

معادلات پواسون و لاپلاس و روشهای حل آنها

مسائلی که تاکنون مورد مطالعه قرار داده‌ایم به محاسبه میدانهای الکتریکی ساکن که از توزیعیهای بار معلومی ناشی می‌شوند محدود بوده است. در این مسائل به علت وجود تقارنهای گوناگون یا ویژگیهای دیگری در توزیع بار الکتریکی، تغییرات میدانها اغلب تابعی از یک مختصه بوده و بنابراین محاسبات میدانها به روش تحلیلی اغلب از نوعی سادگی برخوردار بوده است. در پاره‌ای مسائل ممکن است توزیع بار الکتریکی در بدو امر نامعلوم باشد، از این رو به کار بستن روشهای مبتنی بر قانون کولمب، که تاکنون آموخته‌ایم، عملی نخواهد بود. به عنوان مثال وقتی یک جسم هادی در معرض میدان الکتریکی اولیه معلومی قرار بگیرد، توزیع بارهای القایی روی سطح جسم هادی ممکن است قبل از حل کامل مسئله به سادگی قابل محاسبه نباشد. به عبارت دیگر، توزیع بار الکتریکی خود به عنوان مجهولی از مسئله مطرح است. مورد مهم دیگر مربوط به سیستمهایی است که متشکل از تعدادی هادی با پتانسیلهای معلوم می‌باشند و مطالعه آنها نیازمند روشهای جدیدی است. در این فصل دو روش جدید برای مطالعه میدانهای الکتریکی ساکن می‌آموزیم. روش اول مبتنی بر معادلات لاپلاس و پواسون است که از نوع دیفرانسیل پاره‌ای بوده و بر تابع پتانسیل حاکم می‌باشند. در این روش، حل مسئله وابسته به یافتن پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر پتانسیل است که شرایط مرزی معینی را برآورده می‌سازد. بخش عمده مطالب این فصل به حل معادله لاپلاس در دستگاههای مختلف مختصات اختصاص می‌یابد. روش دوم موسوم به روش تصویر است و برای مطالعه سیستمهایی به کار می‌رود که شامل توزیعیهای بار معلومی در مجاورت اجسام هادی باشند. تأکید می‌شود که تابع پتانسیل صرف نظر از اینکه با استفاده از چه روشی به دست آمده باشد (روش تصویر، روش مبتنی بر قانون کولمب یا روشهای دیگر) همواره پاسخ معادله پواسون یا لاپلاس خواهد بود.

۱-۴ معادلات پواسون و لاپلاس

چنانچه در رابطه $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ ، بردار \mathbf{E} را با $-\nabla V$ جایگزین کنیم و به خاطر آوریم دیورژانس گرادیان یک کمیت نرده‌ای را لاپلاسیان آن کمیت نامیده و با $\nabla^2 V$ نمایش می‌دهند، داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon}$$

یا:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

(۱-۴)

معادله اخیر را معادله پواسون نامند. در این معادله که از نوع دیفرانسیل پاره‌ای است، ρ چگالی حجمی بار الکتریکی آزاد در محیطی با قابلیت گذردهی ϵ است. یادآوری می‌شود که قابلیت گذردهی ϵ در استخراج رابطه ۱-۴ ثابت فرض شده است. در صورتی که $\rho = 0$ باشد، رابطه ۱-۴ به شکل ساده‌تر زیر در می‌آید:

$$\nabla^2 V = 0$$

(۲-۴)

معادله اخیر به نام معادله لاپلاس شناخته می‌شود. معادلات لاپلاس و پواسون معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هستند که توأم با شرایط مرزی معینی باید حل شوند. شرایط مرزی، معمولاً به صورت پتانسیلهای معلومی روی سطوح هادی، و صفر بودن پتانسیل در بینهایت برای توزیعهای بار محدود، بیان می‌شوند. قبل از آنکه به بررسی روشهای حل این معادلات بپردازیم، قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم مبنی بر اینکه اگر پاسخی یافت شود که در معادله لاپلاس یا پواسون صدق نماید و شرایط مرزی را نیز برآورده سازد، آن پاسخ تنها پاسخ ممکن مسئله است. با اثبات این قضیه، که آن را قضیه یگانگی پاسخ می‌نامیم، می‌توان اطمینان حاصل کرد که هر گاه پاسخی به هر ترتیب، حتی از روی حدس، برای معادله لاپلاس و یا پواسون بیابیم که شرایط مرزی را نیز برآورده سازد، آن پاسخ تنها پاسخ ممکن مسئله است و اگر پاسخهای دیگری به روشهای دیگر یافت شوند با این پاسخ مساوی خواهند بود.

۲-۴ قضیه یگانگی پاسخ

فرض کنید برای یک مسئله با شرایط مرزی معلوم دو پاسخ V_1 و V_2 یافت شده باشند. هر یک از پاسخها باید در معادله پواسون (یا در معادله لاپلاس اگر $\rho = 0$ باشد) صدق کند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۳-۴ \text{ الف})$$

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۳-۴ \text{ ب})$$

اکنون توجه خود را به تفاوت V_1 و V_2 یعنی $V_d = V_1 - V_2$ معطوف نموده و لاپلاسیان V_d را محاسبه می‌کنیم:

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 (V_1 - V_2) = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} - \left(-\frac{\rho}{\epsilon}\right) = 0 \quad (۴-۴)$$

از طرف دیگر چون V_1 و V_2 هر دو پاسخ یک مسئله فرض می‌شوند باید شرایط مرزی یکسانی را برآورده سازند. به عبارت دیگر باید $[V_1]_S = [V_2]_S$ باشد که S بیانگر یک سطح مرزی است. آنگاه برای V_d می‌توان نوشت:

$$[V_d]_S = [V_1 - V_2]_S = [V_1]_S - [V_2]_S = 0 \quad (5-4)$$

حال با استفاده از اتحاد برداری $\nabla \cdot (VA) = \nabla \cdot A + A \cdot \nabla V$ ، می‌توان با جایگزین نمودن V با V_d و A با ∇V_d چنین نوشت:

$$\nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + |\nabla V_d|^2 \quad (6-4)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه ۴-۶ در حجم V که محدود به سطح S باشد، داریم:

$$\int_V \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) dV = \int_V (V_d \nabla^2 V_d) dV + \int_V |\nabla V_d|^2 dV \quad (7-4)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس انتگرال سمت چپ رابطه ۴-۷ را به یک انتگرال سطح تبدیل می‌کنیم:

$$\int_V \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) dV = \oint_S (V_d \nabla V_d) \cdot dS = 0 \quad (8-4)$$

سمت راست رابطه ۴-۸ به این دلیل صفر است که V_d ، طبق رابطه ۴-۵، روی سطح S برابر صفر می‌باشد. حال با توجه به اینکه $\nabla^2 V_d = 0$ است، انتگرال اول سمت راست رابطه ۴-۷ نیز صفر است و در نتیجه:

$$\int_V |\nabla V_d|^2 dV = 0 \quad (9-4)$$

اما از آنجا که $|\nabla V_d|^2$ همه جا مثبت است، برقراری رابطه ۴-۹ فقط وقتی امکان پذیر است که ∇V_d در همه جای حجم V برابر صفر باشد. بنابراین:

$$\nabla V_d = 0 \Rightarrow V_d = V_1 - V_2 = \text{مقدار ثابت} \quad (10-4)$$

اما چون V_d روی سطح مرزی صفر است، مقدار ثابت در سمت راست رابطه ۴-۱۰ نیز باید برابر صفر باشد و در نتیجه در کلیه نقاط حجم مورد نظر $V_1 = V_2$ است و قضیه یگانگی پاسخ اثبات شده است.

۴-۳ معادله لاپلاس و حل آن در دستگاههای مختلف مختصات

دسته مهمی از مسائل میدانهای الکتریکی ساکن که ممکن است دارای کاربرد عملی نیز باشد مربوط است به یافتن پتانسیل ناشی از سیستمی از بارهای الکتریکی که به سطوح اجسام هادی محدود می‌شوند. در این دسته مسائل، توزیع بار روی سطوح هادیهها، پتانسیل هادیهها و یا ترکیبی از آن دو معلوم بوده و هدف عبارت است از یافتن پتانسیل و آنگاه میدان الکتریکی در ناحیه‌ای بدون بار از فضا که به هادیهها محدود گردد. واضح است که پتانسیل در ناحیه بدون بار در معادله لاپلاس صدق می‌کند و بنابراین حل مسئله موکول به یافتن پاسخ معادله لاپلاس تحت شرایط مرزی معین می‌شود. ابتدا حل معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات مستطیلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات مستطیلی

با استفاده از رابطه ۱-۱۳۱، معادله لاپلاس در دستگاه مختصات مستطیلی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (11-4)$$

یک روش که اغلب برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به کار گرفته می شود به روش تفکیک متغیرها موسوم است. در این روش تابع V به صورت حاصل ضرب سه تابع $X(x)$ ، $Y(y)$ و $Z(z)$ ، که به ترتیب توابعی فقط از x ، y و z هستند، در نظر گرفته می شود.

$$V(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (12-4)$$

با جایگزین نمودن $V=XYZ$ در معادله لاپلاس داریم:

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + ZX \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (13-4)$$

در رابطه ۴-۱۳ به جای مشتقات پاره‌ای از مشتقات کامل استفاده شده است، زیرا X ، Y و Z هر یک تابعی فقط از یک متغیر است. با تقسیم طرفین رابطه ۴-۱۳ به XYZ معادله لاپلاس به شکل زیر نوشته می شود:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (14-4)$$

بررسی رابطه ۴-۱۴ نشان می دهد که جملات دوم و سوم در سمت چپ آن مستقل از x هستند و چون مجموع سه جمله در کلیه نقاط باید همواره برابر صفر باشد، جمله اول نیز باید مستقل از x باشد. بنابراین جمله اول برابر مقدار ثابتی خواهد بود:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_1 = \text{مقدار ثابت} \quad (15-4)$$

با استدلالهای مشابهی می توان نتیجه گرفت که جملات دوم و سوم نیز هر یک باید برابر مقدار ثابتی باشند:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_2 = \text{مقدار ثابت} \quad (16-4)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_3 = \text{مقدار ثابت} \quad (17-4)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0 \quad (18-4)$$

بدین ترتیب مسئله به حل سه معادله دیفرانسیل معمولی درجه دوم با رعایت شرط ۴-۱۸ ساده می شود. معادلات ۴-۱۵ تا ۴-۱۷ هر سه مشابه یکدیگرند. بنابراین کافی است فقط حل یکی از آنها، مثلاً ۴-۱۵، را مورد بررسی قرار دهیم. پاسخ این معادله برای هر یک از حالاتی که k_1 صفر، مثبت یا منفی باشد شکل خاصی به خود می گیرد. در مسائل یک بعدی، یعنی وقتی که پتانسیل تابعی فقط از

یک مختصه، مثلاً x ، بوده و نسبت به مختصات y و z تغییراتی ندارد، همواره $k_1 = 0$ خواهد بود. در این حالت معادله لاپلاس به شکل ساده زیر درمی آید:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad (19-4)$$

پاسخ این حالت را می توان پس از دو بار انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ۱۹-۴ به دست آورد.

$$V(x) = Ax + B \quad (20-4)$$

که A و B ضرایب ثابتی هستند و به کمک شرایط مرزی مسئله به دست می آیند. در حالتی که تابع پتانسیل دو بعدی یا سه بعدی باشد، k_1 مقداری مثبت، صفر یا منفی خواهد داشت (نوع مسئله مثبت، صفر یا منفی بودن k_1 را تعیین می کند). پاسخ مربوط به حالت $k_1 = 0$ را در بالا ملاحظه نمودیم. در صورتی که $k_1 \neq 0$ باشد، برای سادگی در انجام محاسبات $k_1 = \pm k^2$ در نظر گرفته می شود، آنگاه معادله ۱۵-۴ و انواع پاسخهای آن به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \mp k^2 X = 0$$

$$X(x) = \begin{cases} A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx) & k_1 = -k^2 < 0 \quad (\text{الف-} 21-4) \\ A_2 e^{kx} + B_2 e^{-kx} & k_1 = k^2 > 0 \quad (\text{ب-} 21-4) \end{cases}$$

یادآوری می شود که در حالت $k_1 > 0$ پاسخ را می توان به شکل توابع هذلولی نیز نوشت، یعنی:

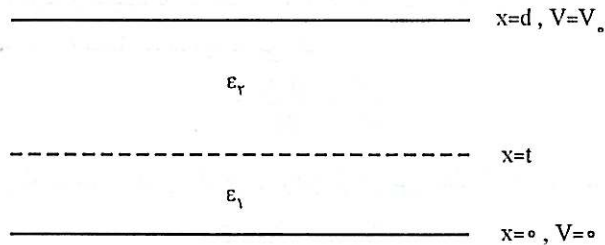
$$X(x) = A_3 \sinh(kx) + B_3 \cosh(kx) \quad k_1 > 0 \quad (\text{ج-} 21-4)$$

بدین ترتیب در یک مسئله دو بعدی، تابع پتانسیل $V(x, y)$ با توجه به شرط $k_1 + k_2 = 0$ به یکی از شکلهای زیر نوشته خواهد شد:

$$V(x, y) = \begin{cases} (Ax + B)(Cy + D) & k_1 = -k_2 = 0 \quad (\text{الف-} 22-4) \\ (A' \sin kx + B' \cos kx)(C' e^{ky} + D' e^{-ky}) & k_1 = -k_2 = -k^2 < 0 \quad (\text{ب-} 22-4) \\ (A'' e^{kx} + B'' e^{-kx})(C'' \sin ky + D'' \cos ky) & k_1 = -k_2 = k^2 > 0 \quad (\text{ج-} 22-4) \end{cases}$$

در اینجا ذکر این نکته مهم، ضروری است که شکلهای مختلف پاسخ به دست آمده برای تابع پتانسیل در رابطه ۲۲-۴ بر اساس این فرض بوده است که تابع پتانسیل به حاصل ضرب دو تابع $X(x)$ و $Y(y)$ تفکیک پذیر بوده است و این فرض ممکن است همیشه فرض صحیحی نباشد. برای کسب آشنایی بیشتر با روش حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات مستطیلی به ذکر چند مثال می پردازیم.

