0 \left( r - \frac{C}{r} \right) \cos \varphi & r \geq a \end{cases}$$

که در آن  $A = \epsilon_2 a^2 / A_0$ ،  $B = -\epsilon_2 a^2 b^2 / A_0$ ،  $C = a^2 [(\epsilon_1 - \epsilon_2) a^2 + (\epsilon_2 + \epsilon_1) b^2] / A_0$  است.  $A_0 = (\epsilon_1 + \epsilon_2) a^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) b^2$

۱۶. با استفاده از نتایج مسئله ۱۵ پتانسیل و میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا، وقتی که استوانه‌ای بینهایت طویل و به شعاع  $a$  با مشخصات الکتریکی زیر در معرض میدان الکتریکی یکنواخت  $E = E_0 \hat{a}_x$  قرار می‌گیرد، محاسبه کنید. محور استوانه را منطبق بر محور  $z$  فرض کنید.

الف) استوانه از ماده‌ای عایق با قابلیت گذردهی  $\epsilon$  تشکیل شده و فضای اطراف آن خلأ است.  
 ب) استوانه به صورت حفره‌ای، که فضای درون آن خلأ باشد، در یک ناحیه عایق با قابلیت گذردهی  $\epsilon$  فرض می‌شود. میدان اولیه  $E$  در این ناحیه عایق وجود دارد.  
 ج) استوانه از جنس هادی کامل است. در این حالت، مسئله کاملاً مانند مثال ۴-۷ می‌باشد.

۱۷. میله‌ای استوانه‌ای شکل و مستقیم از ماده‌ای هادی با رسانایی غیریکنواخت  $\sigma$  تشکیل شده و شعاع میله برابر  $a$  و طول آن برابر  $l$  است. مطلوب است محاسبه مقاومت میله بین دو سطح انتهایی آن برای حالات زیر:

الف)  $\sigma = \sigma_0 (r/a)$ ، که  $r$  فاصله از محور میله بوده ( $r \leq a$ ) و  $\sigma_0$  مقداری ثابت است.  
 ب)  $\sigma = \sigma_0 [1 + (z/l)]$  ( $r/a \leq \sigma \leq \sigma_0$ ) برای  $0 \leq z \leq l$  و  $r \leq a$ . محور منطبق بر محور میله فرض می‌شود.  
 راهنمایی: نتیجه بند (الف) را برای طول  $dz$  به کار برده و سپس نسبت به  $z$  انتگرال بگیرد.



۱۸. فضای نیم کره  $r \leq a$  و  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  را در دستگاه مختصات کروی در نظر بگیرید. فرض کنید پتانسیل روی سطح  $r=a$  و  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  برابر  $V = V_0 \cos^2 \theta$  و پتانسیل روی صفحه  $\theta = \pi/2$  برابر صفر باشد. پتانسیل را در کلیه نقاط واقع در ناحیه  $0 < \theta < \pi/2$  که شامل درون نیم کره و بخش فوقانی بیرون نیم کره است، محاسبه کنید.

۱۹. یک کره از جنس هادی کامل و به شعاع  $b$  با یک لایه عایق به ضخامت  $a-b$  و قابلیت گذردهی  $\epsilon_1$  پوشیده شده است. توجه کنید که شعاع بیرونی این لایه عایق می باشد. این کره در معرض میدان الکتریکی یکنواخت  $E = E_0 \hat{a}_z$  قرار داده می شود. قابلیت گذردهی فضای اطراف کره که میدان اولیه  $E$  در آن وجود دارد برابر با  $\epsilon_2$  است. نشان دهید که پتانسیل در درون پوشش عایق و فضای اطراف کره هادی برابر است با (مرکز کره را مبنای پتانسیل فرض کنید):

$$V(r, \theta) = \begin{cases} -\epsilon_2 E_0 \left( Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta & b \leq r \leq a \\ -E_0 \left( r - \frac{C}{r^2} \right) \cos \theta & r \geq a \end{cases}$$

که در آن  $A = \epsilon_2 E_0 / A_0$ ،  $B = -\epsilon_2 E_0 a^3 b^3 / A_0$ ،  $C = a^3 [(\epsilon_1 - \epsilon_2) a^3 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) b^3] / A_0$  است.  $A_0 = (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) a^3 + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2) b^3$

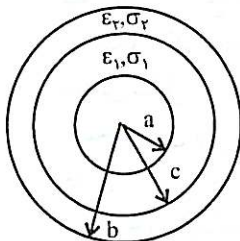
۲۰. با استفاده از نتایج به دست آمده در مسئله ۱۹، پتانسیل و میدان الکتریکی را در کلیه نقاط فضا برای وقتی که کره ای به شعاع  $a$  و با مشخصات الکتریکی زیر در معرض میدان الکتریکی یکنواخت  $E = E_0 \hat{a}_z$  قرار گیرد، محاسبه کنید. مرکز کره را منطبق بر مبدأ مختصات و نیز مبنای پتانسیل فرض کنید.