مثال ۴-۱ ناحیه محصور بین دو صفحه هادی $x=0$ و $x=d$ از دو ماده عایق با قابلیت های گذردهی ϵ_1 برای $0 < x < d$ و ϵ_2 برای $d < x < t$ ، مطابق شکل ۴-۱، اشغال شده است. پتانسیل صفحه $x=0$ برابر صفر و پتانسیل صفحه $x=d$ برابر V_0 است. پتانسیل را در نواحی عایق بین دو صفحه هادی تعیین نمایید.



شکل ۴-۱: دو صفحه هادی با پتانسیلهای صفر و V_0 با دو ماده عایق با قابلیت‌های گذردهی ϵ_1 و ϵ_2 بین آنها

حل:

به وضوح می‌توان دریافت که پتانسیل در جهات y و z تغییراتی نداشته و فقط تابعی از متغیر x است. پس، شکل کلی پاسخ همان شکل رابطه ۴-۲۰ خواهد بود. اما چون قابلیت‌های گذردهی در دو ناحیه عایق ($0 < x < t$ و $t < x < d$) متفاوت هستند، توابع پتانسیل در این دو ناحیه نیز باید متفاوت باشند. از این رو ضرایب ثابت متفاوتی را در دو ناحیه اختیار می‌کنیم:

$$V_1 = A_1 x + B_1 \quad 0 < x < t \quad (۴-۲۳-الف)$$

$$V_2 = A_2 x + B_2 \quad t < x < d \quad (۴-۲۳-ب)$$

شرایط مرزی مشخص شده در مسئله عبارتند از:

$$V_1 = 0 \quad x = 0 \quad \text{در} \quad (۴-۲۴-الف)'$$

$$V_2 = V_0 \quad x = d \quad \text{در} \quad (۴-۲۴-ب)$$

اما برای تعیین چهار ضریب مجهول A_1, B_1, A_2, B_2 به دو شرط دیگر نیاز است. بدون تردید این دو شرط را باید در مرز دو ناحیه عایق، یعنی در $x=t$ ، جستجو کرد. با توجه به اینکه پتانسیل و مؤلفه عمودی بردار D در مرز دو عایق پیوسته‌اند، می‌توان نوشت:

$$V_1 = V_2 \quad x = t \quad \text{در} \quad (۴-۲۴-ج)$$

$$D_{x1} = D_{x2} \quad x = t \quad \text{در}$$

یا:

$$\epsilon_1 \frac{dV_1}{dx} = \epsilon_2 \frac{dV_2}{dx} \quad x = t \quad \text{در} \quad (۴-۲۴-د)$$

سؤال: چرا تابع پتانسیل در مرز دو جسم اعم از هادی یا عایق، باید پیوسته باشد؟ با جایگزین نمودن چهار شرط رابطه ۴-۲۴ در پاسخهای رابطه ۴-۲۳، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 0 = 0 + B_1 \\ V_0 = A_2 d + B_2 \\ A_1 t + B_1 = A_2 t + B_2 \\ \epsilon_1 A_1 = \epsilon_2 A_2 \end{cases} \quad (۴-۲۵)$$

پس از حل دستگاه معادلات اخیر برای ضرایب مجهول و جایگزین نمودن نتایج در پاسخهای رابطه ۴-۲۳، پتانسیل در دو ناحیه عایق به شرح زیر خلاصه می‌شود:

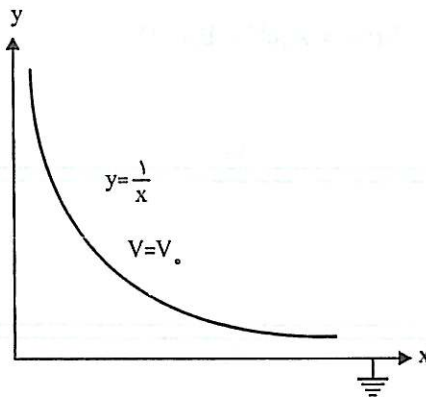
$$V_1 = \frac{\varepsilon_2 x}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1 (d-t)} V_0 \quad 0 < x < t \quad (4-26 \text{ الف})$$

$$V_2 = \frac{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1 (x-t)}{\varepsilon_2 t + \varepsilon_1 (d-t)} V_0 \quad t < x < d \quad (4-26 \text{ ب})$$

■

مثال ۴-۲ شکل ۴-۲ سطح مقطع محفظه‌ای متشکل از سه سطح هادی را نشان می‌دهد. پتانسیل سطح $y=x^{-1}$ برابر V_0 است و دو سطح دیگر زمین شده‌اند. سطوح هادی در امتداد محور Z از دو طرف تا بینهایت ادامه دارند. تابع پتانسیل را در فضای محصور بین سه هادی تعیین نمایید.
حل:

چون سطوح هادی در امتداد Z از دو طرف تا بینهایت ادامه دارند، تابع پتانسیل مستقل از Z می‌باشد. لیکن تغییرات نسبت به x و y موجود بوده و بنابراین تابع پتانسیل دو بعدی است. حال با فرض اینکه تابع پتانسیل به صورت $V(x, y) = X(x) Y(y)$ قابل نوشتن باشد. پاسخ V را باید همانند یکی از شکلهای رابطه ۴-۲۲ برگزید. ابتدا ساده‌ترین شکل پاسخ را که به صورت $V(x, y) = (Ax+B)(Cy+D)$ است در نظر می‌گیریم. اگر این شکل پاسخ قادر به برآوردن کلیه شرایط مرزی مسئله باشد، انتخاب شکل پاسخ، صحیح بوده است، در غیر این صورت باید شکلهای دیگر پاسخ را برگزید و در صورتی که هیچ‌کدام از شکلهای رابطه ۴-۲۲ قابل قبول نباشد، می‌توان نتیجه گرفت که حل مسئله به روش تفکیک متغیرها در دستگاه مختصات مستطیلی میسر نیست. (یادآوری می‌شود که پاسخهای مندرج در رابطه ۴-۲۲ به ازای $k \neq 0$ ممکن است، فقط جمله عمومی پاسخ V را که به صورت یک سری است، بیان کنند.) شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:



شکل ۴-۲: سیستمی متشکل از نیم صفحات هادی $x=0$ و $y=0$ با پتانسیل صفر و سطح هادی $y=x^{-1}$ با پتانسیل V_0 .

$$V=0 \quad \text{در } x=0 \text{ و } y>0 \quad (\text{الف}-۲۷-۴)$$

$$V=0 \quad \text{در } y=0 \text{ و } x>0 \quad (\text{ب}-۲۷-۴)$$

$$V=V_0 \quad \text{در } y=x^{-1} \text{ و } x>0 \text{ و } y>0 \quad (\text{ج}-۲۷-۴)$$

اعمال شرط ۳-۴-۲۷-الف نتیجه $B=0$ و اعمال شرط ۳-۴-۲۷-ب نتیجه $D=0$ را به دنبال دارد. با استفاده از این نتایج تابع پتانسیل به صورت $V(x, y) = ACxy = A'xy$ خلاصه می‌گردد. ضریب A' را می‌توان با اعمال شرط ۳-۴-۲۷-ج برابر V_0 محاسبه کرد و پاسخ مطلوب را به صورت $V(x, y) = V_0 xy$ نوشت.

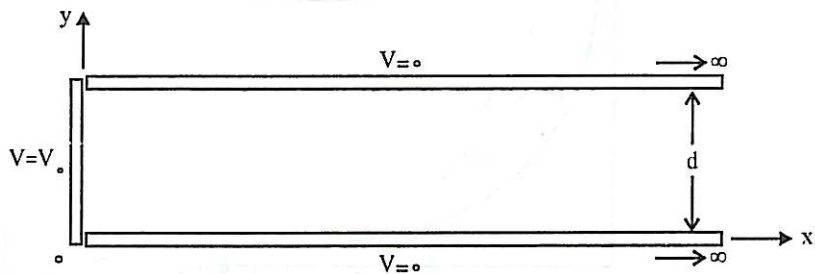
■

* مثال ۳-۴ شکل ۳-۴ سطح مقطع سیستمی متشکل از سه هادی و پتانسیل هر سطح را نشان می‌دهد. هر سه سطح در امتداد محور Z از دو طرف و دو سطح موازی در امتداد X و در جهت مثبت تا بینهایت ادامه دارند. پتانسیل را در ناحیه محصور بین سه سطح هادی محاسبه نمایید.
حل:

با توجه به اینکه سطوح هادی در امتداد محور Z از دو طرف تا بینهایت ادامه دارند، تابع پتانسیل مستقل از Z می‌باشد. بنابراین تابع پتانسیل دو بُعدی بوده و پاسخ آن را می‌توان یکی از شکل‌های مندرج در رابطه ۳-۴-۲۲ در نظر گرفت. اگر همانند مثال قبل با ساده‌ترین پاسخ شروع کنیم درخواهیم یافت که سعی ما در یافتن پاسخی که تمام شرایط مرزی را برآورده سازد به جایی نخواهد رسید. پس باید یکی از پاسخهای متناظر با $k \neq 0$ را در نظر بگیریم. ضمناً چون پتانسیل در امتداد y دارای دو مقدار صفر است معقول‌تر آن است که پاسخ برگزیده شده بر حسب y سینوسی باشد، زیرا توابع سینوسی می‌توانند دارای صفرهای متعددی باشند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$Y(y) = A_1 \sin ky + B_1 \cos ky \quad (\text{الف}-۲۸-۴)$$

$$X(x) = A_2 e^{kx} + B_2 e^{-kx} \quad (\text{ب}-۲۸-۴)$$



شکل ۳-۴: سیستمی متشکل از دو نیم‌صفحه هادی موازی با پتانسیل صفر و سطح هادی $x=0$ عمود و محدود به آنها با پتانسیل V_0 .

که A_1, A_2, B_1, B_2 و k ضرایب ثابتی هستند که باید محاسبه گردند. برای محاسبه این ضرایب از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم. شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:

$$V=0 \quad x>0 \quad \text{و} \quad y=0 \quad \text{در} \quad (4-29\text{-الف})$$

$$V=0 \quad x>0 \quad \text{و} \quad y=d \quad \text{در} \quad (4-29\text{-ب})$$

$$V=V_0 \quad 0<y<d \quad \text{و} \quad x=0 \quad \text{در} \quad (4-29\text{-ج})$$

$$V=0 \quad \text{در} \quad x \rightarrow \infty \quad (4-29\text{-د})$$

برای آنکه در $V=0, y=0$ گردد ضریب B_1 در رابطه $4-28\text{-الف}$ باید صفر باشد. همچنین برای آنکه در $V=0, y=d$ گردد باید داشته باشیم:

$$kd = n\pi \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4-30)$$

سؤال: آیا در نظر گرفتن مقادیر منفی و صحیح برای n ضرورت دارد؟ (چرا؟)
بنابراین:

$$Y = A_1 \sin \frac{n\pi y}{d} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4-31)$$

مقدار $n=0$ باید حذف شود، زیرا در غیر این صورت پتانسیل همه جا صفر خواهد بود. حال به تابع X برمی‌گردیم که اکنون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$X = A_2 e^{n\pi x/d} + B_2 e^{-n\pi x/d} \quad (4-32)$$

برای آنکه شرط $4-29\text{-د}$ برقرار باشد، باید $A_2=0$ باشد. اکنون تابع پتانسیل در مجموع به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$V'(x, y) = A \sin \frac{n\pi y}{d} e^{-n\pi x/d} \quad (4-33)$$

که $A=A_1 B_2$ ضریب ثابت جدیدی است.

پاسخی که تاکنون به دست آورده‌ایم شرایط مندرج در روابط $4-29\text{-الف}$ ، $4-29\text{-ب}$ و $4-29\text{-د}$ را برآورده می‌سازد، ولی در شرط $4-29\text{-ج}$ صدق نمی‌کند. به منظور رفع این مشکل توجه خود را به این نکته معطوف می‌داریم که چون سمت راست رابطه $4-33$ به ازای هر یک از مقادیر $n=1, 2, \dots$ پاسخ معادله لاپلاس است، طبق خاصیت معادلات دیفرانسیل خطی، ترکیب خطی این پاسخها نیز پاسخ معادله خواهد بود. از این رو پاسخی نهایی را به شکل یک سری بینهایت به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{d} e^{-n\pi x/d} \quad (4-34)$$

برای محاسبه ضرایب C_n از شرط مرزی $4-29\text{-ج}$ و خواص سری فوریه استفاده می‌کنیم:

$$V(0, y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{d} \quad (4-35)$$

سری بینهایت در رابطه ۳۵-۴ در حقیقت بیان سری فوریه تابع متناوب $f(y)$ است که دوره تناوب آن $2d$ بوده و مقداری برابر V_0 در فاصله $0 < y < d$ و برابر $-V_0$ در فاصله $-d < y < 0$ دارد. پس برای محاسبه C_n می توان در اینجا روش تعیین ضرایب سری فوریه را به کار برد. با ضرب طرفین رابطه ۳۵-۴ در $\sin(m\pi y/d)$ و انتگرال گیری از صفر تا d داریم:

$$\int_0^d V_0 \sin \frac{m\pi y}{d} dy = \int_0^d \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{d} \sin \frac{m\pi y}{d} dy$$

انتگرال سمت چپ برابر است با:

$$\int_0^d V_0 \sin \frac{m\pi y}{d} dy = \begin{cases} 2d V_0 / m\pi & \text{فرد } m \\ 0 & \text{زوج } m \end{cases} \quad (36-4)$$

و انتگرال سمت راست برابر است با:

$$\int_0^d \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{d} \sin \frac{m\pi y}{d} dy = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ C_n \frac{d}{2} & m = n \end{cases} \quad (37-4)$$

پس از ترکیب روابط ۳۶-۴ و ۳۷-۴، مقادیر ضرایب C_n به شرح زیر خلاصه می شوند:

$$C_n = \begin{cases} 4V_0 / n\pi & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases} \quad (38-4)$$

سرانجام تابع پتانسیل در نقطه (x, y, z) به صورت زیر نوشته می شود:

$$V(x, y, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\text{فرد } n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi y}{d} e^{-n\pi x/d} \quad (39-4)$$

■

مسائل سه بعدی را که در آنها پتانسیل تابعی از هر سه متغیر x, y و z است می توان مشابه حالت دوی بعدی مورد مطالعه قرار داد. حل مثال جداگانه ای از حالت سه بعدی معادله لاپلاس را در مسئله ۲۱ مسائل خودآزمایی ببینید.

حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه ای

با استفاده از رابطه ۱-۱۳۳، معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه ای به شکل زیر نوشته می شود:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (40-4)$$

ابتدا حالات یک بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر پتانسیل، تابعی فقط از یک مختصه (r یا φ یا z) باشد، پاسخ معادله لاپلاس، طی دو بار انتگرال‌گیری، به سادگی به دست می‌آید. به عنوان مثال وقتی که $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ باشد، پتانسیل تابعی فقط از r بوده و معادله لاپلاس به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad (4-41)$$

پس از دو بار انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه داریم:

$$V = A \ln r + B \quad (4-42)$$

که A و B ضرایب ثابتی هستند و با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند.

مثال ۴-۴ مطلوب است تعیین تغییرات پتانسیل در ناحیه بین دو هادی یک کابل هم‌محور به طول بینهایت که در آن پتانسیل هادی درونی V_0 و پتانسیل هادی بیرونی صفر باشد. شکل ۴-۴ سطح مقطع کابل و ابعاد آن را نشان می‌دهد.

حل:

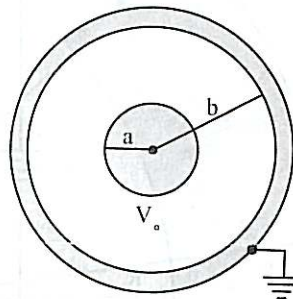
به دلیل وجود تقارن نسبت به φ و بینهایت بودن طول کابل در راستای محور z ، پتانسیل، تابعی فقط از r بوده و شکل رابطه ۴-۴۲ را خواهد داشت. برای تعیین ضرایب ثابت از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

$$0 = A \ln b + B$$

$$V_0 = A \ln a + B$$

پس از حل این دو معادله برای A و B و جایگزین نمودن نتایج در رابطه ۴-۴۲، پاسخ به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$V = V_0 \ln \left(\frac{r}{b} \right) / \ln \left(\frac{a}{b} \right) \quad (4-43)$$



شکل ۴-۴: سطح مقطع کابل هم‌محور تحت ولتاژ V_0 .

در صورتی که پتانسیل فقط تابعی از φ باشد، پاسخ معادله لاپلاس به صورت $V=A'\varphi+B'$ و چنانچه پتانسیل فقط تابعی از z باشد پاسخ به صورت $V=A''z+B''$ خواهد بود. حالت اخیر همانند حالت یک بعدی در دستگاه مستطیلی است.

مثال ۴-۵ صفحه‌ای از جنس هادی با رسانایی σ_0 و ضخامت کم، مطابق شکل ۴-۵، بریده شده و اختلاف پتانسیل V_0 به دو طرف آن اعمال می‌گردد. تابع پتانسیل را در این صفحه نازک و همچنین مقاومت آن را تعیین نمایید.

حل:

به دلیل ناچیز بودن ضخامت صفحه و وجود لایه‌هایی از جنس هادی کامل ($\sigma=\infty$) در امتدادهای $\varphi=0$ و $\varphi=\varphi_0$ ، پتانسیل در صفحه نازک تغییراتی نسبت به Γ و Z نداشته و فقط تابعی از φ است. بنابراین تابع پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V = A\varphi + B \quad (44-4)$$

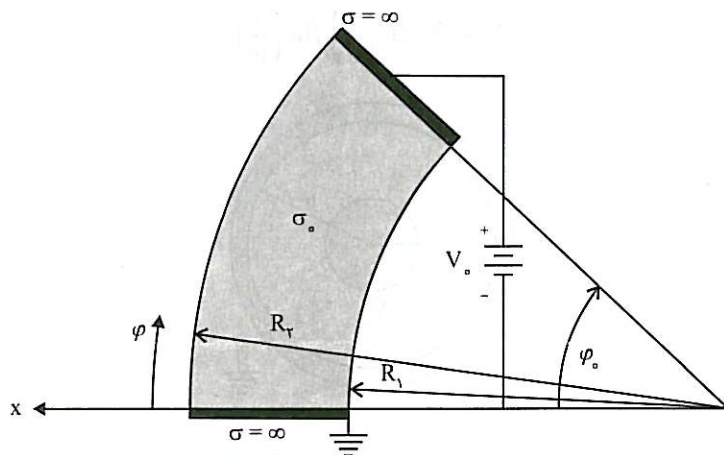
شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:

$$V=0 \quad \text{در} \quad \varphi=0$$

$$V=V_0 \quad \text{در} \quad \varphi=\varphi_0$$

با اعمال این شرایط در رابطه ۴-۴۴، ضرایب مجهول را برابر $B=0$ و $A=V_0/\varphi_0$ خواهیم یافت. پس:

$$V = (V_0/\varphi_0)\varphi \quad (45-4)$$



شکل ۴-۵: صفحه‌ای نازک از جنس هادی با رسانایی σ_0 تحت ولتاژ V_0 .

برای محاسبه مقاومت این صفحه نازک (که ضخامت آن را برابر Δ فرض می‌کنیم) کافی است کل جریان گذرنده از صفحه را به دست آوریم. برای این منظور ابتدا E ، سپس J و آنگاه I را محاسبه می‌کنیم و سرانجام از رابطه $R = V_0/I$ مقدار مقاومت را به دست می‌آوریم.

$$E = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi = -\frac{V_0}{\varphi_0} \frac{1}{r} \hat{a}_\varphi$$

$$J = \sigma \cdot E = -\frac{V_0 \sigma_0}{\varphi_0} \frac{1}{r} \hat{a}_\varphi$$

$$I = \int J \cdot dS = -\frac{V_0 \sigma_0}{\varphi_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\Delta \frac{\hat{a}_\varphi}{r} \cdot (-dr dz \hat{a}_\varphi) = \frac{V_0 \sigma_0 \Delta}{\varphi_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$R = V_0/I = \varphi_0 / \left[\sigma_0 \Delta \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \quad (4-46)$$

■

توجه کنید که این مثال در واقع همان مثال ۳-۲ در فصل سوم است که به روش مبتنی بر حل معادله لاپلاس مورد بررسی قرار گرفت. بحث جامع‌تری در ارتباط با مقاومت میله خمیده در قسمت ۴-۴ ارائه خواهد شد.

در حالات دو بعدی و سه بعدی، از روش تفکیک متغیرها برای حل معادله لاپلاس استفاده می‌کنیم. در حالت دو بعدی، گرچه بسته به اینکه پتانسیل تابعی از کدام دو متغیر باشد پاسخ معادله شکلهای متفاوتی را به خود می‌گیرد، لیکن بررسی یک مورد، مثلاً وقتی که پتانسیل فقط تابعی از r و φ باشد، آشنایی و تجربه لازم را برای مطالعه سایر موارد به ما می‌دهد. بنابراین با فرض اینکه V مستقل از z بوده و به صورت $V = R(r) \Phi(\varphi)$ قابل نوشتن باشد، معادله لاپلاس، پس از جایگزین نمودن V با $R\Phi$ و سپس تقسیم طرفین آن بر $R\Phi/r^2$ ، شکل زیر را پیدا می‌کند:

$$\left[\frac{1}{R} \left(r \frac{dR}{dr} + r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} \right) \right] + \left[\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right] = 0 \quad (4-47)$$

در این معادله هر یک از دو عبارت درون کروشه فقط تابعی از یک متغیر است. بنابراین برای آنکه معادله ۴-۴۷ برای جمیع مقادیر r و φ صادق باشد این دو عبارت باید برابر مقادیر ثابتی که قرینه یکدیگرند باشند. در نتیجه رابطه ۴-۴۷ به دو معادله دیفرانسیل معمولی ساده می‌شود که عبارتند از:

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) = n^2 \quad (4-48)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2 \quad (4-49)$$

که n^2 ثابت تفکیک است. پاسخهای معادلات ۴-۴۸ و ۴-۴۹ وقتی که $n=0$ و $n \neq 0$ باشد شکلهای متفاوتی را به خود می‌گیرند:

$$R(r) = \begin{cases} A \ln r + B & n=0 & \text{(الف-۵۰-۴)} \\ A'r^n + B'r^{-n} & n \neq 0 & \text{(ب-۵۰-۴)} \end{cases}$$

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} C\varphi + D & n=0 & \text{(الف-۵۱-۴)} \\ C' \sin n\varphi + D' \cos n\varphi & n \neq 0 & \text{(ب-۵۱-۴)} \end{cases}$$

در این پاسخها A, B, C, D یا همین ضرایب با علامت پریم ثابتهایی هستند که با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند. ثابت n ، که در حالت کلی ممکن است عددی صحیح، حقیقی یا حتی موهومی باشد، نیز به کمک شرایط مرزی محاسبه می‌گردد. پس به طور خلاصه، تابع پتانسیل در دستگاه مختصات استوانه‌ای دو بعدی (r, φ) ، به فرض تفکیک پذیر بودن به حاصل ضرب توابعی از r و φ ، به شکل کلی زیر (یا ترکیب خطی چنین توابعی به صورت سری محدود یا نامحدود برای $n \neq 0$) نوشته می‌شود:

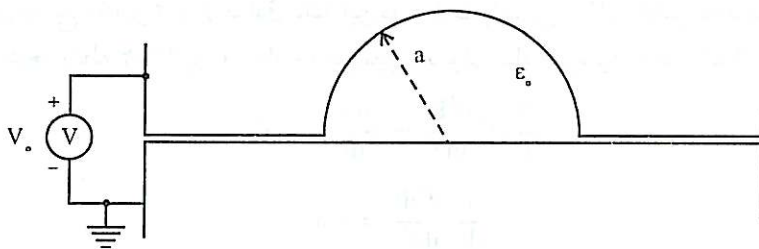
$$V(r, \varphi) = \begin{cases} (A \ln r + B)(C\varphi + D) & n=0 & \text{(الف-۵۲-۴)} \\ (A'r^n + B'r^{-n})(C' \sin n\varphi + D' \cos n\varphi) & n \neq 0 & \text{(ب-۵۲-۴)} \end{cases}$$

در اغلب مسائل، پاسخی که مترادف با مقادیر صحیح n باشد کفایت می‌کند و ما نیز به ذکر مثالهایی از این قبیل خواهیم پرداخت.