الف) کره از ماده ای عایق با قابلیت گذردهی  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  تشکیل شده و فضای اطراف آن خلأ ( $\epsilon_2 = \epsilon_0$ ) است. در این حالت مسئله کاملاً مانند مثال ۴-۹ است.

ب) کره به صورت حفره ای، که فضای درون آن خلأ باشد، در یک ناحیه عایق با قابلیت گذردهی  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  تعبیه شده است. میدان اولیه قبل از ایجاد حفره کروی در ناحیه عایق برقرار بوده است. ج) کره از جنس هادی کامل بوده و فضای اطراف آن خلأ است.

۲۱. فضای بین دو سطح کروی هادی و هم مرکز، به شعاعهای  $a$  و  $b$  ( $a < b$ )، را دو ماده یکی با قابلیت گذردهی  $\epsilon_1$  و رسانایی  $\sigma_1$  و دیگری با قابلیت گذردهی  $\epsilon_2$  و رسانایی  $\sigma_2$  مطابق شکل ۴-۳۴، اشغال نموده اند. مطلوب است محاسبه:

الف) مقاومت بین دو سطح کروی،  
ب) ظرفیت بین دو سطح کروی.



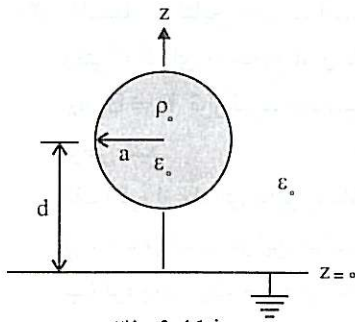
شکل ۴-۳۴

۲۲. بار الکتریکی با چگالی حجمی  $\rho_V = \rho_0 x / (x^2 + 1)^2$  در خلأ توزیع شده است. پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار را در تمام نقاط فضا به دست آورید. در تعیین تابع پتانسیل از شرایط  $V=0$  در  $x=0$  و  $E \rightarrow 0$  وقتی که  $x \rightarrow \infty$ ، استفاده کنید.

۲۳. بار الکتریکی با چگالی حجمی  $\rho_V = \rho_0 / (r^2 + 1)^2$  در خلأ توزیع شده است در اینجا  $r$  مختصه شعاعی در دستگاه مختصات کروی است. پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار را در تمام نقاط فضا به دست آورید. در تعیین تابع پتانسیل فرض کنید:  $r^2 E \rightarrow 0$  وقتی که  $r \rightarrow 0$  و  $V \rightarrow 0$  و  $r \rightarrow \infty$  وقتی که  $r \rightarrow \infty$ .

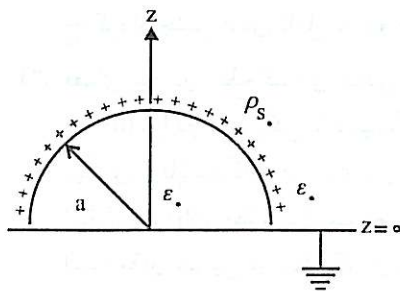
۲۴. یک استوانه عایق بینهایت طویل به شعاع  $a$  و قابلیت گذردهی  $\epsilon$  به طور دائم قطبی شده و دارای پلاریزاسیون ثابت  $P = P_0 \hat{a}_y$  می باشد. محور عایق استوانه‌ای، منطبق بر محور  $Z$  فرض می شود. میدان الکتریکی ناشی از این عایق قطبی شده را در درون و بیرون آن با استفاده از حل معادله لاپلاس محاسبه کنید. اگر اندازه میدان اولیه‌ای که عایق را قطبی کرده است برابر با  $kP_0 / \epsilon_0$  باشد، قابلیت گذردهی نسبی عایق چقدر است؟

۲۵. یک کره عایق به شعاع  $a$  و قابلیت گذردهی  $\epsilon$  به طور دائم قطبی شده و پلاریزاسیون ثابت  $P = P_0 \hat{a}_z$  را دارا می باشد. مرکز عایق کروی منطبق بر مبدأ مختصات فرض می شود. میدان الکتریکی ناشی از این عایق قطبی شده را به دست آورید. اگر اندازه میدان اولیه‌ای که عایق را قطبی کرده است برابر با  $kP_0 / \epsilon_0$  باشد، قابلیت گذردهی نسبی عایق چقدر است؟