مثال ۴-۶ شکل ۴-۶ سطح مقطع یک محفظه استوانه‌ای شکل به طول بینهایت را نشان می‌دهد. اختلاف پتانسیل V_0 را بین سطح هادی استوانه‌ای و هادی دیگر (منطبق بر $y=0$) به وجود می‌آوریم. پتانسیل نقاط درون محفظه را تعیین نمایید.
حل:

روشن است که پتانسیل تغییراتی نسبت به Z نداشته و فقط تابعی از r و φ می‌باشد. تابع پتانسیل را به شکل رابطه ۴-۵۲ ب فرض می‌کنیم:

$$V(r, \varphi) = (Ar^n + Br^{-n})(C \sin n\varphi + D \cos n\varphi)$$



شکل ۴-۶: سطح مقطع محفظه استوانه‌ای شکل مثال ۴-۶

شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:

$$V = V_0 \quad \text{در} \quad r = a \quad (\text{الف} - ۵۳ - ۴)$$

$$V = 0 \quad \text{در} \quad \varphi = 0 \quad (\text{ب} - ۵۳ - ۴)$$

$$V = 0 \quad \text{در} \quad \varphi = \pi \quad (\text{ج} - ۵۳ - ۴)$$

با اعمال شرط ۴-۵۳-ب در پاسخ، نتیجه می‌گیریم که باید $D = 0$ باشد. همچنین اعمال شرط ۴-۵۳-ج عدد صحیح بودن n را نتیجه می‌دهد. با فرض مثبت بودن n ، اعمال این شرط که در $r = 0$ باید پتانسیل محدود باشد، نتیجه $B = 0$ را به دنبال خواهد داشت. بدین ترتیب پاسخ به شکل زیر ساده می‌شود:

$$V(r, \varphi) = A' r^n \sin n\varphi \quad (۵۴ - ۴)$$

که $A' = AC$ ثابت جدیدی است. پاسخی که تاکنون به دست آورده‌ایم در شکل فعلی‌اش نمی‌تواند شرط ۴-۵۳-الف را برآورده سازد، از این رو شکل نهایی پاسخ را به صورت سری بینهایت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\varphi \quad (۵۵ - ۴)$$

با اعمال شرط ۴-۵۳-الف داریم:

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \sin n\varphi$$

برای محاسبه ضرایب A_n از خواص سری فوریه استفاده کرده و مشابه روشی که در مثال ۴-۳ به کار رفت طرفین رابطه اخیر را در $\sin m\varphi$ ضرب نموده و از صفر تا π انتگرال‌گیری می‌کنیم. نتیجه عبارت است از:

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{4 V_0}{n \pi a^n} & \text{فرد } n \end{cases} \quad (۵۶ - ۴)$$

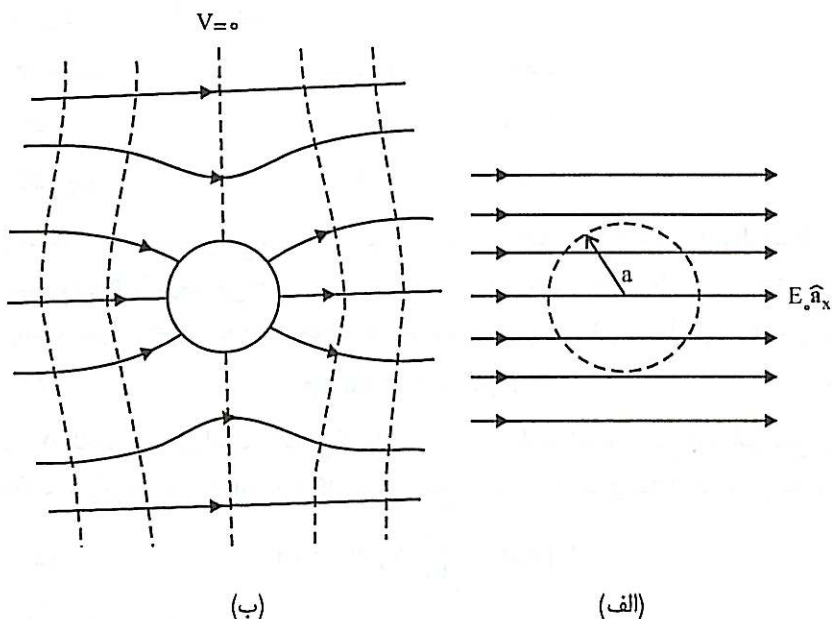
سرانجام با جایگزین نمودن A_n از رابطه ۴-۵۶ در رابطه ۴-۵۵ پاسخ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V(r, \varphi) = \frac{4 V_0}{\pi} \sum_{\text{فرد } n}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\varphi \quad (۵۷ - ۴)$$

■ مثال ۴-۷ استوانه‌ای از جنس هادی به طول بینهایت و شعاع a ، مطابق شکل ۴-۷-الف، به طور عمودی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $E = E_0 \hat{a}_x$ قرار می‌گیرد. میدان الکتریکی را در فضای اطراف استوانه هادی به دست آورید. محور استوانه را منطبق بر محور Z و پتانسیل صفحه $x = 0$ را برابر صفر فرض کنید.

حل:

حضور استوانه هادی منجر به بروز تغییراتی در میدان اولیه می‌گردد. به علت وجود تقارن استوانه‌ای می‌توان حدس زد که میدان جدید شکل پاسخ معادله لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه‌ای را دارا است. بنابراین شکل کلی پاسخ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



شکل ۷-۴: استوانه‌ای هادی در معرض میدان الکتریکی یکنواخت (الف) نحوه قرار گرفتن استوانه در قبال میدان (ب) خطوط میدان (خط پر) و مقاطع سطوح هم پتانسیل (خط چین) پس از قرار گرفتن استوانه در معرض میدان

$$V(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \sin n\varphi + D_n \cos n\varphi) \quad (58-4)$$

برای تعیین ضرایب مجهول از خواص پاسخ در $r=\infty$ و شرط مرزی در $r=a$ استفاده می‌کنیم. در فواصل بسیار دور از استوانه (یعنی در $r=\infty$) تأثیر حضور استوانه در میدان باید به صفر کاهش یابد، بنابراین در $r=\infty$ پتانسیل و میدان باید شکل توابع پتانسیل و میدان اولیه را به خود بگیرند. اما پتانسیل در نقطه دلخواه $A(r, \varphi)$ قبل از قرار گرفتن استوانه در میدان عبارت است از:

$$V_A = -E_0 x = -E_0 r \cos \varphi \quad (59-4)$$

با مساوی قرار دادن طرفهای راست روابط ۵۸-۴ و ۵۹-۴ و میل دادن r به سمت بینهایت داریم:

$$-E_0 r \cos \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n (C_n \sin n\varphi + D_n \cos n\varphi) \quad (60-4)$$

برای آنکه رابطه ۶۰-۴ به ازای جمیع مقادیر φ برقرار باشد باید کلیه ضرایب به جز A_1 و D_1 صفر باشند. از رابطه مزبور همچنین $A' = A_1 D_1 = -E_0$ محاسبه می‌شود. بدین ترتیب پاسخ به شکل ساده زیر درمی‌آید:

$$V(r, \varphi) = (-E_0 r + B'/r) \cos \varphi \quad (61-4)$$

که $B' = B_1 D_1$ است. ضریب B' با استفاده از شرط مرزی $V(a, \varphi) = 0$ برابر $E_0 a^2$ محاسبه می‌گردد. پس به طور خلاصه:

$$V(r, \varphi) = -E_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \cos \varphi \quad (62-4)$$

و:

$$E = -\nabla V = E_0 \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \varphi \hat{a}_r - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \varphi \hat{a}_\varphi \right] \quad (63-4)$$

ملاحظه کنید که برای مقادیر بزرگ r ، میدان برابر $E = E_0 (\cos \varphi \hat{a}_r - \sin \varphi \hat{a}_\varphi)$ ، که همان $E_0 \hat{a}_x$ است، می‌شود. شکل ۴-۷-ب خطوط میدان و مقاطع سطوح هم‌پتانسیل (منحنی‌های خط‌چین) را نشان می‌دهد.

■

از روش تفکیک متغیرها همچنین می‌توان برای حل معادله لاپلاس سه بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده نمود. در اینجا فقط به ذکر چگونگی استخراج پاسخ اکتفا می‌کنیم و مطالعه جزئیات بیشتر را به عهده علاقمندان واگذار می‌نماییم. پس از جایگزین نمودن V در رابطه ۴-۴۰ با $R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ و تقسیم طرفین آن بر $R\Phi Z/r^2$ ، معادله لاپلاس به سه معادله زیر تجزیه می‌گردد:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + R[(kr)^2 - n^2] = 0 \quad (64-4)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2 \quad , \quad n = \text{مقدار ثابت} \quad (65-4)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 \quad , \quad k = \text{مقدار ثابت} \quad (66-4)$$

در صورتی که $k=n=0$ باشد پاسخ V شکل ساده‌ای به خود خواهد گرفت که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V = (A \ln r + B)(C\varphi + D)(Ez + F) \quad (67-4)$$

ولی در صورتی که $n \neq 0$ و $k \neq 0$ باشد، پاسخ معادلات ۴-۶۴، ۴-۶۵ و ۴-۶۶ به شرح زیر خلاصه می‌شوند:

$$R(r) = A J_n(kr) + B Y_n(kr) \quad , \quad k^2 > 0 \quad (68-4 \text{ الف})$$

یا:

$$R(r) = A' H_n^{(1)}(kr) + B' H_n^{(2)}(kr) \quad , \quad k^2 > 0 \quad (68-4 \text{ ب})$$

$$R(r) = A'' I_n(|k|r) + B'' K_n(|k|r) \quad , \quad k^2 < 0 \quad (68-4 \text{ ج})$$

$$\Phi(\varphi) = C \sin n\varphi + D \cos n\varphi \quad (69-4)$$

$$Z(z) = E e^{kz} + F e^{-kz} \quad , \quad k^2 > 0 \quad (70-4 \text{ الف})$$

$$Z(z) = E' \sin(|k|z) + F' \cos(|k|z) \quad , \quad k^2 < 0 \quad (70-4 \text{ ب})$$

معادله ۴-۶۴ را معادله دیفرانسیل بسل^۱ J_n و Y_n را به ترتیب توابع بسل از نوع اول و دوم؛ $H_n^{(1)}$ و $H_n^{(2)}$ را توابع هنکل^۲ از نوع اول و دوم؛ I_n و K_n را توابع بسل تغییر یافته از نوع اول و دوم می نامند. این توابع معمولاً به صورت سریهای بینهایت نوشته می شوند. در ضمن توابع هنکل از ترکیب خطی توابع بسل نتیجه می شوند:

$$H_n^{(1)} = J_n + jY_n, \quad H_n^{(2)} = J_n - jY_n$$

بدین ترتیب تابع پتانسیل در دستگاه مختصات استوانه‌ای سه بعدی، به فرض تفکیک پذیر بودن به حاصل ضرب توابعی از r ، φ و z ، به صورت زیر خلاصه می گردد (برای حالت $n \neq 0$ و $k^2 > 0$):

$$V(r, \varphi, z) = [A J_n(kr) + B Y_n(kr)] [C \sin n\varphi + D \cos n\varphi] [E e^{kz} + F e^{-kz}] \quad (۷۱-۴)$$

سرانجام یادآوری می شود که تابع پتانسیل را همچنین می توان به صورت یک سری از عبارت سمت راست رابطه ۴-۷۱ به ازای مقادیر مختلف n نوشت.