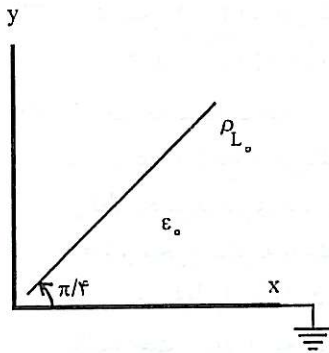
شکل ۳۵-۴

۲۶. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت  $\rho_V = \rho_0$  در فضایی کروی به شعاع  $a$  در خلأ توزیع شده است. این بار کروی در بالای یک صفحه هادی بینهایت زمین شده، مطابق شکل ۳۵-۴، قرار می گیرد. فاصله مرکز کره بار از صفحه هادی برابر  $d$  است ( $d > a$ ). مطلوب است محاسبه: الف) میدان الکتریکی در نقطه‌ای دلخواه روی محور  $Z$ ، ب) پتانسیل در مرکز کره بار.



شکل ۳۶-۴

۲۷. بار الکتریکی با چگالی یکنواخت  $\rho_S$  روی سطح نیم کره‌ای به شعاع  $a$  توزیع شده است. این نیم کره بار در مقابل یک صفحه هادی بینهایت زمین شده، مطابق شکل ۳۶-۴، قرار می گیرد. مرکز نیم کره روی صفحه هادی واقع بوده ولی بار الکتریکی با صفحه هادی تماس ندارد. پتانسیل را در یک نقطه دلخواه روی محور نیم کره بار (محور  $Z$ )، محاسبه کنید. فضای اطراف توزیع بار ( $z > 0$ ) خلأ است.



شکل ۴-۳۷

۲۸. دو نیم صفحه هادی زمین شده و عمود بر هم و یک نیم خط بار الکتریکی با چگالی توزیع یکنواخت  $\rho_L$  را، مطابق شکل ۴-۳۷ در نظر بگیرید. نیم خط بار روی صفحه  $xy$  قرار داشته و با محور  $x$  زاویه  $\pi/4$  می سازد ولی با صفحات هادی تماس ندارد. مطلوب است محاسبه:  
الف) میدان الکتریکی در نقطه‌ای به مختصات  $(x, y, 0)$  واقع در  $\frac{1}{4}$  اول فضا ( $x > 0$  و  $y > 0$ )،  
ب) پتانسیل در نقطه مذکور در بند الف).

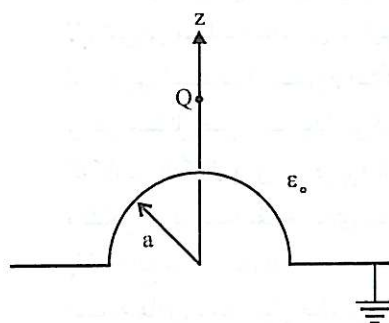
۲۹. در مسئله ۲۸ نیم خط بار الکتریکی را با یک نیم صفحه بار الکتریکی با چگالی توزیع یکنواخت  $\rho_S$  واقع در  $\varphi = \varphi_0$  ( $0 < \varphi_0 < \pi/2$ ) جایگزین نمایید. آنگاه میدان الکتریکی و سپس پتانسیل را در نقطه‌ای به مختصات  $(x, y, z)$  واقع در  $\frac{1}{4}$  اول فضا ( $x > 0$  و  $y > 0$ ) محاسبه کنید.

۳۰. خط باری به طول بینهایت و با چگالی یکنواخت  $\rho_L$  به موازات و به فاصله  $d$  از محور یک استوانه هادی زمین شده، به طول بینهایت و به شعاع  $a$ ، قرار دارد ( $a < d$ ). مطلوب است:  
الف) تعیین چگالی توزیع و مکان یک خط بار تصویر به گونه‌ای که بتوان استوانه هادی را با آن جایگزین نمود.

ب) با استفاده از نتیجه بند الف)، ظرفیت به ازای واحد طول یک خط انتقال متشکل از دو سیم موازی استوانه‌ای که شعاع هر یک برابر  $a$  و فاصله محورهاشان از یکدیگر برابر  $2d$  باشد را به دست آورید.

راهنمایی: دو سیم استوانه‌ای را با دو خط بار بینهایت موازی، با چگالیهای توزیع  $\rho_L$  و  $-\rho_L$  در مکانهای مناسبی جایگزین نمایید.