حل معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کروی

حل معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات کروی به اختصار مورد مطالعه قرار می دهیم. در این دستگاه مختصات، معادله لاپلاس به شکل زیر نوشته می شود:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (۷۲-۴)$$

در حالات یک بعدی که V تابعی فقط از r ، θ یا φ است، معادله لاپلاس فقط از یکی از جملات سمت راست رابطه ۴-۷۲ تشکیل می شود. پاسخهای معادله در این حالات عبارتند از:

$$V(r) = A + B/r \quad (۷۳-۴)$$

$$V(\theta) = C + D \ln(\tan \theta/2) \quad (۷۴-۴)$$

$$V(\varphi) = E + F\varphi \quad (۷۵-۴)$$

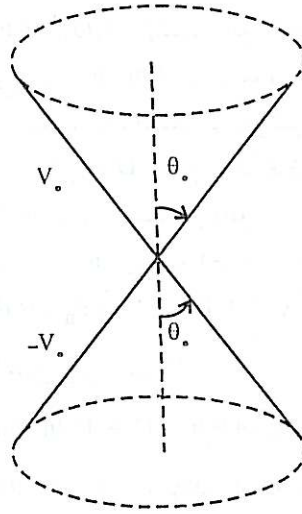
مثال ۴-۸ دو سطح مخروطی شکل هادی که در امتداد شعاعی تا بینهایت ادامه دارند دارای پتانسیلهای V_0 و $-V_0$ ، مطابق شکل ۴-۸، می باشند. پتانسیل را در فضای اطراف مخروطها محاسبه نمایید.
حل:

به علت وجود تقارن محوری و بینهایت بودن مخروطها در امتداد r ، تابع پتانسیل مستقل از φ و r است. پس پاسخ طبق رابطه ۴-۷۴ به شکل زیر نوشته می شود:

$$V(\theta) = A + B \ln(\tan \theta/2)$$

شرایط مرزی در این مسئله عبارتند از:

$$V(\theta_0) = V_0, \quad V(\pi - \theta_0) = -V_0$$



شکل ۴-۸: دو سطح مخروطی شکل هادی با نیم زاویه θ_0 با پتانسیلهای V_0 و $-V_0$.

اعمال این شرایط در پاسخ، دو رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$V_0 = A + B \ln (\tan \theta_0 / \gamma)$$

$$-V_0 = A + B \ln (\cot \theta_0 / \gamma)$$

پس از حل دو رابطه اخیر برای A و B داریم:

$$A = 0, \quad B = V_0 / \ln (\tan \theta_0 / \gamma)$$

و سرانجام تابع پتانسیل به صورت زیر خلاصه می شود:

$$V(\theta) = V_0 \frac{\ln [\tan (\theta / \gamma)]}{\ln [\tan (\theta_0 / \gamma)]} \quad (۷۶-۴)$$

حالات دو بعدی و سه بعدی معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کروی را می توان همانند حالات مشابه در دستگاههای مختصات مستطیلی و استوانه ای، بر اساس روش تفکیک متغیرها، مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. با در نظر گرفتن تابع پتانسیل به صورت حاصل ضرب $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ ، معادله لاپلاس به سه معادله دیفرانسیل معمولی تجزیه می گردد که پاسخهای آنها عبارتند از:

$$R(r) = A r^n + B r^{-(n+1)} \quad (۷۷-۴)$$

$$\Theta(\theta) = C P_n^m (\cos \theta) + D Q_n^m (\cos \theta) \quad (۷۸-۴)$$

$$\Phi(\varphi) = E \sin m\varphi + F \cos m\varphi \quad (۷۹-۴)$$

در رابطه ۷۸-۴، $P_n^m(\cos \theta)$ و $Q_n^m(\cos \theta)$ را به ترتیب توابع لژاندر^۱ وابسته از نوع اول و دوم نامند. در پاسخهای مذکور m و n اعداد صحیح بوده و $m \leq n$ است. معمولاً، توابع نوع دوم یعنی $Q_n^m(\cos \theta)$ ، به دلیل آنکه در $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ نامحدود هستند، وارد محاسبات نمی‌شوند. به عبارت دیگر، جهت اجتناب از نامحدود شدن پتانسیل در $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ باید D را برابر صفر فرض نمود. در حالتی که تقارن محوری موجود باشد تابع پتانسیل مستقل از φ بوده و مسئله در واقع به حالت دو بعدی ساده می‌شود. پاسخ معادله لاپلاس در این حالت با قرار دادن $m=0$ در رابطه ۷۸-۴ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V(r, \theta) = [A r^n + B r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad n \neq 0 \quad (۸۰-۴)$$

در صورتی که $n=0$ باشد، تابع پتانسیل برابر است با:

$$V(r, \theta) = (A+B/r) [C + D \ln(\tan \theta/2)] \quad (۸۱-۴)$$

در رابطه ۸۰-۴، $P_n(\cos \theta) = P_n^0(\cos \theta)$ تابع لژاندر نامیده می‌شود. تعدادی از چندجمله‌ایهای لژاندر برای چند مقدار n به شرح زیر می‌باشند:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4} (1 + 3 \cos 2\theta)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8} (3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta) \quad (۸۲-۴)$$

مثال ۹-۴ کروی از جنس عایق به شعاع a و قابلیت گذردهی نسبی ϵ_r ، مطابق شکل ۹-۴-الف، در معرض میدان الکتریکی یکنواخت $E = E_0 \hat{a}_z$ قرار می‌گیرد. میدان الکتریکی را در درون و فضای اطراف کره عایق تعیین نمایید. پتانسیل صفحه $z=0$ را برابر صفر فرض کنید.

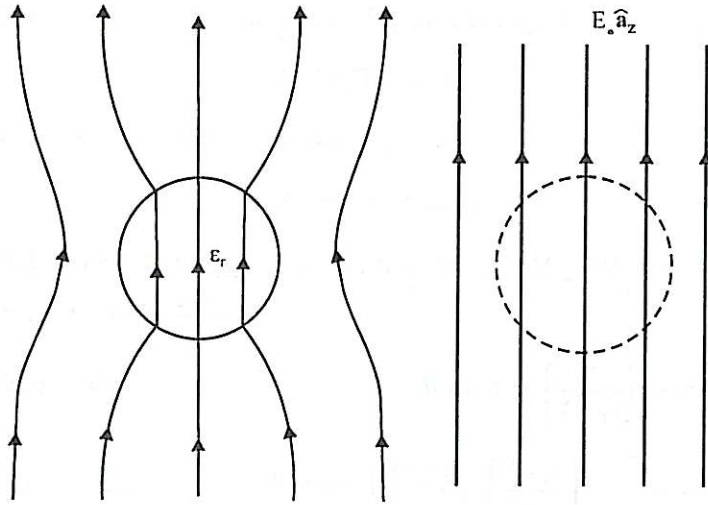
حل:

به علت وجود تقارن محوری، تابع پتانسیل مستقل از φ بوده و پاسخ به صورت رابطه ۸۰-۴ خواهد بود. پتانسیل فضای اطراف کره را با V^0 و درون آن را با V^1 نشان می‌دهیم. V^0 و V^1 هر دو شکل کلی رابطه ۸۰-۴ را دارا هستند، پس می‌توان نوشت:

$$V^0 = [A_1 r^n + B_1 r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad r \geq a \quad (۸۳-۴)$$

$$V^1 = [A'_1 r^{n'} + B'_1 r^{-(n'+1)}] P_{n'}(\cos \theta) \quad r \leq a \quad (۸۴-۴)$$

برای تعیین ضرایب مجهول از خواص میدان در $r=\infty$ ، شرایط مرزی در $r=a$ و محدود بودن میدان در $r=0$ استفاده می‌کنیم. در $r=\infty$ ، که تأثیر حضور کره عایق در میدان از بین رفته است، میدان باید هم‌چنان شکل اولیه خود را دارا باشد. اما شکل اولیه تابع پتانسیل (قبل از قرار گرفتن کره عایق) عبارت است از:



(ب)

(الف)

شکل ۴-۹: کره‌ای عایق در معرض میدان الکتریکی یکنواخت (الف) نحوه قرار گرفتن کره در میدان (ب) خطوط میدان در درون و اطراف کره

$$V = -E_z = -E_r \cos \theta \quad (۸۵-۴)$$

برای آنکه طرفهای سمت راست روابط ۴-۸۳ و ۴-۸۵، در هنگام $r \rightarrow \infty$ ، مساوی باشند ضروری است که $n=1$ باشد. از این تساوی نتیجه $A_1 = -E_r$ نیز حاصل می‌شود. بدین ترتیب، تابع پتانسیل در ناحیه $r \geq a$ به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$V^o = (A_1 r + B_1 r^{-2}) P_1(\cos \theta) = (-E_r r + B_1 / r^2) \cos \theta \quad (۸۶-۴)$$

برای تابع V^i ، محدود بودن پتانسیل در $r=0$ ایجاب می‌کند که $B'_1 = 0$ باشد، پس:

$$V^i = A'_1 r^n P_n(\cos \theta) \quad r \leq a \quad (۸۷-۴)$$

شرایط مرزی در این مسئله، پیوسته بودن پتانسیل و مؤلفه عمودی بردار D در $r=a$ هستند که به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$V^o \Big|_{r=a} = V^i \Big|_{r=a} \quad (۸۸-۴)$$

$$-\frac{\partial V^o}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\epsilon_r \frac{\partial V^i}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (۸۹-۴)$$

با اعمال شرط ۸۸-۴ داریم:

$$A'_1 a^n P_n(\cos \theta) = (-E_r a + B_1 / a^2) \cos \theta \quad (۹۰-۴)$$

برای آنکه رابطه ۴-۹۰ همواره به ازای جمیع مقادیر θ برقرار باشد، باید $n' = 1$ بوده و داشته باشیم:

$$A_1' = -E_s + B_1/a^2 \quad (۹۱-۴)$$

همچنین با اعمال شرط ۴-۸۹ رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\epsilon_r A_1' = -E_s - 2B_1/a^2 \quad (۹۲-۴)$$

پس از حل روابط ۴-۹۱ و ۴-۹۲ برای A_1' و B_1 ، توابع پتانسیل V^0 و V^i و میدانهای الکتریکی مربوطه به شرح زیر خلاصه می‌شوند:

$$V^i(r, \theta) = - \left[\frac{3}{\epsilon_r + 2} \right] E_s r \cos \theta \quad r \leq a \quad (\text{الف-} ۹۳-۴)$$

$$V^0(r, \theta) = - \left[1 - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_s r \cos \theta \quad r \geq a \quad (\text{ب-} ۹۳-۴)$$

$$E^i(r, \theta) = \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_s (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta) = \frac{3E_s}{\epsilon_r + 2} \hat{a}_z \quad r < a \quad (\text{الف-} ۹۴-۴)$$

$$E^0(r, \theta) = \left[1 + \frac{2(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_s \cos \theta \hat{a}_r - \left[1 - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] E_s \sin \theta \hat{a}_\theta \quad r > a \quad (\text{ب-} ۹۴-۴)$$

ملاحظه می‌شود که میدان الکتریکی در درون کره هم‌چنان یکنواخت، ولی با شدتی کمتر از شدت میدان اولیه است. خطوط میدان در شکل ۴-۹-ب نشان داده شده‌اند.

■

۴-۴ محاسبه مقاومت به کمک حل معادله لاپلاس

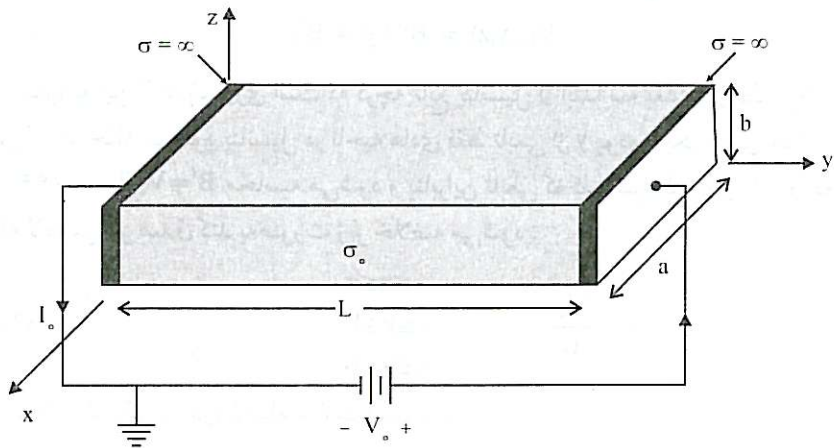
مسئله مقاومت یک جسم با رسانایی σ ، در فصل سوم به اختصار مورد مطالعه قرار گرفت و رابطه ۳-۱۳ برای محاسبه مقاومت ارائه گردید. استفاده از این رابطه برای محاسبه مقاومت مستلزم اطلاعاتی درباره میدان الکتریکی E (که در اثر برقرار نمودن اختلاف پتانسیل V_s بین سطوح ابتدایی و انتهایی مقاومت ایجاد می‌شود) است. این اطلاعات را قبلاً از فیزیک مسئله (چگونگی خطوط میدان، سطوح هم‌پتانسیل و شکل هندسی جسم) کسب نموده و به کمک آن میدان E را تعیین کرده و در محاسبه مقاومت به کار می‌بردیم. در اینجا دوباره مسئله مقاومت را به عنوان یک مسئله مقادیر مرزی مورد مطالعه قرار داده و نشان خواهیم داد که نتایج به دست آمده در قبل، از جمله برای یک میله مستقیم و یک میله خمیده، کاملاً دقیق می‌باشند.