۳۱. بار نقطه‌ای  $Q$  به فاصله  $d$  از مرکز یک کره هادی زمین شده به شعاع  $a$  ( $a < d$ ) قرار دارد. چه مقدار انرژی باید صرف نمود تا بار  $Q$  به نقطه‌ای به فاصله  $2d$  از مرکز کره هادی انتقال یابد؟

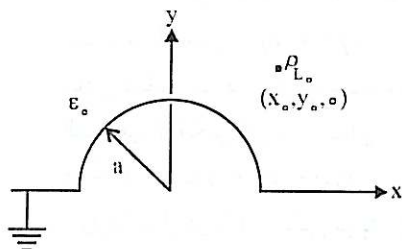


شکل ۴-۳۸

۳۲. یک صفحه بینهایت هادی را که دارای یک برجستگی نیم کره‌ای به شعاع  $a$  می باشد، مطابق شکل ۴-۳۸ در نظر بگیرید. برای سادگی، صفحه هادی را در  $z = 0$  و مرکز نیم کره را منطبق بر مبدأ مختصات فرض کنید. بار نقطه‌ای  $Q$  روی محور نیم کره و به فاصله  $d$  از مرکز آن قرار داده می شود ( $d > a$ ). پتانسیل را در نقطه‌ای به مختصات  $(r, \theta, \varphi)$  واقع در ناحیه  $r \geq a$  و  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  به دست آورید.

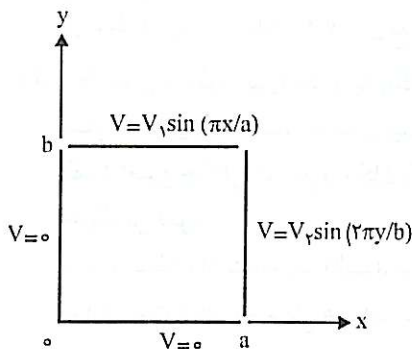


۳۳. در شکل ۴-۳۸ فرض کنید بار  $Q$  در نقطه دلخواه  $M(x_0, y_0, z_0)$  قرار داشته باشد  $(\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} > a, z_0 > 0)$ . پتانسیل را در نقطه‌ای به مختصات  $(x, y, z)$  به دست آورید.



شکل ۴-۳۹

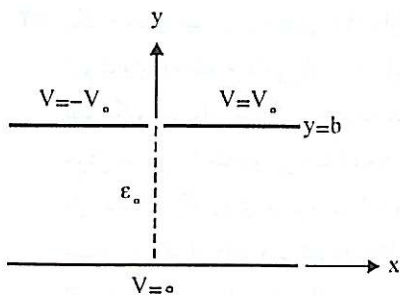
۳۴. یک صفحه بینهایت هادی را که دارای برجستگی نیم استوانه‌ای به شعاع  $a$  می‌باشد، مطابق شکل ۴-۳۹ در نظر بگیرید. برای سادگی صفحه هادی را در  $y=0$  و محور استوانه را منطبق بر محور  $z$  فرض کنید. یک خط بار بینهایت طویل با چگالی توزیع یکنواخت  $\rho_L$  و به موازات محور  $z$  از نقطه  $(x_0, y_0, 0)$  می‌گذرد  $(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} > a, y_0 > 0)$ . پتانسیل را در نقطه‌ای به مختصات  $(x, y, z)$  محاسبه کنید.



شکل ۴-۴۰

۳۵. در این مسئله هدف استفاده از اصل جمع آثار برای شرایط مرزی در حل معادله لاپلاس است. برای این منظور، یک فضای مستطیلی محدود به ناحیه  $0 < x < a, 0 < y < b, -\infty < z < \infty$  را در نظر بگیرید. پتانسیل سطوح  $x=0$  و  $y=0$  برابر صفر، پتانسیل روی سطح  $x=a$  برابر  $V_1 \sin(\pi y/b)$  و پتانسیل روی سطح  $y=b$  برابر  $V_2 \sin(\pi x/a)$  است، که  $V_1$  و  $V_2$  مقادیر ثابتی هستند. شکل ۴-۴۰ ابعاد و پتانسیلهای سطوح این فضای مستطیلی را نشان می‌دهد.

الف) ثابت کنید که اصل جمع آثار را می‌توان برای شرایط مرزی در حل معادله لاپلاس به کار برد.  
ب) پتانسیل را در درون فضای مستطیلی محاسبه کنید.



شکل ۴-۴۱

۳۶. استفاده از خواص سری فوریه را در حل معادله لاپلاس در موارد متعددی در این فصل ملاحظه نموده‌ایم. استفاده از مفهوم انتگرال فوریه نیز در برخی مسائل ضرورت پیدا می‌کند. به عنوان مثالی که کاربرد انتگرال فوریه را در برداشته باشد، سیستمی متشکل از دو نیم‌صفحه هادی با پتانسیلهای  $V_0$  و  $-V_0$  واقع در  $y=b, x > 0$  و  $y=b, x < 0$  و یک صفحه هادی با پتانسیل صفر واقع در  $y=0$  را مطابق شکل ۴-۴۱ در نظر بگیرید. پتانسیل را در ناحیه  $0 < y < b$  به دست آورید.