مقاومت یک میله مستقیم

میله مستقیمی را به طول L ، سطح مقطع یکنواخت و مستطیلی شکل به ابعاد a و b و رسانایی σ_0 ، مطابق شکل ۴-۱۰، در نظر می‌گیریم. فرض می‌شود که دو لایه از جنس هادی کامل ($\sigma = \infty$) در ابتدا و انتهای میله تعبیه شده باشند. اختلاف پتانسیل V_0 را، از طریق وصل یک باتری به لایه‌های هادی کامل، بین سطوح ابتدایی و انتهایی میله به وجود می‌آوریم. چهار سطح دیگر میله در معرض هوا قرار دارند. میدان الکتریکی به وجود آمده در میله را می‌توان مستقیماً از حل معادله لاپلاس به دست آورد، زیرا در میدان الکتریکی ساکن که تغییرات نسبت به زمان صفر است، $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ است و چون $\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E}$ و $\mathbf{E} = -\nabla V$ می‌باشد، رابطه $\nabla^2 V = 0$ در حجم اشغال شده توسط میله برقرار است. بنابراین تعیین میدان الکتریکی در درون میله به حل معادله لاپلاس تحت شرایط مرزی معینی ساده می‌شود.

شرایط مرزی مورد نظر در این مسئله در شش وجه میله بیان می‌شوند. سطوح ابتدایی و انتهایی میله باید سطوح هم‌پتانسیل و با پتانسیلهایی به ترتیب برابر $V=0$ و $V=V_0$ باشند. اما میله در امتداد چهار وجه دیگرش در معرض هوا است. تجربه آزمایشگاهی نشان می‌دهد که جریان الکتریکی از بدنه یک جسم هادی به فضای اطراف تراوش نمی‌کند (مگر آنکه ولتاژ V_0 آنقدر زیاد باشد که منجر به یونیزه شدن هوای اطراف و تشکیل قوس الکتریکی شود). این حقیقت به عبارت دیگر بیان می‌کند که بردار چگالی جریان الکتریکی نمی‌تواند روی هر یک از چهار وجه مزبور مؤلفه عمودی داشته باشد، یعنی بر روی سطوح زیر $\mathbf{J}_n = \sigma_0 \mathbf{E}_n = 0$ است.

$$\begin{cases} x=0, & 0 < y < L, & 0 < z < b \\ x=a, & 0 < y < L, & 0 < z < b \\ z=0, & 0 < y < L, & 0 < x < a \\ z=b, & 0 < y < L, & 0 < x < a \end{cases} \quad (4-95)$$



شکل ۴-۱۰: میله‌ای مستقیم با طول L ، سطح مقطع مستطیلی شکل به ابعاد a و b و رسانایی σ_0 .

اکنون با توجه به شکل ۴-۱۰ و اینکه $E = -\nabla V$ است، شرایط مرزی بر حسب تابع پتانسیل و مشتقات آن به شرح زیر خلاصه می‌شوند:

$$V=0 \quad \text{در} \quad y=0 \quad \text{و} \quad 0 \leq x \leq a \quad \text{و} \quad 0 \leq z \leq b \quad (۴-۹۶-الف)$$

$$V=V_0 \quad \text{در} \quad y=L \quad \text{و} \quad 0 \leq x \leq a \quad \text{و} \quad 0 \leq z \leq b \quad (۴-۹۶-ب)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{در} \quad x=0 \quad \text{و} \quad 0 < y < L \quad \text{و} \quad 0 < z < b$$

$$\text{در} \quad x=a \quad \text{و} \quad 0 < y < L \quad \text{و} \quad 0 < z < b \quad (۴-۹۶-ج)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{در} \quad z=0 \quad \text{و} \quad 0 < y < L \quad \text{و} \quad 0 < x < a$$

$$\text{در} \quad z=b \quad \text{و} \quad 0 < y < L \quad \text{و} \quad 0 < x < a \quad (۴-۹۶-د)$$

تابع پتانسیل در درون میله هادی از حل معادله لاپلاس سه بعدی در دستگاه مختصات مستطیلی به ازای شش شرط مرزی مندرج در رابطه ۴-۹۶ به دست می‌آید. با استفاده از روش تفکیک متغیرها و در نظر گرفتن ساده‌ترین شکل پاسخ، که به ازای $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ در معادلات ۴-۱۵ تا ۴-۱۷ حاصل می‌شود، می‌توان نوشت:

$$V(x,y,z) = (Ax+B)(Cy+D)(Ez+F) \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq L \\ 0 \leq z \leq b \end{matrix} \quad (۴-۹۷)$$

با اعمال شرط ۴-۹۶-الف، نتیجه $D=0$ حاصل می‌شود. همچنین در صورتی که $A=0$ و $E=0$ باشد، شرایط ۴-۹۶-ج و ۴-۹۶-د همواره برقرار خواهند بود. با استفاده از این نتایج در رابطه ۴-۹۷ داریم:

$$V(x,y,z) = BCFy = B'y \quad (۴-۹۸)$$

در اینجا اشاره به این نکته ضروری است که گرچه تابع پتانسیل از ابتدا سه بعدی در نظر گرفته شد، اما همان‌طور که ملاحظه می‌شود پتانسیل در ناحیه هادی فقط تابعی از y بوده و یک بعدی است. با اعمال شرط ۴-۹۶-ب، $B' = V_0/L$ محاسبه می‌شود و بنابراین تابعی که کلیه شرایط مرزی را برآورده سازد و در معادله لاپلاس نیز صدق کند به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$V = \frac{V_0}{L} y \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq L \\ 0 \leq z \leq b \end{matrix} \quad (۴-۹۹)$$

و آنگاه میدان الکتریکی در درون میله عبارت است از:

$$E = -\nabla V = -\frac{V_0}{L} \hat{a}_y \quad (۴-۱۰۰)$$

اکنون با در دست داشتن میدان الکتریکی، مقاومت میله به سادگی محاسبه می‌گردد:

$$R = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{\int \sigma_0 \cdot E \cdot dS} = \frac{V_0}{\int_0^a dx \int_0^b \left(\frac{\sigma_0 \cdot V_0}{L} \right) dz} = \frac{L}{\sigma_0 \cdot ab} \quad (۴-۱۰۱)$$

توجه کنید که اگر ناحیه $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq L$ و $0 \leq z \leq b$ به جای هادی از جسم عایقی پر شده بود، دیگر شرایط مرزی مندرج در رابطه ۴-۹۶ برقرار نمی‌شد و پاسخ نیز صورت دیگری پیدا می‌کرد، مگر آنکه $L \ll a, b$ باشد.

مقاومت یک میله خمیده

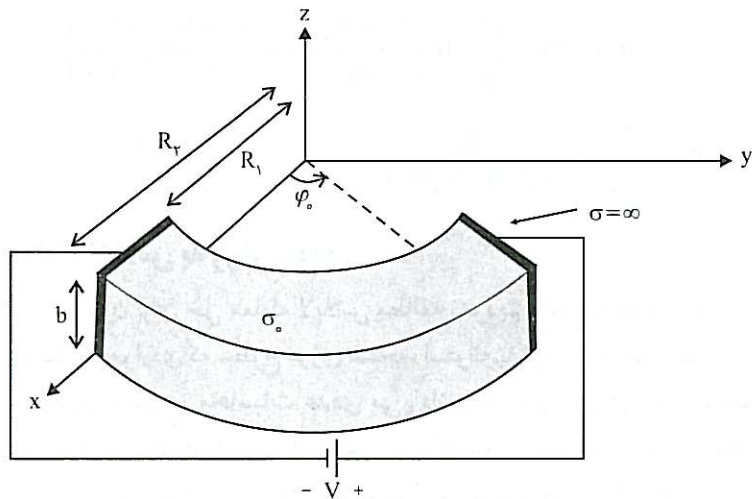
این مسئله را می‌توان به روشی مشابه مسئله قبل مورد بررسی قرار داد. شکل ۴-۱۱ ابعاد و خصوصیات هندسی این مسئله را بیان می‌کند. شرایط مرزی در این مسئله با توجه به شکل ۴-۱۱ و اینکه جریان الکتریکی از وجوه جسم که در معرض هوا قرار دارند به بیرون تراوش نمی‌کند عبارتند از:

$$V = 0 \quad \text{در} \quad \varphi = 0 \quad \text{و} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad \text{و} \quad 0 \leq z \leq b \quad (۴-۱۰۲ \text{ الف})$$

$$V = V_0 \quad \text{در} \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{و} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad \text{و} \quad 0 \leq z \leq b \quad (۴-۱۰۲ \text{ ب})$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \text{در} \quad r = R_1 \quad \text{و} \quad 0 < \varphi < \varphi_0 \quad \text{و} \quad 0 < z < b \quad (۴-۱۰۲ \text{ ج})$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \text{در} \quad r = R_2 \quad \text{و} \quad 0 < \varphi < \varphi_0 \quad \text{و} \quad 0 < z < b$$



شکل ۴-۱۱: میله‌ای خمیده از جنس هادی با رسانایی σ_0 .

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} 0 & \text{در } z=0 \text{ و } 0 < \varphi < \varphi_0 \text{ و } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{در } z=b \text{ و } 0 < \varphi < \varphi_0 \text{ و } R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (۵-۱۰۲-۴)$$

تابع پتانسیل در درون میله هادی از حل معادله لاپلاس سه بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به ازای شرایط مرزی مندرج در رابطه ۵-۱۰۲-۴ به دست می‌آید. با در نظر گرفتن ساده‌ترین پاسخ به دست آمده از روش تفکیک متغیرها داریم:

$$V(r, \varphi, z) = (A \ln r + B)(C\varphi + D)(Ez + F) \quad \begin{cases} R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ 0 \leq z \leq b \end{cases} \quad (۵-۱۰۳-۴)$$

شرط ۵-۱۰۲-۴ الف نتیجه $D=0$ ، شرط ۵-۱۰۲-۴ ج نتیجه $A=0$ و شرط ۵-۱۰۲-۴ د نتیجه $E=0$ را به دنبال دارد. با به کار بردن این نتایج در پاسخ، تابع پتانسیل به صورت $V(r, \varphi, z) = BCF\varphi = C'\varphi$ خلاصه می‌گردد و ضریب C' نیز با اعمال شرط ۵-۱۰۲-۴ ب برابر V_0/φ_0 محاسبه می‌شود. پس به طور خلاصه خواهیم داشت:

$$V(r, \varphi, z) = \frac{V_0}{\varphi_0} \varphi \quad \begin{cases} R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ 0 \leq z \leq b \end{cases} \quad (۵-۱۰۴-۴)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{a}}_\varphi = -\frac{V_0}{\varphi_0 r} \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (۵-۱۰۵-۴)$$

$$I_s = \int \sigma_s \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^b \frac{\sigma_s V_0}{\varphi_0 r} dz = \frac{\sigma_s V_0 b}{\varphi_0} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$R = \frac{V_0}{I_s} = \frac{\varphi_0}{\sigma_s b \ln(R_2/R_1)} \quad (۵-۱۰۶-۴)$$

۵-۴ حل معادله لاپلاس به روش عددی

روشهایی که تاکنون برای حل معادله لاپلاس مطالعه نمودیم از نوع «تحلیلی» بوده‌اند. این روشها برای یافتن پتانسیل در مواردی که سطوح مرزی صفحه، استوانه یا کره هستند مناسب می‌باشند. حال به مطالعه روش دیگری مبتنی بر محاسبات عددی می‌پردازیم که به ویژه برای وقتی که سطوح مرزی شکل‌های ساده‌ای ندارند مفید خواهد بود. همچنین وجود کامپیوترها که انجام محاسبات عددی با حجم زیاد را امکان‌پذیر می‌سازد به این روش اهمیت بیشتری می‌بخشد. برای نشان دادن اصول این روش فرض کنید که پتانسیلهای V_1 ، V_2 ، ... و V_n در شش نقطه از فضا، که به فواصل مساوی از نقطه

$A(0,0,0)$ و روی محورهای دو به دو عمود بر هم گذرنده از A (که آنها را محورهای x و y و z می‌نامیم) قرار دارند، معلوم باشند. شکل ۴-۱۲ مختصات نقاط و پتانسیلهای آنها را نشان می‌دهد. برای یافتن مقدار تقریبی پتانسیل در نقطه A می‌توان چنین نوشت:

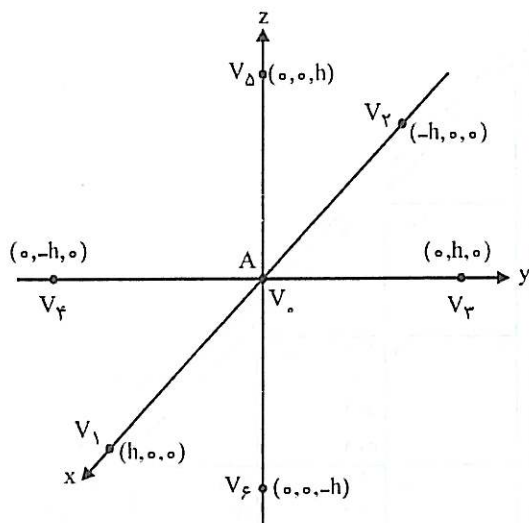
$$[\nabla^2 V]_A = [\nabla^2 V]_{(0,0,0)} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right]_{(0,0,0)} = 0 \quad (4-107)$$

اما:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]_{(0,0,0)} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \right]_{(0,0,0)} \cong \frac{1}{h} \left\{ \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{(h/2,0,0)} - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{(-h/2,0,0)} \right\} \\ &\cong \frac{1}{h} \left\{ \frac{[V]_{(h,0,0)} - [V]_{(0,0,0)}}{h} - \frac{[V]_{(0,0,0)} - [V]_{(-h,0,0)}}{h} \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} (V_1 - V_0 - V_0 + V_2) = \frac{1}{h^2} (V_1 + V_2 - 2V_0) \quad (4-108 \text{ الف}) \end{aligned}$$

به همین ترتیب:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]_{(0,0,0)} \cong \frac{1}{h^2} (V_3 + V_4 - 2V_0) \quad (4-108 \text{ ب})$$



شکل ۴-۱۲: مختصات و پتانسیلهای شش نقطه به فواصل مساوی از نقطه A و واقع بر محورهای متعامد

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right]_{(0, \dots, 0)} \cong \frac{1}{h^2} (V_\Delta + V_\epsilon - 2V_0) \quad (۱۰۸-۴ \text{ ج})$$

پس از جایگزین نمودن روابط ۱۰۸-۴ الف تا ۱۰۸-۴ ج در رابطه ۱۰۷-۴ داریم:

$$V_0 \cong \frac{1}{6} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_\Delta + V_\epsilon) \quad (۱۰۹-۴)$$

بنابراین پتانسیل نقطه A تقریباً برابر متوسط پتانسیلهای شش نقطه‌ای است که به فواصل مساوی از نقطه A و واقع بر محورهای دو به دو عمود بر هم گذرنده از نقطه A باشند. هر چه فاصله h کوچک‌تر باشد تقریب به وجود آمده در V_0 نیز کمتر خواهد بود. اگر پتانسیل فقط تابعی از دو متغیر x و y باشد، آنگاه $V_\Delta = V_\epsilon = V_0$ است و در نتیجه:

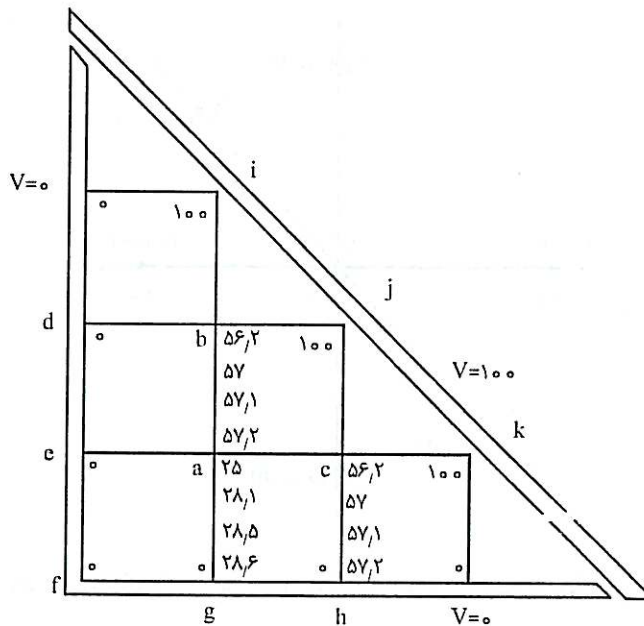
$$V_0 \cong \frac{1}{4} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \quad (۱۱۰-۴)$$

برای نشان دادن کاربرد این روش به بررسی یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۱۰-۴: محفظه‌ای به طول بینهایت و با سطح مقطعی به شکل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را در نظر می‌گیریم. پتانسیل سطوح مجاور زاویه قائمه برابر صفر و پتانسیل سطح مقابل زاویه قائمه برابر ۱۰۰ ولت فرض می‌شود. سطح مقطع را مطابق شکل ۱۳-۴ به تعدادی مربع و مثلث تقسیم می‌کنیم. پتانسیل را در نقاط a و b و c و محاسبه نمایید.

حل:

ابتدا نقطه a را در نظر می‌گیریم. با معدل گرفتن پتانسیلهای نقاط d, f, h, j که به فواصل مساوی از a و روی محورهای عمود بر هم گذرنده از a قرار دارند، مقدار $25 = \frac{1}{4} (0 + 0 + 0 + 100)$ را برای



شکل ۱۳-۴: سطح مقطع مثلثی شکل محفظه‌ای به طول بینهایت برای مثال ۱۰-۴

پتانسیل نقطه a به دست می آوریم. با داشتن این مقدار و پتانسیلهای نقاط i, d و j پتانسیل نقطه b را برابر $۵۶٫۲ \cong \frac{1}{4}(۲۵+۰+۱۰۰+۱۰۰)$ محاسبه می کنیم. به همین ترتیب با استفاده از پتانسیلهای نقاط a, j, k و h مقدار $۵۶٫۲$ را برای پتانسیل نقطه c به دست می آوریم. اکنون با در دست داشتن مقادیری برای پتانسیلهای نقاط b و c که همراه با نقاط e و g نسبت به مجموعه نقاط d, f, h و j به نقطه a نزدیک تر هستند، پتانسیل نقطه a را (با تعیین متوسط پتانسیلهای نقاط e, c, b و g) دوباره محاسبه می کنیم. مقدار جدید پتانسیل نقطه a برابر $۲۸٫۱ \cong \frac{1}{4}(۵۶٫۲+۵۶٫۲+۰+۰)$ می شود. حال که مقدار دقیق تری برای پتانسیل نقطه a به دست آمده است، پتانسیلهای نقاط b و c را نیز می توان دوباره محاسبه نمود. مقدار جدید پتانسیل این نقاط عبارت از $۵۷ \cong \frac{1}{4}(۲۸٫۱+۰+۱۰۰+۱۰۰)$ است. این به نوبه خود مقدار جدیدتر $۲۸٫۵ = \frac{1}{4}(۵۷+۵۷+۰+۰)$ را برای پتانسیل نقطه a به دنبال دارد. این روند را می توان آن قدر تکرار نمود تا تفاوت مقادیر متوالی نهایی برای پتانسیل هر نقطه از میزان معینی (بر حسب تقریب مورد نیاز) کمتر شود. تقریب مقادیر به دست آمده برای این مثال، همان طور که در شکل ۴-۱۳ نشان داده شده، کمتر از $۰٫۱$ است.

■

۴-۶ معادله پواسون

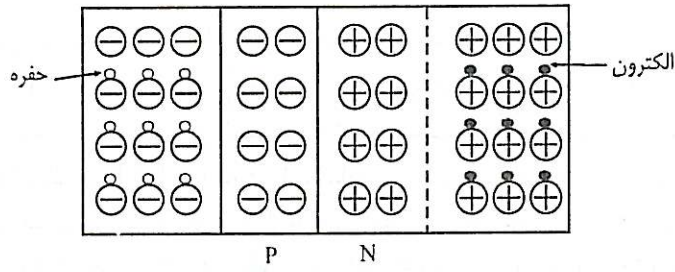
در صورتی که محاسبه پتانسیل در ناحیه ای از فضا که حاوی بار الکتریکی است مورد نظر باشد از معادله پواسون استفاده می کنیم. حل معادله پواسون در حالت کلی از حل معادله لاپلاس پیچیده تر است، ولی خوشبختانه در اکثر موارد عملی استفاده از حالت یک بعدی این معادله، که به سادگی قابل حل است، کفایت می کند. برای نشان دادن کاربرد معادله پواسون به بررسی یک نوع دیود نیمه هادی که در آن چگالی بار الکتریکی در ناحیه پیوند به طور خطی تغییر می کند می پردازیم. شکل ۴-۱۴ پیوند PN و تغییرات چگالی بار را برای این دیود نشان می دهد. با فرض آنکه چگالی توزیع بار در سطح مقطع دیود یکنواخت و تغییرات آن در فاصله $|x| \leq W/2$ توسط رابطه $\rho = ax$ بیان شود، آنگاه معادله پواسون به شکل زیر نوشته می شود:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{ax}{\epsilon} \quad (۴-۱۱۱)$$

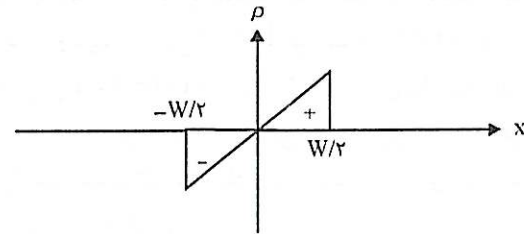
که ϵ قابلیت گذردهی نیمه هادی است. پس از یک بار انتگرال گیری از طرفین معادله داریم:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{a}{2\epsilon}x^2 + C_1 \quad (۴-۱۱۲)$$

ثابت C_1 را می توان با استفاده از این شرط حدی که میدان الکتریکی باید در $x = \pm \frac{W}{2}$ صفر باشد به دست آورد. در واقع میدان الکتریکی فقط در ناحیه تهی، که بارهای مثبت و منفی پس از نفوذ حفره ها و الکترونها از یک طرف پیوند به طرف دیگر موجب تشکیل آن می شوند، وجود دارد. خطوط میدان از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم می شوند. با اِعمال شرط مذکور $C_1 = aW^2/8\epsilon$ محاسبه



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۴: پیوند PN (الف) نمایش شماتیک پیوند PN (ب) منحنی تغییرات چگالی بار در ناحیه تهی

می‌گردد. یادآوری می‌شود که در محاسبه این ثابت از $E_x = -dV/dx$ استفاده شده است. پس از جایگزین نمودن مقدار C_1 در رابطه ۴-۱۱۲ و یک بار دیگر انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$V = -\frac{a}{6\epsilon} x^3 + \frac{aW^2}{8\epsilon} x + C_2 \quad (۴-۱۱۳)$$

که C_2 مقداری ثابت است. اگر پتانسیل در $x=0$ را به دلخواه برابر صفر در نظر بگیریم، این ثابت برابر صفر محاسبه می‌شود. افت پتانسیل روی ناحیه تهی عبارت است از:

$$V_j = V \Big|_{x=W/2} - V \Big|_{x=-W/2} = \frac{aW^3}{12\epsilon} \quad (۴-۱۱۴)$$

با در دست داشتن ولتاژ مذکور می‌توان ظرفیت خازن تشکیل شده در ناحیه تهی را که از رابطه $C = \frac{dQ}{dV_j}$ به دست می‌آید محاسبه نمود. برای این منظور ابتدا Q را به دست می‌آوریم:

$$Q = A \int_{-W/2}^{W/2} ax \, dx = \frac{AaW^2}{8} \quad (۴-۱۱۵)$$

که A مساحت سطح مقطع پیوند است.

$$C = \frac{dQ}{dV_j} = \frac{dQ}{dW} \frac{dW}{dV_j} = \frac{dQ}{dW} \left(\frac{dV_j}{dW} \right)^{-1} = \left(\frac{AaW}{4} \right) \left(\frac{aW^2}{4\epsilon} \right)^{-1} = \epsilon \frac{A}{W}$$

پس از جایگزین نمودن W بر حسب V_j ، داریم:

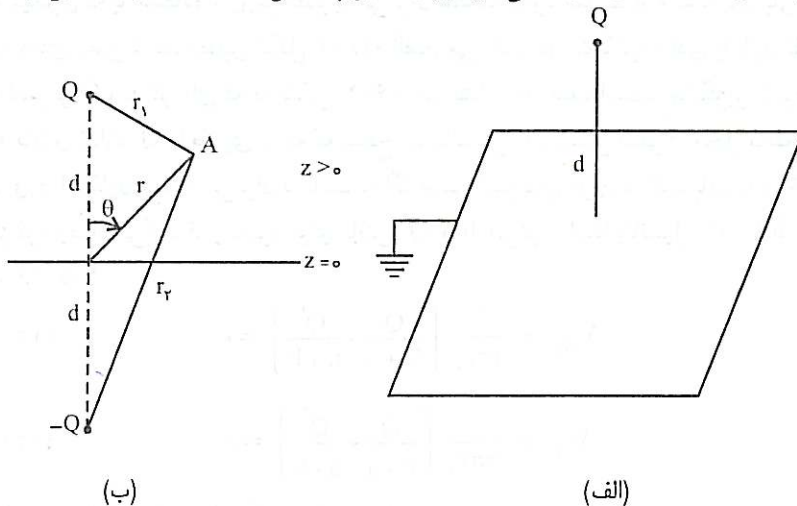
$$C = A \left(\frac{a\epsilon^2}{12V_j} \right)^{1/3} \quad (۴-۱۱۶)$$

۴-۷ روش تصویر

در آخرین قسمت این فصل به مطالعه روشی موسوم به روش تصویر می پردازیم که از دیرباز در حل برخی از مسائل میدانهای الکتریکی ساکن کاربرد داشته است. اگر توزیع باری را در مجاورت یک جسم هادی با پتانسیل معین در نظر بگیریم، تابع پتانسیل ناشی از این سیستم باید اولاً در معادله لاپلاس صدق کند و ثانیاً مقدار ثابتی روی سطح جسم هادی داشته باشد. در برخی موارد می توان جسم هادی را با توزیع باری که آن را «تصویر» توزیع بار اصلی می نامیم جایگزین کرد، به طوری که پتانسیل ناشی از توزیعهای اصلی و تصویر کاملاً با پتانسیل سیستم اولیه یکی باشد، یعنی در معادله لاپلاس صدق کند و سطح هم پتانسیلی در محل سطح جسم هادی و با پتانسیلی برابر پتانسیل آن تشکیل دهد. در این صورت پاسخهای هر دو سیستم، چون در معادله لاپلاس صدق نموده و شرایط مرزی یکسانی را برآورده می سازند، الزاماً طبق قضیه یگانگی پاسخ یکسان هستند. جهت آشنایی بیشتر با کاربرد این روش به ذکر چند مثال می پردازیم.

بار نقطه‌ای در مقابل صفحه هادی بینهایت

فرض کنید بار نقطه‌ای Q به فاصله d از یک صفحه هادی بینهایت زمین شده، مطابق شکل ۴-۱۵ الف، واقع باشد. می خواهیم پتانسیل و میدان الکتریکی را در ناحیه $z > 0$ و چگالی توزیع بارهای القایی روی صفحه هادی را به دست آوریم. پتانسیل صفحه زمین شده را برابر صفر در نظر می گیریم. واضح است که اگر صفحه هادی را با بار $-Q$ و به فاصله d از پایین آن جایگزین کنیم، هر نقطه از صفحه به یک فاصله از بارهای Q و $-Q$ بوده و پتانسیل آن برابر صفر خواهد بود. بنابراین پتانسیلی که بار Q و صفحه هادی در ناحیه $z > 0$ به وجود می آورند با پتانسیل حاصل از Q و $-Q$ در این ناحیه برابر است. بار $-Q$ تصویر بار Q در صفحه هادی نامیده می شود. برای تعیین پتانسیل در نقطه دلخواه A می توان نوشت:



شکل ۴-۱۵: بار نقطه‌ای در مقابل صفحه هادی و نحوه مطالعه میدان به روش تصویر (الف) بار نقطه‌ای Q در مقابل صفحه هادی بینهایت زمین شده (ب) تصویر بار Q در صفحه هادی

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (۱۱۷-۴)$$

که در آن:

$$r_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}, \quad r_2 = (r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

میدان الکتریکی را می‌توان مستقیماً از حاصل جمع میدانهای ناشی از Q و $-Q$ یا با استفاده از رابطه $E = -\nabla V$ به دست آورد.

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{a}_\theta \quad (۱۱۸-۴)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{r-d \cos \theta}{r_1^3} - \frac{r+d \cos \theta}{r_2^3} \right) \hat{a}_r + d \sin \theta \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) \hat{a}_\theta \right]$$

به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ مؤلفه‌های میدان الکتریکی در صفحه هادی و از آنجا چگالی توزیع بارهای القایی محاسبه می‌شوند:

$$E_n = -E_\theta \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{-Qd}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\rho_s = \epsilon_0 E_n = \frac{-Qd}{2\pi (r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (۱۱۹-۴)$$

بار نقطه‌ای در مقابل کره هادی

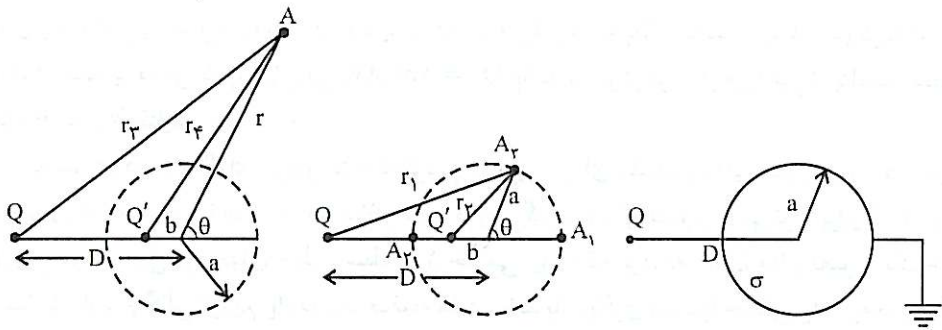
مورد دیگری که با استفاده از روش تصویر می‌توان مطالعه نمود عبارت از مسئله یک بار نقطه‌ای در مقابل کره هادی زمین شده، مطابق شکل ۴-۱۶ الف، می‌باشد. در اینجا کره هادی را با بار نقطه‌ای Q' به منزله تصویر Q ، به گونه‌ای که در شکل ۴-۱۶ ب نشان داده شده است، جایگزین نموده و سعی می‌کنیم مکان و اندازه Q' را طوری بیابیم که سطح هم‌پتانسیلی با پتانسیل صفر در محل سطح کره هادی به وجود آورد. از تقارن مسئله می‌توان دریافت که اگر چنین تصویری موجود باشد باید روی خطی که Q را به مرکز کره وصل می‌کند قرار بگیرد. برای یافتن Q' و b می‌توان ابتدا پتانسیل را در نقاط A_1 و A_2 برابر صفر قرار داد:

$$V_{A_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{D+a} + \frac{Q'}{a+b} \right) = 0 \quad (۱۲۰-۴)$$

$$V_{A_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{D-a} + \frac{Q'}{a-b} \right) = 0 \quad (۱۲۱-۴)$$

پس از حل دو معادله مذکور برای Q' و b داریم:

$$\left[Q' = -\frac{a}{D} Q \right], \quad \left[b = \frac{a^2}{D} \right] \quad (۱۲۲-۴)$$



(ج)

(ب)

(الف)

شکل ۴-۱۶: بار نقطه‌ای در مقابل یک کره هادی و نحوه مطالعه میدان به روش تصویر (الف) بار نقطه‌ای Q به فاصله D از مرکز کره‌ای هادی به شعاع a (ب) تصویر Q در درون کره (ج) محاسبه پتانسیل در نقطه دلخواه A

اکنون باید دید آیا پتانسیل ناشی از Q و تصویر آن Q' در نقطه دلخواه A روی سطح کره برابر صفر می‌شود؟ پتانسیل در نقطه A عبارت است از:

$$V_{A_r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (۱۲۳-۴)$$

که در آن:

$$r_1 = (D^2 + a^2 + 2Da \cos \theta)^{1/2}, \quad r_2 = (b^2 + a^2 + 2ba \cos \theta)^{1/2} \quad (۱۲۴-۴)$$

می‌توان نشان داد که پس از جایگزین نمودن r_1 و r_2 با استفاده از روابط ۴-۱۲۴ و به کار بستن نتایج ۴-۱۲۲، V_{A_r} برابر صفر است. به عبارت دیگر، بارهای Q و Q' سطح هم‌پتانسیلی به مقدار صفر در محل سطح کره به وجود می‌آورند. اکنون می‌توان پتانسیل نقطه دلخواه A را واقع در فضای اطراف کره به شرح زیر نوشت:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{(a/D)Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (۱۲۵-۴)$$

که در آن:

$$r_1 = (D^2 + r^2 + 2Dr \cos \theta)^{1/2} \quad (الف-۱۲۶-۴)$$

$$r_2 = \left[\left(\frac{a^2}{D} \right)^2 + r^2 + 2 \frac{a^2}{D} r \cos \theta \right]^{1/2} \quad (ب-۱۲۶-۴)$$

همانند مثال قبل می‌توان میدان الکتریکی را از رابطه $E = -\nabla V$ و چگالی توزیع بارهای القایی روی سطح کره را از رابطه $\rho_s = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 E_r$ به ازای $r=a$ به دست آورد که در اینجا از ذکر جزئیات محاسبات خودداری می‌شود. در صورتی که کره از ابتدا زمین نشده و پتانسیلی برابر V_0 داشته باشد،

برای یافتن تابع پتانسیل، کره را با بار تصویری Q' ، به طریقی که در بالا مشخص گردید، جایگزین نموده و آنگاه تصویر دومی که بار آن برابر $Q'' = 4\pi\epsilon_0 aV$ باشد در مرکز کره قرار می‌دهیم تا پتانسیل سطح کره تا حد V افزایش یابد.

به طوری که در مثالهای مزبور مشاهده کردیم تصاویر بارهای مثبت، بارهای منفی بوده و در خارج ناحیه‌ای که محاسبه میدان در آن مورد نظر است قرار می‌گیرند. روش تصویر را می‌توان برای انواع دیگر توزیع بار، از قبیل توزیعهای خطی، سطحی و حجمی نیز به کار برد. به عنوان مثال تصویر یک خط بینهایت بار با چگالی توزیع P_L در یک صفحه هادی، خط بار دیگری است با چگالی $-P_L$ به طوری که خط بار و تصویرش موازی با یکدیگر، به فاصله مساوی از صفحه هادی و در طرفین آن باشند. روش تصویر را همچنین می‌توان در حل مسائلی مانند بار نقطه‌ای در مقابل یک نیم فضای اشغال شده از ماده عایق و بار نقطه‌ای در مقابل کره‌ای از جنس عایق به کار بست. بررسی مثالها و موارد دیگر مبتنی بر روش تصویر به مسائل خودآزمایی و مسائل پایان فصل موکول می‌گردد.

۴-۸ خلاصه فصل

- معادلات پواسون و لاپلاس را استخراج نموده و قضیه یگانگی پاسخ را اثبات کردیم.
- حل معادله لاپلاس را در حالات یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی و در دستگانه‌های مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی مورد مطالعه قرار دادیم. در حالات دو بعدی و سه بعدی، حل معادله بر اساس روش تفکیک متغیرها استوار می‌باشد.
- حل معادله لاپلاس را به روش عددی به اختصار بررسی نمودیم.
- حل معادله پواسون را به اختصار و در حالت یک بعدی مطالعه نمودیم.
- روش تصویر را برای مطالعه میدانهای الکتریکی ناشی از بارهای الکتریکی در حضور اجسام هادی ارائه نمودیم.

۴-۹ مسائل خودآزمایی

تأکید این مسائل بر محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی به روشهای مبتنی بر معادلات لاپلاس و پواسون و روش تصویر می‌باشد. ابتدا به ذکر نکاتی چند در مورد استفاده از روش معادله لاپلاس می‌پردازیم. در ابتدا دو نکته را باید مورد توجه قرار داد: یکی آنکه چه دستگاه مختصاتی مناسب حل مسئله مورد نظر است، دیگر آنکه آیا مسئله یک بعدی، دو بعدی، یا سه بعدی می‌باشد. پس از ارزیابی درست این دو نکته، قدمهای بعدی برای حل مسئله تا حدود زیادی به گونه‌ای سیستماتیک برداشته می‌شوند. تشخیص دستگاه مختصات مناسب با توجه به شرایط مرزی داده شده به سادگی انجام می‌گیرد. هرگاه این شرایط به صورت مقادیر یا توابع معینی برای پتانسیل روی سطوحی به معادلات $x = x_0$ ، $y = y_0$ یا $z = z_0$ (و) یا روی بخشی از این سطوح بیان شوند (x, y, z) مقادیر ثابتی هستند، بدون تردید دستگاه مختصات مستطیلی را باید برای حل معادله لاپلاس برگزید. در صورتی که